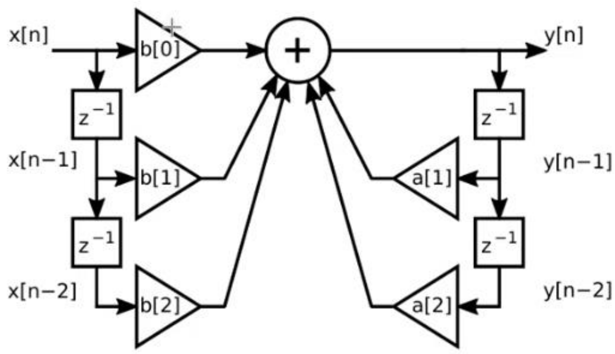
Integrálne transformácie obrazu

Signál

- Veličina závislá na čase, frekvencie, polohe..
- Obraz je dvojrozmerný signál, kde voľné premenné sú priestorové súradnice *x* a *y*
    - možno transformovať do frekvenčnej domény, ktorá má nejaký horizontálnu a vertikálnu frekvenciu
- Stacionárny vs. nestacionárny signál
    - k analýze stacionárnych signálov stačí furierovú transofrmáciu
    - lenže obraz je nestacionárn, takže potrebujeme robustnejšie filtre
- **Filtrácia**
    - vytiahne z obrázku nejaké komponenty (dolná horná priepusť)
- Lineárne vs. nelineárn filtry

Lineárna filtrácia

- Výstup je lineárna kombinácia lineárnych filtrov
- Časovo invariantný filter je taký ktorý vždy na rovnakú sekvenciu odpovie rovnakým výstupom
- Odozva lineárneho časovo invariantného (LIT) filtru sa volá konvolúcia
- Konvolučné jadro sa dá nazvať aj ako filter konečnej odozvy (FIR filter)



Konvolúcia

- Konvolúcia zahrňuje pri aplikácia obrátenie jadra, potom nasleduje séria skalárnych súčinov

$$(f * g)(t) = \int f(\tau)\, g(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int f(t-\tau)\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

$$(f * g)[n] = \sum_m f[m]\, g[n-m] = \sum_m f[n-m]\, g[m]$$

Korelácia (cross kolerácia)

- Podobná operácia ku konvolúcií, rozdielom je len, že pri aplikovaní jadra sa jadro neobráti

$$(f \star g)(t) = \int f^*(\tau)\, g(t+\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int f^*(\tau - t)\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

$$(f \star g)[n] = \sum_m f^*[m]\, g[n+m] = \sum_m f^*[m-n]\, g[m]$$

Integrálna transformácia

- Vezmem signál *f* a jadro transformácie a urobím integrál
- V niektorých prípadoch je možne pomocou inverzného jadra získať pôvodný signál

$$F(n) = \int f(t)\, \psi(t, n)\, \mathrm{d}t$$

ψ . . . jádro transformace

$$f(t) = \int F(n)\, \psi^{-1}(n, t)\, \mathrm{d}n$$

ψ^{-1} . . . inverzní jádro (nemusí existovat)

Diskrétna furierova transformácia (DFT)

- diskrétního (komplexního) signálu délky N

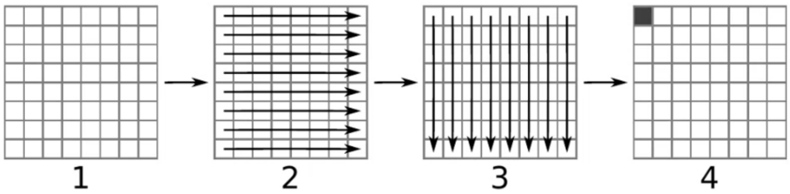
$$\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, e^{-i \frac{2\pi}{N} kn}$$

pro $0 \leq k < N$, $\hat{f}$ komplexní

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k]\, e^{i \frac{2\pi}{N} kn}$$

