厦门大学《线性代数（A）》期末试卷

________ 学院 ________ 系 ________ 年级 ________ 专业

主考教师：________ 试卷类型：（A卷）

一、（15）填空题

1. $\alpha=[0,-1,2]^T$，$\beta=[0,-1,1]^T$，$A=\alpha\beta^T$，则$A^4=$ $\underline{27\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-2&2\end{bmatrix}}$；

2. 行列式$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\\1&4&16&63\end{vmatrix}=$____10____；

3. 线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_2-x_3+2x_4=1\\2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b\\3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5\end{cases}$无解的充要条件是____$a=-1,b\neq 3$____；

4. 向量γ在$\alpha_1=[1,0,1]^T$，$\alpha_2=[0,1,-1]^T$，$\alpha_3=[1,2,0]^T$下的坐标是$[5,7,-4]^T$，则在$\beta_1=[1,0,1]^T$，$\beta_2=[-1,1,1]^T$，$\beta_3=[1,-2,-2]^T$下的坐标是____$[-1,-3,-1]^T$____；

5. $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$是正定二次型的充要条件是$\underline{-\frac{4}{5}<a<0}$。

二、（15）选择题

1. (a)$[(AB)^T]^{-1}=(A^{-1})^T(B^{-1})^T$; (b)$AC$可逆且$AC=BC$，则$A=B$; (c)3是$A$的特征值，则21是$A^3-2A$的特征值。上述判断正确的是____C____；

   A: (a) B: (b)
   C: (c) D: 全部

2. 矩阵$\begin{bmatrix}3&-2&0\\-2&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{bmatrix}$的关系是____B____；

   A: 合同且相似 B: 合同但不相似
   C: 相似但不合同 D: 不合同也不相似

3. 向量组$\alpha_1=[1,2,-1,1]$，$\alpha_2=[2,0,t,0]$，$\alpha_3=[-1,2,-4,1]$的秩为2，则$t=$____C____；

   A: 1 B: 2
   C: 3 D: 0

4. 如果$[1,0,1]^T$，$[1,2,3]^T$是非齐次线性方程组的两个解，则下面哪个也是方程组的解？____C____；

A: $[2,2,4]^T$ B: $[0,2,2]^T$

C: $[1,-2,-1]^T$ D: $[2,0,2]^T$

5. A,B分别是m阶和n阶方阵，则$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$的伴随矩阵是___B___。

A: $\begin{bmatrix} O & |B|B^* \\ |A|A^* & O \end{bmatrix}$ B: $(-1)^{mn}\begin{bmatrix} O & |A|B^* \\ |B|A^* & O \end{bmatrix}$

C: $(-1)^{mn}|A||B|\begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$ D: $(-1)^{mn}|A||B|\begin{bmatrix} O & B^* \\ A^* & O \end{bmatrix}$

三、（15） 设矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$只有两个不同的特征值，求$A$的全部特征值和特征向量。

解：由题意知矩阵有一个二重特征值。因为$|A-\lambda E| = (2-\lambda)[\lambda^2-(a+1)\lambda+a-1]$，且$\lambda^2-(a+1)\lambda+a-1$没有重根，所以2是$A$的二重特征值，代入得$a=1$，且第三个特征值为0。

解方程$Ax=0$得特征值0的特征向量为$k_1\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$k_1\neq 0$，

解方程$(A-2E)x=0$得特征值2的特征向量为$k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$k_2,k_3$不全为0。

四、（10） 求矩阵X满足方程$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$。

解：由于$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

因此

$$X = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{13}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

五、（15） 设$a_1=[2,1,4,3]^T$，$a_2=[-1,1-6,6]^T$，$a_3=[-1,-2,a+1,-9]^T$，$a_4=[a,1,-2,7]^T$，$a_5=[2,4,4,3a+6]^T$，若向量组的秩为3，试找出一个极大线性无关组，并将其他的向量用该极大无关组线性表示。

解：

$$\begin{bmatrix}2&-1&-1&a&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&a+1&-2&4\\3&6&-9&7&3a+6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&a-2&-6\\0&-10&a+9&-6&-12\\0&3&-3&4&3a-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&a-2&-6\\0&0&a-1&\frac{2}{3}-\frac{10}{3}a&8\\0&0&0&a+2&3a-12\end{bmatrix}$$

