第三章　多维随机变量及其分布

1.[一]　在一箱子里装有 12 只开关，其中 2 只是次品，在其中随机地取两次，每次取一只。考虑两种试验：（1）放回抽样，（2）不放回抽样。我们定义随机变量 X，Y 如下：

$$X=\begin{cases}0, \text{若第一次取出的是正品,}\\ 1, \text{若第一次取出的是次品。}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}0, \text{若第二次取出的是正品,}\\ 1, \text{若第二次取出的是次品。}\end{cases}$$

试分别就（1）（2）两种情况，写出 X 和 Y 的联合分布律。

解：（1）放回抽样情况

由于每次取物是独立的。由独立性定义知。

$$P\ (X=i,\quad Y=j)=P\ (X=i)P\ (Y=j)$$

$$P\ (X=0,\ Y=0\ )=\frac{10}{12}\cdot\frac{10}{12}=\frac{25}{36}$$

$$P(X=0,\ Y=1)=\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{12}=\frac{5}{36}$$

$$P(X=1,\ Y=0)=\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{12}=\frac{5}{36}$$

$$P(X=1,\ Y=1)=\frac{2}{12}\cdot\frac{2}{12}=\frac{1}{36}$$

或写成

Y \ X	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

（2）不放回抽样的情况

$$P\{X=0,\ Y=0\}=\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}=\frac{45}{66}$$

$$P\{X=0,\ Y=1\}=\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{10}{66}$$

$$P\{X=1,\ Y=0\}=\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{11}=\frac{10}{66}$$

$$P\{X=1,\ Y=1\}=\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}=\frac{1}{66}$$

或写成

Y \ X	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

3.[二] 盒子里装有 3 只黑球，2 只红球，2 只白球，在其中任取 4 只球，以 X 表示取到黑球的只数，以 Y 表示取到白球的只数，求 X，Y 的联合分布律。

X Y	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

解：（X，Y）的可能取值为(i, j)，i=0，1，2，3，　j=0，12，$i+j\geqslant 2$，联合分布律为

$$P\{X=0, Y=2\}=\frac{C_2^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{1}{35}$$

$$P\{X=1, Y=1\}=\frac{C_3^1C_2^1C_2^2}{C_7^4}=\frac{6}{35}$$

$$P\{X=1, Y=2\}=\frac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4}=\frac{6}{35}$$

$$P\{X=2, Y=0\}=\frac{C_3^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$$

$$P\{X=2, Y=1\}=\frac{C_3^2C_2^1C_2^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}$$

$$P\{X=2, Y=2\}=\frac{C_3^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$$

$$P\{X=3, Y=0\}=\frac{C_3^3C_2^1}{C_7^4}=\frac{2}{35}$$

$$P\{X=3, Y=1\}=\frac{C_3^3C_2^1}{C_7^4}=\frac{2}{35}$$

$$P\{X=3, Y=2\}=0$$

5.[三]　设随机变量（X，Y）概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), 0<x<2, 2<y<4 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$

（1）确定常数 k。（2）求 $P\{X<1, Y<3\}$

（3）求 $P\{X<1.5\}$　　（4）求 $P\{X+Y\leq 4\}$

分析：利用 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)dx\,dy=\iint\limits_{G\cap D_o} f(x,y)dx\,dy$ 再化为累次积分，

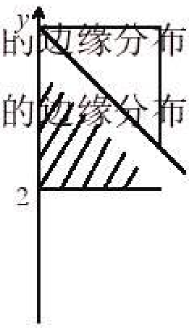
其中 $D_o=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{l}0<x<2,\\2<y<4\end{array}\right.\right\}$

解：（1）$\because 1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx\,dy=\int_0^2\int_2^1 k(6-x-y)dydx$，$\therefore k=\frac{1}{8}$

（2）$P(X<1,Y<3)=\int_0^1 dx\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{3}{8}$

（3）$P(X\leq 1.5)=P(X\leq 1.5,Y<\infty)=\int_0^{1.5}dx\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{27}{32}$

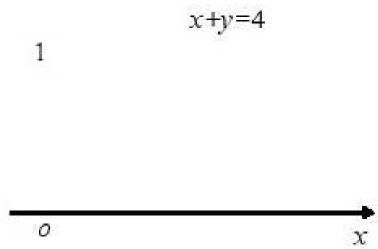
（4）$P(X+Y\leq 4)=\int_0^2 dx\int_0^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{2}{3}$



6.（1）求第 1 题中的随机变量（X、Y）的边缘分布律。

（2）求第 2 题中的随机变量（X、Y）的边缘分布律。

解：（1）① 放回抽样（第 1 题）



Y \ X	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

边缘分布律为

X	0	1	Y	0	1
$P_{i\cdot}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$P_{\cdot j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

② 不放回抽样（第 1 题）

Y \ X	0	1

Y		
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

边缘分布为

X	0	1		Y	0	1
$P_{i\cdot}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$		$P_{\cdot j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

（2）（X，Y）的联合分布律如下

Y \ X	0	1	2	3
0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

解：　X 的边缘分布律　　　　Y 的边缘分布律

X	0	1	2	3		Y	1	3
$P_{i\cdot}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		$P_{\cdot j}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{2}{8}$

7.．　设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x) & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$ 求边缘概率密度.

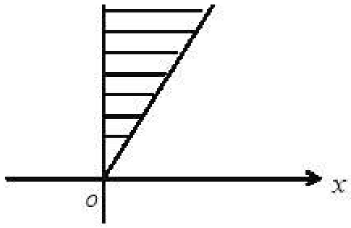
解：$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 4.8y(2-x)dy=2.4x^2(2-x) & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 4.8y(2-x)dx=2.4y(3-4y+y^2) & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

8.[六]　设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, 0<x<y\end{cases}$$ 求边缘概率密度。

$\quad 0,$ 其它.



