Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Zbierka úloh z Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Júlia Pukancová,
Martin Homola, Jozef Šiška, Iveta Bečková

Letný semester 2023/2024

Posledná aktualizácia: 26. februára 2024

Obsah

1 Atomické formuly

1.1 Sémantika atomických formúl

1.1.1 Príklad. Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Anna}, \text{Boris}, \text{mama}, \text{oco}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{dievča}^1, \text{chlapec}^1, \text{sestra}^2, \text{uprednostňuje}^3\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
dievča(x)	x je žena
chlapec(x)	x je chlapec
sestra(x, y)	x je sestra y
uprednostňuje(x, y, z)	x uprednostňuje y pred z

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) dievča(Anna)

(A_2) chlapec(Boris)

(A_3) sestra(Anna, Boris)

(A_4) uprednostňuje(mama, Anna, Boris)

(A_5) uprednostňuje(Boris, Boris, Anna)

(B_1) dievča(mama)

(B_2) chlapec(oco)

(B_3) uprednostňuje(mama, Boris, Anna)

(B_4) uprednostňuje(oco, Boris, Anna)

Riešenie. Každú atomickú formulu zo zadania preložíme do vety v prirodzenom jazyku.

(A_1) Anna je dievča.

(A_2) Boris je chlapec.

(A_3) Anna je sestra Borisa.

(A_4) Mama uprednostňuje Annu pred Borisom.

(A_5) Boris uprednostňuje samého seba pred Annou.

(B_1) Mama je dievča.

(B_2) Oco je chlapec.

(B_3) Mama uprednostňuje Borisa pred Annou.

(B_4) Oco uprednostňuje Borisa pred Annou.

♮

1.1.2 Príklad. Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku $\mathcal{L}$ z úlohy 1.1.1?

Riešenie. Počet atomických formúl v jazyku $\mathcal{L}$ závisí od počtu indivíduových konštánt v jazyku $\mathcal{L}$ (teda od kardinality množiny $\mathcal{C}_\mathcal{L}$) a od jednotlivých arít jednotlivých predikátov z množiny $\mathcal{P}_\mathcal{L}$.

V jazyku $\mathcal{L}$ máme $|\mathcal{C}_\mathcal{L}| = 4$.

Pomocou predikátového symbolu, ktorého arita je 1 teda môžeme vytvoriť v jazyku $\mathcal{L}$ 4 atomické formuly. Kedže unárne predikátové symboly máme v $\mathcal{P}_\mathcal{L}$ dva (dievča a chlapec), dokopy vytvoríme 8 atomických formúl.

Pomôcka. Vo všeobecnosti platí, že pre ľubovoľný predikátový symbol $p \in \mathcal{P}_\mathcal{L}$ s aritou k a pre $|\mathcal{C}_\mathcal{L}| = n$ môžeme v jazyku $\mathcal{L}$ vytvoriť n^k atomických formúl.

Pre binárny predikátový symbol (sestra) vieme vytvoriť 4^2 atomických formúl, teda 16. K tejto možnosti treba prirátať aj rovnostné atomické formuly, ktoré vytvoríme pomocou symbolu rovnosti $\doteq$. Tento symbol je tiež binárny, a teda formúl bude opäť 16.

Analogicky pre ternárny predikátový symbol (uprednostňuje) vytvoríme $4^3 = 64$ atomických formúl.

Celkovo teda v jazyku $\mathcal{L}$ môžeme zostrojiť $8 + 16 + 16 + 64 = 104$ atomických formúl. ♮

1.1.3 Príklad. Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \dots, A_5, B_1, \dots, B_4$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned}
D &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
i(\text{Anna}) &= 1, \quad i(\text{Boris}) = 2, \quad i(\text{mama}) = 3, \quad i(\text{oco}) = 4, \\
i(\text{dievča}) &= \{1, 5\}, \\
i(\text{chlapec}) &= \{2, 4, 5\}, \\
i(\text{sestra}) &= \{(3, 4), (1, 2)\}, \\
i(\text{uprednostňuje}) &= \{(3, 1, 2), (3, 2, 1), (5, 4, 1), (5, 3, 5)\}.
\end{aligned}$$

Riešenie.

(A_1) dievča(Anna) je pravdivé v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \models$ dievča(Anna), pretože $i(\text{Anna}) = 1 \in \{1, 5\} = i(\text{dievča})$.

(A_2) $\mathcal{M} \models$ chlapec(Boris), pretože $i(\text{Boris}) = 2 \in i(\text{chlapec})$.

(A_3) $\mathcal{M} \models$ sestra(Anna, Boris), pretože $(i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) = (1, 2) \in i(\text{sestra})$.

(A_4) $\mathcal{M} \models$ uprednostňuje(mama, Anna, Boris), pretože $(i(\text{mama}), i(\text{Anna}), i(\text{Boris})) \in i(\text{uprednostňuje})$.

(A_5) uprednostňuje(Boris, Boris, Anna) nie je pravdivé v $\mathcal{M}$, skrátene $\mathcal{M} \not\models$ uprednostňuje(Boris, Boris, Anna), pretože $(i(\text{Boris}), i(\text{Boris}), i(\text{Anna})) \notin i(\text{uprednostňuje})$.

(B_1) $\mathcal{M} \not\models$ dievča(mama), pretože $i(\text{mama}) \notin i(\text{dievča})$.

(B_2) $\mathcal{M} \models$ chlapec(oco), pretože i(oco) $\in i$(chlapec).

(B_3) $\mathcal{M} \models$ uprednostňuje(mama, Boris, Anna),
pretože (i(mama), i(Boris), i(Anna)) $\in i$(uprednostňuje).

(B_4) $\mathcal{M} \not\models$ uprednostňuje(oco, Boris, Anna),
pretože (i(oco), i(Boris), i(Anna)) $\notin i$(uprednostňuje). ♮

1.1.4 Príklad. Uvažujme opäť jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.1. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ a $\mathcal{M}_3$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby každá z nich *súčasne* bola modelom všetkých formúl $A_1, \dots, A_5$, ale nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \dots, B_4$ a aby *zároveň*:

a) doména štruktúry $\mathcal{M}_1$ mala aspoň 5 prvkov;
b) doména štruktúry $\mathcal{M}_2$ mala najviac 3 prvky;
c) doména štruktúry $\mathcal{M}_3$ mala najviac 1 prvok.

Riešenie.

a) Štruktúra $\mathcal{M}_1$ s aspoň 5 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= (\{a, b, c, d, m, o\}, i_1) \\
i_1(\text{Anna}) &= a, \quad i_1(\text{Boris}) = b, \quad i_1(\text{mama}) = m, \quad i_1(\text{oco}) = o, \\
i_1(\text{dievča}) &= \{a\}, \\
i_1(\text{chlapec}) &= \{b\}, \\
i_1(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, d)\}, \\
i_1(\text{uprednostňuje}) &= \{(m, a, b), (o, a, b), (b, b, a)\}.
\end{aligned}$$

b) Štruktúra $\mathcal{M}_2$ s najviac 3 prvkami v doméne:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2 &= (\{a, b, c\}, i_2) \\
i_2(\text{Anna}) &= a, \quad i_2(\text{Boris}) = b, \quad i_2(\text{mama}) = c, \quad i_2(\text{oco}) = c, \\
i_2(\text{dievča}) &= \{a\}, \\
i_2(\text{chlapec}) &= \{b\}, \\
i_2(\text{sestra}) &= \{(a, b), (c, c)\}, \\
i_2(\text{uprednostňuje}) &= \{(c, a, b), (b, b, a)\}.
\end{aligned}$$

c) Nie je možné zostrojiť $\mathcal{M}_3$ tak, aby mala najviac 1 prvok a súčasne bola modelom všetkých formúl $A_1, \dots, A_5$, ale nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \dots, B_4$.

Doména štruktúry nemôže byť prázdna, preto $\mathcal{M}_3$ by mala mať práve jeden prvok, teda $\mathcal{M}_3 = (\{a\}, i_3)$ pre nejaký prvok a.

Problém nastáva už pri A_1 a B_1. Keďže v doméne $\mathcal{M}_3$ je jediný prvok, musia ho pomenúvať všetky indivíduové konštanty, teda $i_3(\text{Anna}) = a$, ale aj $i_3(\text{mama}) = a$. Aby bola A_1 pravdivá v $\mathcal{M}_3$, potom musí byť $a \in i_3(\text{dievča})$, teda $i_3(\text{dievča})$ musí byť $\{a\}$. Zároveň má byť B_1 nepravdivá, teda $a \notin i_3(\text{dievča})$, čo nie je možné. ♮

1.1.5 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ logiky prvého rádu s množinami symbolov $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{$Alex, Beáta, Cyril, Dana, Edo, Gabika, oco$\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{žena}^1, \text{rodič}^2, \text{dieťa}^3, \text{starší}^2\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
žena(x)	x je žena
rodič(x, y)	x je rodičom y
dieťa(u, x, y)	u je dieťaťom matky x a otca y
starší(x, y)	x je starší ako y

Preložte nasledujúce atomické formuly do čo najprirodzenejších výrokov v slovenčine:

(A_1) žena(Beáta)

(A_2) dieťa(Cyril, Gabika, Edo)

(A_3) starší(Dana, Cyril)

(A_4) žena(Dana)

(A_5) rodič(Dana, Alex)

(A_6) rodič(Dana, Beáta)

(A_7) dieťa(Alex, Dana, Cyril)

(B_1) rodič(Edo, Edo)

(B_2) starší(Beáta, Cyril)

(B_3) Cyril $\doteq$ oco

(B_4) žena(Alex)

(B_5) dieťa(Beáta, Gabika, oco)

(B_6) starší(Gabika, Cyril)

1.1.6 Koľko atomických formúl môžeme zostrojiť v jazyku $\mathcal{L}$ z úlohy 1.1.5?

1.1.7 Uvažujme jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Rozhodnite, ktoré z formúl $A_1, \dots, A_7, B_1, \dots, B_6$ sú pravdivé v štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$
\begin{gathered}
D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\
i(\text{Alex}) = 1, \quad i(\text{Beáta}) = 2, \quad i(\text{Cyril}) = 3, \quad i(\text{Dana}) = 4, \\
i(\text{Edo}) = 9, \quad i(\text{Gabika}) = 7, \quad i(\text{oco}) = 3, \\
i(\text{žena}) = \{1, 2, 3, 8\}, \\
i(\text{rodič}) = \{(4, 1), (9, 9), (2, 3), (3, 4), (8, 7)\}, \\
i(\text{dieťa}) = \{(3, 7, 9), (2, 7, 3), (8, 9, 1)\},
\end{gathered}
$$

$$i(\text{starší}) = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,7),(3,4),(7,3),(8,7)\}.$$

Všimnite si, že hoci každá indivíduová konštanta musí byť interpretovaná ako niektorý objekt domény (teda pomenúvať ho), nie všetky objekty musia byť pomenované a viacero indivíduových konštánt môže pomenúvať ten istý objekt.

Lepšiu predstavu o štruktúre často získate, keď si ju znázorníte ako graf, v ktorom sú uzlami prvky domény. Pomôcť vám pritom môže prieskumník štruktúr.

