Problem5 讲解

一点点关于 Hamel Basis 的知识

计算机科学与技术　人名
学号

2023 年 10 月 23 日

一些题外话

- 一开始我自以为做出了 T5，但是被 lsa 佬发现我一开始就翻译错了...

一些题外话

- 一开始我自以为做出了 T5, 但是被 lsa 佬发现我一开始就翻译错了...
- 于是我赶紧学会了高等做法, 但是初等的证明需要 lsa 老师来完善.

一些题外话

- 一开始我自以为做出了 T5, 但是被 lsa 佬发现我一开始就翻译错了...
- 于是我赶紧学会了高等做法, 但是初等的证明需要 lsa 老师来完善.
- 时间原因我可能讲的快, 但是结束后的课件会发到群里.

前置知识: 度量空间 (Metric Space)

定义 (度量空间)

X 是集合. 如果存在 $d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 是 X 上双变量的函数, 满足如下三条性质:

a) 对任意的 x 和 y, $d(x,y) \geqslant 0$ 并且取等号当且仅当 $x = y$;

b) 对任意的 x 和 $y, d(x,y) = d(y,x)$;

c) 三角不等式: 对任意的 $x, y, z \in X$, 我们有 $d(x,z) \geqslant d(x,y) + d(y,z)$. 我们就称二元组 (X,d) 是一个距离空间或者度量空间. 函数 d 被称作该距离空间上的**距离函数**.

前置知识: 度量空间 (Metric Space)

定义 (度量空间)

X 是集合. 如果存在 $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 是 X 上双变量的函数, 满足如下三条性质:

a) 对任意的 x 和 y, $d(x, y) \geqslant 0$ 并且取等号当且仅当 $x = y$;

b) 对任意的 x 和 $y, d(x, y) = d(y, x)$;

c) 三角不等式: 对任意的 $x, y, z \in X$, 我们有 $d(x, z) \geqslant d(x, y) + d(y, z)$. 我们就称二元组 (X, d) 是一个距离空间或者度量空间. 函数 d 被称作该距离空间上的**距离函数**.

* **完备空间**或者完备度量空间是具有下述性质的空间：空间中的任何柯西序列都收敛在该空间之内.

前置知识: 开集与闭集

在 $\mathbb{R}$ 中, 我们可以定义开集为开区间的并, 闭集为闭区间的并.

前置知识: 开集与闭集

在 $\mathbb{R}$ 中, 我们可以定义开集为开区间的并, 闭集为闭区间的并.
对于一般的度量空间 (X,d), 我们有更一般的定义:

前置知识: 开集与闭集

在 $\mathbb{R}$ 中, 我们可以定义开集为开区间的并, 闭集为闭区间的并. 对于一般的度量空间 (X, d), 我们有更一般的定义:

定义

(X, d) 是距离空间. 对任意的点 $x \in X, r > 0$, 我们称 $B(x, r) = \{y \in X \mid d(y, x) < r\}$ 为以 x 为中心以 r 为半径的开球. 如果 $U \subset X$ 是若干开球的并, 即

$$U = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B\left(x_\alpha, r_\alpha\right) \text{(指标集}\mathcal{A}\text{是任意的)}$$

, 就称 X 是距离空间 (X, d) 中的开集.

前置知识: 开集与闭集

在 $\mathbb{R}$ 中, 我们可以定义开集为开区间的并, 闭集为闭区间的并. 对于一般的度量空间 (X, d), 我们有更一般的定义:

定义

(X, d) 是距离空间. 对任意的点 $x \in X, r > 0$, 我们称 $B(x, r) = \{y \in X \mid d(y, x) < r\}$ 为以 x 为中心以 r 为半径的开球. 如果 $U \subset X$ 是若干开球的并, 即

$$U = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} B(x_\alpha, r_\alpha)\ (\text{指标集}\mathcal{A}\text{是任意的})$$

, 就称 X 是距离空间 (X, d) 中的开集.

