第5章 大数定律及中心极限定理

第五章　大数定理和中心极限定理

1．[一]　据以往经验某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布，现在随机的抽取 16 只，设它们的寿命是相互独立的，求这 16 只元件寿命总和大于 1920 小时的概率。

解：设第 i 只寿命为 X_i，（$1\le i\le 16$），故 $E(X_i)=100$，$D(X_i)=100^2(l=1,2,\cdots,16)$.依本章定理 1 知

$$P(\sum_{i=1}^{16} X_i \le 1920) = P\left(\frac{\sum_{i=0}^{16} X_i - 1600}{\sqrt{16}\times 100} \le \frac{1920-1600}{\sqrt{16}\times 100}\right) = P\left(\frac{\sum_{i=0}^{16} X_i - 1600}{400} \le 0.8\right)$$

$$= \Phi(0.8) = 0.7881.$$

从而 $P(\sum^{16} X_i > 1920) = 1 - P(\sum^{16} X_i \le 1920) = 1 - 0.7881 = 0.2119.$

$i=1$ $i=1$

3．[三] 计算机在进行加法时，对每个加数取整（取为最接近它的整数），设所有的取整误差是相互独立的，且它们都在（－0.5，0.5）上服从均匀分布，

（1）若将 1500 个数相加，问误差总和的绝对值超过 15 的概率是多少？

（2）几个数相加在一起使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90

解：

（1）设取整误差为 X_i（$i=1,2,\cdots$，1500），它们都在（－0.5, 0.5）上服从均匀分布。

于是： $$E(X_i)=p=\frac{-0.5+0.5}{2}=0$$

$$D(X_i)=\frac{[0.5-(-0.5)]^2}{12}=\frac{1}{12}$$

$$nE(X_i)=0,\quad \sqrt{nD(X_i)}=\sqrt{1500\times\frac{1}{12}}=\sqrt{125}=11.18$$

$$P\left\{\left|\sum_{i=0}^{1500}X_i\right|>15\right\}=1-P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1500}X_i\right|\le 15\right\}$$

$$=1-P\left\{-15\le\sum_{i=1}^{1500}X_i\le 15\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{-15}{11.18}\le\frac{\sum_{i=1}^{1500}X_i}{11.18}\le\frac{15}{11.18}\right\}$$

$$=1-[\Phi(1.34)-\Phi(-1.34)]$$
$$=2[1-\Phi(1.34)]=2\times[1-0.9099]=0.1802$$

8．某药厂断言，该厂生产的某种药品对于医治一种疑难的血液病的治愈率为 0.8，医院检验员任意抽查 100 个服用此药品的病人，如果其中多于 75 人治愈，就接受这一断言，否则就拒绝这一断言。（1）若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.8，问接受这一断言的概率是多少？（2）若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.7，问接受这一断言的概率是多少？

解 设 X 为 100 人中治愈的人数，则 $X\sim B(n,p)$ 其中 $n=100$

解：设 X 为 100 人中治愈的人数，则 $X\sim B(n,p)$ 其中 $n=100$

（1）$P(X>75)=1-P(X\le 75)=1-P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{75-np}{\sqrt{npq}}\right\}=1-\Phi(\frac{75-np}{\sqrt{npq}})$

$$=1-\Phi(\frac{-5}{4})=\Phi(+\frac{5}{4})=0.8944$$

（2）$p=0.7$ 由中心极限定理知

$$P(X>75)=1-P(X\le 75)=1-P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{75-np}{\sqrt{npq}}\right\}=1-\Phi(\frac{75-np}{\sqrt{npq}})$$

$$=1-\Phi(\frac{5}{\sqrt{21}})=1-\Phi(1.09)=1-0.8621=0.1379.$$

7. [七] 一复杂的系统，由 100 个互相独立起作用的部件所组成。在

整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.10。为了整个系统起作用至少必需有 85 个部件工作。求整个系统工作的概率。

（2）一个复杂的系统，由 n 个互相独立起作用的部件所组成，每个部件的可靠性（即部件工作的概率）为 0.90。且必须至少有 80%部件工作才能使整个系统工作，问 n 至少为多少才能使系统的可靠性不低于 0.95。

解：（1）设每个部件为 $X_i(i=1,2,\cdots\cdots100)$

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{部件工作}\\ 0 & \text{部件损坏不工作}\end{cases}$$