1.1.8 Uvažujme opäť jazyk $\mathcal{L}$ a atomické formuly z úlohy 1.1.5. Zostrojte štruktúry $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ a $\mathcal{M}_3$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby každá z nich bola modelom všetkých formúl A_1, …, A_7, ale *súčasne* nebola modelom žiadnej z formúl $B_1, \dots, B_6$ a aby *zároveň*:

a) doména štruktúry $\mathcal{M}_1$ mala aspoň 9 prvkov;

b) doména štruktúry $\mathcal{M}_2$ mala najviac 5 prvkov;

c) doména štruktúry $\mathcal{M}_3$ mala najviac 2 prvky.

Ak doména s požadovanou kardinalitou neexistuje, detailne zdôvodnite, prečo to tak je, na základe definície štruktúry a pravdivosti atómov v nej.

1.2 Formalizácia do jazyka atomických formúl

1.2.1 Príklad. Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Jozef je profesor.

(A_2) Jozef a jeho kolegyňa profesorka obedujú.

(A_3) Jozef je žemľovku, zatiaľ čo kolegyňa má na obed rezeň.

(A_4) Márii, ako sa Jozefova kolegyňa volá, obed chutí.

(A_5) Aj Jozefovi jeho obed chutí, má žemľovku rád.

(A_6) Aj pani upratovačka je kolegyňa Jozefa a Márie.

(A_7) Pani upratovačka má menší plat ako Mária, ale väčší ako Jozef.

(A_8) Jozef učí predmet *Dejiny antického Ríma* vo veľkej posluchárni P42.

(A_9) Tento predmet (vždy) niekto navštevuje.

(A_{10}) Chodí naň aj pani upratovačka.

Riešenie. Postupne sformalizujeme atomické výroky a budeme pritom dbať na to, aby sme volili vhodný spoločný jazyk a zbytočne ho nerozširovali. Tvrdenie (A_1) je jednoduché: keďže Jozef je jednoznačne konkrétnou osobou z domény, ktorú popisuje úloha, zvolíme si pre jeho reprezentáciu indivíduovú konštantu Jozef. Ďalej keďže *byť profesorom* je Jozefova vlastnosť, zvolíme si pre ňu unárny predikátový symbol profesor^1. Samotný výrok môžeme teraz vyjadriť atomickou formulou:

(A_1) profesor(Jozef)

> 💡 Pozrime sa na dve alternatívne riešenia, ktoré ale nie sú správne. Prvým je formula je(Jozef, profesor). Čo by v tomto prípade znamenala indivíduová konštanta profesor? Zmyslom slova *profesor* vo vete (A_1) nie je konkrétny profesor, ale trieda/množina/kategória/súbor všetkých profesorov. Preto je správne voliť predikátový symbol.
>
> Z podobných dôvodov je nesprávna aj formula Jozef $\doteq$ profesor. Keby sme profesorov zapisovali týmto spôsobom, v skutočnosti by boli všetci profesori stotožnení do jedného objektu domény, čo v tomto prípade celkom určite nechceme.

(Zatiaľ) nevieme meno Jozefovej kolegyne z tvrdenia (A_2), ale určite je to tiež konkrétna osoba. Vytvoríme si preto novú indivíduovú konštantu o_1 aby sme mohli všetky výroky o nej zapísať. Tvrdenie (A_2) sa v skutočnosti skladá z viacerých atomických výrokov. V prvej časti sa dozvieme, že o_1 je profesorka, tu použijeme opäť unárny predikátový symbol profesor^1. Tiež sa dozvieme, že ide o Jozefovu kolegyňu. Keďže *byť kolegom (alebo kolegyňou)* je vzťah dvoch ľudí (elementov z domény), vytvoríme si pre jeho reprezentáciu binárny predikátový symbol kolega^2. V ďalšej časti tvrdenia sa dozvieme, že obaja obedujú — toto korešponduje ďalším dvom atomickým výrokom, ktoré vieme ľahko zapísať napríklad pomocou unárneho predikátového symbolu obeduje^1:

$(A_{2.1})$ profesor(o_1)

$(A_{2.2})$ kolega(Jozef, o_1)

$(A_{2.3})$ obeduje(Jozef)

$(A_{2.4})$ obeduje(o_1)

> 💡 Všimnime si, že v prípade Jozefovej kolegyne o_1 sme nevytvorili nový predikátový symbol profesorka^1, ale rovnako ako v prípade Jozefa sme použili symbol profesor^1. Hoci v slovenčine na to máme dve samostatné slová, ich význam pre školskú doménu je rovnaký — je to symbol pre skupinu všetkých elementov domény, ktoré predstavujú profesorov. Ak by sme na napr. pýtali na všetkých profesorov, iste by sme zahrnuli aj o_1. Podobne aj v prípade vzťahu *byť kolegom alebo kolegyňou* budeme používať vždy len jeden predikátový symbol kolega^2 a nebudeme vytvárať symbol kolegyňa^2.

Podobne ako v prípade Jozefovej kolegyne profesorky, aj v nasledujúcom tvrdení (A_3) sa stretneme s konkrétnymi objektmi, ktoré sú pomenované len menami všeobecných „kategórií“, do ktorých patria. Vytvoríme si preto dva nové indivíduové konštanty p_1 a p_2 pre konkrétne porcie jedla, pričom to, že p_1 je (jedlo z kategórie) žemľovka a p_2 je (jedlo z kategórie) rezeň, vyjadríme vhodne zvolenými unárnymi predikátovými symbolmi:

($A_{3.1}$) $\mathsf{je}(\mathsf{Jozef}, \mathsf{p}_1)$

($A_{3.2}$) $\mathsf{je}(\mathsf{o}_1, \mathsf{p}_2)$

($A_{3.3}$) $\mathsf{žemľovka}(\mathsf{p}_1)$

($A_{3.4}$) $\mathsf{rezeň}(\mathsf{p}_2)$

Pre vyjadrenie vzťahu *konzumovať niečo* sme použili predikátový je^2, hoci v prirodzenom jazyku to bolo vyjadrené rôznymi spôsobmi — ich význam v tomto kontexte je však rovnaký. Okrem toho to, že obaja jedia obed, sme už vyjadrili samostatným tvrdením s predikátovým symbolom $\mathsf{obeduje}^1$.

Šikovný a krátky predikátový symbol je^2 tu môžeme použiť vo význame *konzumuje* aj preto, že v tvrdení (A_1), kde sme zvažovali jeho použitie *v inom význame*, sme ho nakoniec nepoužili. Použitiu jedného symbolu v dvoch rôznych zamýšľaných významoch sa musíme vyhnúť.

Povedzme si ešte, prečo jednoduchšie riešenie $\mathsf{je}(\mathsf{Jozef}, \mathsf{žemľovka})$ (a analogicky pre rezeň) nie je správne. Striktne vzaté, konštanty pre konkrétne porcie (či iné objekty) si môžeme nazvať, ako chceme — v tom problém nie je. Toto riešenie však nevyjadruje, že konštanta žemľovka je jedlo typu žemľovka, pretože to musíme vyjadriť ako vlastnosť pomocou unárneho predikátového symbolu. Riešenie $\mathsf{je}(\mathsf{Jozef}, \mathsf{žemľovka})$ a $\mathsf{žemľovka}(\mathsf{žemľovka})$ zasa nie je správne, pretože množiny predikátových symbolov a indivíduových konštánt musia byť disjunktné. Pre jedno z použití musíme preto zvoliť iný symbol.

Tvrdenie (A_4), že Márii obed chutí, sformalizujeme jednoducho atomickou formulou s predikátovým symbolom $\mathsf{chutí}^2$. Musíme sa však vysporiadať s novou informáciou, že Mária je vlastne už vyššie spomínaná Jozefova kolegyňa. Jedno z korektných riešení vyžije rovnosť:

($A_{4.1}$) $\mathsf{chutí}(\mathsf{Mária}, \mathsf{p}_2)$

($A_{4.2}$) $\mathsf{Mária} \doteq \mathsf{o}_1$

Iným prípustným riešením je vybrať si len jednu z dvoch indivíduových konštánt o_1, Mária a používať ju konzistentne všade. V prípade, že si ale vyberieme a budeme všade používať o_1, stratíme informáciu, že o_1 je osoba s menom Mária.

Ďalšia možnosť je to, že sa niekto nejako volá vyjariť binárnym predikátom volá_sa^2 a nie pomocou rovnosti. Potom by však analogicky konzistentne bolo potrebné postupovať aj v prípade Jozefa a ďalších osôb, či objektov, ktoré majú meno.

Prvú časť tvrdenia (A_5) teraz poľahky sformalizujeme analogicky, zaraziť nás však môže jeho druhá časť. To, že Jozefovi chutí konkrétna porcia žemľovky a to, že má rád žemľovku vo všeobecnosti, sú dve rôzne informácie, preto je potrebné každú vyjadriť nezávislým predikátovým symbolom. Keďže však žemľovka^1 je predikátový symbol, nemôže nikdy stáť zároveň ako argument predikátu. Nevieme teda atomickou formulou binárnym vzťahom medzi dvoma objektmi vyjadriť to, že Jozefovi chutí žemľovka vo všeobecnosti, pretože pre žemľovku vo všeobecnosti nemáme indivíduovú konštantu. Vieme si však vytvoriť predikátový symbol, ktorého zamýšľaným významom budú tie elementy z domény, ktoré majú rady žemľovku:

($A_{5.1}$) chutí(Jozef, p$_1$)

($A_{5.2}$) má_rád_žemľovku(Jozef)

Nasledujúce tvrdenie (A_6) poľahky sformalizujeme v súlade s tým, čo sme už videli vyššie:

($A_{6.1}$) upratovačka(o$_2$)

($A_{6.2}$) kolega(Jozef, o$_2$)

($A_{6.3}$) kolega(Mária, o$_2$)

Všimnime si, že tentoraz sme zvolili ženský rod pre predikátový symbol upratovačka^1. Nevadí to, pokiaľ ho konzistentne použijeme aj v prípade mužov-upratovačov. Dôležité je len to aby, sme pre tú istú vec konzistentne stále používali ten istý predikátový symbol.

Tvrdenie (A_7) zodpovedá dvom atomickým formulám:

($A_{7.1}$) má_väčší_plat_ako(Mária, o$_2$)

($A_{7.2}$) má_väčší_plat_ako(o$_2$, Jozef)

Všimnime si, že sme zaviedli len jeden predikátový symbol má_väčší_plat_ako^2, ale úmyselne sme sa vyhli zavedeniu analogického symbolu má_menší_plat_ako^2. Ide tu totiž o dva vzťahy, ktoré sú navzájom inverzné. Takéto dva predikátové symboly by však boli od seba nezávislé, teda ak platí má_väčší_plat_ako(Mária, o$_2$), nijako z toho nevyplýva, že platí aj má_menší_plat_ako(o$_2$, Mária). Toto ale zrejme nie je zamýšľané. Jazyk atomických formúl nemá dostatočnú silu na to, aby sme mohli dva navzájom inverzné predikáty nejako vyjadriť. Musíme si preto vystačiť s jedným predikátom a používať ho vždy správnym smerom.

