# 厦门大学概率统计课程期中试卷

_________学院_______系_______年级_______专业

考试时间　　2010.11.20

1. （**6** 分）设 $A, B$ 都出现的概率与 $A, B$ 都不出现的概率相等，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$.

2.（**6** 分）设某光学仪器厂制造的透镜, 第一次落下时打破的概率为 1/2, 若第一次落下未打破, 第二次落下打破的概率为 7/10, 若前两次落下未打破, 第三次落下打破的概率为 9/10. 试求透镜落下三次而未打破的概率.

3. （**8** 分）人们为了解一支股票未来一定时期内价格的变化, 往往会去分析影响股票价格的基本因素, 比如利率的变化. 现假设人们经分析估计利率下调的概率为 60%, 利率不变的概率为 40%. 根据经验, 人们估计, 在利率下调的情况下, 该支股票价格上涨的概率为 80%，而在利率不变的情况下, 其价格上涨的概率为 40%, 求该支股票将上涨的概率.

4. （**12** 分）一条自动生产线上的产品, 次品率为 4%, 求解以下两个问题:

(1) 从中任取 10 件, 求至少有两件次品的概率;

(2) 一次取 1 件, 无放回地抽取,求当取到第二件次品时, 之前已取到 8 件正品的概率

.

**5**.（**14** 分）设随机变量 $X$ 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0 \le x < 3, \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3 \le x \le 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1)确定常数 $k$;　　(2)求 $X$ 的分布函数 $F(x)$;　　(3)求 $P\{1 < X \le 7/2\}$.

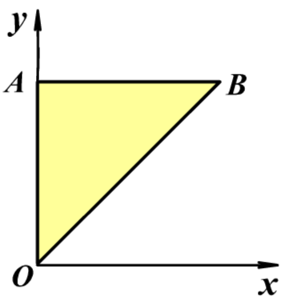
**6**.（**12** 分）设二维随机变量 $(X, Y)$ 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x,y)$;　　(2) 求概率 $P\{Y \le X\}$.

7．（**12** 分）设店主在每日开门营业时，放在柜台上的货物量为$Y$，当日销售量为$X$ 假定一天中不再往柜台上补充货物，于是$X \le Y$．根据历史资料，$(X,Y)$的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1/200, & \text{当}0\le x\le y,\quad 0\le y\le 20\text{时},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$




即$(X,Y)$服从直角三角形区域$OAB$ 上的均匀分布，见右图．求

(1) 给定$Y=y$条件下，$X$ 的条件分布．

(2)假定某日开门时，$Y=10$ 件，求这天顾客买走 $X\le 5$ 件的概率．如果$Y=20$ 件呢?

8．（**10** 分）某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式．记使用寿命为$X$ (以年计)，规定:

$X\le 1$，　一台付款　1500 元；

$1<X\le 2$，　一台付款　2000 元；

$2<X\le 3$，　一台付款　2500 元；

$X>3$，　一台付款　3000 元．

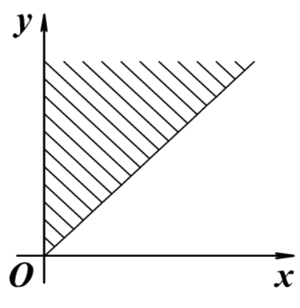
设寿命$X$ 服从指数分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}e^{-x/10}, & x>0\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试求该类家用电器一台收费$Y$ 的数学期望．

9．（**20** 分）设随机变量$(X,Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$




(1) 求$X$ 与$Y$ 的边际概率密度，并判断$X$ 与$Y$ 是否相互独立;

(2) 求在$Y=y$ 的条件下，$X$ 的条件概率密度;

(3) 求概率

$P\{X+2Y\le 1\}$，　$P\{0\le X\le 1/2\mid Y\le 1\}$　$P\{X\ge 2\mid Y=4\}$．

# 厦门大学 **2009** 年概率统计期中答案

1. 解　由题设条件得

$$\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(\overline{A}\,\overline{B})=1-\mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(AB)\qquad \text{--------4 分}$$

故　$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(A)=1-p$。　　--------2 分

2. 解　以$A_i\,(i=1,2,3)$表示事件“透镜第$i$次落下打破”，$B$ 表示事件“透镜落下三次而未打

破". 为 $B=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$，故有 --------2 分

$$P(B)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(\overline{A_3}\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{7}{10}\right)\left(1-\frac{9}{10}\right)=\frac{3}{200}.$$ --------4 分

