Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Logika pre informatikov a Úvod do matematickej logiky

Poznámky z prednášok

Ján Kľuka, Ján Mazák, Jozef Šiška

Letný semester 2023/2024
Posledná aktualizácia: 19. februára 2024

Obsah

P1 Úvod. Atomické formuly a štruktúry 2

0 Úvod 2
- 0.1 O logike . . . 2
- 0.2 O kurzoch LPI a UdML . . . 10

1 Atomické formuly a štruktúry 11
- 1.1 Syntax atomických formúl . . . 15
- 1.2 Štruktúry . . . 18
- 1.3 Sémantika atomických formúl . . . 22
- 1.4 Zhrnutie . . . 23

1. prednáška

Úvod

Atomické formuly a štruktúry

---

0 Úvod

0.1 O logike

Čo je logika

Logika je vedná disciplína, ktorá študuje usudzovanie.
Správne, racionálne usudzovanie je základom vedy a inžinierstva.
Vyžaduje rozoznať

- správne úsudky z predpokladaných princípov a pozorovania
- od chybných úvah a špekulácií.

Správnosť úsudkov, zdá sa, nie je iba vec konvencie a dohody.
Logika skúma, *aké* sú zákonitosti správneho usudzovania a *prečo* sú zákonitosťami.

Ako logika študuje usudzovanie

Logika má dva hlavné predmety záujmu:

Jazyk zápis pozorovaní, definície pojmov, formulovanie teórií

Syntax pravidlá zápisu tvrdení

Sémantika význam tvrdení

Usudzovanie (inferencia) odvodzovanie nových *logických dôsledkov* z doterajších poznatkov. Aký má vzťah s jazykom, štruktúrou tvrdení?

Jazyk, poznatky a teórie

Jazyk slúži na formulovanie tvrdení, ktoré vyjadrujú poznatky o svete (princípy jeho fungovania aj pozorované fakty).

Súboru poznatkov, ktoré považujeme za pravdivé, hovoríme *teória*.

Príklad 0.1 (Party time!). Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah. Organizujeme párty a P0: chceme na ňu pozvať niekoho z nich. Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

Možné stavy sveta a modely

Jedna z otázok, ktoré si o teórii o party môžeme položiť, je: „*Môžu* noví známi prísť na párty tak, aby boli *všetky podmienky splnené*? Ak áno, v akých zostavách?“

Priamočiaro (aj keď prácne) to zistíme tak, že:

1. vymenujeme *všetky možné stavy sveta* (účasti nových známych),
2. zistíme, v ktorých sú všetky podmienky splnené.

K	J	S	P0	P1	P2	P3
n	n	n	n			
n	n	p	p	p	p	n
n	p	n	p	p	n	
n	p	p	p	p	n	
p	n	n	p	p	p	p
p	n	p	p	n		
p	p	n	p	p	p	p
p	p	p	p	n		

P0: Niekto z Kim, Jima, Sarah príde na párty.

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

Možné stavy sveta a modely

Teória rozdeľuje *možné stavy sveta* (interpretácie) na:

- $\models$ stavy, v ktorých je pravdivá — *modely* teórie,
- $\not\models$ stavy, v ktorých je nepravdivá.

Tvrdenie aj teória môžu mať viacero modelov, ale aj žiaden.

Príklad 0.2. Modelmi teórie P0, P1, P2, P3 sú dve situácie: keď Kim príde na párty a ostatní noví známi nie, a keď Kim a Jim prídu na párty a Sarah nie.

K	J	S	P0	P1	P2	P3	
n	n	n	n				⊭ P0, P1, P2, P3
n	n	p	p	p	p	n	⊭ P0, P1, P2, P3
n	p	n	p	p	n		⊭ P0, P1, P2, P3
n	p	p	p	p	n		⊭ P0, P1, P2, P3
p	n	n	p	p	p	p	⊨ P0, P1, P2, P3
p	n	p	p	n			⊭ P0, P1, P2, P3
p	p	n	p	p	p	p	⊨ P0, P1, P2, P3
p	p	p	p	n			⊭ P0, P1, P2, P3

Logické dôsledky

Často je zaujímavá iná otázka o teórii — musí byť nejaké tvrdenie pravdivé *vždy, keď* je pravdivá teória?

V našom príklade: Kto *musí* a kto *nesmie* prísť na párty, aby boli podmienky P0, …, P3 splnené?

K	J	S	P0	P1	P2	P3	
n	n	n	n				⊭ P0, P1, P2, P3
n	n	p	p	p	p	n	⊭ P0, P1, P2, P3
n	p	n	p	p	n		⊭ P0, P1, P2, P3
n	p	p	p	p	n		⊭ P0, P1, P2, P3
p	n	n	p	p	p	p	⊨ P0, P1, P2, P3
p	n	p	p	n			⊭ P0, P1, P2, P3
p	p	n	p	p	p	p	⊨ P0, P1, P2, P3
p	p	p	p	n			⊭ P0, P1, P2, P3

Logické dôsledky

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo *všetkých modeloch* teórie.