Tvrdenie (A_8) by nám už teraz nemalo robiť žiadne problémy. Musíme len správne rozpoznať všetky konkrétne objekty, o ktorých tvrdenie hovorí. Vyjde nám pri tom, že učí^3 bude ternárny predikátový symbol. Pri dvoch nových indivíduových konštantách, ktoré pre tieto objekty zavedieme, z tvrdenia tiež vyčítame, do akej „skupiny" patria, čo vyjadríme samostatnými atomickými formulami:

($A_{8.1}$) učí(Jozef, DAR, P42)

($A_{8.2}$) predmet(DAR)

($A_{8.3}$) poslucháreň(P42)

($A_{8.4}$) veľký(P42)

Keďže *byť veľký* a *byť poslucháreň* sú dve samostatné, nezávislé vlastnosti, použijeme dva samostatné predikátové symboly veľký^1 a poslucháreň^1.

Na záver sa zamerajme na posledné dve tvrdenia (A_9) a (A_{10}). To, že *Dejiny antického Ríma* niekto (teda aspoň jeden študent) navštevuje, vieme pomocou atomickej formuly vyjadriť tak, že to vyjadríme pre nejakú konštantu. Mohli by sme si zvoliť úplne novú (napr. študent o_3), ale keďže z tvrdenia (A_{10}) vieme, že tam chodí (teda ho navštevuje) aj pani upratovačka, pre ktorú už konštantný symbol máme, môžeme obe tieto tvrdenia vyjadriť jednou atomickou formulou:

(A_9) navštevuje(o_2, DAR)

Použitie indivíduovej konštanty, aby sme vyjadrili, že existuje aspoň jeden objekt, pre ktorý niečo platí, je tak trochu trik, ktorý ale môžeme využiť. V tomto prípade nám ani nič iné neostáva, keďže máme len atomické formuly. Neskôr sa naučíme aj iný, krajší spôsob.

Uvedieme ešte množiny indivíduových konštánt a predikátových symbolov, ktoré sme použili:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{L}} &= \{\text{DAR}, \text{Jozef}, \text{Mária}, \text{o}_1, \text{o}_2, \text{p}_1, \text{p}_2, \text{P42}\},\\ \mathcal{P}_{\mathcal{L}} &= \{\text{chutí}^2, \text{je}^2, \text{kolega}^2, \text{má\_rád\_žemľovku}^1, \text{má\_väčší\_plat\_ako}^2, \text{navštevuje}^2, \text{obeduje}^1,\\ &\qquad \text{poslucháreň}^1, \text{predmet}^1, \text{profesor}^1, \text{rezeň}^1, \text{učí}^3, \text{upratovačka}^1, \text{veľký}^3, \text{žemľovka}^1\}.\end{aligned}$$

A vysvetlime ich význam:

Symbol	Význam
DAR	predmet *Dejiny antického Ríma*
Jozef, Mária, o_1, o_2	konkrétne osoby
p_1, p_2	konkrétne porcie jedla
P42	posluchráreň P42
chutí(x, y)	osobe x chutí jedlo y
je(x, y)	x konzumuje y
kolega(x, y)	x je kolegom y
má_rád_žemľovku(x)	x má rád žemľovku
má_väčší_plat_ako(x, y)	x má väčší plat ako y
navštevuje(x, y)	osoba x navštevuje predmet y
obeduje(x)	x konzumuje obed
posluchráreň(x)	x je posluchráreň
predmet(x)	x je predmet (v zmysle *kurz*)
profesor(x)	x je profesor(ka)
rezeň(x)	x je rezeň
učí(x, y, z)	x učí predmet y v miestnosti z
upratovačka(x)	x je upratovačka (alebo upratovač)
veľký(x)	x je veľké (v zmysle *rozmerné*)
žemľovka(x)	x je žemľovka

⚠ Ako je vidieť z riešenia, symboly jazyka pridávame priebežne, podľa potreby. Vo vypracovaných zadaniach však býva zvykom uviesť ich na začiatku spolu s vysvetlením ich významu. ♮

1.2.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

(A_1) Peter je muž.

(A_2) Peter je študent.

(A_3) Lucia je žena a študentka.

(A_4) Lucia je staršia ako Peter.

(A_5) Matematiku učí Eugen.

(A_6) Peter a Lucia sú od neho mladší.

(A_7) Peter dostal z Matematiky od Eugena známku A.

(A_8) Eugen má rád Luciu.

(A_9) Aj keď má Lucia z Matematiky (od neho) známku „dostatočný“.

(A_{10}) Známka „dostatočný“ je len iný názov pre E-čko, a podobne „výborný“ značí to isté ako A-čko.

(A_{11}) Eugen sa má rád.

(A_{12}) Je Učiteľom roka 2020.

(A_{13}) Matematika je povinný predmet.

(A_{14}) Všetci vyššie menovaní študenti majú radi Telocvik.

(A_{15}) Okrem Eugena (a ďalších učiteľov) v škole pracuje aj školník, upratovačka a riaditeľ.

(A_{16}) Peter má rád Matematiku.

(A_{17}) Lucia má rada Petra.

(A_{18}) Telocvik je voliteľný predmet.

⚠ Na vyjadrenie nezávislých vlastností (napr. byť študentom/študentkou, byť ženou, byť mužom) použite samostatné predikátové symboly a podľa potreby jeden výrok sformalizujte viacerými atómami.

Nezavádzajte zbytočne nové predikátové symboly, ak sa význam výroku dá vyjadriť už použitými.

1.2.3

a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom*, vhodne zvolenom jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

Snažte sa o to, aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší. Zároveň ale nespájajte vzájomne nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátového symbolu.

(A_1) Janko je chlapec.

(A_2) Marienka je jeho najlepšia kamarátka.

(A_3) Marienka je dievča – hoci keď (u nich doma) hovoria o Máriovi, ide v skutočnosti o Marienku. (Poznáte tieto prezývky, vlastne sa už nikto nepamätá, ako to vzniklo.)

(A_4) V Čiernom lese stojí chalúpka z perníku.

(A_5) Táto chalúpka je obrovská, niektorí jej hovoria aj Perníková veža.

(A_6) V Perníkovej veži býva zlá a škaredá čarodejnica.

(A_7) Čarodejnica má bradavicu na nose.

(A_8) Janko sa bojí čarodejnice.

(B_1) Marienka je chlapec.

(B_2) Marienka sa bojí čarodejnice.

(B_3) Janko je Marienkin najlepší kamarát.

(B_4) Čarodejnica Janka zjedla.

(C_1) Mário je chlapec.

b) Vytvorte štruktúru $\mathcal{M}$ pre jazyk $\mathcal{L}$ tak, aby všetky formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny A, boli v $\mathcal{M}$ pravdivé, ale *súčasne* boli všetky formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny B, v $\mathcal{M}$ nepravdivé.

c) Je možné, aby v nejakej štruktúre boli súčasne všetky formuly podľa výrokov zo skupiny A pravdivé, všetky formuly podľa výrokov z B nepravdivé a formula pre výrok (C_1) pravdivá?

Svoju odpoveď detailne zdôvodnite na základe definície štruktúry a pravdivosti atómov v nej.

1.2.4 (pre odvážnejších) Sformalizujte nasledujúce výroky ako atomické formuly v *spoločnom* jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov. Snažte sa o to aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší, ale nespájajte nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátu.

Následne vytvorte štruktúru tak, aby formuly, ktorými ste sformalizovali výroky zo skupiny A, boli všetky pravdivé a formuly, ktoré formalizujú výroky skupiny B, všetky nepravdivé.

(A_1) Janka je dievča a Jurko je chlapec.

(A_2) Chlapci a dievčatá sú deti.

(A_3) Ňufko je Jankine zvieratko.

(A_4) Je to myš.

(A_5) Ňufko je veľký. Je väčší než Jurkov škrečok Chrumko.

(A_6) Jurko si Chrumka kúpil sám.

(A_7) Jurko v noci chodí kŕmiť potkana Smraďocha.

(A_8) Smraďoch však v skutočnosti je Ňufko, ktorý v tme vyzerá ako potkan.

(A_9) Všetky deti majú rady zvieratká, ktorá vlastnia, a tiež tie, ktoré kŕmia.

(B_1) Janka sa Smraďocha bojí.

(B_2) Jurko má rád potkany, nebojí sa ich.

(B_3) Ňufko je menší ako Chrumko.

(B_4) Janka má rada Jurka.

(B_5) Ňufko a Chrumko sú deti.

(B_6) Ňufka a Chrumka deťom kúpila ich mama.

2 Výrokovologické spojky

2.1 Syntax výrokovologických formúl

2.1.1 Príklad. Rozhodnite, či nasledujúce postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_\mathcal{L}$. V prípade kladnej odpovede určte množiny $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L}$. Svoje odpovede stručne zdôvodnite.

a) (futbalista(Adam))

b) (futbalista(Adam) $\land$ vlastní(Adam, BT001AA) $\land$ BMW(BT001AA))

c) $\neg\neg$(ľúbi(Barbora, Adam) $\to$ šťastný(Adam))

d) (šťastný(Adam) $\leftrightarrow$ šťastný($\neg$Barbora))

Riešenie. a) Postupnosť symbolov (futbalista(Adam)) nie je formulou. Keďže postupnosť začína symbolom zátvorky (a končí symbolom zátvorky), musí sa vo vnútri zátvorky nachádzať výraz $A\ b\ B$, kde A a B sú ľubovoľné formuly a b je binárna spojka. V tomto prípade sa vo vnútri zátvoriek ale nachádza atomická formula.

b) Postupnosť symbolov (futbalista(Adam) $\land$ vlastní(Adam, BT001AA) $\land$ BMW(BT001AA)) nie je formulou. Keďže postupnosť začína symbolom zátvorky (a končí symbolom zátvorky), musí sa vo vnútri zátvorky nachádzať výraz $A\ b\ B$, kde A a B sú ľubovoľné formuly a b je binárna spojka. V tomto prípade sa vo vnútri zátvoriek nachádzajú tri atomické formuly a medzi nimi dve binárne spojky $\land$.

c) Postupnosť symbolov $\neg\neg$(ľúbi(Barbora, Adam) $\to$ šťastný(Adam)) je formulou napríklad nad množinou predikátových symbolov $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{$ľúbi, šťastný$\}$ a množinou konštánt $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{$Adam, Barbora$\}$ (množiny $\mathcal{P}_\mathcal{L}$ a $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ môžu obsahovať aj ľubovoľné ďalšie prvky). Postupnosť symbolov sa začína symbolom negácie $\neg$, za ňou sa musí nachádzať formula A. Keďže v tomto prípade $A = \neg$(ľúbi(Barbora, Adam) $\to$ šťastný(Adam)), opäť ide o formulu v tvar $\neg B$, kde $B =$ (ľúbi(Barbora, Adam) $\to$ šťastný(Adam)). Formula B je ohraničená zátvorkami, musí byť teda v tvare $(C\ b\ D)$. V prípade tejto formuly teda bude $C =$ ľúbi(Barbora, Adam) a $D =$ šťastný(Adam) a binárna spojka b zodpovedá implikácii $\to$.