- stejnosměrná složka (DC) pro $k = 0$

- Zložtosť $O(N^2)$, ale existuje algoritmus FFT, ktorý počíta transformáciu linearitmickou zložitosťou $O(N \log_2 N)$
- Vzhľadom na obrazy nás zaujíma **2D DFT**
  - je separabilná, je možné ju spočítať pomocou série lineárnych operácii



- Využíva sa viaranta DFT – **diskrétna kosínová transformácia (DCT)**
  - tvorí pre reálný signál komplexné koeficienty
  - je symetrická
  - rozloží obraz na základe stavebné kamene *g*, majú tvar kosínusovky
- Pre **2D DCT** plati to isté ako pre 2D DFT
  - tiež je to separabilná operácia, najprv po riadkoch, potom po stĺpcoch..
  - napr. JPEG, aplikuje 2D DCT na bločky 8x8 vzorkov

$$c[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\, g_k[n]$$

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c[k]\, g_k[n]$$

pro $0 \leq k < N$, kde

$$g_k[n] = \lambda_k \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left[\frac{k\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\lambda_k = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & : k = 0 \\ 1 & : k \neq 0 \end{cases}$$

2D Gáborova transformácia

- Extrakcia príznakov, detekcia hrán, segmentácia

- 1D

$$g_{\alpha,\xi}(x) = \sqrt{\alpha/\pi}\, e^{-\alpha x^2}\, e^{-i\xi x}$$

$\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\xi, x \in \mathbb{R}$, kde $\alpha = (2\sigma^2)^{-1}$, σ^2 je rozptyl, ξ je frekvence

- 2D separabilní

$$g_{\alpha,\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) = g_{\alpha,\xi_0}(x_0)\, g_{\alpha,\xi_1}(x_1)$$

$\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1)$, $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1)$

Vlnka

Podmínky

- přípustnost

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} \, d\omega < +\infty$$

- nulový průměr

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \, dt = 0$$

- jednotková plocha

$$\|\psi\| = 1$$

Vlastnosti

- existence nosiče
- nulové momenty

$$m(k) = \int t^k \, \psi(t) \, dt$$

- hladkost (regularita)

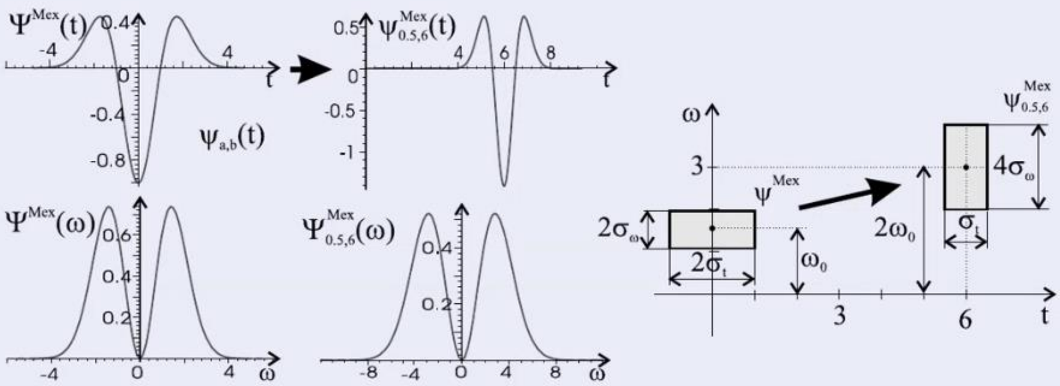
$$f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \, \psi_{j,n}$$