3. 解　记 $A$ 为事件"利率下调"，那么 $\overline{A}$ 即为 "利率不变"，记 $B$ 为事件"股票价格上涨". 依题设知 $P(A)=60\%$，$P(\overline{A})=40\%$，$P(B\mid A)=80\%$，$P(B\mid\overline{A})=40\%$， --------2 分

于是

$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=60\%\times 80\%+40\%\times 40\%=64\%.$$

4. 解　(1) 由于一条自动生产线上的产品很多，当抽取的件数相对较少时，可将无放回抽取近似看成是有放回抽取，每抽 1 件产品看成是一次试验,抽 10 件产品相当于做 10 次重复独立试验，且每次试验只有 "次品" 或 "正品" 两种可能结果,所以可以看成 10 重伯努利试验.

设 $A$ 表示 "任取 1 件是次品"，则 $p=P(A)=0.04$，$q=P(\overline{A})=0.96$. -------2 分

设 $B$ 表示 "10 件中至少有两件次品"，由伯努利公式有

$$P(B)=\sum_{k=2}^{10}P_{10}(k)=1-P_{10}(0)-P_{10}(1)=1-0.96^{10}-C_{10}^{1}\times 0.04\times 0.96^{9}=0.0582.$$ --------4 分

(2) 由题意，至第二次抽到次品时，共抽取了 10 次，前 9 次中抽得 8 件正品 1 件次品. 设 $C$ 表示 "前 9 次中抽到 8 件正品 1 件次品"，$D$ 表示 "第十次抽到次品"，则由独立性和伯努利公式，所求的概率为 --------4 分

$$P(CD)=P(C)P(D)=C_1^9\times 0.04\times 0.96^8\times 0.04=0.0104.$$ --------2 分

**5**. 解　(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，得 $\int_0^3 kxdx+\int_3^4\left(2-\frac{x}{2}\right)dx=1$， --------2 分

解得 $k=1/6$, 于是 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{6}, & 0\le x<3\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\le x\le 4.\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ --------2 分

(2) $X$ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \int_0^x\frac{t}{6}dt, & 0\le x<3\\ \int_0^3\frac{t}{6}dt+\int_3^x\left(2-\frac{t}{2}\right)dt, & 3\le x<4\\ 1, & x\ge 4\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2/12, & 0\le x<3\\ -3+2x-x^2/4, & 3\le x<4\\ 1, & x\ge 4\end{cases}.$$ --------6 分

(3) $P\{1<X\le 7/2\}=\int_1^{7/2}f(x)dx=\int_1^3\frac{1}{6}xdx+\int_3^{7/2}\left(2-\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{12}x^2\Big|_1^3+\left(2x-\frac{x^2}{4}\right)\Big|_3^{7/2}=\frac{41}{48}$,

或 $P\{1<X\le 7/2\}=F(7/2)-F(1)=41/48$.　　　　--------4 分

**6.** 解　(1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dxdy=\begin{cases}\int_0^y\int_0^x 2e^{-(2x+y)}dxdy, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$,　------4 分

即有　$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$.　　　　-------2 分

(2) 将 $(X,Y)$ 看作是平面上随机点的坐标, 即有 $\{Y\le X\}=\{(X,Y)\in G\}$, 其中 $G$ 为 $xOy$ 平面上直线 $y=x$ 及其下方的部分, 于是

$P\{Y\le X\}=P\{(x,y)\in G\}$

$=\iint_G f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty}2e^{-(2x+y)}dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_y^{+\infty}2e^{-(2x+y)}dx$　　--------4 分

$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y}[-e^{-2x}]\Big|_y^{+\infty}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-3y}dy=\frac{1}{3}$.　　------2 分

**7.** 解　(1) $Y$ 的边缘概率密度为

$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^y\frac{1}{200}dx=\frac{y}{200}, & 0\le y\le 20\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$,　　--------3 分

于是, 当 $0<y\le 20$ 时, 有 $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}1/y, & 0\le x\le y\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$,　------3 分

该结果表明: 对给定的 $0<y\le 20$, $x$ 的条件分布是 $[0,y]$ 上的均匀分布.