如果 F 的补集是开集, 那么 F 是**闭集**. 其中空集和全集都**既是开集又是闭集**.

前置知识: 内点

接上一张: 闭的意思可以解释为对这个集合中的点列取极限是封闭的.

前置知识: 内点

接上一张: 闭的意思可以解释为对这个集合中的点列取极限是封闭的.

定义 (内点)

对于任意的集合 $Y \subset X$, 如果对 $y \in Y$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(y, \varepsilon) \subset Y$, 我们就称 y 是 Y 的一个内点. 我们用 $\dot{Y}$ 表示 Y 的内点所组成的集合并称之为 Y 的内部.

前置知识: 稠密集 (Dense Set)

定义 (Dense Set)

给定距离空间 (X, d)， $Y \subset X$ 是子集. 如果对任意的 $x \in X$ 和任意的 $\varepsilon > 0$，都存在 $y \in Y$ ，使得 $d(y, x) < \varepsilon$, 我们就称 Y 在 X 中是稠密的.

贝尔范畴定理 (Baire Category Theorem)

定理 (Baire)

(X, d) 是完备的距离空间, 那么任意可数个稠密的开集的交仍然是稠密的, 即若 $\{U_n\}_{n\geqslant 1}$ 是可数个稠密的开集，那么 $U_\infty = \bigcap_{n\geqslant 1} U_n$ 是稠密的.

Hamel 基

定义 (Hamel)

(OTIS-Excerpts)$\mathbb{R}$ 有一个作为 $\mathbb{Q}$ 里的向量空间的基. 因此, 存在无穷实数集合 $\{e_\alpha\}$ 使得对于任意实数 $x \in \mathbb{R}$, 存在一种唯一的线性表示

$$x = a_1 e_{\alpha_1} + a_2 e_{\alpha_2} + \cdots + a_n e_{\alpha_n}.$$

这些数 $\{e_\alpha\}$ 被叫做一组哈默尔基 (Hamel basis).
事实上, 你可以这样想:

$$\mathbb{R} = \{a_1 + \sqrt{2}a_2 + \sqrt{3}a_3 + a_4\pi + a_5 e + \cdots \mid a_1, \cdots \in \mathbb{Q}\}$$

Hamel 基

定义 (Hamel)

(OTIS-Excerpts)$\mathbb{R}$ 有一个作为 $\mathbb{Q}$ 里的向量空间的基. 因此, 存在无穷实数集合 $\{e_\alpha\}$ 使得对于任意实数 $x \in \mathbb{R}$, 存在一种唯一的线性表示

$$x = a_1 e_{\alpha_1} + a_2 e_{\alpha_2} + \cdots + a_n e_{\alpha_n}.$$

这些数 $\{e_\alpha\}$ 被叫做一组哈默尔基 (Hamel basis).
事实上, 你可以这样想:

$$\mathbb{R} = \{a_1 + \sqrt{2}a_2 + \sqrt{3}a_3 + a_4\pi + a_5 e + \cdots \mid a_1, \cdots \in \mathbb{Q}\}$$

题目是证明 Hamel 基的元素是不可数的.

解答

证明.

设存在 $\{e_i\}_{i=1,2,\cdots}$ 是完备空间 V 上的一组可数的基, 那么对于任意的 $k \geq 1$, 定义 V 的子空间

$$V_k = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}.$$

这里的 $\operatorname{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ 可以看做 $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_k$. 构成的集合.

解答

证明.

设存在 $\{e_i\}_{i=1,2,\cdots}$ 是完备空间 V 上的一组可数的基, 那么对于任意的 $k \geq 1$, 定义 V 的子空间

$$V_k = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}.$$

这里的 $\operatorname{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ 可以看做 $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_k$. 构成的集合.
根据完备空间的定义, V_k 是一个闭集.

解答

证明.