- symetrie

Atomy

- roztažené a posunuté vlnky
- báze

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$



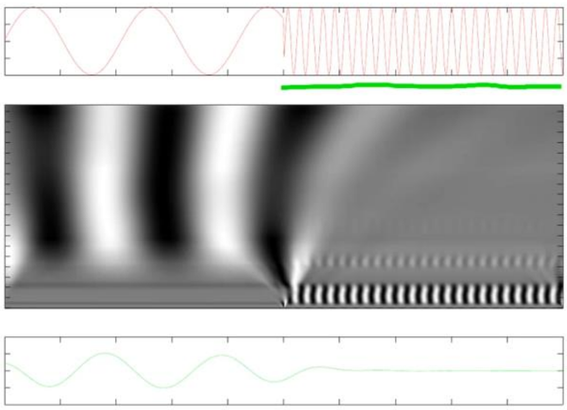
- Jadro transformácie sú rôzne roztiahnuté a posunuté vlnky

- spojitá vlnková transformace

$$\begin{aligned} W f(u,s) &= \langle f, \psi_{u,s} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, \psi_{u,s}^* \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s}\right) \, dt \\ &= f * \psi_s^*(u) \end{aligned}$$

$$\psi_s(u) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{-t}{s}\right)$$

$u \in R, s \in R^+$



- Vizualizácia

- škálogram

$$|W f(u,s)|^2$$

- inverzní

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W f(u,s) \, \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \, du \frac{ds}{s^2}$$

Měřítková funkce (škálovací funkce)

- známe $W f(u,s)$ pro $s < s_0$
- potřebujeme zbytek informace pro $s > s_0$
- zavedeme ϕ

$$|\hat{\phi}(\omega)|^2 = \int_1^{+\infty} |\hat{\psi}(s\omega)|^2 \frac{ds}{s}$$

$$L f(u,s) = \langle f, \phi_{u,s} \rangle$$

$$||\phi|| = 1$$

Vlnkové rámce (wavelet frames)

- diskrétní parametry u, s

$$s = s_0^m, u = n u_0 s_0^m$$

$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, s_0 > 1, u_0 > 0$

Vlnkové řady (wavelet series)

- odstraněna nadbytečná informace
- dyadické vzorkování $s_0 = 2, u_0 = 1$

$$s = 2^m, u = n2^m$$

$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$

- Zaujíma nás až diskrétna vlnková transofrmácia
- Podstatné je, že mierítková funkcia a vlka je cez diletačné rovnice viazaná s koeficientmi cez dva FIR filtre
- Môžem teda spočítať seriu konvolúcií s nejakými krátkymi FIR filtrami (sú rôzne roztiahnuté a posunuté)

- dilatační rovnice

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_n h(n) \phi(2t - n)$$

$$+$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_n g(n) \phi(2t - n)$$

Rychlá vlnková transformace (FWT)

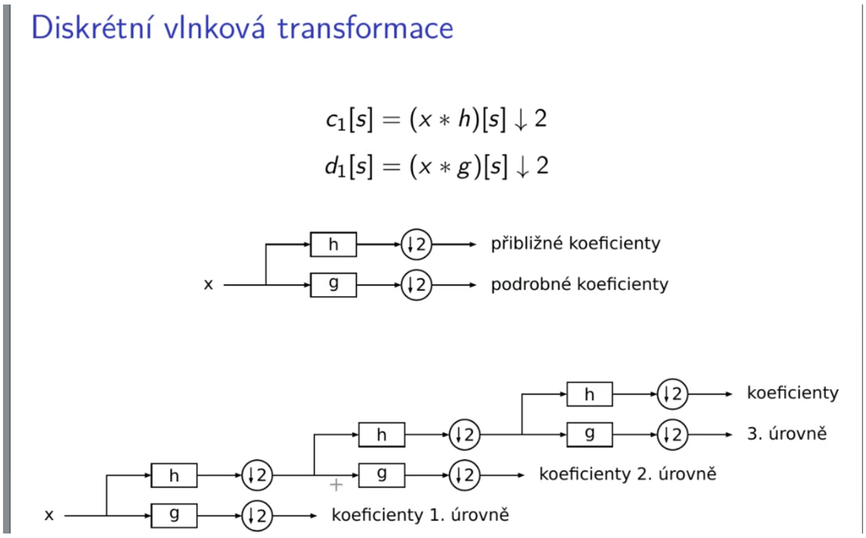
$$c_{u+1}(s) = \sum_k h(k - 2s) c_u(k)$$

