厦门大学《微积分 III-2》课程期末试卷

试卷类型：（经管类A卷）　考试日期　2016.6.15

一、计算题（每小题7分，共14分）：

1. 计算$\int_L xy\mathrm{d}x$，其中L为抛物线$y^2=x$从点$A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段弧。

解：视y为参数，则$\int_L xy\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}y^2y\cdot 2ydy=2\int_{-1}^{1}y^4dy=4/5$.

2. 计算$\oint_\Gamma\left(x^2+2y^2\right)\mathrm{d}s$，其中曲线$\Gamma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被平面$z=y$所截得的圆周$(a>0)$。

解:法一：由曲线Γ方程，简化曲线积分为：$\oint_L\left(x^2+2y^2\right)\mathrm{d}s=a^2\int_\Gamma \mathrm{d}s$（. . . 5 分）$=2\pi a^3$。

法二：曲线参数化为：$x=a\cos t,y=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sin t,z=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sin t,t\in[0,2\pi)$，则

$\oint_L\left(x^2+2y^2\right)\mathrm{d}s=a^3\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\sqrt{\sin^2 t+\sin^2 t}\mathrm{d}t$（. . . 6 分）$=2\pi a^3$。

二、解答题（每小题7分，共14分）：

1. 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{[\ln(n+1)]^n}$的敛散性。

解：利用根植判别法，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{[\ln(n+1)]^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}=0$，则级数收敛。

2. 已知$y_1=xe^x+e^{2x},y_2=xe^x-e^{-x},y_3=xe^x-e^{-x}+e^{2x}$是某二阶线性非齐次微分方程的三个特解，请写出此微分方程的通解。

解：由于y_1,y_2,y_3是非齐次线性方程的特解，故$y_1-y_2=e^{2x}+e^{-x},y_1-y_3=\mathrm{e}^{-x}$是相应齐次方程的两个线性无关的解。又由于$y_1-y_3+y_2=xe^x$为非齐次方程的特解，则其通解为$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+xe^x$（. . . 7 分）。

三、计算曲线积分$\int_L(e^x\cos y-2y)\mathrm{d}x-(e^x\sin y-2)\mathrm{d}y$，其中$L$为上半圆周$(x-1)^2+y^2=1(y\geq 0)$,沿逆时针方向。（8 分）

解：补上曲线$l:y=0,x:0\to 2$，记L和l所围成的闭区域为D。由格林公式，得

$$\int_{L+l}(e^x\cos y-2y)\mathrm{d}x-(e^x\sin y-2)\mathrm{d}y-\int_l(e^x\cos y-2y)\mathrm{d}x-(e^x\sin y-2)\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^2 e^x dx\text{（. . . 7 分）}=\pi-e^2+1\text{。}$$

四、求无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^n$的和函数，并指出其收敛域。（10 分）

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)(n+2)}{(-1)^n n(n+1)}=1$，当 $x=\pm1$，通项不趋近于 0，级数发散，所以收敛域是 $(-1,1)$。

法一：

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(x^{n+1}\right)'\text{（5 分）}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n+1}\right]'=\left[x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}\right]'$$

$$=\left[x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x^n)'\right]'=\left[x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n\right)'\right]'=\left[x^2\left(\frac{-x}{1+x}\right)'\right]'=\left[-\frac{x^2}{(1+x)^2}\right]'=-\frac{2x}{(1+x)^3}$$

法二：

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^{n+1}\right)''=-x\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n+1}\right]''=-x\left[\frac{x^2}{1+x}\right]''=-\frac{2x}{(1+x)^3}$$

五、求下列方程的通解：（每小题 8 分，共 16 分）

1. 求差分方程 $y_{t+1}-y_t=(t+1)\cdot3^t+6$ 的通解。

解：对应齐次差分方程的通解为：$y_t=C$，分别计算 $y_{t+1}-y_t=(t+1)\cdot3^t$ 和 $y_{t+1}-y_t=6$ 的特解，对前一个方程，令 $y_t=z_t3^t$，则方程变为：$3z_{t+1}-z_t=t+1$，设特解为 $z_t=at+b$，则有 $3(a(t+1)+b)-(at+b)=t+1$，于是，$2a=1,3a+2b=1$，则有 $a=1/2,b=-1/4$，对应的特解为 $z_t=\dfrac{1}{4}(2t-1)$。对第二个方程，设特解为 $y^1{}_t=ct$，则有 $c(t+1)-ct=6$，于是，$c=6$。则原方程的通解为 $y_t=C+\dfrac{1}{4}(2t-1)3^t+6$。

2．求微分方程 $(y^3-4x)y'+2y=0$ 的通解。

解：方程变形为：$\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{2}{y}x+\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=0$，即 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{2}{y}x=-\dfrac{y^2}{2}$，这是一阶线性非齐次微分方程，由解的公式，有 $x=e^{\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\left[\int-\dfrac{y^2}{2}e^{-\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]=y^2(-\dfrac{1}{2}y+C)$。

六、将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 指出其收敛域，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。（10 分）

解： $\because f'(x)=-\dfrac{1}{1+4x^2}=-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n},x\in(-1,1)$, 又 $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=\frac{\pi}{4}-2\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{2n}dx=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$\because$ 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛 $\therefore f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

令 $x=\frac{1}{2}$，得 $f(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，又 $f(\frac{1}{2})=0$，故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}-f(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}$.

七、设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，已知 $\left[x^2-f(x)\right]y\mathrm{d}x+\left[f'(x)+x\right]\mathrm{d}y=0$ 为一阶全微分方程，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解。（12 分）

解：已知 $\left[x^2-f(x)\right]y\mathrm{d}x+\left[f'(x)+x\right]\mathrm{d}y=0$ 为一阶全微分方程，则有 $f''(x)+1=x^2-f(x)$，这是一个二阶常系数线性微分方程，对应齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$，特征根为 $r=\pm\mathrm{i}$，齐次方程的通解为 $c_1\cos x+c_2\sin x$。非齐次方程特解设为 $a_0x^2+a_1x+a_2$，代入非齐次方程，$2a_0+a_0x^2+a_1x+a_2=x^2-1$，于是 $a_0=1,a_1=0,2a_0+a_2=-1$，$a_0=1,a_1=0,a_2=-3$，于是非齐次方程的通解为 $c_1\cos x+c_2\sin x+x^2-3$，由 $f(0)=0,f'(0)=1$，得到 $c_1=3,c_2=1,\quad f(x)=3\cos x+\sin x+x^2-3$。全微分方程的通解为：$u(x,y)=\int_0^x 0dx+\int_0^y\left(-3\sin x+\cos x+3x\right)dy$，即 $\left(-3\sin x+\cos x+3x\right)y=C$。

八、已知 $u_n>0$，$\alpha>0$，且 $\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}[\ln(1+n)-\ln n]u_n=3$，试讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性。（10 分）

解：由 $\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}[\ln(1+n)-\ln n]u_n=3$ 知，$\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}[\ln(1+n)-\ln n]u_n=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\ln(1+\frac{1}{n})u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^{\alpha-1}}}=3$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ 有相同的敛散性，于是，$\alpha-1>1$，即 $\alpha>2$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；$\alpha-1\le1$，即 $0<\alpha\le2$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

九、求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$。（6 分）

解：法一，考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{3} < 1$

$\therefore$ 由根值判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛.

其部分和 $s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$ 数列收敛，从而 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n} = 0$

法二，由 $0 < \frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} < \frac{e^k}{3^k}$ 及， $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{e}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{e}{3}}$ ，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{e}{3}\right)^k = 0$ ，夹逼准则，有

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} = 0$