Príklad 0.3. Logickými dôsledkami teórie P0, P1, P2, P3 sú napríklad:

- *Kim príde na párty.*
- *Sarah nepríde na párty.*

Logických dôsledkov je nekonečne veľa, môžu nimi byť ľubovoľne zložité tvrdenia:

- Na party príde Kim alebo Jim.
- Ak príde Sarah, tak príde aj Jim.
- Ak príde Jim, tak nepríde Sarah.

⋮

Logické usudzovanie

Preskúmať všetky stavy sveta je často nepraktické až nemožné.

Logické dôsledky ale môžeme *odvodzovať usudzovaním* (*inferovať*).

Pri odvodení vychádzame z *premís* (predpokladov) a postupnosťou *správnych úsudkov* dospievame k *záverom*.

Príklad 0.4. Vieme, že ak na párty pôjde Kim, tak nepôjde Sarah (P1), a že ak pôjde Jim, tak pôjde Kim (P2).

1. Predpokladajme, že na párty pôjde Jim.
2. Podľa 1. a P2 pôjde aj Kim.
3. Podľa 2. a P1 nepôjde Sarah.

Teda podľa uvedenej úvahy: Ak na párty pôjde Jim, tak nepôjde Sarah.

Dedukcia

Úsudok je správny (*korektný*) vtedy, keď *vždy*, keď sú pravdivé jeho premisy, je pravdivý aj jeho záver.

Ak sú všetky úsudky v odvodení správne, záver *je logickým dôsledkom* premís a odvodenie je jeho *dôkazom* z premís.

Dedukcia je usudzovanie, pri ktorom sa používajú iba správne úsudky.

Logika študuje dedukciu, ale aj niektoré nededuktívne úsudky, ktoré sú *vo všeobecnosti* nesprávne, ale sú správne v *špeciálnych* prípadoch alebo sú *užitočné*:

- indukcia — zovšeobecnenie;
- abdukcia — odvodzovanie možných príčin z následkov;
- usudzovanie na základe analógie (podobnosti).

Kontrapríklady

Ak úsudok nie je správny, existuje *kontrapríklad* — stav sveta, v ktorom sú *predpoklady pravdivé*, ale *záver je nepravdivý*.

Príklad 0.5. Nesprávny úsudok: Ak platia tvrdenia teórie o party, na party príde Jim.

Kontrapríklad: Stav, kedy príde Kim, nepríde Jim, nepríde Sarah.

Teória je pravdivá, výrok „na party príde Jim“ nie je pravdivý.

K	J	S	
n	n	n	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	n	p	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	p	n	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
n	p	p	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
p	n	n	$\models$ P0, P1, P2, P3
p	n	p	$\not\models$ P0, P1, P2, P3
p	p	n	$\models$ P0, P1, P2, P3
p	p	p	$\not\models$ P0, P1, P2, P3

Matematická logika

Matematická logika

- modeluje jazyk, jeho sémantiku a usudzovanie ako matematické objekty (množiny, postupnosti, zobrazenia, stromy);
- rieši logické problémy matematickými metódami.

Rozvinula sa koncom 19. a v prvej polovici 20. storočia hlavne vďaka *Hilbertovmu programu* — snahe vybudovať základy matematiky bez sporov a paradoxov, mechanizovať overovanie dôkazov alebo priamo hľadanie matematických viet.

Matematická logika a informatika

Informatika sa vyvinula z matematickej logiky (J. von Neumann, A. Turing, A. Church, …)

Väčšina *programovacích jazykov* obsahuje logické prvky:

- `all(x > m for x in arr)`,

fragmenty niektorých sú priamo preložiteľné na logické formuly:

- `SELECT t1.x, t2.y FROM t1 INNER JOIN t2 ON t1.z = t2.z WHERE t1.z > 25`,

niektoré (Prolog) sú podmnožinou logických jazykov.

Metódami logiky sa dá *presne špecifikovať*, čo má program robiť, *popísať*, čo robí, a *dokázať*, že robí to, čo bolo špecifikované.

Matematická logika a informatika

Veľa otázok v logike je *algoritmických*:

- Možno usudzovanie pre danú triedu jazykov automatizovať?
- Dá sa nájsť dôkaz pre tvrdenia s takouto štruktúrou dostatočne rýchlym algoritmom?

Výpočtová logika hľadá algoritmické riešenia problémov pre rôzne triedy logických jazykov. Aplikovateľné na iné ťažké problémy (grafové, plánovacie, vysvetľovanie, . . .) vyjadriteľné v príslušnej triede.

Logika umožňuje hľadať všeobecné odpovede.

- Ak možno vlastnosť grafu popísať *prvorádovou formulou s najviac dvomi kvantifikátormi* a zároveň ..., existuje pomerne rýchly algoritmus, ktorý rozhodne, či daný graf túto vlastnosť má.

Automatizované dokazovače: napr. v r. 1996 počítač dokázal Robbins Conjecture, ktorá odolávala ľudskej snahe 60 rokov.