$$d_{u+1}(s) = \sum_k g(k - 2s) c_u(k)$$

Složitost

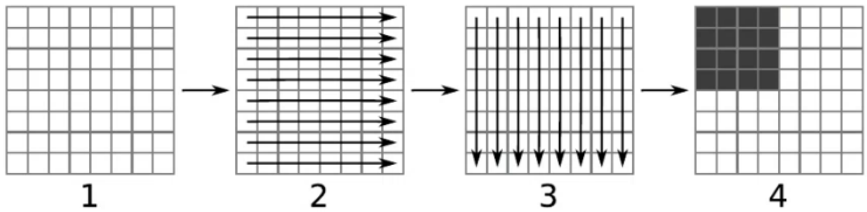
- FFT $N \log N$
- DWT N
- lifting

- Lifting je hrozne rýchly systém výpočtu diskrétnej vlnkovej transofrmácie
- Transformácia sa aplikuje hierarchicky typicky

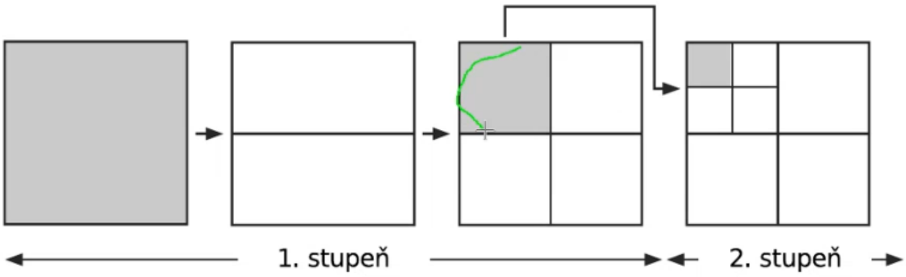


Nad obrazom

- Rovnako ako do teraz.. riadky.. stĺpce výsledok..



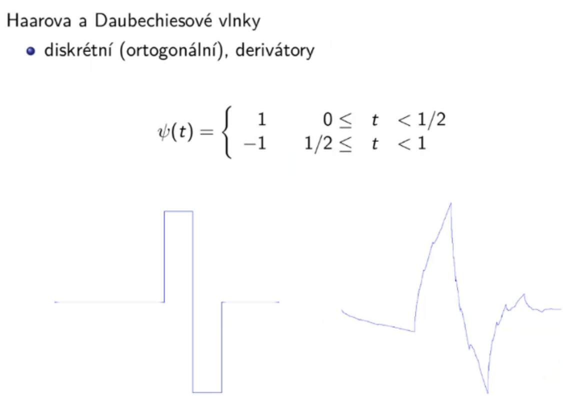
- Po získaní stupňa rozkladu, sa viac zánaram (to čierne je stupeň rozkladu)



- Jedna z najdôležitejších transformácií v spracovaní obrazu
- V 1D vzniká vektor
- V 2D vzniká strom reprezentovateľný maticov

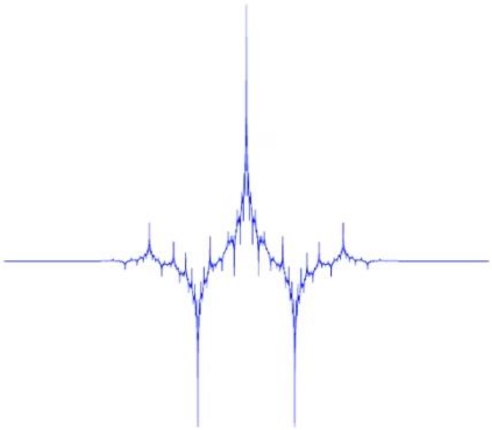
Používané diskrétne vlnky

- Haarova je najjednoduhšia, je z rodin daubeschiesových vlniek



CDF / Biortogonální spline vlnky

- diskrétní (biortogonální), komprese (JPEG 2000)