解: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

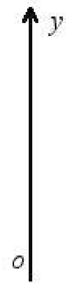
$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y e^{-y}dx=ye^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$

10．[七]　设二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, & x^2\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$

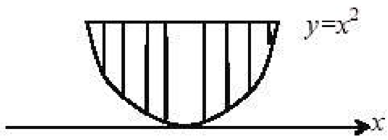
（1）试确定常数 c。（2）求边缘概率密度。

解: $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1dy\int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}}cx^2ydx=c\int_0^1\frac{2}{3}y^{\frac{5}{2}}dy=\frac{4}{21}c\Rightarrow c=\frac{21}{4}$

$X\sim f_X(x)=\begin{cases}\int_{x^2}^1\frac{21}{4}x^2ydy=\frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$



$Y\sim f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}}\frac{21}{4}d^2ydx=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}} & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$



15. 第 1 题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立。

解：放回抽样的情况

$P\{X=0, Y=0\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{25}{36}$

$P\{X=0, Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}=\frac{5}{36}$

$P\{X=1, Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\}=\frac{5}{36}$

$P\{X=1, Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{1}{36}$

在放回抽样的情况下，X 和 Y 是独立的

不放回抽样的情况：

$P\{X=0, Y=0\}=\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}=\frac{45}{66}$

$P\{X=0\}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

$P\{X=0\}=P\{X=0, Y=0\}+P\{X=0, Y=1\}=\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11}+\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{11}=\frac{5}{6}$

$P\{X=0\}=P\{X=0, Y=0\}+P\{Y=0, X=1\}=\frac{\quad}{12}\cdot\frac{\quad}{11}+\frac{\quad}{11}\cdot\frac{\quad}{11}=\frac{\quad}{6}$

$$P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$$

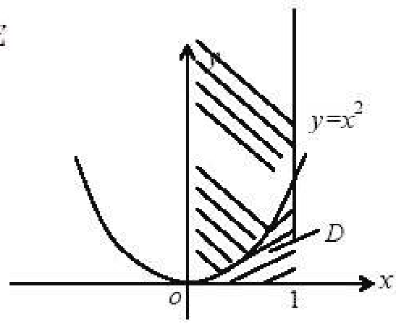
$$P\{X=0, Y=0\}\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$$

∴ X 和 Y 不独立

16.[十四] 设 X，Y 是两个相互独立的随机变量，X 在（0，1）上服从均匀分布。Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\frac{y}{2}}, y>0\\ 0, y\le 0.\end{cases}$

（1）求 X 和 Y 的联合密度。（2）设含有 a 的二次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$，试求有实根的概率。

解：（1）X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, x\in(0,1)\\ 0, 其它\end{cases}$



Y 的概率密度为

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, y>0\\ 0, y\le 0.\end{cases}$ 且知 X, Y 相互独立，

于是（X，Y）的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & 0<x<1, y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

（2）由于 a 有实跟根，从而判别式 $\Delta=4X^2-4Y\ge 0$

即：$Y\le X^2$ 记 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1, 0<y<x^2\}$

$$P(Y\le X^2)=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy=-\int_0^1 dx\int_0^{x^2}de^{-\frac{y}{2}}=1-\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=1-\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^0 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-\sqrt{2\pi}(\Phi(1)-\Phi(2))=1-\sqrt{2\pi}(0.8413-0.5)$$

$$=1-2.5066312\times 0.3413=1-0.8555=0.1445$$

$=1-2.5066312\times 0.3413=1-0.8555=0.1445$

23. 设某种商品一周的需要量是一个随机变量，其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases} te^{-t}, & t>0 \\ 0 & t\le 0 \end{cases}$$

并设各周的需要量是相互独立的，试求（1）两周（2）三周的需要量的概率密度。

解：（1）设第一周需要量为 X，它是随机变量

设第二周需要量为 Y，它是随机变量

且为同分布，其分布密度为

$$f(t)=\begin{cases} te^{-t}, & t>0 \\ 0 & t\le 0 \end{cases}$$

Z=X+Y 表示两周需要的商品量，由 X 和 Y 的独立性可知：

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x}ye^{-y} & x>0,y>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

∵ $z\geqslant 0$

∴ 当 $z<0$ 时，$f_z(z)=0$

当 $z>0$ 时，由和的概率公式知

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(z-y)f_y(y)dy$$

$$=\int_0^z (z-y)e^{-(z-y)}\cdot ye^{-y}dy=\frac{z^3}{6}e^{-z}$$

∴ $$f_z(z)=\begin{cases} \dfrac{z^3}{6}e^{-z}, & z>0 \\ 0 & z\le 0 \end{cases}$$

（2）设 z 表示前两周需要量，其概率密度为 $f_z(z)=\begin{cases} \dfrac{z^3}{6}e^{-z}, & z>0 \\ 0 & z\le 0 \end{cases}$

设ξ 表示第三周需要量，其概率密度为：

$$f_\xi(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \end{cases}$$

$$f_\xi(x)=\begin{cases} & \\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

ζ 与ξ 相互独立

$\eta=\zeta+\xi$ 表示前三周需要量

则：$\because \eta\geqslant 0$，$\therefore$ 当 $u<0$，　　$f_\eta(u)=0$

当 $u>0$ 时

$$\begin{aligned} f_\eta(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y)f_\xi(y)dy \\ &= \int_0^u \frac{1}{6}(u-y)^3 e^{-(u-y)}\cdot y e^{-y}dy \\ &= \frac{u^5}{120}e^{-u} \end{aligned}$$

所以η 的概率密度为

$$f_\eta(u)=\begin{cases} \dfrac{u^5}{120}e^{-u} & u>0 \\ 0 & u\le 0\end{cases}$$