Formálne jazyky a formalizácia

Matematická logika nepracuje s prirodzeným jazykom, ale s jeho zjednodušenými modelmi — *formálnymi jazykmi*.

- Presne definovaná, zjednodušená syntax a sémantika.
- Obchádzajú problémy prirodzeného jazyka:

  viacznačnosť slov, nejednoznačné syntaktické vzťahy, zložitá syntaktickú analýzu, výminky, obraty s ustáleným významom, . . .

- Niekoľko formálnych jazykov už poznáte: aritmetika, jazyky fyzikálnych a chemických vzorcov, programovacie jazyky, . . .

Problémy z iných oblastí opísané v prirodzenom jazyku musíme najprv *sformalizovať*, a potom naň môžeme použiť aparát mat. logiky.
Formalizácia vyžaduje cvik — trocha veda, trocha umenie.

Ťažkosti s prirodzeným jazykom

Prirodzený jazyk je problematický:

- Viacznačné slová: Milo *je* v posluchárni A.
- Viacznačné tvrdenia: Videl som dievča v sále *s ďalekohľadom*.
- Ťažko syntakticky analyzovateľné tvrdenia:

  > Vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome prijímajú rozhodnutia na schôdzi vlastníkov dvojtretinovou väčšinou hlasov všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome, ak hlasujú o zmluve o úvere a o každom dodatku k nej, o zmluve o zabezpečení úveru a o každom dodatku k nej, o zmluve o nájme a kúpe veci, ktorú vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome užívajú s právom jej kúpy po uplynutí dojednaného času užívania a o každom dodatku k nej, o zmluve o vstavbe alebo nadstavbe a o každom dodatku k nim, o zmene účelu užívania spoločných častí domu a spoločných zariadení domu a o zmene formy výkonu správy; …
  >
  > — *Zákon č. 182/1993 Z. z. SR v znení neskorších predpisov*

- Výnimky a obraty so špeciálnym ustáleným významom: *Ni*kto *nie* je dokonalý.

Formalizácia poznatkov

S formalizáciou ste sa už stretli — napríklad pri riešení slovných úloh:

Karol je trikrát starší ako Mária. Súčet Karolovho a Máriinho veku je 12 rokov. Koľko rokov majú Karol a Mária?	$\rightsquigarrow$	$k = 3 \cdot m$ $k + m = 12$

Stretli ste sa už aj s formálnym jazykom výrokovej logiky.

Príklad 0.6. Sformalizujme náš párty príklad:

P0: Niekto z trojice Kim, Jim, Sarah pôjde na párty. $\mathsf{p}(\mathsf{K}) \lor \mathsf{p}(\mathsf{J}) \lor \mathsf{p}(\mathsf{S})$

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim. $\mathsf{p}(\mathsf{K}) \to \neg\mathsf{p}(\mathsf{S})$

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim. $\mathsf{p}(\mathsf{J}) \rightarrow \neg\mathsf{p}(\mathsf{K})$

P3: Sarah nepôjde bez Jima. $\neg\mathsf{p}(\mathsf{J}) \rightarrow \neg\mathsf{p}(\mathsf{S})$

Všimnite si, koľko vetných konštrukcií v slovenčine zodpovedá jednej formálnej spojke →.

Logika prvého rádu

Jazyk logiky prvého rádu (FOL) je jeden zo základných formálnych jazykov, ktorým sa logika zaoberá.

Do dnešnej podoby sa vyvinul koncom 19. a v prvej polovici 20. storočia — G. Frege, G. Peano, C. S. Peirce.

Výrokové spojky + *kvantifikátory* ∀ a ∃.

Dá sa v ňom vyjadriť veľa zaujímavých tvrdení, bežne sa používa v matematike.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \dots$$

Kalkuly — formalizácia usudzovania

Pre mnohé logické jazyky sú známe *kalkuly* — množiny usudzovacích pravidiel, ktoré sú

korektné — odvodzujú iba logické dôsledky,

úplné — umožňujú odvodiť všetky logické dôsledky.

Kalkuly sú bežné v matematike

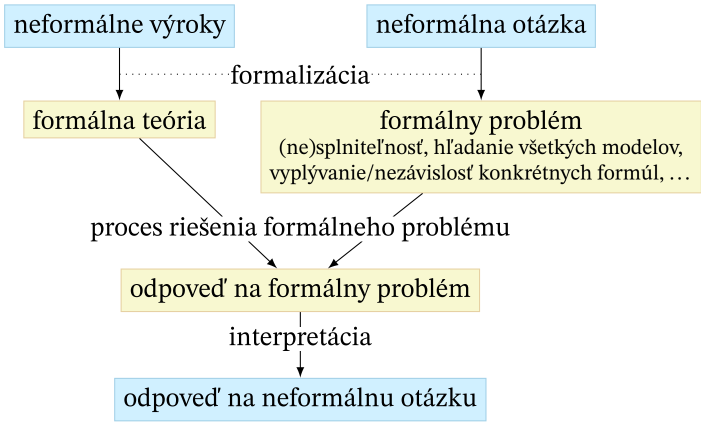
- kalkul elementárnej aritmetiky: na počítanie s číslami, zlomkami,
- kalkul lineárnej algebry: riešenie lineárnych rovníc,
- kalkul matematickej analýzy: derivovanie, integrovanie, riešenie diferenciálnych rovníc

⋮

Sú korektné, ale nie vždy úplné.

