厦门大学微积分（III-2）课程期末试卷

经管类试卷：（A 卷）　　考试日期：2017.6.14

一、解：原式 $=\int_0^1[(2x^3-x^2)+(x+x^4)\cdot 2x]\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1(2x^5+2x^3+x^2)\mathrm{d}x \ =\frac{7}{6}\text{。}$$

二、解：摆线的参数方程为：$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t, 0\le t\le 2\pi$

$$ds=\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt=\sqrt{(-3a\sin t\cos^2 t)^2+(3a\cos t\sin^2 t)^2}dt=3a\left|\sin t\cos t\right|dt$$

原式 $=\int_0^{2\pi} \ a^{4/3}(\cos^4 t+\sin^4 t)3a\left|\sin t\cos t\right|dt$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ a^{4/3}(\cos^4 t+\sin^4 t)3a\sin t\cos tdt$$

$$=12a^{7/3}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ \cos^5 t\sin tdt+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ \sin^5 t\cos tdt]$$

$$=12a^{7/3}[-\frac{1}{6}cos^6 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{6}\sin^6 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}]=4a^{7/3}$$

三、对应的齐次方程的特征方程 $\lambda^2+3\lambda+2=0$，得 $\lambda=-1,-2$，_

故齐次方程的通解为 $Y_x=C_1(-1)^x+C_2(-2)^x$。

再求原方程的一个特解 y_x^*。由于1不是上述特征方程的根，于是令 $y_x^*=ax^2+bx+c$

代入原方程得 $6ax^2+(10a+6b)x+7a+5b+6c=6x^2+4x+20$，解得 $a=1$、$b=-1$、$c=3$，特解 $y_x^*=x^2-x+3$。故通解 $y_x=Y_x+y_x^*=C_1(-1)^x+C_2(-2)^x+x^2-x+3$。

四、解：设 $P=x^4+4xy^3$、$Q=6x^2y^2-5y^4$，有 $\frac{\partial P}{\partial y}=12xy^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$。

则存在一个二元函数 $u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u=(x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y$ 成立。且有，取折线段：$(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$ 有，

$$u(x,y)=\int_0^x(x^4+4x\cdot 0)\mathrm{d}x+\int_0^y(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y=\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5\text{。}$$

于是微分方程 $(x^4+4xy^3)\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y=0$ 的通解为 $\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5=C$

五、解： $f(x)=\ln(2+x-3x^2)=\ln 2+\ln(1-x)+\ln(1+\frac{3}{2}x)$ 。

由 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ ，且成立的收敛区间为 $x\in(-1,1]$ ，

可得 $\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ ，且 $x\in[-1,1)$ ；

$\ln(1+\frac{3}{2}x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n$ ，且 x Î $(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$。

由函数项级数收敛性质可知， $f(x)=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1+(-\frac{3}{2})^n]x^n$ ，

收敛区间为 x Î $(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$。

六、解：将原方程 $\int_0^x\left[2y(t)+\sqrt{t^2+y^2(t)}\right]\mathrm{d}t=xy(x)$ 两端对 x 求导，得

$$2y+\sqrt{x^2+y^2}=xy'+y$$

即
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$$

令 $\frac{y}{x}=u$ ，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$

于是原方程可再化为 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+u^2}$ ，即 $\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分，可得 $\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln|x|+C_1\Rightarrow u+\sqrt{1+u^2}=Cx$ ，其中 $C=\pm e^{C_1}$ 。

变量还原得原方程的通解为 $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$ 。将 $y|_{x=1}=0$ 代入得 $C=1$

故初值问题的解为 $y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2$ ，因为 $x\neq 0$ ，可再化简得 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ 。

七、解：微分方程对应齐次方程的特征方程为 $r^2-2r+1=0$，

其根为 $r_{1,2}=1$，（2 分）

故对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2xe^x$ 。

因为 $f(x)=e^x(x-1),\lambda=1$ 是特征方程的二重根，

故原方程的特解设为 $Y^*=x^2e^x(ax+b)$，

代入原方程得 $a=\frac{1}{6}, b=-\frac{1}{2}$，从而 $Y^*=x^2(\frac{1}{6}x-\frac{1}{2})e^x$。因此，原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2xe^x+(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2)e^x$。代入初始条件得 $\begin{cases} C_1=1 \\ C_1+C_2=1 \end{cases}$，解得 $C_1=1, C_2=0$，

所以原方程的特解为 $y=e^x+(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2)e^x$

八、解：在 L 包围的区域内作顺时针方向的小椭圆周

$$L_1: x=\varepsilon\cos\theta, y=\frac{\varepsilon}{2}\sin\theta, \theta\text{变化从}2\pi\text{到 }0$$

在 L 与 L_1 包围的区域 D 上， $\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{4y^2-8xy-x^2}{\left[x^2+4y^2\right]^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

及格林公式，有

$$\int_{L+L_1}\frac{(x+4y)dy+(x-y)dx}{x^2+4y^2}=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0$$

$$\therefore I=\int_L\frac{(x+4y)dy+(x-y)dx}{x^2+4y^2}=-\int_{L_1}\frac{(x+4y)dy+(x-y)dx}{x^2+4y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{(\varepsilon\cos\theta+4\cdot\frac{\varepsilon}{2}\sin\theta)\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cos\theta+(\varepsilon\cos\theta-(\frac{\varepsilon}{2}\sin\theta)\cdot(-\sin\theta)}{\varepsilon^2}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta=\frac{1}{2}\theta\Big|_0^{2\pi}=\pi$$

九、解：设 $s(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$

$$\because s(x)=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)''=x(\frac{x^2}{1-x})''$$

$$=x\left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2x}{(1-x)^3}\quad(-1<x<1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+n+1)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)(-\frac{1}{2})^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n$$

$$=s(-\frac{1}{2})-\frac{1}{3}=-\frac{8}{27}-\frac{9}{27}=-\frac{17}{27}\ .$$

十、解：令 $u_n=\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}}$，

1) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}}=1-1-0=0$　令 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x$。当 $x>0$ 时，$f'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$，

且因为 $f(0)=0$，所以 $\forall x\in(0,1)$，有 $f(x)>0$ 且单调增加。取 $x=\frac{1}{\sqrt{n}}$，当整数 n 从1增加到 ∞，x 从1递减到 0。则，$u_n=\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}}>0$ 且单调减少。故有，$u_n>0$ 且 $u_n>u_{n+1}$，$n=1,2,3,\ldots$。利用莱布尼兹判别法知，原交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛。又，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$$ 于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 具有相同的敛散性，则原级数条件收敛。（12 分）

十一、解：由 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^\lambda})^{a_n}=2$ 知，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^\lambda})^{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{a_n\ln(1+\frac{1}{n^\lambda})}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{a_n}{n^\lambda}}=2$

即：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^\lambda}}{\frac{1}{a_n}}=\ln 2$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\lambda}$ 有相同的敛散性，

于是，$\lambda>1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛；$\lambda\le1$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散。