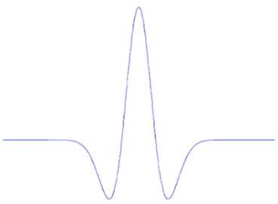


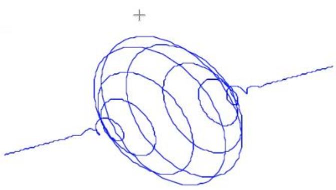
- Použité napr. v kompresii obrazu JPEG 2000
- Je výpočetne nenáročná, často používaná a symetrická
- Široko sa používa

Používané spojité vlnky

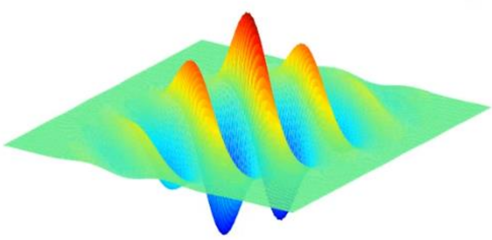
Mexický klobouk a Morletova nebo Gaborova vlnka

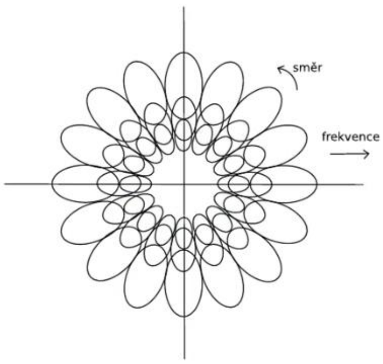
$$\psi(t) = c\,(t^2 - 1)e^{-t^2/2}$$





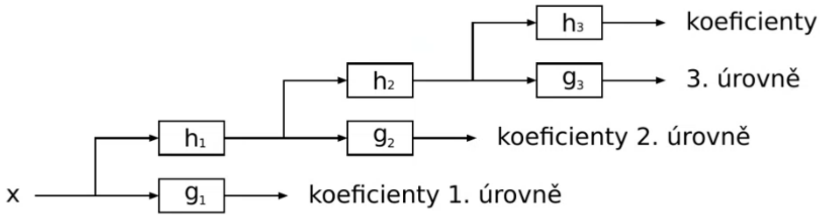
2D Gaborova vlnka

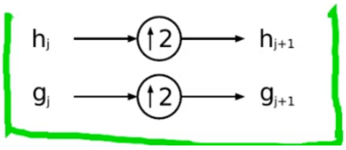




Stacionárna vlnková transformácia

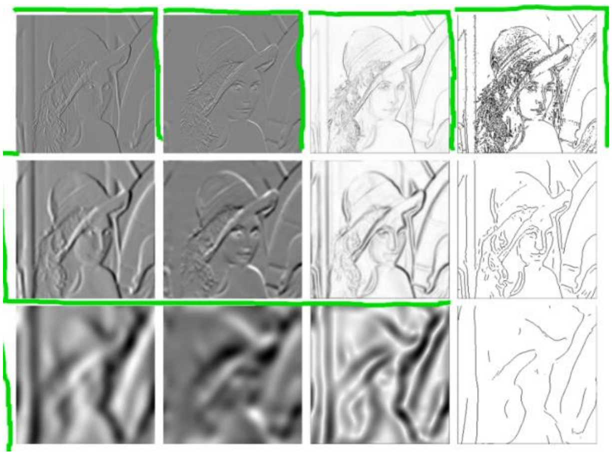
- redundantní forma DWT
- vynecháno podvzorkování signálu, namísto toho nadvzorkování filtrů





