厦门大学《微积分 III-2》课程期末试卷

试卷类型：（经管类 A 卷）　考试日期　2016.6.15

一、计算题（每小题 7 分，共 14 分）：

得　分	
评阅人	

1. 计算 $\int_L xy\mathrm{d}x$，其中 L 为抛物线 $y^2 = x$ 从点 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧。

2. 计算 $\oint_{\Gamma}\left(x^2+2y^2\right)\mathrm{d}s$，其中曲线 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=y$ 所截得的圆周 $(a>0)$。

二、解答题（每小题 7 分，共 14 分）：

得　分	
评阅人	

1. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$ 的敛散性。

2. 已知 $y_1 = xe^x+e^{2x}, y_2 = xe^x-e^{-x}, y_3 = xe^x-e^{-x}+e^{2x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个特解，请写出此微分方程的通解。

三、计算曲线积分$\int_L (e^x \cos y - 2y)\,\mathrm{d}x - (e^x \sin y - 2)\,\mathrm{d}y$，其中$L$为上半圆周$(x-1)^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$, 沿逆时针方向。（8 分）

得　分	
评阅人	

四、求无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n(n+1) x^n$的和函数，并指出其收敛域。（10 分）

得　分	
评阅人	

五、求下列方程的通解：（每小题 8 分，共 16 分）

得　分	
评阅人	

1. 求差分方程 $y_{t+1}-y_t=(t+1)\cdot 3^t+6$ 的通解。

2．求微分方程 $(y^3-4x)y'+2y=0$ 的通解。

六、将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 指出其收敛域，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。（10 分）

得　分	
评阅人	

得　分	
评阅人	

七、设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，已知 $\left[x^2-f(x)\right]y\mathrm{d}x+\left[f'(x)+x\right]\mathrm{d}y=0$ 为一阶全微分方程，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解。（12 分）

八、已知$u_n>0$，$\alpha>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}[\ln(1+n)-\ln n]u_n=3$，试讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的敛散性。（10 分）

得　分	
评阅人	

九、求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$。（6 分）

得　分	
评阅人	