30．　设某种型号的电子管的寿命（以小时计）近似地服从 N（160，20^2）分布。随机地选取 4 只求其中没有一只寿命小于 180 小时的概率。

解：设 X_1，X_2，X_3，X_4 为 4 只电子管的寿命，它们相互独立，同分布，其概率密度为：

$$f_T(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 20}e^{-\frac{(t-160)^2}{2\times 20^2}}$$

$$f\{X<180\}=F_X(180)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{20}\int_{-\infty}^{180}\frac{(t-160)^2}{2\times 20^2}dt$$

$$\underline{\underline{\text{令}\frac{t-160}{20}=u}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{1}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi(\frac{180-60}{20})$$

$\underline{\underline{\text{查表}}}0.8413$

设 $N=\min\{X_1，X_2，X_3，X_4\}$

$P\{N>180\}=P\{X_1>180，X_2>180，X_3>180，X_4>180\}$

$P\{N>180\}=P\{X_1>180, X_2>180, X_3>180, X_4>180\}$

$=P\{X>180\}^4=\{1-p[X<180]\}^4=(0.1587)^4=0.00063$

27.[二十八]　设随机变量（X，Y）的分布律为

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

46

（1）求 $P\{X=2|Y=2\}$，$P\{Y=3|X=0\}$

（2）求 $V=max(X, Y)$的分布律

（3）求 $U=min(X, Y)$的分布律

解：（1）由条件概率公式

$$P\{X=2|Y=2\}=\frac{P\{X=2, Y=2\}}{P\{Y=2\}}$$

$$=\frac{0.05}{0.01+0.03+0.05+0.05+0.05+0.08}$$

$$=\frac{0.05}{0.25}=0.2$$

同理 $P\{Y=3|X=0\}=\frac{1}{3}$

（2）变量 $V=max\{X, Y\}$

显然 V 是一随机变量，其取值为　V：0　1　2　3　4　5

$P\{V=0\}=P\{X=0 \quad Y=0\}=0$

$P\{V=1\}=P\{X=1, \ Y=0\}+P\{X=1, \ Y=1\}+P\{X=0, \ Y=1\}$

$=0.01+0.02+0.01=0.04$

$P\{V=2\}=P\{X=2, \ Y=0\}+P\{X=2, \ Y=1\}+P\{X=2, \ Y=2\}$

$+P\{Y=2, X=0\}+P\{Y=2, X=1\}$

$=0.03+0.04+0.05+0.01+0.03=0.16$

$P\{V=3\}=P\{X=3,\ Y=0\}+P\{X=3,\ Y=1\}+P\{X=3,\ Y=2\}+P\{X=3,\ Y=3\}$

$+P\{Y=3, X=0\}+P\{Y=3, X=1\}+P\{Y=3, X=2\}$

$=0.05+0.05+0.05+0.06+0.01+0.02+0.04=0.28$

$P\{V=4\}=P\{X=4,\ Y=0\}+P\{X=4,\ Y=1\}+P\{X=4,\ Y=2\}+P\{X=4,\ Y=3\}$

$=0.07+0.06+0.05+0.06=0.24$

$P\{V=5\}=P\{X=5,\ Y=0\}+\cdots\cdots+P\{X=5,\ Y=3\}$

$=0.09+0.08+0.06+0.05=0.28$

（3）显然 U 的取值为 0，1，2，3

$P\{U=0\}=P\{X=0,\ Y=0\}+\cdots\cdots+P\{X=0,\ Y=3\}+P\{Y=0,\ X=1\}$

$+\cdots\cdots+P\{Y=0,\ X=5\}=0.28$

同理　$P\{U=1\}=0.30$　$P\{U=2\}=0.25$　$P\{U=3\}=0.17$

或缩写成表格形式

（2）

V	0	1	2	3	4	5
P_k	0	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

（3）

U	0	1	2	3
P_k	0.28	0.30	0.25	0.17

（4）$W=V+U$ 显然 W 的取值为 0，1，$\cdots\cdots$8

$P\{W=0\}=P\{V=0\ U=0\}=0$

$P\{W=1\}=P\{V=0, U=1\}+P\{V=1 U=0\}$

$\because$　$V=\max\{X,\ Y\}=0$ 又 $U=\min\{X,\ Y\}=1$ 不可能

上式中的 $P\{V=0,\ U=1\}=0$，

又　$P\{V=1\ U=0\}=P\{X=1\ Y=0\}+P\{X=0\quad Y=1\}=0.2$

故　$P\{W=1\}=P\{V=0, U=1\}+P\{V=1,\ U=0\}=0.2$

$P\{W=2\}=P\{V+U=2\}=P\{V=2, U=0\}+P\{V=1, U=1\}$

$=P\{X=2\ Y=0\}+P\{X=0\quad Y=2\}+P\{X=1\quad Y=1\}$

$=0.03+0.01+0.02=0.06$

$P\{W=3\}=P\{V+U=3\}=P\{V=3, U=0\}+P\{V=2,\ U=1\}$

$=P\{X=3\ Y=0\}+P\{X=0,\ Y=3\}+P\{X=2,\ Y=1\}$

$+P\{X=1,\ Y=2\}=0.05+0.01+0.04+0.03=0.13$

$P\{W=4\}= P\{V=4, U=0\}+ P\{V=3，U=1\}+P\{V=2，U=2\}$
$=P\{X=4\ Y=0\}+ P\{X=3，Y=1\}+P\{X=1，Y=3\}$
$+ P\{X=2，Y=2\} =0.19$

$P\{W=5\}= P\{V+U=5\}=P\{V=5, U=0\}+ P\{V=5，U=1\}$
$+P\{V=3，U=2\} =P\{X=5\ Y=0\}+ P\{X=5，Y=1\}$
$+P\{X=3，Y=2\}+ P\{X=2，Y=3\} =0.24$