设存在 $\{e_i\}_{i=1,2,\cdots}$ 是完备空间 V 上的一组可数的基, 那么对于任意的 $k \geq 1$, 定义 V 的子空间

$$V_k = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}.$$

这里的 $\operatorname{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ 可以看做 $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_k$. 构成的集合.

根据完备空间的定义, V_k 是一个闭集.我们现在说明, 对于任意的 $k \geq 1, V_k$ 的内部是空集.

解答

证明.

设存在 $\{e_i\}_{i=1,2,\cdots}$ 是完备空间 V 上的一组可数的基，那么对于任意的 $k \geq 1$，定义 V 的子空间

$$V_k = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}.$$

这里的 $\mathrm{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ 可以看做 $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_k$. 构成的集合.

根据完备空间的定义，V_k 是一个闭集.我们现在说明，对于任意的 $k \geq 1, V_k$ 的内部是空集.

任取 $v \in V, \varepsilon > 0$ 有 $v + \varepsilon e_{k+1} \notin V_k$，说明 v 不是 V_k 的内点.

解答

证明.

设存在 $\{e_i\}_{i=1,2,\cdots}$ 是完备空间 V 上的一组可数的基, 那么对于任意的 $k \geq 1$, 定义 V 的子空间

$$V_k = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}.$$

这里的 $\mathrm{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ 可以看做 $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_k$. 构成的集合.

根据完备空间的定义, V_k 是一个闭集.我们现在说明, 对于任意的 $k \geq 1, V_k$ 的内部是空集.

任取 $v \in V, \varepsilon > 0$ 有 $v + \varepsilon e_{k+1} \notin V_k$, 说明 v 不是 V_k 的内点.

根据定义, 有

$$V = \bigcup_{k \geqslant 1} V_k$$

解答

证明.

我们设 $U_n = V - V_n$, 根据定义, U_n 是一个闭集的补集, 所以是开集. 因为 V_n 的内部为空集, 所以这是**稠密的**.

解答

证明.

我们设 $U_n = V - V_n$, 根据定义, U_n 是一个闭集的补集, 所以是开集. 因为 V_n 的内部为空集, 所以这是**稠密的**.

根据 Baire 定理, $U = \bigcap_{n\geqslant 1} U_n$ 是稠密的.

解答

证明.

我们设 $U_n = V - V_n$, 根据定义, U_n 是一个闭集的补集, 所以是开集. 因为 V_n 的内部为空集, 所以这是**稠密的**.

根据 Baire 定理, $U = \bigcap_{n\geqslant 1} U_n$ 是稠密的.

我们注意到 $V = \bigcup_{k\geqslant 1} V_k$ 的补集恰好就是 U, 所以 V 的内部为空.

解答

证明.

我们设 $U_n = V - V_n$, 根据定义, U_n 是一个闭集的补集, 所以是开集. 因为 V_n 的内部为空集, 所以这是**稠密的**.

根据 Baire 定理, $U = \bigcap_{n\geqslant 1} U_n$ 是稠密的.

我们注意到 $V = \bigcup_{k\geqslant 1} V_k$ 的补集恰好就是 U, 所以 V 的内部为空.

但是 V 的内部不为空, 这就导出了矛盾. $\square$

时间原因,Baire 定理的证明不说了. 但是在附录里有 Baire 定理的证明.
感谢大家!

附录:Baire 定理的证明

Baire.

任选 $x \in X$ 和 ε_0 ，我们将在 U_∞ 中找到一个点 x_∞ ，使得 $d(x_\infty, x) < 2\varepsilon_0$. 为此, 我们将归纳地构造 X 中的点列 $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$.

附录:Baire 定理的证明

Baire.

任选 $x \in X$ 和 ε_0 ，我们将在 U_∞ 中找到一个点 x_∞ ，使得 $d(x_\infty, x) < 2\varepsilon_0$. 为此, 我们将归纳地构造 X 中的点列 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$.