d) Postupnosť symbolov (šťastný(Adam) $\leftrightarrow$ šťastný($\neg$Barbora)) nie je formulou. Postupnosť je ohraničená zátvorkami a v ich vnútri sa naozaj nachádza výraz v tvare $A\ b\ B$. B však nie je formulou, pretože argumentom potenciálneho predikátového symbolu šťastný musí byť konštanta, ale $\neg$Barbora nie je správnou konštantou, lebo symboly konštánt a predikátové symboly nemôžu obsahovať žiadnu z logických spojok. $\natural$

2.1.2 Rozhodnite, či nasledujúce postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a predikátových symbolov $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Kladnú odpoveď dokážte nájdením množín $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a vytvárajúcej postupnosti pre formulu. Zápornú odpoveď stručne zdôvodnite.

a) $(\mathsf{žena}(\mathsf{Alex}) \land \mathsf{muž}(\mathsf{Alex}))$

b) $\neg(\mathsf{má\_rád}(\mathsf{Alex}, \mathsf{Alex}))$

c) $\big(\mathsf{starší}(\mathsf{Edo}, \mathsf{Alex}) \to (\neg\mathsf{starší}(\mathsf{Alex}, \mathsf{Edo}))\big)$

d) $(\mathsf{Alex} \lor \neg\mathsf{oco})$

e) $\big(\neg(\mathsf{muž}(\mathsf{Alex}) \land \mathsf{žena}(\mathsf{Alex})) \to (\neg\mathsf{muž}(\mathsf{Alex}) \lor \neg\mathsf{žena}(\mathsf{Alex}))\big)$

f) $\big(\neg\neg\mathsf{starší}(\mathsf{Alex}, \mathsf{Edo}) \leftrightarrow (\mathsf{starší}(\mathsf{Alex}, \mathsf{Edo}) \neg\land \mathsf{muž}(\mathsf{Edo}))\big)$

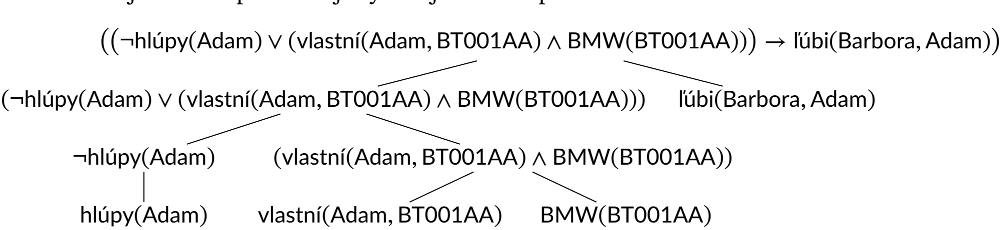
2.1.3 Príklad. Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$\big((\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}) \lor (\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}) \land \mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA})))\big) \\ \to \mathsf{ľúbi}(\mathsf{Barbora}, \mathsf{Adam})\big)$$

Riešenie. Vytvárajúcou postupnosťou pre zadanú formulu je napríklad nasledujúca postupnosť:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA}),\\
&\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}),\\
&(\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}) \land \mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA})),\\
&\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}),\\
&\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}),\\
&(\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}) \lor (\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}) \land \mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA}))),\\
&\mathsf{ľúbi}(\mathsf{Barbora}, \mathsf{Adam}),\\
&\big((\neg\mathsf{hlúpy}(\mathsf{Adam}) \lor (\mathsf{vlastní}(\mathsf{Adam}, \mathsf{BT001AA}) \land \mathsf{BMW}(\mathsf{BT001AA})))\big)\\
&\qquad \to \mathsf{ľúbi}(\mathsf{Barbora}, \mathsf{Adam})\big).
\end{aligned}$$

Nasledujúci strom predstavuje vytvárajúci strom pre zadanú formulu.



Stupeň zadanej formuly vypočítame ako:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{deg}\Big(\big((\neg \mathrm{hlúpy}(\mathrm{Adam}) \lor (\mathrm{vlastní}(\mathrm{Adam}, \mathrm{BT001AA}) \land \mathrm{BMW}(\mathrm{BT001AA})))\\
&\qquad \to \mathrm{ľúbi}(\mathrm{Barbora}, \mathrm{Adam})\big)\Big)\\
&\quad = \mathrm{deg}\big((\neg \mathrm{hlúpy}(\mathrm{Adam}) \lor (\mathrm{vlastní}(\mathrm{Adam}, \mathrm{BT001AA}) \land \mathrm{BMW}(\mathrm{BT001AA})))\big)\\
&\qquad + \mathrm{deg}(\mathrm{ľúbi}(\mathrm{Barbora}, \mathrm{Adam}))\\
&\qquad + 1\\
&\quad = \mathrm{deg}(\neg \mathrm{hlúpy}(\mathrm{Adam}))\\
&\qquad + \mathrm{deg}((\mathrm{vlastní}(\mathrm{Adam}, \mathrm{BT001AA}) \land \mathrm{BMW}(\mathrm{BT001AA})))\\
&\qquad + 1\\
&\qquad + 1\\
&\quad = \mathrm{deg}(\mathrm{hlúpy}(\mathrm{Adam})) + 1\\
&\qquad + \mathrm{deg}(\mathrm{vlastní}(\mathrm{Adam}, \mathrm{BT001AA})) + \mathrm{deg}(\mathrm{BMW}(\mathrm{BT001AA})) + 1\\
&\qquad + 1 + 1\\
&\quad = 1 + 1 + 1 + 1 = 4
\end{aligned}$$

♮

2.1.4 Pre nasledujúcu formulu zapíšte vytvárajúcu postupnosť, zakreslite vytvárajúci strom a určte jej stupeň:

$$\begin{aligned}
&\big((\mathrm{rodič}(\mathrm{Bruno}, \mathrm{Hugo}) \land \mathrm{rodič}(\mathrm{Bruno}, \mathrm{Tereza})) \to\\
&\quad \big((\neg \mathrm{žena}(\mathrm{Hugo}) \land \mathrm{muž}(\mathrm{Hugo})) \to \mathrm{brat}(\mathrm{Hugo}, \mathrm{Tereza})\big)\big)
\end{aligned}$$

2.1.5 Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte nasledujúce funkcie nad jeho formulami:

a) $\mathrm{atoms}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{P}(\mathcal{A}_{\mathcal{L}})$
atoms(A) je množina všetkých atómov vyskytujúcich sa vo formule A;

b) $\mathrm{acnt}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$
acnt(A) je počet výskytov atómov vo formule A;

c) $\mathrm{acount}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$
acount(A, a) je počet výskytov atómu a vo formule A;

d) $\mathrm{subfs}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{P}(\mathcal{E}_{\mathcal{L}})$
subfs(A) je množina všetkých podformúl formuly A;

e) $\mathrm{pcount}\colon\ \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$
pcount(A) je počet výskytov zátvoriek vo formule A;

f) $\operatorname{cons}\colon \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \to \mathcal{P}(\{\neg, \land, \lor, \to\})$
$\operatorname{cons}(A)$ je množina všetkých logických spojok vyskytujúcich sa vo formule A;

g) $\operatorname{ccount}\colon \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{A}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$
$\operatorname{ccount}(A)$ je počet výskytov logických spojok vo formule A;

h) $\operatorname{bccount}\colon \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \times \{\land, \lor, \to\} \to \mathbb{N}$
$\operatorname{bccount}(A, b)$ je počet výskytov binárnej spojky b vo formule A.

Riešenie. f)

Funkciu cons zadefinujeme induktívnou definíciou. Musíme *jednoznačne* určiť hodnotu funkcie pre *každý* z možných tvarov formúl. Smieme sa pritom odvolávať na hodnoty tej istej funkcie pre formuly *nižšieho* stupňa. Na začiatku definície musíme deklarovať, aké druhy objektov predstavujú jednotlivé metapremenné (podobne ako sa v mnohých programovacích jazykoch deklarujú typy argumentov funkcií, procedúr, metód).

Definícia. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každý atóm $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ a pre všetky formuly A, B z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ definujeme:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cons}(a) &= \emptyset \\
\operatorname{cons}(\neg A) &= \{\neg\} \cup \operatorname{cons}(A) \\
\operatorname{cons}((A \land B)) &= \{\land\} \cup \operatorname{cons}(A) \cup \operatorname{cons}(B) \\
\operatorname{cons}((A \lor B)) &= \{\lor\} \cup \operatorname{cons}(A) \cup \operatorname{cons}(B) \\
\operatorname{cons}((A \to B)) &= \{\to\} \cup \operatorname{cons}(A) \cup \operatorname{cons}(B)
\end{aligned}$$

Pretože prípady pre rôzne binárne výrokové spojky sú si navzájom dostatočne podobné, môžeme ich spojiť napríklad takto:

Definícia. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre všetky atómy $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, pre všetky formuly A, B z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ a všetky binárne spojky $b \in \{\land, \lor, \to\}$ definujeme:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cons}(a) &= \emptyset \\
\operatorname{cons}(\neg A) &= \{\neg\} \cup \operatorname{cons}(A) \\
\operatorname{cons}((A\ b\ B)) &= \{b\} \cup \operatorname{cons}(A) \cup \operatorname{cons}(B)
\end{aligned}$$ ♮

2.1.6 Dokážte alebo vyvráťte:

a) Príklad. [Tvrdenie 2.12] Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Postupnosť symbolov A je formulou jazyka $\mathcal{L}$ vtt existuje vytvárajúca postupnosť pre A v jazyku $\mathcal{L}$.

b) Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každú výrokovologickú formulu A jazyka $\mathcal{L}$ platí

$$\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A) .$$

c) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každú výrokovologickú formulu A jazyka $\mathcal{L}$ platí

$$\mathrm{acnt}(A) \leq \deg(A) + 1 .$$

d) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Pre každú výrokovologickú formulu A jazyka $\mathcal{L}$ platí

$$\mathrm{pcount}(A) \leq 4 \deg(A) + 2 .$$

Riešenie príkladu a). Tvrdenie a) platí. Nech $\mathcal{L}$ je ľubovoľný jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Postupne dokážeme obe implikácie vhodnou indukciou.

($\Leftarrow$) Predpokladáme, že A je formulou v jazyku $\mathcal{L}$. Existenciu vytvárajúcej postupnosti pre A dokážeme štrukturálnou indukciou na A:

1. Báza indukcie: Ak A je atóm (či už predikátový alebo rovnostný), jednoprvková postupnosť (A) je vytvárajúcou postupnosťou pre A.
2. Indukčný krok:
    1. Indukčný predpoklad: Nech A je formula a nech pre A existuje vytvárajúca postupnosť.

       Dokážme, že vytvárajúca postupnosť existuje aj pre $\neg A$: Podľa indukčného predpokladu existuje vytvárajúca postupnosť $A_1, A_2, \dots, A_m$ taká, že $A_m = A$. Zostrojme postupnosť $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_{m+1})$. Nech A_i pre nejaké $1 \leq i \leq m+1$ je ľubovoľný prvok tejto postupnosti:

       Ak $i = m+1$, tak $A_{m+1} = \neg A = \neg A_m$ a $m < m+1$, takže A_{m+1} spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti.

       Ak $1 \leq i \leq m$, tak A_i tiež spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti, lebo $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ je vytvárajúca postupnosť.