$P\{W=6\}= P\{V+U=6\}=P\{V=5, U=1\}+ P\{V=4，U=2\}$
$+P\{V=3，U=3\} =P\{X=5，Y=1\}+ P\{X=4，Y=2\}$
$+P\{X=3，Y=3\} =0.19$

$P\{W=7\}= P\{V+U=7\}=P\{V=5, U=2\}+ P\{V=4，U=3\}$
$=P\{V=5，U=2\} +P\{X=4，Y=3\}=0.6+0.6=0.12$

$P\{W=8\}= P\{V+U=8\}=P\{V=5, U=3\}+ P\{X=5，Y=3\}=0.05$

或列表为

W	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

[二十一] 设随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<1, 0<y<+\infty \\ 0 & ，其它 \end{cases}$$

（1）试确定常数 b；（2）求边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$

（3）求函数 $U=\max(X, Y)$的分布函数。

解：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\,dx=\int_0^1\int_0^{+\infty} be^{-(x+y)}dy\,dx=b[1-e^{-1}]$

$$\therefore\quad b=\frac{1}{1-e^{-1}}$$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

$$=\begin{cases} 0 & x\le 0\text{或}x\ge 1 \\ \int_0^{+\infty} be^{-(x+y)}dy=\frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 0<x<1 \end{cases}$$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

$$=\begin{cases} 0 & ，\quad y\le 0 \\ \int_0^1 be^{-(x+y)}dx=e^{-y} & y>0 \end{cases}$$

（3）$F_u(\omega)=P\{U\le u\}=P\{\max(X,Y)\le u\}=P\{X\le u, Y\le u\}$

$$=F(u,u)=\int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{u} f(x,y)dx\,dy$$

$$u<0,\ F_U(u)=0 \qquad 0\le u<1,\ F_U(u)=\int_0^u\int_0^u be^{-(x+y)}dx\,dy=\frac{(1-e^{-u})^2}{1-e^{-1}}$$

$$u\ge 1,\ F_U(u)=\int_0^u\int_0^1 be^{-(x+y)}dx\,dy=1-e^{-u}$$

第四章

2.[二]　某产品的次品率为 0.1，检验员每天检验 4 次。每次随机地抽取 10 件产品进行检验，如果发现其中的次品数多于 1，就去调整设备，以 X 表示一天中调整设备的次数，试求 E (X)。(设诸产品是否是次品是相互独立的。)

解：设表示一次抽检的 10 件产品的次品数为ξ

$P=P$（调整设备）$=P(\xi>1)=1-P(\xi\le 1)=1-[P(\xi=0)+P(\xi=1)]\overset{\text{查二项分布表}}{=\!=}$

$1-0.7361=0.2639$.

因此 X 表示一天调整设备的次数时 $X\sim B(4,\ 0.2639)$. $P(X=0)=\binom{4}{0}\times0.2639^0\times0.7361^4=0.2936$.

$P(X=1)=\binom{4}{1}\times0.2639^1\times0.7361^3=0.4210$, $P(X=2)=\binom{4}{2}\times0.2639^2\times0.7361^2=0.2264$.

$P(X=3)=\binom{4}{3}\times0.2639^3\times0.7361=0.0541$, $P(X=4)=\binom{4}{4}\times0.2639\times0.7361^0=0.0049$.从而

$E(X)=np=4\times0.2639=1.0556$

3.[三]　有 3 只球，4 只盒子，盒子的编号为 1，2，3，4，将球逐个独立地，随机地放入 4 只盒子中去。设 X 为在其中至少有一只球的盒子的最小号码（例如 X=3 表示第 1 号，第 2 号盒子是空的，第 3 号盒子至少有一只球），求 $E(X)$。

∵ 事件 $\{X=1\}$={一只球装入一号盒，两只球装入非一号盒}+{两只球装入一号盒，一只球装入非一号盒}+{三只球均装入一号盒}（右边三个事件两两互斥）

∴ $$P(X=1)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{37}{64}$$

∵事件"X=2"="一只球装入二号盒，两只球装入三号或四号盒"+"两只球装二号盒，一只球装入三或四号盒"+"三只球装入二号盒"

∴ $$P(X=2)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{2}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{19}{64}$$

同理： $$P(X=3)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{7}{64}$$

$$P(X=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$$

故 $$E(X)=1\times\frac{37}{64}+2\times\frac{19}{64}+3\times\frac{7}{64}+4\times\frac{1}{64}=\frac{25}{16}$$

5.[五] 设在某一规定的时间间段里，其电气设备用于最大负荷的时间X（以分计）是一个连续型随机变量。其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1500)^2}x, & 0\le x\le 1500\\ \dfrac{-1}{(1500)^2}(x-3000), & 1500<x\le 1500\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E(X)$

解： $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

$$=\int_0^{1500}x\cdot\frac{x}{(1500)^2}dx+\int_{1500}^{3000}x\cdot\frac{(3000-x)}{(1500)^2}dx$$

$$=\frac{1}{(1500)^2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{1500}+\frac{1}{(1500)^2}\left[1500x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{1500}^{3000}$$

$=1500$(分)

6.[六]　设随机变量 X 的分布为

X	-2	0	2
P_k	0.4	0.3	0.3

求　$E(X)$，　$E(3X^2+5)$

解：　$E(X)=(-2)\times 0.4+0\times 0.3+2\times 0.3=-0.2$

$E(X^2)=(-2)^2\times 0.4+0^2\times 0.3+2^2\times 0.3=2.8$

$E(3X^2+5)=3E(X^2)+E(5)=8.4+5=13.4$

7.[七]　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, x>0\\ 0 \quad ,x\le 0\end{cases}$$