首先, 根据 U_1 的稠密性, 存在 $x_1 \in U_1$, 使得 $d(x_1, x) < \varepsilon_0$. 再根据 U_1 是开集, 我们可以找到 $\varepsilon_1 > 0$, 使得 $\overline{B(x_1, 2\varepsilon_1)} \subset U_1$, 其中 $\overline{B(x_1, 2\varepsilon_1)}$ 是闭球, 即 $\overline{B(x_1, 2\varepsilon_1)} = \{y \in X \mid d(y, x) \leqslant 2\varepsilon_1\}$.

附录:Baire 定理的证明

Baire.

任选 $x \in X$ 和 ε_0，我们将在 U_∞ 中找到一个点 x_∞，使得 $d(x_\infty, x) < 2\varepsilon_0$. 为此, 我们将归纳地构造 X 中的点列 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$.

首先, 根据 U_1 的稠密性, 存在 $x_1 \in U_1$, 使得 $d(x_1, x) < \varepsilon_0$. 再根据 U_1 是开集, 我们可以找到 $\varepsilon_1 > 0$，使得 $\overline{B(x_1, 2\varepsilon_1)} \subset U_1$, 其中 $\overline{B(x_1, 2\varepsilon_1)}$ 是闭球, 即 $\overline{B(x_1, 2\varepsilon_1)} = \{y \in X \mid d(y, x) \leqslant 2\varepsilon_1\}$.

另外, 通过缩小 ε_1，我们还可以要求 $2\varepsilon_1 < \varepsilon_0$. 我们用 x_1 代替 x, 用 ε_1 代替 ε_0, 重复上面的过程: 根据 U_2 的稠密性, 存在 $x_2 \in U_2$, 使得 $d(x_2, x_1) < \varepsilon_1$. 根据 U_2 是开集, 我们可以找到 $\varepsilon_2 > 0$, 使得 $\overline{B(x_2, 2\varepsilon_2)} \subset U_2$ 并且可以进一步要求 $2\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

附录:Baire 定理的证明

Baire.

任选 $x \in X$ 和 ε_0 ，我们将在 U_∞ 中找到一个点 x_∞ ，使得 $d(x_\infty, x) < 2\varepsilon_0$. 为此，我们将归纳地构造 X 中的点列 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$.

首先，根据 U_1 的稠密性，存在 $x_1 \in U_1$，使得 $d(x_1, x) < \varepsilon_0$. 再根据 U_1 是开集，我们可以找到 $\varepsilon_1 > 0$ ，使得 $\overline{B(x_1, 2\varepsilon_1)} \subset U_1$，其中 $\overline{B(x_1, 2\varepsilon_1)}$ 是闭球，即 $\overline{B(x_1, 2\varepsilon_1)} = \{y \in X \mid d(y, x) \leqslant 2\varepsilon_1\}$.

另外，通过缩小 ε_1 ，我们还可以要求 $2\varepsilon_1 < \varepsilon_0$. 我们用 x_1 代替 x，用 ε_1 代替 ε_0，重复上面的过程：根据 U_2 的稠密性，存在 $x_2 \in U_2$，使得 $d(x_2, x_1) < \varepsilon_1$. 根据 U_2 是开集，我们可以找到 $\varepsilon_2 > 0$，使得 $\overline{B(x_2, 2\varepsilon_2)} \subset U_2$ 并且可以进一步要求 $2\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. □

附录:Baire 定理的证明

证明.

重复以上过程, 我们就得到了 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 和数列 $\{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 0}$ (其中 $x_0 = x, \varepsilon_0 = \varepsilon$), 使得对任意的 $n \geqslant 0$, 有

1) $x_{n+1} \in U_{n+1}$ 并且 $d(x_{n+1}, x_n) < \varepsilon_n$;
2) $\overline{B(x_{n+1}, 2\varepsilon_{n+1})} \subset U_{n+1}$;
3) $0 < 2\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$

附录:Baire 定理的证明

证明.