       Preto $(A_1, A_2, \dots, A_m, A_{m+1})$ je vytvárajúca postupnosť a keďže jej posledným prvkom je $\neg A$, je to aj vytvárajúca postupnosť pre $\neg A$.
    2. IP: Nech A a B sú formuly a nech existuje vytvárajúca postupnosť pre A a existuje vytvárajúca postupnosť pre B.

       Dokážme, že vytvárajúca postupnosť existuje aj pre $(A\ b\ B)$ pre ľubovoľnú binárnu spojku $b \in \{\land, \lor, \rightarrow\}$: Podľa indukčného predpokladu existuje vytvárajúca postupnosť $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ taká, že $A_m = A$, a vytvárajúca postupnosť $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ taká, že $B_n = B$. Zostrojme postupnosť

       $$(C_1, C_2, \dots, C_{m+n+1}) = (A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n, (A\ b\ B))$$

Nech C_i pre nejaké $1 \leq i \leq m+n+1$ je ľubovoľný prvok tejto postupnosti:

Ak $i = m+n+1$, tak $C_{m+n+1} = (A \, b \, B) = (A_m \, b \, B_n) = (C_m \, b \, C_{m+n})$, pričom zrejme $m < m+n+1$ a $m+n < m+n+1$, takže C_{m+n+1} spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti.

Ak $1 \leq i \leq m$, tak $C_i = A_i$ spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti, lebo $(C_1, A_2, \dots, C_m) = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ je vytvárajúca postupnosť.

Ak $m+1 \leq i \leq m+n$, tak prvok $C_i = B_{i-m}$ tiež spĺňa podmienky kladené na prvok vytvárajúcej postupnosti, lebo $(C_{m+1}, C_{m+2}, \dots, C_{m+n}) = (B_1, B_2, \dots, B_n)$ je vytvárajúca postupnosť.

Preto $(C_1, C_2, \dots, C_{m+n+1})$ je vytvárajúca postupnosť a keďže jej posledným prvkom je $(A \, b \, B)$, je to vytvárajúca postupnosť pre $(A \, b \, B)$.

($\Rightarrow$) Implikácia *Ak existuje vytvárajúca postupnosť pre A v jazyku $\mathcal{L}$, tak A je formulou jazyka $\mathcal{L}$*, vyplýva z tvrdenia: *Pre každé kladné prirodzené číslo n, ak $(A_1, \dots, A_n)$ je vytvárajúca postupnosť v jazyku $\mathcal{L}$, tak A_n je formula.* Toto tvrdenie dokážeme úplnou indukciou na n.

Nech n je ľubovoľné kladné prirodzené číslo. Indukčný predpoklad: Nech pre každé kladné prirodzené číslo $m < n$ je pravda, že ak $(A_1, \dots, A_m)$ je vytvárajúca postupnosť v jazyku $\mathcal{L}$, tak A_m je formula.

Dokážme tvrdenie pre n. Predpokladajme, že $(A_1, \dots, A_n)$ je vytvárajúca postupnosť v jazyku $\mathcal{L}$. Potom pre jej posledný prvok, postupnosť symbolov A_n v jazyku $\mathcal{L}$ môže nastať niektorá z týchto možností:

- A_n je atóm. Potom A_n je samozrejme formula.
- $A_n = \neg A_i$ pre nejaké $i < n$. Ľahko sa presvedčíme, že $(A_1, \dots, A_i)$ je vytvárajúca postupnosť v jazyku $\mathcal{L}$. Pretože $i < n$, je podľa indukčného predpokladu postupnosť symbolov A_i formula. Potom ale aj $A_n = \neg A_i$ je formula.
- $A_n = (A_i \, b \, A_j)$ pre nejakú binárnu spojku $b \in \{\land, \lor, \to\}$ a pre nejaké $i < n$ a $j < n$. Opäť sa ľahko presvedčíme, že $(A_1, \dots, A_i)$ aj $(A_1, \dots, A_j)$ sú vytvárajúce postupnosti v jazyku $\mathcal{L}$. Pretože $i < n$ aj $j < n$, sú podľa indukčného predpokladu postupnosti symbolov A_i aj A_j formuly. Potom ale aj $A_n = (A_i \, b \, A_j)$ je formula. ♮

Riešenie príkladu b).

Pripomeňme, že funkciu atoms : $\mathcal{E}_\mathcal{L} \to \mathcal{P}(\mathcal{A}_\mathcal{L})$ sme zadefinovali na prednáške (Def. 2.5). Predpokladáme, že funkciu subfs : $\mathcal{E}_\mathcal{L} \to \mathcal{P}(\mathcal{E}_\mathcal{L})$ ste zadefinovali pri riešení predchádzajúceho cvičenia 2.1.5.

Tvrdenie b) platí. Nech $\mathcal{L}$ je ľubovoľný jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu. Tvrdenie dokážeme indukciou na konštrukciu formuly A.

1. Báza indukcie: Nech A je atóm. Potom $\text{atoms}(A) = \{A\}$. Taktiež $\text{subfs}(A) = \{A\}$, a teda platí $\text{atoms}(A) \subseteq \text{subfs}(A)$.

2. Indukčné kroky:

2.1. Indukčný predpoklad: Nech A je ľubovoľná formula a nech pre ňu tvrdenie platí, teda $\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A)$. Dokážme tvrdenie aj pre $\neg A$:

Z definície funkcie atoms vieme, že $\mathrm{atoms}(\neg A) = \mathrm{atoms}(A)$. Súčasne podľa definície funkcie subfs máme $\mathrm{subfs}(\neg A) = \mathrm{subfs}(A) \cup \{\neg A\}$. Keďže podľa indukčného predpokladu $\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A)$, dostávame

$$\mathrm{atoms}(\neg A) = \mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A) \cup \{\neg A\} = \mathrm{subfs}(\neg A),$$

teda $\mathrm{atoms}(\neg A) \subseteq \mathrm{subfs}(\neg A)$.

2.2. IP: Nech A a B sú ľubovoľné formuly a nech tvrdenie pre ne platí (teda $\mathrm{atoms}(A) \subseteq \mathrm{subfs}(A)$ a $\mathrm{atoms}(B) \subseteq \mathrm{subfs}(B)$). Dokážme ho aj pre $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$:

Podľa definícií funkcií atoms a subfs vieme, že pre ľubovoľnú spojku $b \in \{\land, \lor, \to\}$ platí

$$\begin{aligned} & \mathrm{atoms}((A\ b\ B)) = \mathrm{atoms}(A) \cup \mathrm{atoms}(B) \\ \text{a} \quad & \mathrm{subfs}((A\ b\ B)) = \mathrm{subfs}(A) \cup \mathrm{subfs}(B) \cup \{(A\ b\ B)\}. \end{aligned}$$

Vďaka IP platí $\mathrm{atoms}(A) \cup \mathrm{atoms}(B) \subseteq \mathrm{subfs}(A) \cup \mathrm{subfs}(B) \cup \{(A\ b\ B)\}$, a teda $\mathrm{atoms}((A\ b\ B)) \subseteq \mathrm{subfs}((A\ b\ B))$ pre ľubovoľné $b \in \{\land, \lor, \to\}$.

Túto úvahu môžeme stručnejšie a azda aj prehľadnejšie zapísať takto:

Podľa IP a definícií funkcií atoms a subfs pre ľubovoľnú spojku $b \in \{\land, \lor, \to\}$ platí

$$\begin{aligned} \mathrm{atoms}((A\ b\ B)) &\overset{\text{def}}{=} \mathrm{atoms}(A) \cup \mathrm{atoms}(B) \\ &\overset{\text{IP}}{\subseteq} \mathrm{subfs}(A) \cup \mathrm{subfs}(B) \\ &\subseteq \mathrm{subfs}(A) \cup \mathrm{subfs}(B) \cup \{(A\ b\ B)\} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{subfs}((A\ b\ B)), \end{aligned}$$

teda $\mathrm{atoms}((A\ b\ B)) \subseteq \mathrm{subfs}((A\ b\ B))$ pre ľubovoľné $b \in \{\land, \lor, \to\}$. ♮

2.2 Sémantika výrokovologických formúl

2.2.1 Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologických formúl logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{Karol}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{profesor}^1, \mathsf{hlúpy}^1, \mathsf{sčítaný}^1\}$. V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk $\mathcal{L}$, kde

$$\begin{aligned} D &= \{\mathsf{barča}, \mathsf{janči}, \mathsf{karči}\} \\ i(\mathsf{Karol}) &= \mathsf{karči} \\ i(\mathsf{profesor}) &= \{\mathsf{karči}, \mathsf{janči}\} \end{aligned}$$

$$i(\text{hlúpy}) = \{\text{janči}\}$$
$$i(\text{sčítaný}) = \{\text{barča}, \text{karči}\}$$

vyhodnoťte nasledujúcu formulu postupom *zdola nahor* a postupom *zhora nadol*.

$$\big(\text{profesor}(\text{Karol}) \to (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol}))\big)$$

Riešenie. 1. spôsob — zdola nahor: Pravdivosť danej formuly určíme podľa definície 2.21 postupným vyhodnotením všetkých prvkov jej vytvárajúcej postupnosti:

$$\text{profesor}(\text{Karol}),\quad \text{sčítaný}(\text{Karol}),\quad \text{hlúpy}(\text{Karol}),\quad \neg\text{hlúpy}(\text{Karol}),$$
$$(\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol})),\quad \big(\text{profesor}(\text{Karol}) \to (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol}))\big)$$

Dostávame:

1. $i(\text{Karol}) \in i(\text{profesor})$, teda $\mathcal{M} \models \text{profesor}(\text{Karol})$
2. $i(\text{Karol}) \in i(\text{sčítaný})$, teda $\mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})$
3. $i(\text{Karol}) \notin i(\text{hlúpy})$, teda $\mathcal{M} \not\models \text{hlúpy}(\text{Karol})$
4. $\mathcal{M} \not\models \text{hlúpy}(\text{Karol})$, teda $\mathcal{M} \models \neg\text{hlúpy}(\text{Karol})$
5. Keďže $\mathcal{M} \models \neg\text{hlúpy}(\text{Karol})$ a $\mathcal{M} \models \text{sčítaný}(\text{Karol})$,
   tak $\mathcal{M} \models (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol}))$
6. Keďže $\mathcal{M} \models (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol}))$,
   tak $\mathcal{M} \models (\text{profesor}(\text{Karol}) \to (\neg\text{hlúpy}(\text{Karol}) \land \text{sčítaný}(\text{Karol})))$

Vyhodnotenie spôsobom *zdola nahor* môžeme prehľadnejšie zapísať do tabuľky, v ktorej $h = \text{hlúpy}$, $p = \text{profesor}$, $s = \text{sčítaný}$ a $K = \text{Karol}$:

	$p(K)$	$s(K)$	$h(K)$	$\neg h(K)$	$(\neg h(K) \land s(K))$	$(p(K) \to (\neg h(K) \land s(K)))$
$\mathcal{M}$	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\models$

alebo (trocha menej prehľadne):

	(	profesor(Karol)	$\to$	(	$\neg$	hlúpy(Karol)	$\land$	sčítaný(Karol)	))
$\mathcal{M}$		$\models$	$\models$		$\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$	

Nesmieme pritom zabúdať, že odvodenie je založené na definícii 2.21 pravdivosti formuly v štruktúre.