Poznáte už aj jeden logický kalkul — ekvivalentné úpravy.

Schéma riešenia problémov pomocou logiky



0.2 O kurzoch LPI a UdML

Prístup k logike na tomto predmete

Stredoškolský prístup príliš *neoddeľuje jazyk* výrokov od jeho *významu* a vlastne ani jednu stránku *nedefinuje jasne*.

Prevedieme vás základmi matematickej a výpočtovej logiky pre (postupne čoraz zložitejšie) fragmenty jazykov logiky prvého rádu.

Teoretická časť:

- Matematické definície logických pojmov (výrok, model, logický dôsledok, dôkaz, …)
- *Dôkazy* ich vlastností

Praktická časť

- *Dátové štruktúry* na reprezentáciu logických objektov
- *Algoritmické* riešenie logických problémov
- *Formalizácia* rôznych problémov v logických jazykoch a ich *riešenie* nástrojmi na riešenie logických problémov

Organizácia kurzu — rozvrh, kontakty, pravidlá

Organizácia — rozvrh, kontakty a pravidlá absolvovania — je popísaná na oficiálnych webových stránkach predmetov:

1-AIN-412 https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Logic_for_CS

1-INF-210 http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~mazak/vyucba/udml/

1 Atomické formuly a štruktúry

Jazyky logiky prvého rádu

Logika prvého rádu je trieda (rodina) formálnych jazykov.
Zdieľajú:

- časti abecedy — *logické symboly* (spojky, kvantifikátory)
- pravidlá tvorby *formúl* (slov)

Líšia sa v *mimologických symboloch* — časť abecedy, pomocou ktorej sa tvoria najjednoduchšie — *atomické formuly* (*atómy*).

Atomické formuly a výroky v prirodzenom jazyku

Atomické formuly logiky prvého rádu zodpovedajú *pozitívnym jednoduchým vetám* o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch a rovnosti *jednotlivých pomenovaných* objektov.

Príklady 1.1.

- ✓ Milo beží.
- ✓ Jarka vidí Mila.
- ✗ Milo beží, ale Jarka ho nevidí.
- ✗ Jarka vidí všetkých.
- ✓ Jarka dala Milovi Bobyho v piatok.
- ✗ Jarka nie je doma.
- ✗ Niekto je doma.
- ✓ Súčet 2 a 2 je 3.
- ✓ Prezidentkou SR je Zuzana Čaputová.

Atomické formuly sa skladajú z *indivíduových konštánt* a *predikátových symbolov*.

Indivíduové konštanty

Indivíduové konštanty sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré pomenúvajú jednotlivé, pevne zvolené objekty.

Zodpovedajú *približne* vlastným menám, jednoznačným pomenovaniam, niekedy zámenám; konštantám v matematike a programovacích jazykoch.

Príklady 1.2. Jarka, 2, Zuzana_Čaputová, sobota, π, …

Indivíduová konštanta:

- vždy pomenúva skutočný, existujúci objekt (na rozdiel od vlastného mena *Yeti*);
- nikdy nepomenúva viac objektov (na rozdiel od vlastného mena *Jarka*).

Objekt z domény, ktorú chceme prvorádovým jazykom opísať,

- *môže* byť pomenovaný aj *viacerými* indivíduovými konštantami (napr. Prezidentka_SR a Zuzana_Čaputová);
- *nemusí* mať žiadne meno.

Predikátové symboly a arita

Predikátové symboly sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré označujú vlastnosti alebo vzťahy.

Zodpovedajú

- prísudkom v slovenských vetách,
- množinám alebo reláciám v matematike,
- identifikátorom funkcií s boolovskou návratovou hodnotou.

Predikátový symbol má pevne určený počet argumentov — *aritu*.

Vždy musí mať práve toľko argumentov, aká je jeho arita.

Úloha argumentu v predikáte je daná jeho poradím (podobne ako pozičné argumenty funkcií/metód v prog. jazykoch).

Dohoda 1.3. Aritu budeme *niekedy* písať ako horný index symbolu. Napríklad $\mathsf{beží}^1$, $\mathsf{vidí}^2$, dal^4, $<^2$.

Zamýšľaný význam predikátových symbolov

Unárny predikátový symbol (teda s aritou 1) zvyčajne označuje *vlastnosť*, druh, rolu, stav.

Príklady 1.4.

$\mathsf{pes}(x)$	x je pes
$\mathsf{čierne}(x)$	x je čierne
$\mathsf{beží}(x)$	x beží

Binárny, *ternárny*, … predikátový symbol (s aritou 2, 3, …) zvyčajne označuje *vzťah* svojich argumentov.

Príklady 1.5.