求（1）$Y=2X$　　　（2）$Y=e^{-2x}$ 的数学期望。

解：（1）$E(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}2xf(x)dx=\int_0^{+\infty}2xe^{-x}dx$

$$=\left[-2xe^{-x}-2e^{-x}\right]_0^{+\infty}=2$$

（2）$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}f(x)dx=\int_0^{+\infty}e^{-2x}e^{-x}ex$

$$=-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{3}$$

8.[八]　设（X，Y）的分布律为

Y \ X	1	2	3
－1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3

1	0.1	0.1	0.1

(1) 求 $E(X)$，$E(Y)$。

(2) 设 $Z=Y/X$，求 $E(Z)$。

(3) 设 $Z=(X-Y)^2$，求 $E(Z)$。

解：（1）由 X，Y 的分布律易得边缘分布为

X / Y	1	2	3	
−1	0.2	0.1	0	0.3
0	0.1	0	0.3	0.4
1	0.1	0.1	0.1	0.3
	0.4	0.2	0.4	1

$E(X)=1\times0.4+2\times0.2+3\times0.4$

$=0.4+0.4+1.2=2.$

$E(Y)=(-1)\times0.3+0\times0.4$

$+1\times0.3=0.$

（2）

$Z=Y/X$	-1	$-1/2$	$-1/3$	0	1/3	1/2	1
p_k	0.2	0.1	0	0.4	0.1	0.1	0.1

$E(Z)=(-1)\times0.2+(-0.5)\times0.1+(-1/3)\times0+0\times0.4+1/3\times0.1+0.5\times0.1+1\times0.1$

$=(-1/4)+1/30+1/20+1/10=(-15/60)+11/60=-1/15.$

（3）

$Z(X-$	0	1	4	9	16
	(1	$(1-0)^2$ 或	$(2-0)^2$ 或(1	$(3-0)^2$ 或	(3-(

$Y)^2$	$(1-1)^2$	$(1-0)$ 或 $(2-1)^2$	$(2-0)$ 或$(1-(-1))^2$ 或$(3-1)^2$	$(3-0)$ 或 $(2-(-1))^2$	$(3-(-1))^2$
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4	0

$E(Z)=0\times 0.1+1\times 0.2+4\times 0.3+9\times 0.4+16\times 0=0.2+1.2+3.6=5$

10.[十]　一工厂生产的某种设备的寿命 X（以年计）服从指数分布，概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$ 工厂规定出售的设备若在一年内损坏，可予以调换。若工厂出售一台设备可赢利 100 元，调换一台设备厂方需花费 300 元。试求厂方出售一台设备净赢
利的数学期望。

解：一台设备在一年内损坏的概率为 $P(X<1)=\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-\frac{1}{4}x}dx=-e^{-\frac{x}{4}}\Big|_0^1=1-e^{-\frac{1}{4}}$

故 $P(X\ge 1)=1-P(X<1)=1-(1-e^{-\frac{1}{4}})=e^{-\frac{1}{4}}$. 设 Y 表示出售一台设备的净赢利

则　$$Y=f(X)=\begin{cases}(-300+100)=-200,(X<1)\\ 100,(X\ge 1).\end{cases}$$

故　$E(Y)=(-200)\cdot P(X<1)+100\cdot P(X\ge 1)=-200+200e^{-\frac{1}{4}}+100e^{-\frac{1}{4}}$

$=300e^{-\frac{1}{4}}-200\approx 33.64$

11.[十一]　某车间生产的圆盘直径在区间（a, b）服从均匀分布。试求圆盘面积的数学期望。

解：设 X 为圆盘的直径，则其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, x\in(a,b)\\ 0, \text{其它}.\end{cases}$$

用 Y 表示圆盘的面积，则 $Y=\frac{1}{4}\pi X^2$, 从而

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4}\pi x^2 f(x)dx=\frac{\pi}{4}\int_a^b\frac{1}{b-a}x^2dx=\frac{\pi}{4(b-a)}\cdot\frac{(b^3-a^3)}{3}=\frac{\pi}{12}(a^2+ab+b^2).$$

12.[十二]　设随机变量 X_1, X_2 的概率密度分别为

12.[十三] 设随机变量 X_1，X_2 的概率密度分别为

$$f_1(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, & x>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$$

求（1）$E(X_1+X_2)$，$E(2X_1-3X_2^2)$；（2）又设 X_1，X_2 相互独立，求 $E(X_1X_2)$

解：（1）$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=\int_0^{\infty}x\cdot 2e^{-2x}dx+\int_0^{\infty}x\cdot 4e^{-4x}dx$

$$=\left[-xe^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\infty}+\left[-xe^{-4x}-\frac{1}{4}e^{-4x}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

（2）$E(2X_1-3X_2^2)=2E(X_1)-3E(X_2^2)=2\times\frac{1}{2}-3\int_0^{\infty}x^2\cdot 4e^{-4x}dx$

$$=1-3\left[-x^2e^{-4x}-\frac{x}{2}e^{-4x}-\frac{1}{8}e^{-4x}\right]_0^{\infty}=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

（3）$E(X_1X_2)=E(X_1)\cdot E(X_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

13.[十四] 将 n 只球（1～n 号）随机地放进 n 只盒子（1～n 号）中去，一只盒子装一只球。将一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对，记 X 为配对的个数，求 $E(X)$

解：引进随机变量 $X_i=\begin{cases}1 & \text{第}i\text{号盒装第}i\text{号球}\\ 0 & \text{第}i\text{号盒装非}i\text{号球}\end{cases}$

i=1, 2, ⋯ n

则球盒对号的总配对数为 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$

X_i 的分布列为

X_i:	1	0
P:	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$

$E(X_i)=\frac{1}{n}$ i=1, 2 …… n

∴ $E(X)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\times\frac{1}{n}=1$ i=1