💡 Aby prvá tabuľka nebola príliš široká, celkom prirodzene sme si konkrétne symboly jazyka $\mathcal{L}$ označili meta premennými p, s, h a K. Tieto premenné nie sú súčasťou jazyka $\mathcal{L}$, slúžia nám, aby sme mohli stručne písať o jeho symboloch (predložka *o* sa po grécky povie *meta*) . Konkrétne symboly (napr. Karol) si môžeme predstaviť ako konkrétne reťazce (`'Karol'`) napríklad v jazyku Python. Meta premenné (napr. K) ako pythonovské *premenné*, do ktorých reťazce priraďujeme. Skrátený zápis $\neg h(K)$ formuly ¬hlúpy(Karol) zodpovedá (oveľa menej prehľadnému) pythonovskému výrazu $\texttt{'¬'} + h + \texttt{'('} + K + \texttt{')'}$.

2. spôsob — zhora nadol: Podľa definície 2.21 vzťahu pravdivosti ($\models$) a podľa definície danej štruktúry $\mathcal{M}$ platí:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{M} \models (\text{profesor(Karol)} \to (\neg\text{hlúpy(Karol)} \land \text{sčítaný(Karol)}))\\
\text{vtt}\\
\begin{array}{ccc}
\mathcal{M} \not\models \text{profesor(Karol)} & \text{alebo} & \mathcal{M} \models (\neg\text{hlúpy(Karol)} \land \text{sčítaný(Karol)})\\
\text{vtt} & & \text{vtt}\\
i(\text{Karol}) \notin i(\text{profesor}) & & \mathcal{M} \models \neg\text{hlúpy(Karol)} \text{ a } \mathcal{M} \models \text{sčítaný(Karol)})\\
\text{nepravda} & & \begin{array}{cc}
\text{vtt} & \text{vtt}\\
\mathcal{M} \not\models \text{hlúpy(Karol)} & i(\text{Karol}) \in i(\text{sčítaný})\\
\text{vtt} & \text{pravda}\\
i(\text{Karol}) \notin i(\text{hlúpy}) & \\
\text{pravda} &
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Pretože pri vyhodnocovaní implikácie sme zistili, že jej antecedent profesor(Karol) nie je nepravdivý v $\mathcal{M}$, museli sme vyhodnotiť aj konzekvent (¬hlúpy(Karol) ∧ sčítaný(Karol)). Ten je konjunkciou dvoch formúl, o ktorých sme zistili, že sú pravdivé v $\mathcal{M}$. Preto je v $\mathcal{M}$ pravdivý aj konzekvent, a teda celá implikácia.

💡 Istou výhodou vyhodnocovania pravdivosti zhora nadol je, že ho niekedy môžeme ukončiť skôr. Keby sme napríklad zistili, že antecedent implikácie je nepravdivý, mohli by sme hneď skonštatovať, že implikácia je pravdivá a konzekventom sa nezaoberať. ♮

2.2.2 V štruktúre $\mathcal{M} = (D, i)$, kde

$$\begin{aligned}
D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\\
i(\text{Alex}) &= 1, \quad i(\text{Bruno}) = 2, \quad i(\text{Hugo}) = 5, \quad i(\text{Tereza}) = 6,\\
i(\text{žena}) &= \{1, 3, 4, 6\},\\
i(\text{muž}) &= \{2, 4\},\\
i(\text{má_rád}) &= \{(1,1), (1,2), (1,5), (1,6), (2,2), (3,3), (3,4), (4,4), (5,5), (5,6)\},
\end{aligned}$$

$$i(\text{brat}) = \{(1,2),(2,1),(3,1),(4,4),(5,6),(6,1),(6,2),(6,6)\},$$
$$i(\text{rodič}) = \{(1,1),(2,5),(2,6),(1,5),(3,4),(4,2),(1,6),(5,6),(6,5)\},$$
$$i(\text{starší}) = \{(2,1),(5,6),(6,5)\},$$

zistite postupom *zdola nahor*, či sú formuly A_1 a A_2 pravdivé. Tipnite si, či je formula formula A_3 pravdivá v štruktúre $\mathcal{M}$ a overte svoje tip postupom *zhora nadol* pomocou Henkinovej–Hintikkovej hry (🎮) v prieskumníku štruktúr.

(A_1) (starší(Bruno, Alex) → ¬starší(Alex, Bruno))

(A_2) (¬má_rád(Alex, Bruno) ↔ ¬má_rád(Bruno, Alex))

(A_3) ((rodič(Bruno, Hugo) ∧ rodič(Bruno, Tereza)) →
((¬žena(Hugo) ∧ muž(Hugo)) → brat(Hugo, Tereza)))

2.2.3 Príklad. Vytvorte takú štruktúru, v ktorej budú všetky nasledujúce formuly pravdivé:

(A_1) (profesor(Alena) ∧ učiteľ(Alena))

(A_2) (profesor(Karol) ↔ učiteľ(Karol))

(A_3) (¬profesor(Karol) → (¬pozná(Karol, Alena) ∨ ¬vychádza(Karol, Alena)))

(A_4) Karol $\not\doteq$ Alena

Riešenie. Hľadáme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ tak, aby $\mathcal{M} \models A_1, \dots, \mathcal{M} \models A_4$.

💡 Hľadanie štruktúry je najlepšie začať tak, že sa snažíme splniť tzv. fakty — atomické formuly a ich negácie.

Pri zložitejších formulách nám pomôže, keď podľa definície pravdivosti postupom zhora nadol rozoberieme, kedy majú byť v hľadanej štruktúre pravdivé. Napr. pre najkomplikovanejšiu formulu A_3 tak zistíme, že $\mathcal{M} \models A_3$ vtt $\mathcal{M} \models$ profesor(Karol) alebo $\mathcal{M} \not\models$ pozná(Karol, Alena) alebo $\mathcal{M} \not\models$ vychádza(Karol, Alena).

Vyberieme si poslednú možnosť, lebo predikát vychádza sa v inej formule nenachádza. Môžeme ho teda pokojne interpretovať podľa potrieb pravdivosti A_3. Interpretáciu predikátu vychádza[2] ľahko zvolíme tak, aby $(i(\text{Karol}), i(\text{Alena})) \notin i(\text{vychádza})$, môže byť napríklad prázdna. Samozrejme, často takúto slobodu nemáme a musíme hľadať iné možnosti, ako zabezpečiť pravdivosť zložitých formúl.

Nech

$$D = \{\text{školník}, \text{učiteľka218}, \text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}\}$$
$$i(\text{Alena}) = \text{učiteľka218}$$

$$
\begin{aligned}
i(\text{Karol}) &= \text{školník}\\
i(\text{profesor}) &= \{\text{učiteľka218}\}\\
i(\text{učiteľ}) &= \{\text{učiteľka218}\}\\
i(\text{pozná}) &= \{(\text{školník}, \text{učiteľka218}), (\text{učiteľka218}, \text{školník}),\\
&\qquad (\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2})\}\\
i(\text{vychádza}) &= \{(\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}), (\text{upratovačka2}, \text{upratovačka1})\}
\end{aligned}
$$

V tejto štruktúre sú pravdivé všetky formuly A_1–A_4. Zdôvodnenie môžeme spraviť analogicky ako v úlohe 2.2.1. ♮

2.2.4 Vytvorte štruktúru, v ktorej budú súčasne pravdivé všetky nasledujúce formuly:

(A_1) titul(Sofiina_voľba)

(A_2) kniha(k325)

(A_3) má_autora(Sofiina_voľba,Styron)

(A_4) (titul(Kto_chytá_v_žite) ∧ má_autora(Kto_chytá_v_žite, Salinger))

(A_5) (¬(číta(Adam, k325) ∧ obdivuje(Dana, Adam)) →
¬(má_titul(k325, Sofiina_voľba) ∨ má_titul(k325, Kto_chytá_v_žite)))

(A_6) (má_titul(k325, Kto_chytá_v_žite) ↔ ¬má_titul(k325, Sofiina_voľba))

Pomôcka. Aby ste zistili, ako majú byť v štruktúre interpretované predikáty, analyzujte význam formúl podľa definície pravdivosti postupom zhora nadol, ako sme ukázali na prednáške.

2.2.5 Sformulujte základné definície syntaxe (symboly jazyka, atomická formula, formula, podformula) a sémantiky (pravdivosť formuly v štruktúre) pre výrokovú časť logiky prvého rádu:

a) s binárnymi spojkami → (implikácia) a ↛ („a nie“), pričom neformálny význam $(A \nrightarrow B)$ je „A a nie je pravda, že B“.

b) s binárnymi spojkami → (implikácia) a ⊻ (exkluzívne alebo, XOR), pričom neformálny význam $(A \veebar B)$ je: buď je pravdivé A, alebo je pravdivé B, ale nie obe súčasne.

Formuly podľa vašich definícií nebudú obsahovať iné spojky okrem vyššie uvedených.

Zadefinujte štandardné spojky ($\wedge$, $\vee$, $\neg$) ako skratky (teda funkcie nad formulami podobne, ako sme zadefinovali $\leftrightarrow$ v dohode 2.8) tak, aby formuly nimi vytvorené mali štandardný význam. Dokážte, že ho majú.

Účelom tejto úlohy je, aby ste si prečítali a upravili definície 2.4–2.21 z prednášky a pokúsili sa osvojiť si spôsob vyjadrovania, ktorý sa v nich používa. Môže vám pripadať ťažkopádny, je však presný. Ak vám nejaká formulácia pripadá zbytočne komplikovaná, môžete sa ju pokúsiť zjednodušiť, no snažte sa, aby ste nezmenili jej význam.

Schopnosť presne sa vyjadriť je potrebná pri programovaní (počítaču musíte všetko vysvetliť do detailov), ale napríklad aj pri písaní špecifikácií softvéru, či požiadaviek na vašu bakalársku prácu.

2.2.6 Sformalizujte nasledujúce skutočnosti do teórie T tak, aby T bola splniteľná. Formalizujte tak, aby každý konkrétny objekt, ktorý sa spomína bol označený indivíduovou konštantou; a aby všetky vlastnosti a vzťahy boli vyjadrené samostatným predikátovým symbolom:

1. Peter si obliekol nohavice a buď tričko alebo košeľu, nie však oboje. Pred odchodom si ešte zobral aj klobúk.
2. Vieme, že tričko nosí len k džínsovým nohaviciam. Tiež vieme, že džínsy si určite neobliekol, ak má klobúk.
3. Do práce Peter tiež chodí iba v džínsach.
4. Ak má Peter rande s Marikou, určite si vzal červenú alebo zelenú košeľu.
5. S Katkou má rande, len ak si zobral si zelenú.
6. Ak nemá rande (ani s jednou), obliekol si tričko.

Ďalej je vašou úlohou:

a) Splniteľnosť T dokážte nájdením štruktúry $\mathcal{M}_1$ takej, že $\mathcal{M}_1 \models T$.

b) Je za daných okolností *možné*, že Peter pôjde do práce? Ak áno, doložte to vhodnou štruktúrou $\mathcal{M}_2$. Ak nie, dokážte, že taká štruktúra $\mathcal{M}_2$ neexistuje.