$\mathsf{vidí}(x, y)$	x vidí y
$\mathsf{dal}(x, y, z, t)$	x dal(a/o) objektu y objekt z v čase t

Kategorickosť významu predikátových symbolov

V bežnom jazyku často nie je celkom jasné, či objekt má alebo nemá nejakú vlastnosť — kedy je niekto *mladý*?

Predikátové symboly predstavujú *kategorické* vlastnosti/vzťahy — pre každý objekt sa dá *jednoznačne rozhodnúť*, či má alebo nemá túto vlastnosť/vzťah s iným objektom či inými objektmi.

Význam predikátového symbolu preto často zodpovedá rovnakému slovenskému predikátu iba približne.

Príklad 1.6. Predikát $\mathsf{mladší}^2$ môže označovať vzťah „x je mladší ako y“ presne.

Predikát $\mathsf{mladý}^1$ zodpovedá vlastnosti „x je mladý“ iba približne.

Nekategorickými vlastnosťami sa zaoberajú *fuzzy* logiky. Predikáty v nich zachytávajú význam týchto vlastností presnejšie.

Atomické formuly

Atomické formuly majú tvar

$$predikát(argument_1, argument_2, \dots, argument_k),$$

alebo

$$argument_1 \doteq argument_2,$$

pričom k je arita *predikát*u, a $argument_1, \dots, argument_k$ sú (nateraz) indivíduové konštanty.

Atomická formula zodpovedá (jednoduchému) *výroku* v slovenčine, t.j. tvrdeniu, ktorého *pravdivostná hodnota* (pravda alebo nepravda) sa dá jednoznačne určiť, lebo predikát označuje kategorickú vlastnosť/vzťah a indivíduové konštanty jednoznačne označujú objekty.

Formalizácia jednoduchých výrokov

Formalizácia je preklad výrokov z prirodzeného jazyka do formálneho logického jazyka.

Nie je to jednoznačný proces.

V spojení s *návrhom vlastného jazyka* (konštánt a predikátov) je typicky *iteratívna*.

- Postupne zisťujeme, aké predikáty a konštanty potrebujeme, upravujeme predchádzajúce formalizácie.
- Zanedbávame nepodstatné detaily.
- Doterajší jazyk sa snažíme využiť čo najlepšie.

Návrh jazyka popri formalizácii

Príklad 1.7. A_1: Jarka dala Milovi Bobyho.

⇝ ~~d(Jarka)~~ ~~dalBobyho(Jarka, Milo)~~ dal(Jarka, Milo, Boby)

A_2: Evka dostala Bobyho od Mila.

⇝ ~~dalBobyho(Milo, Evka)~~ dal(Milo, Evka, Boby)

A_3: Evka dala Jarke Cilku.

⇝ ~~dalCilku(Evka, Jarka)~~ dal(Evka, Jarka, Cilka)

A_4: Boby je pes.

⇝ pes(Boby)

Návrh jazyka pri formalizácii

Minimalizujeme počet predikátov, uprednostňujeme flexibilnejšie, viacúčelovejšie (dal^3 pred dalBobyho^2 a dalCilku^2).

Dosiahneme

- expresívnejší jazyk (vyjadrí viac menším počtom prostriedkov),
- zrejmejšie logické vzťahy výrokov.

Podobné normalizácii databázových schém.

1.1 Syntax atomických formúl

Presné definície

Cieľom logiky je uvažovať o jazyku, výrokoch, vyplývaní, dôkazoch.

Výpočtová logika sa snaží automaticky riešiť konkrétne problémy vyjadrené v logických jazykoch.

Spoľahlivé a overiteľné úvahy a výpočty vyžadujú *presnú* dohodu na tom, o čom hovoríme — *definíciu* logických pojmov (jazyk, výrok, pravdivosť, …).

Pojmy (napr. *atomická formula*) môžeme zadefinovať napríklad

- *matematicky* ako množiny, n-tice, relácie, funkcie, postupnosti, …;
- *informaticky* tým, že ich *naprogramujeme*, napr. zadefinujeme triedu `AtomickaFormula` v Pythone.

Matematický jazyk je univerzálnejší ako programovací — abstraktnejší, menej nie až tak podstatných detailov.

Syntax atomických formúl logiky prvého rádu

Najprv sa musíme dohodnúť na tom, aká je *syntax* atomických formúl logiky prvého rádu:

- z čoho sa skladajú,
- čím vlastne sú,
- akú majú štruktúru.

Symboly jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Z čoho sa skladajú atomické formuly?

Definícia 1.8. *Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu* sú mimologické, logické a pomocné symboly, pričom:

Mimologickými symbolmi sú

- *indivíduové konštanty* z nejakej neprázdnej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$
- a *predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Jediným *logickým symbolom* je $\doteq$ (symbol rovnosti).

Pomocnými symbolmi sú **(**, **)** a **,** (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú disjunktné. Pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ani $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$. Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ je priradená *arita* $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}}(P) \in \mathbb{N}^{+}$.

