厦门大学微积分（III-2）课程期末试卷

经管类试卷：（A 卷）　　考试日期：2018. 6. 20

得分	
评阅人	

1、(5 分)计算曲线积分$I=\int_L (x^2+y^2)ds$，其中 L 是圆心在(1, 0)、半径为 1 的上半圆周。

解： 由于上半圆周的参数方程为

$$x=(1+\cos t),y=\sin t\quad(0\le t\le\pi)$$

所以

$$I=\int_0^{\pi}[(1+\cos t)^2+\sin^2 t]\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}dt$$
$$=2\int_0^{\pi}(1+\cos t)dt=2[t+\sin t]|_0^{\pi}=2\pi$$

得分	
评阅人	

2、(10 分)设曲线积分$\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$与路径无关，其中$\varphi$具有连续的导数，且$\varphi(0)=0$，计算$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy$。

解： 由$P(x,y)=xy^2,Q(x,y)=y\varphi(x)$，得

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)=2xy,\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[y\varphi(x)]=y\varphi'(x)$$

因积分与路径无关，有$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故$y\varphi'(x)=2xy$，从而

$$\varphi(x)=x^2+C$$

由$\varphi(0)=0$，得$C=0$，即$\varphi(x)=x^2$。所以

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy=\int_0^1 0dx+\int_0^1 ydy=\frac{1}{2}$$

3、(10 分)计算$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点(1, 0)为中心，R 为半径的圆周（$R\neq 1$），方向取逆时针方向。

得分	
评阅人	

解：记 L 围成的闭区域为 D，当$R<1,(0,0)\notin D$时，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{4x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{4x^2+y^2}\right)=\frac{\partial P}{\partial y}$$

根据格林公式，$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$

当$R>1,(0,0)\in D$时，作一位于 D 内的椭圆$l: 4x^2+y^2=r^2$，方向取逆时针方向。

记由 l 和 L 所围成的区域为D_1，则由格林公式得

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}-\oint_l \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$$

所以利用 l 的参数式方程$x=\frac{r}{2}\cos t, y=r\sin t \quad (0\le t\le 2\pi)$，得

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_l \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{r^2}{2}\cos^2 t+\frac{r^2}{2}\sin^2 t}{r^2}\mathrm{dt}=\pi$$

4. 判断下列级数是绝对收敛、条件收敛还是发散。(每小题 5 分，共 20 分)

得分	
评阅人	

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 2^n}{(n+1)!}$

解： 根据比值审敛法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n^2 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=0$$

该级数绝对收敛。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\sin\frac{\pi}{3^n}$

解： 因为$sin\frac{\pi}{3^n}\sim\frac{\pi}{3^n}$，所以$|(-2)^n\sin\frac{\pi}{3^n}|\sim\left(\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{n}}\pi$

且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，知原级数绝对收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1}$

解： $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{(-1)^n n}{n+1}|=1\neq 0$

所以原级数发散。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$

解： 绝对级数$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}>\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$，易知绝对级数发散

令$f(x)=\frac{\ln x}{x}\ \ (x>3)$，则

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0\ \ (x>3)$$

即$x>3$时，$\{\frac{\ln n}{n}\}$是递减数列，又利用洛必达法则，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

故由莱布尼茨定理知该级数条件收敛。

5、(10 分) 求$\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}$的收敛域及和函数，并计算$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$的和。

解： 因为幂级数只有奇数阶次幂，所以利用比值审敛法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}4^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}4x^2\right|=4x^2<1$$

所以收敛半径$R=\frac{1}{2}$。当$x=\frac{1}{2}$时，$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，交错级数满足莱布尼茨定理的条件，收敛；当$x=-\frac{1}{2}$时，$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$，同理收敛。综上，收敛域$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$。

$$s(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$s'(x) = -2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{2n} = \frac{-2}{1+4x^2} \quad (|x| < \frac{1}{2})$$

又$s(0) = \frac{\pi}{4}$，由积分公式

$$s(x) = s(0) + \int_0^x s'(x)dx = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} 2x \quad (|x| < \frac{1}{2})$$

因为$s(x)$在$|x| = \frac{1}{2}$点处连续，所以$s(x) = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} 2x \quad (|x| \le \frac{1}{2})$。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} - s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} 1) = \frac{\pi}{4}$$