$E(X)=E(\sum_{i=1} X_i)=\sum_{i=1} E(X_i)=n\times \frac{}{n}=1$

2 ⋯⋯ n

14.[十五] 共有 n 把看上去样子相同的钥匙，其中只有一把能打开门上的锁，用它们去试开门上的锁。设抽取钥匙是相互独立的，等可能性的。若每把钥匙经试开一次后除去，试用下面两种方法求试开次数 X 的数学期望。

（1）写出 X 的分布律，（2）不写出 X 的分布律。

解：（1）

X	1	2	3	⋯⋯ n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}$	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}$	⋯⋯ $\frac{1}{n}$

$E(X)=1\times\frac{1}{n}+2\times\frac{1}{n}\cdots\cdots+n\times\frac{1}{n}=\frac{1+2\cdots\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}$

（2）设一把一把钥匙的试开，直到把钥匙用完。

设 $X_i=\begin{cases} i & 第i次试开能开门 \\ 0 & 第i次试开不能开门 \end{cases}$ $i=1,2\cdots\cdots n$

则试开到能开门所须试开次数为 $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$

∵

X_i	i	0
P	$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\cdots\frac{1}{n-i}=\frac{1}{n}$	$\frac{n-1}{n}$

$E(X_i)=i\cdot\frac{1}{n}$ $i=1,2\cdots\cdots n$

∴ $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots\cdots+\frac{n}{n}=\frac{n+1}{2}$

15. （1）设随机变量 X 的数学期望为 $E(X)$，方差为 $D(X)>0$，引入新的随机变量（X^*称为标准化的随机变量）：$X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$

验证 $E(X^*)=0$，$D(X^*)=1$

（2）已知随机变量 X 的概率密度。

$$f(x)=\begin{cases}1-|1-x|, & 0<x<2\\ 0\quad, & 其它,\end{cases}$$

求 X^*的概率密度。

解：（1）$E(X^*)=E[\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}]=\dfrac{1}{\sqrt{D(X)}}[E(X)-E(X)]=0$

$$D(X^*)=E[X^*-E(X)^*]]^2=E(X^{*2})=E\left[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right]^2$$

$$=\frac{1}{D(X)}E[X-E(X)]^2=\frac{1}{DX}\cdot D(X)=1$$

（2）$E(X)=\int_0^2 x[1-|1-x|]dx=\int_0^1 x[1-(1-x)]dx+\int_1^2 x[1+(1-x)]dx=1$

$$E(X^2)=\int_0^2 x^2[1-|1-x|]dx=\int_0^1 x^2[1-(1-x)]dx$$

$$+\int_1^2 x^2[1+(1-x)]dx=\frac{7}{6}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{7}{6}-1=\frac{1}{6}$$

$$X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{DX}}=\frac{X-1}{\sqrt{\frac{1}{6}}}$$

$$F_{X^*}(y)=P(X^*\le y)=P(\frac{X-1}{\sqrt{\frac{1}{6}}}\le y)=P(X\le\sqrt{\frac{1}{6}}y+1)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt6}y+1}f(x)dx$$

$$=\begin{cases}0 & 当\frac{1}{\sqrt6}y+1\le 0,即y\le-\sqrt6时\\ \int_0^{\frac{1}{\sqrt6}y-1}[1-|1-x|]dx & 当0<\frac{1}{\sqrt6}y+1\le 2,即-\sqrt6<y\le\sqrt6时\\ 1 & 当2<\frac{1}{\sqrt6}y+1,即\sqrt6<y时\end{cases}$$

$$\{1-|1-(\frac{1}{\sqrt6}y+1)|\cdot\frac{1}{\sqrt6}\quad -\sqrt6<y\le\sqrt6$$

$$g_{X^*}(y) = \begin{cases} \quad \sqrt{6} \quad \sqrt{6} \\ 0 & y\text{为其他值} \end{cases}$$

16.[十六] 设 X 为随机变量，C 是常数，证明 $D(X)<E\{(X-C)^2\}$，对于 $C\neq E(X)$，（由于 $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$，上式表明 $E\{(X-C)^2\}$ 当 $C=E(X)$时取到最小值。）

证明：∵ $D(X)-E(X-C)^2=D(X^2)-[E(X)]^2-[E(X^2)-2CE(X^2)+C^2$

$$=-\{[E(X)]^2-2CE(X^2)+C^2\}$$

$$=-[E(X)-C]^2<0,$$

∴当 $E(X)\neq C$ 时 $D(X)<E(X-C)^2$

17. 设随机变量 X 服从指数分布，其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 是常数，求 $E(X)$，$D(X)$。

解：

$$E(X)=\int_0^{+\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\int_0^{+\infty}xd(-e^{-\frac{x}{\theta}})=-xe^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=0+(-\theta e^{-\frac{x}{\theta}})\Big|_0^{+\infty}=\theta$$

又 $E(X^2)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\infty}x^2e^{-\frac{x}{\theta}}dx\xlongequal{令t=\frac{x}{\theta}}\theta^2\int_0^{\infty}t^2e^{-t}dt=2\theta^2$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=2\theta^2-\theta^2=\theta^2$

21．设 X_1，X_2，…，X_n 是相互独立的随机变量且有 $E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2, i=1,2,\cdots, n$.记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.（1）验证 $E(\overline{X})=\mu, D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$.（2）验证 $S^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right]$.（3）验证 $E(S^2)$

证明：（1）$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu$

(利用数学期望的性质 2°，3°)

$$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)\xlongequal{X_1,\cdots,X_n\text{相互独立}}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

(利用方差的性质 2°，3°)