Abeceda jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na Úvode do teoretickej informatiky/Formálnych jazykoch a automatoch by ste povedali, že *abecedou* jazyka $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu je $\Sigma_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \{\doteq, \textbf{(}, \textbf{)}, \textbf{,}\}$.

V logike sa väčšinou pojem *abeceda* nepoužíva, pretože potrebujeme rozlišovať *rôzne druhy* symbolov.

Namiesto *abeceda jazyka $\mathcal{L}$* hovoríme *množina všetkých symbolov jazyka $\mathcal{L}$* alebo len *symboly jazyka $\mathcal{L}$*.

Na zápise množiny $\Sigma_{\mathcal{L}}$ však ľahko vidíme, čím sa rôzne jazyky atomických formúl logiky prvého rádu od seba líšia a čo majú spoločné.

Príklady symbolov jazykov atomických formúl logiky prvého rádu

Príklad 1.9. Príklad o deťoch a zvieratkách sme sformalizovali v jazyku $\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}$, v ktorom

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}} &= \{\mathsf{Boby}, \mathsf{Cilka}, \mathsf{Evka}, \mathsf{Jarka}, \mathsf{Milo}\},\\ \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}} &= \{\mathsf{dal}, \mathsf{pes}\}, \quad \mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}}(\mathsf{dal}) = 3, \quad \mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{dz}}}(\mathsf{pes}) = 1.\end{aligned}$$

Príklad 1.10. Príklad o návštevníkoch party by sme mohli sformalizovať v jazyku $\mathcal{L}_{\mathrm{party}}$, kde

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\mathrm{party}}} &= \{\mathsf{Kim}, \mathsf{Jim}, \mathsf{Sarah}\},\\ \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\mathrm{party}}} &= \{\mathsf{príde}\}, \quad \mathrm{ar}_{\mathcal{L}_{\mathrm{party}}}(\mathsf{príde}) = 1.\end{aligned}$$

Označenia symbolov

Keď budeme hovoriť o *ľubovoľnom* jazyku $\mathcal{L}$, často budeme potrebovať nejak označiť niektoré jeho konštanty alebo predikáty, aj keď nebudeme vedieť, aké konkrétne symboly to sú.

Na označenie symbolov použijeme *meta premenné*: premenné v (matematickej) slovenčine, pomocou ktorých budeme hovoriť *o* (po grécky *meta*) týchto symboloch.

Dohoda 1.11. Indivíduové konštanty budeme spravidla označovať meta premennými a, b, c, d s prípadnými dolnými indexmi.

Predikátové symboly budeme spravidla označovať meta premennými P, Q, R s prípadnými dolnými indexmi.

Atomické formuly jazyka

Čo sú atomické formuly?

Definícia 1.12. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $c_1 \doteq c_2$, kde c_1 a c_2 sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$, kde P je predikátový symbol z $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ s aritou n a c_1, …, c_n sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Atomickými formulami (skrátene *atómami*) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Slová jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na UTI/FoJa by ste povedali, že jazyk $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu nad abecedou $\Sigma_\mathcal{L} = \mathcal{C}_\mathcal{L} \cup \mathcal{P}_\mathcal{L} \cup \{\doteq, (,), ,\}$ je množina slov

$$\{ c_1 \doteq c_2 \mid c_1 \in \mathcal{C}_\mathcal{L}, c_2 \in \mathcal{C}_\mathcal{L} \} \\ \cup \{ P(c_1, \dots, c_n) \mid P \in \mathcal{P}_\mathcal{L}, \mathrm{ar}_\mathcal{L}(P) = n, c_1 \in \mathcal{C}_\mathcal{L}, \dots, c_n \in \mathcal{C}_\mathcal{L} \}.$$

V logike sa jazyk takto nedefinuje, pretože potrebujeme rozlišovať *rôzne druhy slov*.

Príklady atómov jazyka

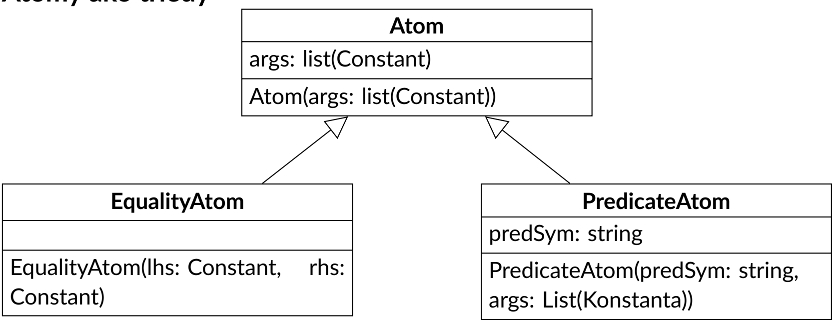
Príklad 1.13. V jazyku $\mathcal{L}_\mathrm{dz}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_\mathrm{dz}} = \{\textsf{Boby}, \textsf{Cilka}, \textsf{Evka}, \textsf{Jarka}, \textsf{Milo}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_\mathrm{dz}} = \{\textsf{dal}, \textsf{pes}\}$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_\mathrm{dz}}(\textsf{dal}) = 3$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_\mathrm{dz}}(\textsf{pes}) = 1$, sú *okrem iných* rovnostné atómy:

$$\textsf{Boby} \doteq \textsf{Boby} \qquad \textsf{Cilka} \doteq \textsf{Boby}$$
$$\textsf{Evka} \doteq \textsf{Jarka} \qquad \textsf{Boby} \doteq \textsf{Cilka}$$

a predikátové atómy:

$$\textsf{pes}(\textsf{Cilka}) \qquad \textsf{dal}(\textsf{Cilka}, \textsf{Milo}, \textsf{Boby}) \qquad \textsf{dal}(\textsf{Jarka}, \textsf{Evka}, \textsf{Milo}).$$