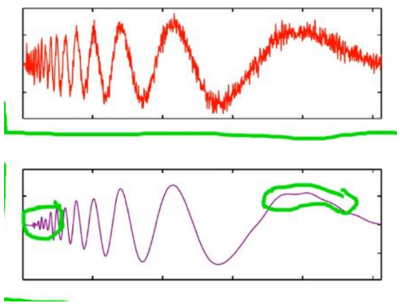
Detekcia hrán

- Pomocou teórie vlnkovej transformácie môžem prepnúť akýkoľvek detektor hrán do multiscale detektoru



Odstránenie šumu

- Bohužiaľ niektorých artefaktov sa nezbavím



- prahování vlnkových koeficientů
- tvrdé (*hard*)

$$\rho_\lambda^{hard}(x) = \begin{cases} x & |x| \geq \lambda \\ 0 & |x| < \lambda \end{cases}$$

- měkké (*soft*)

$$\rho_\lambda^{soft}(x) = \begin{cases} x - \lambda & x \geq \lambda \\ x + \lambda & x \leq -\lambda \\ 0 & |x| < \lambda \end{cases}$$

- volba prahu λ
- pro normální $\mathrm{No}(0, \sigma^2)$ šumu se používá $\lambda = \sigma\sqrt{2 \ln M}$
- pro $\mathrm{No}(0, \sigma^2)$ odvozeno $\sigma = \mathrm{median}(|d_1|)/0{,}6745$

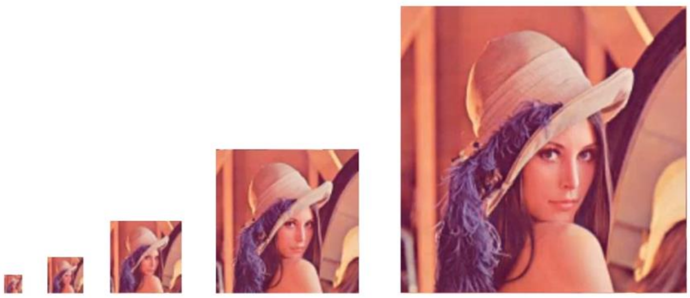
Diskrétna vlnková transformácia

- Možnosti a výhody:
  - ztrátová i bezeztrátová komprese
  - kvalita
  - progresivní přenos
    - rozlišení
    - kvalita
    - prostorové umístění
  - oblast zájmu (ROI)
  - odolnost vůči chybám
  - výpočetní složitost
- Toto je už možne pri formáte JPEG 2000 (nie pri JPEG)
- Ukážka: bolo zapísaných 16 bajtov núl do obrazu:

Obrázek : JPEG, JPEG 2000

- Ukážka: oblasť záujmu

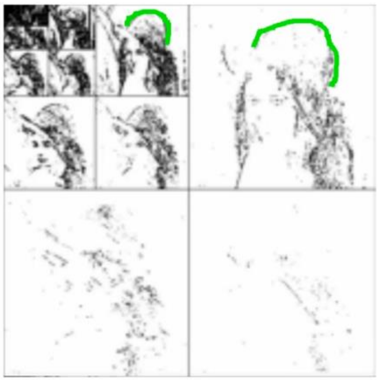
- Ukážka: progresívny prenos (rozlíšenie)



- Ukážka: progresívny prenos (pozícia):

Korelácia

Algorimtus Embedded coder



- vkládání bitů v pořadí podle významnosti
- 2^n, kódování bitových rovin (bitplane coding)
- algoritmus
  1. inicializace
  2. kódování významnosti
  3. kódování znaménka
  4. upřesnění
  5. další krok

Algoritmus EZV

- Najednoduhší algoritmus

- korelace mezi měřítky
- zerotree
- Mortonův rozklad
- algoritmus
  1. inicializace
  2. hlavní průchod
```
if( abs(c) > T ) {
  output(P) or output(N);
} else {
  if( zerotree_root(c) ) output(T);
  else output(Z);
}
```
  3. upřesňující průchod
  4. další krok