2.3 Formalizácia do výrokovologických formúl

2.3.1 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ = {Dominika, Fernando, Elena, Fero, Gabika, Spain, Slovakia, Databases, Programming, Logics, Informatics, Combinatorics, Slovak_l, Czech_l, 1} a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{$student^1, professor^1, works^1, has_classmate^2, comes_from^2, supervises^2, passed^2, grad_exam$^3\}$, pričom zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
student(x)	x je študent*ka
works(x)	x pracuje
professor(x)	x je profesor*ka
has_classmate(x, y)	x má spolužiaka*čku y
comes_from(x, y)	x pochádza z y
supervises(x, y)	x je školiteľom y
passed(x, y)	x absolvoval y
grad_exam(x, y, z)	x dostal na maturite z y hodnotenie z

(A_1) Študentka Dominika má spolužiaka Fernanda, ktorý je zo Španielska.

(A_2) Fernando je, samozrejme, tiež študent, napriek tomu, že popri štúdiu aj pracuje.

(A_3) Elena je profesorka a školí Dominiku alebo Fernanda.

(A_4) Fernanda tiež volajú Fero.

(A_5) Ak Dominika absolvovala aj databázy alebo programovanie, aj logiku, tak je Elena jej školiteľkou.

(A_6) Pretože "byť spolužiakom*čkou" je symetrický vzťah, je Gabika Fernandovou spolužiačkou rovnako, ako je on jej spolužiakom.

(A_7) Fero absolvoval programovanie iba za predpokladu, že nedostal na maturite z informatiky jednotku.

(A_8) Ak ju nedostal, potom musel absolvovať aj kombinatoriku.

(A_9) Dominika určite neabsolvovala ani kurz slovenčiny, ani češtiny, pokiaľ nie je zo zahraničia.

(A_{10}) Buď Dominika alebo Gabika je zo Slovenska (no nie obe).

2.3.2 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

(A_1) Lucia a jej kamarát sú deti.

(A_2) Luciin kamarát má obľúbené hračky autíčko a koníka Blesk.

(A_3) Luciina obľúbená hračka je tiež autíčko, Sally, napriek tomu, že je dievča.

(A_4) Peter je meno spomínaného Luciinho kamaráta.

(A_5) Lucia je kamarátska, ale Peter je asi taký kamarátsky ako je skromný.

(A_6) Lucia sa preto hrá buď so svojím obľúbeným autíčkom alebo s Petrovým.

(A_7) V druhom prípade mu totiž musí to svoje požičať.

(A_8) S Bleskom sa nemôžu hrať obaja naraz.

(A_9) Ak je niektorá z menovaných hračiek poškodená, Peter a Lucia sa k nej správajú opatrne.

(A_{10}) Lucia je šťastná, keď sa s ňou Peter hrá.

(A_{11}) Peter je šťastný len za predpokladu, že je šťastná Lucia.

(A_{12}) Obe Petrove obľúbené hračky sú čierne, ale páčia sa aj Lucii, hoci jej obľúbená farba je modrá.

(A_{13}) Lucia sa vždy hrá so svojím autíčkom a buď ešte s bábikou Elzou alebo s kamarátovým čiernym koníkom (alebo s oboma naraz).

(A_{14}) Luciino autíčko je ale modré.

(A_{15}) Ak je slnečný deň, Peter sa hrá s loptou.

(A_{16}) Psa venčí, ak je pekne.

(A_{17}) S Luciou sa hrá, jedine ak nie je pekne.

(A_{18}) Pod nie je pekne myslíme, že nie je slnečný deň.

Pomôcka. Vo výrokoch sa zjavne hovorí o konkrétnych objektoch (napríklad autíčko Luciinho kamaráta), ktoré ale nemajú mená. Pri formalizácii ich označte vhodnými konštantami. Ďalšou zaujímavosťou je počasie. Čoho by mohlo byť vlastnosťou?

2.3.3 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

Vytvorte štruktúru, v ktorej budú všetky vaše formuly súčasne pravdivé.

(A_1) Do baru vošli Freddy a George.

(A_2) Barmanka naliala drink Freddymu.

(A_3) Barmankou je buď Mary alebo Jane. Službu má vždy len jedna z nich.

(A_4) Harry nie je v bare, len ak nemá službu Mary, a naopak.

(A_5) Freddy, George a Harry sú kamaráti. Barmanky sa však spolu nekamarátia.

(A_6) Freddymu jeho drink chutí, ak je to whisky, ale nie, ak je to koňak. Vtedy by však určite chutil Georgeovi.

(A_7) Freddymu jeho drink nechutí.

(A_8) Ak je barmankou Mary, tak naliala Freddymu whisky alebo koňak.

(A_9) Jane nalieva Freddymu vždy iba whisky.

(A_{10}) Iné drinky Mary ani Jane nenalievajú, pokiaľ nie je v bare prítomný Harry.

Pomôcka. Všeobecné tvrdenia A_9–A_{10} aplikujte na Freddyho drink. Napíšte teda také formuly, aby tvrdenia A_9–A_{10} platili pre Freddyho drink, ktorý mu barmanka naliala v A_2.

2.3.4 Sformalizujte nasledujúce výroky ako ucelenú teóriu vo vhodne zvolenom spoločnom jazyku výrokovej časti logiky prvého rádu. Zadefinujte použitý jazyk a vysvetlite význam jeho mimologických symbolov.

Vytvorte štruktúru, v ktorej budú všetky vaše formuly súčasne pravdivé.

(A_0) (V bare pracujú traja zamestnanci: Ema, Fero a Gigi. Zároveň sú v bare štyri pracovné pozície: barman/barmanka, časník/čašníčka, upratovačka a vyhadzovač.)

(A_1) Každá pozícia je určite niekým obsadená.

(A_2) Gigi je žena.

(A_3) Fero je buď čašník alebo vyhadzovač. Čašníkom je však, len ak si popri tom privyrába ešte na ďalšej pozícii.

(A_4) V bare pracuje iba jeden vyhadzovač.

(A_5) Ema tiež pracuje na niektorej pozícii. Nie je ale čašníčka, ani upratovačka.

(A_6) Ak je Ema barmankou, nerobí nič iné.

(A_7) Fero sa kamaráti s Emou alebo s Gigi, nie však s oboma.

(A_8) Ema sa kamaráti s Gigi, ale Gigi s ňou nie.

(A_9) Gigi sa kamaráti s Emou, iba ak obe pracujú na rovnakej pozícii.

(A_{10}) Ema sa kamaráti sama so sebou. Fero však nie.

(A_{11}) Fero sa určite kamaráti so všetkými barmanmi.

(A_{12}) Vyhadzovač sa s nikým nekamaráti.

(A_{13}) Vyhadzovačom je žena, len ak aj všetci ostatní zamestnanci sú ženy.

(A_{14}) Bonus: Ak je upratovačka žena, Gigi ňou nie je.

(A_{15}) Bonus: Keď sa Ema kamaráti s Gigi, len ak aj Gigi s ňou, potom je aj Ema žena.

Tvrdenie (A_0) neformalizujte, ale použite ho na špecializáciu nasledujúcich všeobecných tvrdení na uvedených zamestnancov a pracovné pozície.

Okrem tejto výnimky každé tvrdenie formalizujte **verne** a **osobitne**, bez ohľadu na iné tvrdenia. Teda **neprenášajte informácie** z jedného tvrdenia do iných tvrdení. Niektoré formuly budú potom možno rozsiahlejšie, ale z hľadiska kontrolovateľnosti riešenia a hľadania chýb je tento prístup istejší.

2.3.5

a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako teóriu $T = \{A_1, \dots, A_9\}$ vo vhodne zvolenom jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu $\mathcal{L}$. Zapíšte množiny symbolov tohto jazyka a vysvetlite zamýšľaný význam jeho predikátových symbolov.

Snažte sa o to, aby počet predikátových symbolov bol čo najmenší. Zároveň ale nespájajte vzájomne nezávislé vlastnosti a vzťahy do jedného predikátového symbolu. Nevkladajte do formalizácie žiadne ďalšie intuitívne znalosti na pozadí (napr. ak je niekto zlý, nedopĺňajte, že nemôže byť dobrý).

(A_1) V Čiernom lese stojí chalúpka, ktorá je z perníku.

(A_2) Niekedy sa jej hovorí aj Perníková veža.

(A_3) V Perníkovej veži býva zlá čarodejnica. A tiež chlapec Janko a Marienka, *ktorá je jeho súrodencom*.

(A_4) Janko je chlapec, iba ak Marienka je zlá.

(A_5) Janko a Marienka sú deti, čarodejnica nie.

(A_6) Rovnako ako čarodejnica, aj Marienka je silná.

(A_7) Janko alebo Marienka je chlapec.

(A_8) Ak je niekto (zo spomínaných) silný, nie je dievča a Janka ochráni.

(A_9) Ak by to, že Marienka *je Jankovým súrodencom*, znamenalo, že ho ochráni, tak ho čarodejnica určite nezje.

V jazyku $\mathcal{L}$ ďalej sformalizujte formulami B_1, B_2 a B_3 výroky:

(B_1) Marienka je dievča.

(B_2) Janko je dievča.

(B_3) Ak je Marienka *Jankovým súrodencom*, čarodejnica zje Janka.

b) Vytvorte štruktúru $\mathcal{M}$ pre jazyk $\mathcal{L}$, ktorá je modelom teórie T.

c) Pre každú z formúl B_1, B_2, B_3 (jednotlivo) rozhodnite, či je možné, aby bola pravdivá v nejakom modeli teórie T.

Svoju odpoveď detailne zdôvodnite na základe definície modelu, štruktúry a pravdivosti výrokovologických formúl v nej.

2.3.6 (Podľa Barker-Plummer, Barwise a Etchemendy [1])

a) Sformalizujte nasledujúce výroky ako teóriu $T = \{A_1, \dots, A_{12}\}$ v jazyku výrokovologickej časti logiky prvého rádu $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{triangle}^1, \mathrm{square}^1, \mathrm{circle}^1, \mathrm{small}^1, \mathrm{medium}^1, \mathrm{large}^1, \mathrm{same\_size}^2, \mathrm{larger}^2\}$. Zamýšľanou doménou sú rovinné geometrické útvary. Zamýšľaný význam predikátových symbolov je:

Predikát	Význam
triangle(x)	x je trojuholník
square(x)	x je štvorec
circle(x)	x je kruh
small(x)	x je malý
medium(x)	x je stredne veľký
large(x)	x je veľký
same_size(x, y)	x a y majú rovnakú veľkosť
larger(x, y)	x je väčší než y

(A_1) Ak A je trojuholník, tak B je tiež trojuholník.

(A_2) C je trojuholník, ak je ním B.

(A_3) A a C sú oba trojuholníky, iba ak aspoň jeden z nich je veľký.

(A_4) A je trojuholník, no C nie je veľký.

(A_5) Ak C je malý a D je kruh, tak D nie je ani veľký, ani malý.

(A_6) C je stredne veľký iba ak žiadny z D, E, F nie je štvorec.