Atómy ako triedy



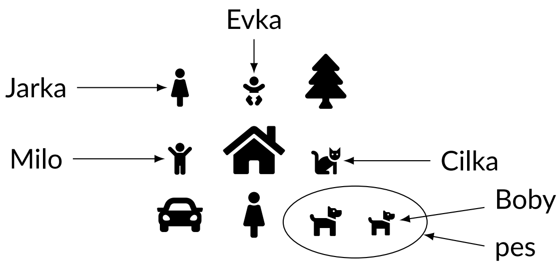
1.2 Štruktúry

Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako zistíme, či je atomická formula pes(Boby) pravdivá v nejakej situácii (napríklad u babky Evky, Jarky a Mila na dedine)?

Pozrieme sa na túto situáciu a zistíme:

1. aký objekt b pomenúva konštanta Boby;
2. akú vlastnosť p označuje predikát pes;
3. či objekt b má vlastnosť p.



Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako môžeme tento postup matematicky alebo informaticky modelovať?

Potrebujeme:

- matematický/informatický model situácie (stavu vybranej časti sveta),
- postup na jeho použitie pri vyhodnocovaní pravdivosti formúl.

Matematický model stavu sveta

Ako môžeme matematicky popísať nejakú situáciu tak, aby sme pomocou tohto popisu mohli vyhodnocovať atomické formuly v nejakom jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$?

Matematický model stavu sveta

Potrebujeme vedieť:

- ktoré objekty sú v popisovanej situácii prítomné,
- ▶ množina všetkých týchto objektov — *doména*;

- jednoznačné priradenie významu všetkým indivíduovým konštantám a predikátom z jazyka $\mathcal{L}$

▶ *interpretačná funkcia*;

- pre každú indivíduovú konštantu c z jazyka $\mathcal{L}$, ktorý *objekt* z domény konštanta c pomenúva,

- pre každý unárny predikát P z jazyka $\mathcal{L}$, ktoré objekty z domény majú vlastnosť označenú predikátom P,

▶ tvoria *podmnožinu* domény;

- pre každý n-árny predikát R z jazyka $\mathcal{L}$, $n > 1$, ktoré n-tice objektov z domény sú vo vzťahu ozn. pred. R,

▶ tvoria *n-árnu reláciu* na doméne.

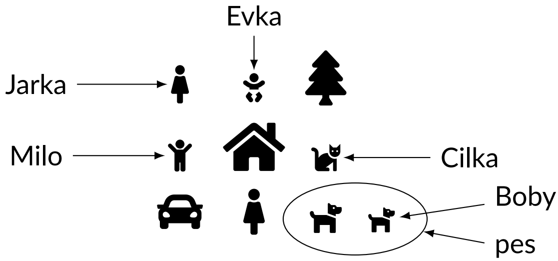
Štruktúra pre jazyk

Definícia 1.14. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu. *Štruktúrou* pre jazyk $\mathcal{L}$ (niekedy *interpretáciou* jazyka $\mathcal{L}$) nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde D je ľubovoľná *neprázdna* množina nazývaná *doména* štruktúry $\mathcal{M}$; i je zobrazenie, nazývané *interpretačná funkcia* štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré

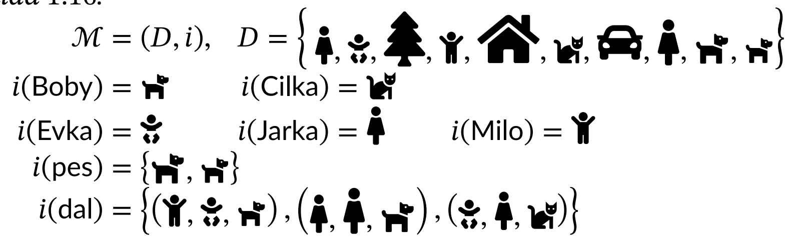
- každej indivíduovej konštante c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

Dohoda 1.15. Štruktúry označujeme veľkými *písanými* písmenami $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, ...

Príklad štruktúry



Príklad 1.16.



Štruktúra ako informatický objekt

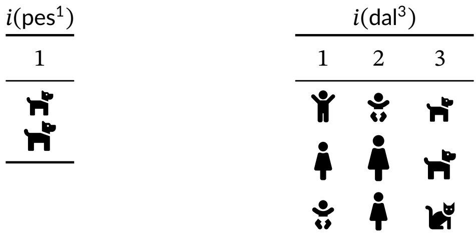
Štruktúru sme definovali pomocou *matematických* objektov.