重复以上过程, 我们就得到了 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 和数列 $\{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 0}$ (其中 $x_0 = x, \varepsilon_0 = \varepsilon$), 使得对任意的 $n \geqslant 0$, 有

1) $x_{n+1} \in U_{n+1}$ 并且 $d(x_{n+1}, x_n) < \varepsilon_n$;
2) $\overline{B(x_{n+1}, 2\varepsilon_{n+1})} \subset U_{n+1}$;
3) $0 < 2\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$

特别地, 根据第三条, 我们有 $\varepsilon_{n+k} < 2^{-k}\varepsilon_n$.

$\square$

附录:Baire 定理的证明

证明.

我们现在说明 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 Cauchy 列. 对任意的自然数 n 和 p, 我们有

$$
\begin{aligned}
d\left(x_{n+p}, x_n\right) &\leqslant d\left(x_{n+p}, x_{n+p-1}\right)+d\left(x_{n+p-2}, x_{n+p-2}\right)+\cdots+d\left(x_{n+1}, x_n\right) \\
&< \varepsilon_{n+p}+\varepsilon_{n+p-1}+\cdots+\varepsilon_{n+1} \\
&< 2^{-p-1} \varepsilon_n+2^{-p-2} \varepsilon_n+\cdots+\varepsilon_n \\
&< 2 \varepsilon_n .
\end{aligned}
$$

附录:Baire 定理的证明

证明.

我们现在说明 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 Cauchy 列. 对任意的自然数 n 和 p, 我们有

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leqslant d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-2}, x_{n+p-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &< \varepsilon_{n+p} + \varepsilon_{n+p-1} + \cdots + \varepsilon_{n+1} \\ &< 2^{-p-1}\varepsilon_n + 2^{-p-2}\varepsilon_n + \cdots + \varepsilon_n \\ &< 2\varepsilon_n. \end{aligned}$$

这表明, 对一切 $p \geqslant 0$, $\{x_{n+p}\}_{p\geqslant 1}$ 都落在 $\overline{B(x_n, 2\varepsilon_n)}$ 中. 我们注意到, 上面的不等式直接给出

$$d(x_{n+p}, x_n) < 2^{-n+p}\varepsilon + 2^{-n+p-1}\varepsilon + \cdots + 2^{-n+1}\varepsilon = 2^{-n}\varepsilon$$

附录:Baire 定理的证明

证明.

所以 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 Cauchy 列, 根据 X 的完备性, 存在 $x_\infty \in X$, 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$.

附录:Baire 定理的证明

证明.

所以 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 Cauchy 列, 根据 X 的完备性, 存在 $x_\infty \in X$, 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$.
特别地, 根据 $\{x_{n+p}\}_{p\geqslant 1} \subset \overline{B(x_n, 2\varepsilon_n)}$, 我们知道 $x_\infty \in \overline{B(x_n, 2\varepsilon_n)}$ (这是闭集).
从而对任意的 $n \geqslant 1$, $x_\infty \in U_n$, 所以, $x_\infty \in U_\infty$.

附录:Baire 定理的证明

证明.

所以 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 Cauchy 列, 根据 X 的完备性, 存在 $x_\infty \in X$, 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$.
特别地, 根据 $\{x_{n+p}\}_{p\geqslant 1} \subset \overline{B(x_n, 2\varepsilon_n)}$, 我们知道 $x_\infty \in \overline{B(x_n, 2\varepsilon_n)}$ (这是闭集).
从而对任意的 $n \geqslant 1$, $x_\infty \in U_n$, 所以, $x_\infty \in U_\infty$.
特别地, 在最后一个不等式中取 $n = 0$, 我们有

$$d(x_p, x_0) < \varepsilon.$$

令 $p \to \infty$, 我们就得到 $d(x_\infty, x) < 2\varepsilon$.
我们完成了证明. $\square$