（2）首先证 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\sum_{i=1}^{n}X_i\overline{X}+n\overline{X}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2n\overline{X}\cdot\overline{X}+n\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2.$$

于是 $S^2=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right\}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

（3） $E(S^2)=E[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]=\frac{1}{n-1}E(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(D(X_i)+E^2(X_i)-n(D(\overline{X})+E^2(\overline{X}))\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}[n\sigma^2+n\mu^2-n(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)]=\sigma^2$$

23. [二十五]　设随机变量 X 和 Y 的联合分布为：

Y \ X	−1	0	1
−1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

验证：X 和 Y 不相关，但 X 和 Y 不是相互独立的。

证：∵ $P[X=1 \quad Y=1]=\frac{1}{8}$ $P[X=1]=\frac{3}{8}$ $P[Y=1]=\frac{3}{8}$

$P[X=1 \quad Y=1]\neq P[X=1]P[Y=1]$

∴ X，Y 不是独立的

又 $E(X)=-1\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0$

$E(Y)=-1\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0$

$COV(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-EX\cdot EY$

$=(-1)(-1)\ \frac{1}{8}+(-1)1\times\frac{1}{8}+1\times(-1)\times\frac{1}{8}+1\times1\times\frac{1}{8}=0$

∴ X，Y 是不相关的

27. 已知三个随机变量 X,Y,Z 中，$E(X)=E(Y)=1$，$E(Z)=-1$，$D(X)=D(Y)=D(Z)=1$，$\rho_{XY}=0$ $\rho_{XZ}=\frac{1}{2}$，$\rho_{YZ}=-\frac{1}{2}$。设 $W=X+Y+Z$ 求 $E(W)$，$D(W)$。

解：$E(W)=E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)=1+1-1=1$

$D(W)=D(X+Y+Z)=E\{[(X+Y+Z)-E(X+Y+Z)]^2\}$

$=E\{[X-E(X)]+[Y-E(Y)]+Z-E(Z)\}^2$

$=E\{[X-E(X)]^2+[Y-E(Y)]^2+[Z-E(Z)]^2+2[X-E(X)][Y-E(Y)]$

$+2[Y-E(Y)][Z-E(Z)]+2[Z-E(Z)][X-E(X)]\}$

$=D(X)+D(Y)+D(Z)+2\,COV(X,Y)+2\,COV(Y,Z)+2\,COV(Z,X)$

$=D(X)+D(Y)+D(Z)+2\sqrt{D(X)D(Y)}\rho_{XY}+2\sqrt{D(Y)D(Z)}\rho_{XZ}$

$+2\sqrt{D(Z)D(X)}\rho_{ZX}=1+1+1+2\times\sqrt{1\times1}\times0+2\sqrt{1\times1}(-\frac{1}{2})$

$+2\sqrt{1\times1}(\frac{1}{2})=3$

26.[二十八] 设随机变量（X_1，X_2）具有概率密度。

$f(x,y)=\frac{1}{8}(x+y)$， $0\leqslant x\leqslant2$， $0\leqslant y\leqslant2$

求　　$E(X_1)$，$E(X_2)$，$COV(X_1, X_2)$，$\rho_{X_1X_2}$　$D(X_1+X_2)$

解：$E(X_2)=\int_0^2 dx\int_0^2 x\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$

$E(X_2)=\int_0^2 dx\int_0^2 y\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$

$$COV(X_1X_2)=E\{(X_1-\frac{7}{6})(X_2-\frac{7}{6})\}$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^2 (x-\frac{7}{6})(y-\frac{7}{6})\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=-\frac{1}{36}$$

$$D(X_1)=E(X_1^2)-[E(X_1)]^2=\int_0^2 dx\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$D(X_2)=E(X_2^2)-[E(X_2)]^2=\int_0^2 dx\int_0^2 y^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

$$\rho_{XY}=\frac{COV(X_1,X_2)}{\sqrt{DX_1}\sqrt{DX_2}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}}=-\frac{1}{11}$$

$$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)+2COV(X_1,X_2)$$

$$=\frac{11}{36}+\frac{11}{36}+2\times(-\frac{1}{36})=\frac{5}{9}$$

28.[二十九]设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 X，Y 相互独立。试求 $Z_1=\alpha X+\beta Y$ 和 $Z_2=\alpha X-\beta Y$ 的相关系数（其中 α,β 是不为零的常数）.

解：由于 X，Y 相互独立

$Cov(Z_1, Z_2)=E(Z_1,Z_2)-E(Z_1)E(Z_2)=E(\alpha X+\beta Y)(\alpha X-\beta Y)-(\alpha EX+\beta EY)(\alpha EX-\beta EY)$

$=\alpha^2 EX^2-\beta EY^2-\alpha^2(EX)^2+\beta(EY)^2=\alpha^2 DX-\beta^2 DY=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2$

$DZ_1=\alpha^2 DX+\beta^2 DY=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$, $DZ_2=\alpha^2 DX+\beta^2 DY=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$,

(利用数学期望的性质 2° 3°)

故 $\rho_{Z_1Z_2}=\frac{Cov(Z_1,Z_2)}{\sqrt{DZ_1}\sqrt{DZ_2}}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)}$

29. [二十三]　卡车装运水泥，设每袋水泥重量（以公斤计）服从 $N(50,2.5^2)$ 问最多装多少袋水泥使总重量超过 2000 的概率不大于 0.05.

解：已知 $X\sim N(50,2.5^2)$ 不妨设最多可装 A 袋水泥才使总重量超过

2000 的概率不大于 0.05.则由期望和方差的性质得 $Y=AX\sim N(50A,2.5^2A)$. 故由题意得

$$P\{Y\geq 2000\}\leq 0.05 \Rightarrow P\{Y<2000\}\geq 0.95$$

即 $\Phi\left(\frac{2000-50A}{2.5\sqrt{A}}\right)\geq 0.95$ 查表得 $\frac{2000-50A}{2.5\sqrt{A}}\geq 1.65$ 解得 $A\geq 39$.