(2) 因为 $f_{X|Y}(x|10)=1/10,\ 0\le x\le 10$,　　　-----1 分

所求概率 $P\{X\le 5|Y=10\}=\int_{-\infty}^{5}f_{X|Y}(x|10)dx=\int_0^5\frac{1}{10}dx=\frac{1}{2}$,　　------2 分

即开门营业时有 10 件货物, 当日卖出不超过 5 件的概率为 1/2.

又因为 $f_{X|Y}(x|20)=1/20,\ 0\le x\le 20$　　　-------1 分

于是 $P\{X\le 5|Y=20\}=F_{X|Y}(5|20)=\int_{-\infty}^{5}f_{X|Y}(x|20)dx=\int_0^5\frac{1}{20}dx=\frac{1}{4}$　　-----2 分

即开门营业时有 20 件货物, 当日卖出不超过 5 件的概率仅为 1/4. 这表明货物销售量的概率与现有货物数量的关系很密切.

**8.** 解　先求出寿命 $X$ 落在各个时间区间的概率, 即有

$P\{X\le 1\}=\int_0^1\frac{1}{10}e^{-x/10}dx=1-e^{-0.1}=0.0952$,　　----------------------------1 分

$P\{1<X\le 2\}=\int_1^2\frac{1}{10}e^{-x/10}dx=e^{-0.1}-e^{-0.2}=0.0861$,　-------------------------1 分

$P\{2<X\le 3\}=\int_2^3\frac{1}{10}e^{-x/10}dx=e^{-0.2}-e^{-0.3}=0.0779$,　-------------------------1 分

$P\{X>3\}=\int_3^{\infty}\frac{1}{10}e^{-x/10}dx=e^{-0.3}=0.7408$,　------------------------------------1 分

则 $Y$ 的分布律为

| $Y$ | 1500 | 2000 | 2500 | 3000 |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0.0952 | 0.0861 | 0.0779 | 0.7408 |

------------------3 分

得 $E(Y)=2732.15$，即平均一台收费 $2732.15$ 元. **------------------3** 分

9． 解 (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy,\ -\infty<x<+\infty$,

当 $x\le 0$ 时，$f_X(x)=0$,

当 $x>0$ 时，$f_X(x)=\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}$,

所以 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, ------4 分

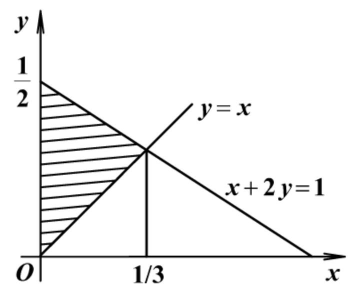
类似可得 $f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$. -------2 分

由于当 $0<x<y$ 时，$f_X(x)\cdot f_Y(y)\ne f(x,y)$，故 $X$ 与 $Y$ 不相互独立. ----- 3 分

(2) 由(1)知，当 $y>0$ 时，$f_Y(y)>0$，所以，在 $Y=y$ 的条件下，$X$ 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}1/y, & 0<x<y\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$ ----------3 分

(3) $P\{X+2Y\le 1\}=\iint\limits_{x+2y\le 1}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{3}}dx\int_x^{\frac{1-x}{2}}e^{-y}dy$




$=1+2e^{-\frac{1}{2}}-3e^{-\frac{1}{3}}$, -----2 分

$$P\{0\le X\le 1/2\,|\,Y\le 1\}=\frac{P\{0\le X\le 1/2,Y\le 1\}}{P\{Y\le 1\}}$$

$$=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^1 e^{-y}dy}{\int_0^1 ye^{-y}dy}=\frac{1-\frac{1}{2}e^{-1}-e^{-\frac{1}{2}}}{1-2e^{-1}}$$ ---2 分

由于 $P\{Y=4\}=0$，因此不能用前面的方法来求 $P\{X\ge 2\,|\,Y=4\}$，但由(2)知，在 $Y=4$ 的条件下，$X$ 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|4)=\begin{cases}1/4, & 0<x<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$ -----2 分

故有 $P\{X\ge 2\,|\,Y=4\}=\int_2^{+\infty}f_{X|Y}(x|4)dx=\int_2^4\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}$. -----2 分