6、（10 分）设$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$，（1）将$f(x)$展成 x 的幂级数，给出收敛域；（2）求$f^{(45)}(0)$。

解：（1）

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \qquad (-1 < x \le 1)$$

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n} \qquad (-1 \le x \le 1)$$

当$-1 \le x \le 1$且$x \ne 0$时，$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+1}$，易知$f(x)$在 0 点处连续，所以收敛域$[-1,1]$。

（2） 由$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+1} \qquad (-1 \le x \le 1)$，

$$f^{(45)}(0) = 45!\frac{(-1)^{22}}{22+1} = \frac{45!}{23}$$

7、（10 分）求方程$y^{(4)} + y'' = x - 5$的通解。

得分	
评阅人	

解：对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^4 + \lambda^2 = 0$$

解得$\lambda = 0,0,\pm i$，于是对应齐次方程的通解为$Y = (C_1 + C_2 x) + C_3\cos x + C_4\sin x$。

设所给方程的特解为$y^* = x^2(ax+b)$，代入方程有

$$6ax + 2b = x - 5$$

比较系数，得$a=\frac{1}{6}, b=-\frac{5}{2}$，于是$y^*=\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{2}x^2$。从而得到所给方程的通解

$$y(x)=(C_1+C_2x)+C_3\cos x+C_4\sin x+\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{2}x^2$$

其中C_1, C_2, C_3, C_4为任意常数。

8、(10 分) 已知二阶常系数非齐次线性方程的三个特解分别为$y_1=\cos 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x$, $y_2=\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x$, $y_3=-\frac{1}{4}x\cos 2x$，求该微分方程并给出通解。

得分	
评阅人	

解：根据二阶常系数非齐次线性方程解的结构，可以推出$-\frac{1}{4}x\cos 2x$是方程的一个特解。$\cos 2x$, $\sin 2x$是对应齐次方程的两个特解，即对应齐次方程的通解为$C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$。特征方程$r^2+pr+q=0$有一对共轭复根$\pm 2i$。

$$r^2+pr+q=(r-2i)(r+2i)=r^2+4=0$$

对应齐次方程为$y''+4y=0$。设非齐次方程为$y''+4y=f(x)$，将$-\frac{1}{4}x\cos 2x$代入非齐次方程求得$f(x)=\sin 2x$。所以该微分方程为

$$y''+4y=\sin 2x$$

通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x$$

9、(10 分) 设曲线 L 上位于第一象限内任意一点 M 处的切线总于 y 轴相交，交点为 A，已知$|\overline{MA}|=|\overline{OA}|$，且曲线 L 过点$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$，求曲线 L 的方程。

得分	
评阅人	

解： 易知点 M 处的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)$$

点 A 坐标为$(0, y-xy')$。由$|\overline{MA}|=\sqrt{x^2+(xy')^2}, |\overline{OA}|=|y-xy'|$可得

$$x^2+(xy')^2=y^2-2xyy'+(xy')^2$$

化简得

$$y'=\frac{1}{2}(\frac{y}{x}-\frac{x}{y})$$

该方程是齐次方程，令$u=\frac{y}{x}$，代入方程并分离变量得到

$$\frac{2uu'}{u^2+1}=-\frac{1}{x}$$

两端分别积分并化简可得通解$u^2=\frac{C}{x}-1\quad(C\neq 0)$，其中 C 为任意常数。将$u=\frac{y}{x}$代入通解并令通解过$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$点，解出$C=3$，所以曲线 L 的方程为

$$y^2=3x-x^2$$

10、(5 分)求方程$y_{x+1}+2y_x=2x-1+e^x$的通解。

得分	
评阅人	

解：

对应齐次方程的通解为

$$y=C(-2)^x$$

设$y_1^*(x)=a_0x+a_1, y_2^*=Ae^x$，于是$y^*(x)=a_0x+a_1+Ae^x$代入方程有

$$3a_0x+a_0+3a_1+(Ae+2A)e^x=2x-1+e^x$$

比较系数，得$a_0=\frac{2}{3}, a_1=-\frac{5}{9}, A=\frac{1}{e+2}$，从而有

$$y^*(x)=\frac{2}{3}x-\frac{5}{9}+\frac{1}{e+2}e^x$$

所给方程的通解为

$$y(x)=C(-2)^x+\frac{2}{3}x-\frac{5}{9}+\frac{1}{e+2}e^x$$

其中 C 为任意常数。