30.[三十二] 已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是 7300，均方差是 700，利用契比雪夫不等式估计每毫升含白细胞数在 5200～9400 之间的概率 p.

解：由题意知 $\mu=7300,\sigma=700$，则由契比雪夫不等式

$$P\{5200\leq X\leq 9400\}=P\{|X-7300|\leq 2100\}\geq 1-\frac{700^2}{2100^2}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\approx 0.8889$$

31.[三十三]对于两个随机变量 V,W 若 $E(V^2)E(W^2)$存在,证明$[E(VW)]^2\leq E(V^2)E(W^2)$这一不等式称为柯西施瓦兹（Cauchy-Schwarz）不等

式.

证明：由$|VW|\leq\frac{1}{2}(V^2+W^2)$和关于矩的结论，知当 $E(V^2)$, $E(W^2)$存在时 $E(VW)$，$E(V)$, $E(W)$, $D(V)$, $D(W)$,都存在.当 $E(V^2)$, $E(W^2)$至少有一个为零时，不妨设 $E(V^2)=0$，

由 $D(V)=E(V^2)-[E(V)]^2\leq E(V^2)=0$ 知 $D(V)=0$，此时$[E(V)]^2=E(V^2)=0$ 即 $E(V)=0$。再由方差的性质知 $P(V=0)=1$.又$(VW=0)\supset(V=0)$ 故有 $P(VW=0)=1$.于是 $E(VW)=0$，不等式成立. 当 $E(V^2)>0$, $E(W^2)>0$ 时，对$\forall t>0$

有 $E(W-tV)^2=E(V^2)t^2-2E(VW)t+E(W^2)\geq 0$.(*)

(*)式是 t 的二次三项式且恒非负，所以有$\Delta=[-2E(VW)]^2-4E(V^2)E(W^2)\leq 0$

故 Cauchy-Schwarz 不等式成立。

[二十一]（1）设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立，且有 $E(X_i)=i$, $D(X_i)=5-i$, $i=1,2,3,4$。设 $Y=2X_1-X_2+3X_3-\frac{1}{2}X_4$，求 $E(Y)$，$D(Y)$。

（2）设随机变量 X，Y 相互独立，且 $X\sim N(720,30^2)$，$Y\sim N(640,25^2)$，求 $Z_1=2X+Y$，$Z_2=X-Y$ 的分布，并求 $P\{X>Y\}$, $P\{X+Y>1400\}$

解：（1）利用数学期望的性质 2°，3° 有

$E(Y)=2E(X_1)-E(X_2)+3E(X_3)-\frac{1}{2}E(X_4)=7$

利用数学方差的性质 2°，3° 有

$D(Y)=2^2 D(X_1)+(-1)^2 D(X_2)+3^2 D(X_3)+(-\frac{1}{2})^2 D(X_4)=37.25$

（2）根据有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布，知

$Z_1 \sim N(\cdot\ ,\cdot)$，$Z_2 \sim N(\cdot\ ,\cdot)$

而 $E Z_1=2EX+Y=2\times720+640, D(Z_1)=4D(X)+D(Y)=4225$
$E Z_2=EX-EY=720-640=80, D(Z_2)=D(X)+D(Y)=1525$
即 $Z_1 \sim N(2080，4225)$，　　$Z_2 \sim N(80，1525)$
$P\{X>Y\}=P\{X-Y>0\}=P\{Z_2>0\}=1-P\{Z_2\le0\}$

$=1-\Phi\left(\frac{0-80}{\sqrt{1525}}\right)=\Phi\left(\frac{80}{1525}\right)=0.9798$

$P\{X+Y>1400\}=1-P\{X+Y\ \le1400\}$

同理 X+Y～N（1360，1525）
则 P {X+Y >1400 }=1－P {X+Y　≤1400 }

$$=1-\Phi\left(\frac{1400-1360}{\sqrt{1525}}\right)=0.1539$$

[二十二]　5 家商店联营，它们每周售出的某种农产品的数量（以 kg 计）分别为 X_1，X_2，X_3，X_4，X_5，已知 $X_1 \sim N(200，225)$，$X_2 \sim N(240，240)$，$X_3 \sim N(180，225)$，$X_4 \sim N(260，265)$，$X_5 \sim N(320，270)$，X_1，X_2，X_3，X_4，X_5 相互独立。

（1）求 5 家商店两周的总销售量的均值和方差；

（2）商店每隔两周进货一次，为了使新的供货到达前商店不会脱销的概率大于 0.99，问商店的仓库应至少储存多少公斤该产品？

解：（1）令 $Y=\sum_{i=1}^{5} X_i$ 为总销售量。

已知 $E X_1=200$，$E X_2=240$，$E X_3=180$，$E X_4=260$，$E X_5=320$，

$D(X_1)=225, D(X_2)=240, D(X_3)=225, D(X_4)=265, D(X_5)=270$，
利用数学期望的性质 3° 有

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{5}E(X_i)=1200$$

利用方差的性质 3° 有

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{5}D(X_i)=1225$$

（2）设商店仓库储存 a 公斤该产品，使得

$$P\{Y\leq a\}>0.99$$

由相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布，并注意到（1），得

$$Y\sim N(1200,\ 1225)$$

$$P\{Y\leq a\}=\Phi\left(\frac{a-1200}{35}\right)>0.99$$

查标准正态分布表知

$$\frac{a-1200}{35}>2.33$$

$$a>1281.55$$

∴ a 至少取 1282.