厦门大学《线性代数（A）》期末试卷

______ 学院 ______ 系 ______ 年级 ______ 专业

主考教师： ______ 试卷类型：（A卷）

一、（15）填空题

1. $\alpha=[0,-1,2]^T$，$\beta=[0,-1,1]^T$，$A=\alpha\beta^T$，则$A^4=$ ______；

2. 行列式$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\\1&4&16&63\end{vmatrix}=$ ______；

3. 线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_2-x_3+2x_4=1\\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b\\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5\end{cases}$无解的充要条件是 ______；

4. 向量γ在$\alpha_1=[1,0,1]^T$，$\alpha_2=[0,1,-1]^T$，$\alpha_3=[1,2,0]^T$下的坐标是$[5,7,-4]^T$，则在$\beta_1=[1,0,1]^T$，$\beta_2=[-1,1,1]^T$，$\beta_3=[1,-2,-2]^T$下的坐标是 ______；

5. $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$是正定二次型的充要条件是 ______。

二、（15）选择题

1. (a)$[(AB)^T]^{-1}=(A^{-1})^T(B^{-1})^T$; (b)$AC$可逆且$AC=BC$，则$A=B$; (c)3是$A$的特征值，则21是$A^3-2A$的特征值。上述判断正确的是 ______；

   A: (a) B: (b)
   C: (c) D: 全部

2. 矩阵$\begin{bmatrix}3&-2&0\\-2&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{bmatrix}$的关系是 ______；

   A: 合同且相似 B: 合同但不相似
   C: 相似但不合同 D: 不合同也不相似

3. 向量组$\alpha_1=[1,2,-1,1]$，$\alpha_2=[2,0,t,0]$，$\alpha_3=[-1,2,-4,1]$的秩为2，则$t=$ ______；

   A: 1 B: 2
   C: 3 D: 0

4. 如果$[1,0,1]^T$，$[1,2,3]^T$是非齐次线性方程组的两个解，则下面哪个也是方程组的解？ ______；

A: $[2,2,4]^T$ B: $[0,2,2]^T$

C: $[1,-2,-1]^T$ D: $[2,0,2]^T$

5. A,B分别是m阶和n阶方阵，则$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$的伴随矩阵是__________。

A: $\begin{bmatrix} O & |B|B^* \\ |A|A^* & O \end{bmatrix}$ B: $(-1)^{mn}\begin{bmatrix} O & |A|B^* \\ |B|A^* & O \end{bmatrix}$

C: $(-1)^{mn}|A||B|\begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$ D: $(-1)^{mn}|A||B|\begin{bmatrix} O & B^* \\ A^* & O \end{bmatrix}$

三、（15） 设矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$只有两个不同的特征值，求$A$的全部特征值和特征向量。

四、(10) 求矩阵X满足方程$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$。

五、(15) 设$a_1 = [2,1,4,3]^T$，$a_2 = [-1,1-6,6]^T$，$a_3 = [-1,-2,a+1,-9]^T$，$a_4 = [a,1,-2,7]^T$，$a_5 = [2,4,4,3a+6]^T$，若向量组的秩为3，试找出一个极大线性无关组，并将其他的向量用该极大无关组线性表示。

六、（10） 当a,b为何值时方程组$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 = & 2 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & +3x_4 = & 6 \\ x_1 & -5x_2 & +12x_3 & +bx_4 = & -4 \\ 3x_1 & -x_2 & +15x_3 & -x_4 = & a \end{cases}$无解，有唯一解或者有无穷多解，并求出无穷多解时的通解。

七、（15） 实对称矩阵A和B分别定义二次型$f(x) = x^T Ax = 3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2$和$g(y) = y^T By = y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_2y_3$，

1. 求可逆线性变量替换$x = Pz$和$y = Qz$使二次型f和g化为规范形；
2. 求可逆矩阵C使A与B合同，即$C^T AC = B$。

八、（**5**）　A是n阶方阵，证明存在可逆矩阵P和上三角矩阵U，使得$A = PU$。