Aký *informatický* objekt sa podobá na štruktúru?

Databáza:

Predikátové symboly jazyka ∼ veľmi zjednodušená schéma DB (arita ∼ počet stĺpcov)

Interpretácia predikátových symbolov ∼ konkrétne tabuľky s dátami



Štruktúry — upozornenia

Štruktúr pre daný jazyk je *nekonečne veľa*.

Doména štruktúry

- *nesúvisí so zamýšľaným významom* interpretovaného jazyka;
- môže mať ľubovoľné prvky;
- môže byť *nekonečná*.

Interpretácia symbolov konštánt:

- každej konštante je priradený objekt domény;
- nie každý objekt domény musí byť priradený nejakej konštante;
- rôznym konštantám môže byť priradený rovnaký objekt.

Interpretácie predikátových symbolov môžu byť *nekonečné*.

Príklad 1.17 (Štruktúra s nekonečnou doménou). $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, i)$ $i(\mathsf{pes}) = \{ 2n \mid n \in \mathbb{N} \}$ $i(\mathsf{dal}) = \{ (n, m, n + m) \mid n, m \in \mathbb{N} \}$ $i(\mathsf{Boby}) = 0$ $i(\mathsf{Cilka}) = 1$ $i(\mathsf{Evka}) = 3$ $i(\mathsf{Jarka}) = 5$ $i(\mathsf{Milo}) = 0$

1.3 Sémantika atomických formúl

Pravdivosť atomickej formuly v štruktúre

Ako zistíme, či je atomická formula pravdivá v štruktúre?

Definícia 1.18. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$ atomických formúl jazyka logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm $c_1 \doteq c_2$ jazyka $\mathcal{L}$ je *pravdivý v štruktúre* $\mathcal{M}$ vtedy a len vtedy, keď $i(c_1) = i(c_2)$.

Predikátový atóm $P(c_1, \dots, c_n)$ jazyka $\mathcal{L}$ je *pravdivý v štruktúre* $\mathcal{M}$ vtedy a len vtedy, keď $(i(c_1), \dots, i(c_n)) \in i(P)$.

Vzťah *atóm A je pravdivý v štruktúre $\mathcal{M}$* skrátene zapisujeme $\mathcal{M} \models A$. Hovoríme aj, že $\mathcal{M}$ je *modelom A*.

Vzťah *atóm A nie je pravdivý v štruktúre $\mathcal{M}$* zapisujeme $\mathcal{M} \not\models A$. Hovoríme aj, že *$A$ je nepravdivý* v $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}$ *nie je modelom A*.

Príklad 1.19 (Určenie pravdivosti atómov v štruktúre).

$\mathcal{M} = (D, i)$, $D = \{$, , , , , , , , , $\}$

$i(\text{Boby}) =$  $i(\text{Cilka}) =$ 

$i(\text{Evka}) =$  $i(\text{Jarka}) =$  $i(\text{Milo}) =$ 

$i(\text{pes}) = \{$, $\}$

$i(\text{dal}) = \{($, , $)$, $($, , $)$, $($, , $)\}$

Atóm pes(Boby) *je pravdivý* v štruktúre $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \models \text{pes(Boby)}$, lebo objekt $i(\text{Boby}) =$  je prvkom množiny $\{$, $\} = i(\text{pes})$.

Atóm dal(Evka, Jarka, Cilka) *je pravdivý* v $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \models \text{dal(Evka, Jarka, Cilka)}$, lebo $(i(\text{Evka}), i(\text{Jarka}), i(\text{Cilka})) = ($, , $) \in i(\text{dal})$.

Atóm Cilka $\doteq$ Boby *nie je pravdivý* v $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \not\models \text{Cilka} \doteq \text{Boby}$, lebo $i(\text{Cilka}) =$  $\neq$  $= i(\text{Boby})$.

1.4 Zhrnutie

Zhrnutie

- Logika prvého rádu je rodina formálnych jazykov.
- Každý jazyk logiky prvého rádu je daný neprázdnou množinou indivíduových konštánt a množinou predikátových symbolov.
- Atomické formuly sú základnými výrazmi prvorádového jazyka.
  - Postupnosti symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$ (predikátové) a $c_1 \doteq c_2$ (rovnostné).
  - Zodpovedajú pozitívnym jednoduchým výrokom o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch, rovnosti jednotlivých pomenovaných objektov.
- Význam jazyku dáva štruktúra — matematický opis stavu sveta
  - Skladá sa z neprázdnej domény a z interpretačnej funkcie.
  - Konštanty interpretuje ako prvky domény.
  - Predikáty interpretuje ako podmnožiny domény/relácie na doméne.

- Pravdivosť atómu určíme interpretovaním argumentov a zistením, či je výsledná n-tica objektov prvkom interpretácie predikátu, resp. pri rovnostnom atóme, či sa objekty rovnajú.

Literatúra