(A_7) D je malý kruh, jedine že by A bol malý.

(A_8) E je veľký práve vtedy, keď je pravda, že D je veľký, ak a iba ak je taký F.

(A_9) D a E sú rovnakej veľkosti.

(A_{10}) D a E majú rovnaký tvar.

(A_{11}) F je buď štvorec alebo kruh, ak je veľký.

(A_{12}) C je väčší než E, iba ak B je väčší ako C.

b) Zistite, aké tvary a veľkosti musia mať útvary A, … , F, aby boli pravdivé výroky A_1–A_{12}. Predpokladajte pritom, že každý z útvarov má práve jeden z uvedených tvarov a práve jednu z uvedených veľkostí.

c) Vytvorte štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ pre jazyk $\mathcal{L}$, ktorá je modelom teórie T, kde útvary A, … , F majú tvar a veľkosť, ktoré ste určili v predchádzajúcom bode. Interpretácie predikátov v $\mathcal{M}$ musia pritom mať zamýšľaný význam, teda mať nasledujúce dodatočné vlastnosti:

- každý geometrický má práve jednu veľkosť, čiže pre každé $u \in D$ existuje $P \in \{\mathsf{small}, \mathsf{medium}, \mathsf{large}\}$ také, že $u \in i(P)$, a množiny $i(\mathsf{small})$, $i(\mathsf{medium})$, $i(\mathsf{large})$ sú disjunktné;
- každý geometrický má práve jeden tvar, čiže pre každé $u \in D$ existuje $P \in \{\mathsf{triangle}, \mathsf{square}, \mathsf{circle}\}$ také, že $u \in i(P)$, a množiny $i(\mathsf{triangle})$, $i(\mathsf{square})$, $i(\mathsf{circle})$ sú disjunktné;
- interpretácia predikátu same_size je relácia ekvivalencie na D taká, že pre všetky $x, y \in D$:

$$\begin{aligned}&(x, y) \in i(\mathsf{same\_size}) \text{ vtt}\\ &\quad x, y \in i(\mathsf{small}) \text{ alebo } x, y \in i(\mathsf{medium}) \text{ alebo } x, y \in i(\mathsf{large});\end{aligned}$$

- interpretácia predikátu larger je ostré čiastočné usporiadanie na D, pričom pre každé $x, y \in D$:

$$\begin{aligned}(x, y) \in i(\mathsf{larger}) \text{ vtt } & x \in i(\mathsf{large}) \text{ a } y \in i(\mathsf{medium}) \cup i(\mathsf{small}),\\ & \text{alebo } x \in i(\mathsf{medium}) \text{ a } x \in i(\mathsf{small}).\end{aligned}$$

2.4 Ohodnotenia

2.4.1 Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokových formúl logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{Alena}, \mathsf{Karol}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathsf{učiteľ}, \mathsf{pozná}\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, kde:

$$\begin{aligned}
D &= \{\text{školník}, \text{učiteľka218}, \text{upratovačka1}, \text{upratovačka2}\} \\
i(\text{Alena}) &= \text{učiteľka218} \\
i(\text{Karol}) &= \text{školník} \\
i(\text{učiteľ}) &= \{\text{učiteľka218}\} \\
i(\text{pozná}) &= \{(\text{školník}, \text{učiteľka218}), (\text{učiteľka218}, \text{školník}), \\
&\qquad (\text{upratovačka1}, \text{upratovačka2})\}
\end{aligned}$$

Zostrojte výrokologické ohodnotenie v pre $\mathcal{L}$ zhodné s $\mathcal{M}$.

Riešenie. Na to, aby sme zostrojili výrokovologické ohodnotenie v zhodné s $\mathcal{M}$, musia sa zhodovať na všetkých predikátových atómoch jazyka $\mathcal{L}$, t.j., $v \models A$ vtt $\mathcal{M} \models A$ pre každý atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$. Preto potrebujeme pre každý predikátový atóm $A \in \mathcal{PA}_{\mathcal{L}}$ rozhodnúť, či je v $\mathcal{M}$ pravdivý alebo nie. V prípade pravdivosti mu v ohodnotení v priradíme hodnotu t, v opačnom prípade hodnotu f.

Zostrojme teda množinu všetkých predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{PA}_{\mathcal{L}} = \{&\text{učiteľ(Alena)}, \text{učiteľ(Karol)}, \\
&\text{pozná(Alena, Alena)}, \text{pozná(Karol, Karol)}, \text{pozná(Alena, Karol)}, \text{pozná(Karol, Alena)}\}
\end{aligned}$$

Následne zostrojíme hľadané ohodnotenie v tak, že pre každý atóm určíme, či je alebo nie je pravdivý v $\mathcal{M}$, a podľa toho mu vo v priradíme príslušnú pravdivostnú hodnotu:

$$\begin{array}{rl}
i(\text{Alena}) \in i(\text{učiteľ}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{učiteľ(Alena)} & v = \{\text{učiteľ(Alena)} \mapsto t, \\
i(\text{Karol}) \notin i(\text{učiteľ}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{učiteľ(Karol)} & \quad \text{učiteľ(Karol)} \mapsto f, \\
(i(\text{Alena}), i(\text{Alena})) \notin i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{pozná(Alena, Alena)} & \quad \text{pozná(Alena, Alena)} \mapsto f, \\
(i(\text{Karol}), i(\text{Karol})) \notin i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \not\models \text{pozná(Karol, Karol)} & \quad \text{pozná(Karol, Karol)} \mapsto f, \\
(i(\text{Alena}), i(\text{Karol})) \in i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{pozná(Alena, Karol)} & \quad \text{pozná(Alena, Karol)} \mapsto t, \\
(i(\text{Karol}), i(\text{Alena})) \in i(\text{pozná}) \text{ takže } \mathcal{M} \models \text{pozná(Karol, Alena)} & \quad \text{pozná(Karol, Alena)} \mapsto t\}
\end{array}$$

♮

2.4.2 Príklad. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Adam}, \text{Karol}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{študent}^1, \text{profesor}^1, \text{učí}^2\}$. Nech

$$\begin{aligned}
v = \{&\text{študent(Adam)} \mapsto t, &&\text{študent(Karol)} \mapsto f, \\
&\text{profesor(Adam)} \mapsto f, &&\text{profesor(Karol)} \mapsto t, \\
&\text{učí(Adam, Karol)} \mapsto f, &&\text{učí(Karol, Adam)} \mapsto f\}
\end{aligned}$$

je čiastočné ohodnotenie predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$. Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}$ zhodnú s v na dom v.

Riešenie. Na to, aby sme zostrojili štruktúru $\mathcal{M}$ zhodnú s v na dom v, teda na definičnom obore ohodnotenia v, potrebujeme pre každý predikátový atóm $A \in \operatorname{dom} v$, pre ktorý $v(A) = t$ zabezpečiť, aby bol A pravdivý v $\mathcal{M}$, teda $\mathcal{M} \models A$. Naopak, pre každý predikátový atóm $B \in \operatorname{dom} v$, pre ktorý $v(B) = f$ musíme zabezpečiť, aby $\mathcal{M} \not\models B$. Konkrétne:

$$
\begin{array}{lll}
v(\text{študent(Adam)}) = t, & \text{takže } \mathcal{M} \models \text{študent(Adam)}, & \text{teda } i(\text{Adam}) \in i(\text{študent}); \\
v(\text{študent(Karol)}) = f, & \text{takže } \mathcal{M} \not\models \text{študent(Karol)}, & \text{teda } i(\text{Karol}) \notin i(\text{študent}); \\
v(\text{profesor(Adam)}) = f, & \text{takže } \mathcal{M} \not\models \text{profesor(Adam)}, & \text{teda } i(\text{Adam}) \notin i(\text{profesor}); \\
v(\text{profesor(Karol)}) = t, & \text{takže } \mathcal{M} \models \text{profesor(Karol)}, & \text{teda } i(\text{Karol}) \in i(\text{profesor}); \\
v(\text{učí(Adam, Karol)}) = f, & \text{takže } \mathcal{M} \not\models \text{učí(Adam, Karol)}, & \text{teda } (i(\text{Adam}), i(\text{Karol})) \notin i(\text{učí}); \\
v(\text{učí(Karol, Adam)}) = f, & \text{takže } \mathcal{M} \not\models \text{učí(Karol, Adam)}, & \text{teda } (i(\text{Karol}), i(\text{Adam})) \notin i(\text{učí}).
\end{array}
$$

Všimnime si, že ohodnotenie v nepriraďuje pravdivostnú hodnotu všetkým predikátovým atómom z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. V prípade týchto atómov nezáleží, či budú alebo nebudú pravdivé v $\mathcal{M}$. Teraz už jednoducho zostrojíme štruktúru $\mathcal{M} = (D, i)$ napríklad takto:

Zvolíme si doménu s prinajmenšom rovnakou kardinalitou ako množina konštánt $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ a každou konštantou pomenujeme iný prvok:

$$
\begin{aligned}
D &= \{s352, s667, s986, p520, p830, p921\}, \\
i(\text{Adam}) &= s667, \\
i(\text{Karol}) &= p830.
\end{aligned}
$$

Následne skonštruujeme interpretácie predikátov tak, aby v interpretujúcich množinách boli resp. neboli tieto prvky alebo ich n-tice tak, ako sme zistili vyššie:

$$
\begin{aligned}
i(\text{študent}) &= \{s352, s667, s986\}, \\
i(\text{profesor}) &= \{p520, p830, p921\}, \\
i(\text{učí}) &= \{(p520, s667), (p830, s352), (p830, s986)\}.
\end{aligned}
$$

♮

2.4.3

a) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Jack}, \text{Corona}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{pivo}^1, \text{pije}^2\}$. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, kde:

$$
\begin{aligned}
D &= \{s1, s2, s3, p1, p2\} \\
i(\text{Jack}) &= s3, \\
i(\text{Corona}) &= p1, \\
i(\text{pivo}) &= \{p1, p2\}, \\
i(\text{pije}) &= \{(s1, p1), (s2, p1), (s2, p2)\}
\end{aligned}
$$

Zostrojte výrokovologické ohodnotenie v pre $\mathcal{L}$ zhodné so štruktúrou $\mathcal{M}$.

b) Nech $\mathcal{L}$ je jazyk výrokovologickej časti logiky prvého rádu, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\text{Andy}, \text{Woody}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{hračka}^1, \text{chlapec}^1, \text{hrá\_sa}^2\}$. Nech

$$\begin{aligned} v = \{&\text{hračka}(\text{Woody}) \mapsto t, && \text{hračka}(\text{Andy}) \mapsto f, \\ &\text{chlapec}(\text{Andy}) \mapsto t, && \text{chlapec}(\text{Woody}) \mapsto f, \\ &\text{hrá\_sa}(\text{Andy}, \text{Woody}) \mapsto t, && \text{hrá\_sa}(\text{Woody}, \text{Andy}) \mapsto f\} \end{aligned}$$

je čiastočné ohodnotenie predikátových atómov jazyka $\mathcal{L}$. Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}$ zhodnú s v na dom v.

Literatúra

[1] Dave Barker-Plummer, Jon Barwise, and John Etchemendy. *Language, Proof and Logic*. CSLI Publications, second edition edition, 2011.