若$a\neq1$，则由秩为3得$a+2=0$且$3a-12=0$，矛盾；因此$a=1$。于是

$$\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&0&0&-\frac{8}{3}&8\\0&0&0&3&-9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&0&7\\0&-3&3&0&-9\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以a_1,a_2,a_4是一个极大线性无关组，且

$$a_3=-a_1-a_2,\quad a_5=4a_1+3a_2-3a_4.$$

六、（10） 当a,b为何值时方程组$\begin{cases}x_1+x_2+3x_3+x_4=2\\x_1+3x_2+x_3+3x_4=6\\x_1-5x_2+12x_3+bx_4=-4\\3x_1-x_2+15x_3-x_4=a\end{cases}$无解，有唯一解或者有无穷多解，并求出无穷多解时的通解。

解：

$$\begin{bmatrix}1&1&3&1&2\\1&3&1&3&6\\1&-5&12&b&-4\\3&-1&15&-1&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&3&1&2\\0&1&-1&1&2\\0&-6&9&b-1&-6\\0&-4&6&-4&a-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&3&1&2\\0&1&-1&1&2\\0&0&3&b+5&6\\0&0&2&0&a+2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&3&1&2\\0&1&-1&1&2\\0&0&1&b+5&4-a\\0&0&0&-2(b+5)&3a-6\end{bmatrix}$$

所以$b\neq-5$时有唯一解；$b=-5$, $a\neq2$时无解；$b=-5$且$a=2$时有无穷多解，通解为

$$x=\begin{bmatrix}-8\\4\\2\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\quad c\in R.$$

七、(15) 实对称矩阵A和B分别定义二次型$f(\vec{x})=\vec{x}^TA\vec{x}=3x_1^2+3x_2^2-x_3^2-4x_1x_2$和$g(\vec{y})=\vec{y}^TB\vec{y}=y_1^2+2y_2^2+3y_3^2-4y_1y_2-4y_2y_3$，

1. 求可逆线性变量替换$\vec{x}=P\vec{z}$和$\vec{y}=Q\vec{z}$使二次型f和g化为规范型；
2. 求可逆矩阵C使A与B合同，即$C^TAC=B$。

解：$f=3(x_1-\frac{2}{3}x_2)^2+\frac{5}{3}x_2^2-x_3^2=(\sqrt{3}x_1-\frac{2}{\sqrt{3}}x_2)^2+(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x_2)^2-x_3^2$，则令

$$\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}&-\frac{2}{\sqrt{3}}&0\\0&\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad \text{即}x=Pz,\quad P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{15}}&0\\0&\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

二次型f化为规范形$z_1^2+z_2^2-z_3^2$；

$g=(y_1-2y_2)^2-2(y_2+y_3)^2+5y_3^2=(y_1-2y_2)^2+(\sqrt{5}y_3)^2-(\sqrt{2}y_2+\sqrt{2}y_3)^2$，则令

$$\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&0&\sqrt{5}\\0&\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix},\quad \text{即}y=Qz,\quad Q=\begin{bmatrix}1&-\frac{2}{\sqrt{5}}&\sqrt{2}\\0&-\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\end{bmatrix}$$

二次型g化为规范形$z_1^2+z_2^2-z_3^2$；

$$C=PQ^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{15}}&0\\0&\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&0&\sqrt{5}\\0&\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{2}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{3}}\\0&0&\sqrt{3}\\0&\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

八、(5) A是n阶方阵，证明存在可逆矩阵P和上三角矩阵U，使得$A=PU$。

证明:（最直观的解释是任何矩阵可行初等变换为行最简形，而方阵的行最简形一定是上三角形）显然$n=1$时结论成立，假设$n=k$时结论成立，则$n=k+1$时，设$A=(a_{ij}),\,1\le i,j\le k+1$

- 若$a_{11}\neq 0$，则初等行变换可将第一列除a_{11}外全化为0，即存在可逆矩阵Q，使得$QA=\begin{bmatrix}a_{11}&\alpha^T\\0&B\end{bmatrix}$；
- 若$a_{11}=0$但$a_{i1}\neq 0,\,i\neq 1$，则先作第一行和第i行互换，再重复上一步，所以依然存在可逆矩阵Q，使得$QA=\begin{bmatrix}a_{11}&\alpha^T\\0&B\end{bmatrix}$；
- 若第一列全为0，则$QA=\begin{bmatrix}a_{11}&\alpha^T\\0&B\end{bmatrix}$，$Q=E$。

由于B是k阶方阵，存在可逆矩阵P'和上三角矩阵U'使得$B=P'U'$，于是有可逆矩阵$P=Q^{-1}\begin{bmatrix}1&\\&P'\end{bmatrix}$和上三角矩阵$U=\begin{bmatrix}a_{11}&\alpha^T\\0&U'\end{bmatrix}$满足

$$PU=Q^{-1}\begin{bmatrix}1&\\&P'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&\alpha^T\\0&U'\end{bmatrix}=Q^{-1}\begin{bmatrix}a_{11}&\alpha^T\\0&B\end{bmatrix}=A$$