



厦门大学《线性代数 (A)》期末试卷

_____ 学院 _____ 系 _____ 年级 _____ 专业

主考教师: _____ 试卷类型: (A卷)

一、(16) 填空题

1. 所有与 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 可交换的矩阵是 $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in R$;

2. $A = \begin{bmatrix} E & O \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ E & B_3 \end{bmatrix}$, 则 $AB = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ A_1 B_1 + A_2 & A_1 B_2 + A_2 B_3 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 A_1 & B_2 A_2 \\ E + B_3 A_1 & B_3 A_2 \end{bmatrix}$;

3. 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 3 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$ 无解的充要条件是 $a = -3$;

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $B = (kE + A)^2$ 正定的充要条件是 $k \neq 0, -2$ 。

二、(14) $A(E - C^{-1}B)^T C^T = E$, 其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ & 2 & 1 & 3 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$, 求矩阵 A

由 $A(C - B)^T = E$ 得 $A = (C^T - B^T)^{-1}$, 而 $C^T - B^T = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & 2 & 1 & \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 于是 $A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

三、(15) 求方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -5 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + ax_5 = b \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + ax_4 - x_5 = -7 \end{cases}$ 在参数各种取值时的通解

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & a & b \\ 5 & 4 & 3 & a & -1 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -3 \\ & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ & & a-3 & & & \\ & & & a-6 & b-2 & \end{bmatrix}$$

(1) $a \neq 3, 6$ 时, 矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -3 \\ & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & \frac{b-2}{a-6} & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{5b-3a+8}{a-6} \\ & 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{2a-6b}{a-6} \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & \frac{b-2}{a-6} & \end{bmatrix}$, 因此通解

为

$$x = \begin{bmatrix} \frac{5b-3a+8}{a-6} \\ \frac{2a-6b}{a-6} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b-2}{a-6} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k \in R$$

(2) $a = 3$ 时, 矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -3 \\ & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ & & & 1 & \frac{2-b}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & \frac{1-5b}{3} \\ & 1 & 2 & 2 & 0 & 2b-2 \\ & & & & 1 & \frac{2-b}{3} \end{bmatrix}$, 因此通解为

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1-5b}{3} \\ 2b-2 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2-b}{3} \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_i \in R$$

(3) $a = 6$ 时, 只有 $b = 2$ 时有解, 此时矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -3 \\ & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ & & & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -5 & -3 \\ & 1 & 2 & 0 & 6 & 2 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$,

因此通解为

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k_i \in R$$

四、(15) $A = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & -0.2 \\ -0.3 & -0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$, 求 A^9 (保留乘方符号, 不必具体计算)

$A = 10^{-1}B$, 其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 。由 $|B - \lambda E| = 0$ 得特征值 2, 2, 6。解方程得特征值 2 的线性无关特征向量 $[-1, 1, 0]^T$, $[1, 0, 1]^T$; 特征值 6 的特征向量 $[1, -2, 3]^T$ 。于是有

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} B \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{bmatrix}$$

经计算, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 因此

$$\begin{aligned} A^9 &= 10^{-9} B^9 = 10^{-9} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^9 & & \\ & 2^9 & \\ & & 6^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{2^9}{4 \cdot 10^9} \begin{bmatrix} 5 - 3^9 & 1 - 3^9 & -1 + 3^9 \\ -2 + 2 \cdot 3^9 & 2 + 2 \cdot 3^9 & 2 - 2 \cdot 3^9 \\ 3 - 3^{10} & 3 - 3^{10} & 1 + 3^{10} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

五、(15) 设 $a_1 = (1, -1, 0, 4)^T$, $a_2 = (2, 1, 5, 6)^T$, $a_3 = (1, -1, -2, 0)^T$, $a_4 = (3, 0, 7, 14)^T$, 求向量组的秩, 找出一个最大线性无关组, 并用其线性表示出其他的向量。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 7 \\ 4 & 6 & 0 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以秩为3, 最大无关组为 a_1, a_2, a_3 , $a_4 = 2a_1 + a_2 - a_3$

六、(15) 二次型 $f = x^T \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & 2a \\ & & 3 \end{bmatrix} x$ 经正交替换化为 $by_1^2 + cy_2^2 + 5y_3^2$, 且 $a \leq b \leq c$, 求 a, b, c 及正交替换

二次型的矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & a \\ & a & 3 \end{bmatrix}$, 由5是特征值得 $a = \pm 2$, 此时另两个特征值为1, 2。因为 $a \leq b \leq c$, 所以 $a = -2$, $b = 1$, $c = 2$ 。

解方程得特征值1, 2, 5的特征向量分别为 $(0, 1, 1)^T, (1, 0, 0)^T, (0, -1, 1)^T$, 于是正交替换为

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} y$$

七、(10) (1) $A^2 = E$, $A \neq E$, 证明 $A + E$ 不可逆; (2) 实矩阵 $A_{n \times p}$ $B_{n \times q}$ 有性质 $A^T A = E_p$, $B^T B = E_q$, 证明 $B^T A A^T B$ 的特征值满足 $0 \leq \lambda \leq 1$ 。

(1) 若 $A + E$ 可逆, 则由 $A^2 - E = (A + E)(A - E) = O$ 得 $A - E = O$, 矛盾; 因此得证

(2) 设 $A = [\xi_1, \dots, \xi_p]$, 则由 $A^T A = E_p$ 可知 $\{\xi_i\}$ 是单位正交向量组。令 $\eta_1, \dots, \eta_{n-p}$ 是方程组 $Ax = 0$ 的单位正交的基础解系, $C = [\eta_1, \dots, \eta_{n-p}]$, 则 $[A, C]$ 是正交矩阵。如果 λ 是 $B^T A A^T B$ 的特征值, α 是对应的特征向量, 于是

$$\alpha^T \alpha = \alpha^T B^T B \alpha = \alpha^T B^T [A, C] [A, C]^T B \alpha = \alpha^T B^T A A^T B \alpha + \alpha^T B^T C C^T B \alpha > \alpha^T B^T A A^T B \alpha = \lambda \alpha^T \alpha$$

又 $\alpha^T B^T A A^T B \alpha = \lambda \alpha^T \alpha > 0$, 得证