设 X 是 100 个相互独立，服从（0－1）分布的随机变量 X_i 之和

$$X=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_{100}$$

由题设知　$n=100$　$P\{X_i=1\}=p=0.9$, $P\{X_i=0\}=0.1$

$E(X_i)=p=0.9$

$D(X_i)=p(1-p)=0.9\times0.1=0.09$

$n\cdot E(X_i)=100\times0.9=90$, $n D(X_i)=100\times0.09=9$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\ge 85\right\}=P\left\{\frac{X-nE(X_i)}{\sqrt{nD(X_i)}}\ge\frac{85-nE(X_i)}{\sqrt{nD(X_i)}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{X-90}{\sqrt{9}}\ge\frac{85-90}{\sqrt{9}}\right\}=P\left\{\frac{X-90}{3}\ge\frac{-5}{3}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{X-90}{3}<-\frac{5}{3}\right\}$$　　由中心极限定理知

$$\approx 1-\int_{-\infty}^{-\frac{5}{3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$=1-\Phi(-\frac{5}{3})$ 查标准正态分布表

$=\varphi\ (1.67)$

$=0.9525$

解：（2）设每个部件为 $X_i\,(i=1,2,\cdots\cdots n)$

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{部件工作}\\ 0 & \text{部件损坏不工作}\end{cases}$$

$P\ \{X_i=1\}=p=0.9,\ P\ \{X_i=0\}=1-p=0.1$

$E\ (X_i\,)=p=0.9,\qquad D\ (X_i\,)=0.9\times0.1=0.09$

由问题知 $P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{80}{100}n\right\}=0.95$ 求 n=?

而 $P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{80}{100}n\right\}$

$$=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{nD(X_i)}} > \frac{\frac{80}{100}n-np}{\sqrt{nD(X_i)}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 0.9n}{0.3\sqrt{n}} > \frac{\frac{80}{100}n-0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 0.9n}{0.3\sqrt{n}} \le \frac{\frac{80}{100}n-0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right\}$$ 由中心极限定理知

$$=1-\Phi\left(\frac{-0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right)=\Phi\left(\frac{0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right)\ge 0.95$$

查标准正态分布表得 $\frac{0.1n}{0.3\sqrt{n}}\ge 1.645$

解得 $n\ge 24.35$

解得 $n \geq 24.35$

取 $n=25$，即 n 至少为 25 才能使系统可靠性为 0.95.

[八] 随机地取两组学生，每组 80 人，分别在两个实验室里测量某种化合物的 PH 值，各人测量的结果是随机变量，它们相互独立，且服从同一分布，其数学期望为 5，方差为 0.3，以 $\overline{X},\overline{Y}$ 分别表示第一组和第二组所得结果的算术平均：

（1）求 $P\{4.9<\overline{X}<5.1\}$（2）$P\{-0.1<\overline{X}-\overline{Y}<0.1\}$

解：由中心极限定理知

$$U=\frac{\sum_{i=1}^{80}X_i-80\times 5}{\sqrt{80\times 0.3}}\sim N(0,1)\qquad V=\frac{\sum_{j=1}^{80}Y_j-80\times 5}{\sqrt{80\times 0.3}}\sim N(0,1)$$

（1）$$P\{4.9<\overline{X}<5.1\}=P\left\{\frac{4.9\times 80-80\times 5}{\sqrt{80\times 0.3}}<\frac{\sum_{i=1}^{80}X_i-80\times 5}{\sqrt{80\times 0.3}}<\frac{5.1\times 80-80\times 5}{\sqrt{80\times 0.3}}\right\}$$

$$P\left\{-1.63<\frac{\sum_{i=1}^{80}X_i-80\times 5}{\sqrt{24}}<1.63\right\}=2\Phi(1.63)-1=2\times 0.9484-1=0.8968$$

（2）由 X_i, Y_j 的相互独立性知 $\sum_{i=1}^{80}X_i$ 与 $\sum_{j=1}^{80}Y_j$ 独立。从而 U，V 独立。

于是 $U-V\sim N(0, 2)$

而 $$Z\cong U-V=\frac{\sum_{i=1}^{80}X_i-\sum_{j=1}^{80}Y_j}{\sqrt{24}}$$

$$P\{-0.1<\overline{X}-\overline{Y}<0.1\}=P\left\{\frac{-0.1\times 80}{\sqrt{80\times 0.3}}<\frac{\sum_{i=1}^{80}X_i-\sum_{j=1}^{80}Y_j}{\sqrt{80\times 0.3}}<\frac{0.1\times 80}{\sqrt{80\times 0.3}}\right\}$$

$$=P\{-1.63<Z<1.63\}=\Phi\left(\frac{1.63}{\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(-\frac{1.63}{\sqrt{2}}\right)=2\Phi(1.15)-1$$

$=2\times0.8749-1=0.7498$

[九] 某种电子器件的寿命（小时）具有数学期望μ（未知），方差$\sigma^2=400$ 为了估计μ，随机地取几只这种器件，在时刻 t=0 投入测试（设测试是相互独立的）直到失败，测得其寿命 X_1，…，X_n，以$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 作为

μ 的估计，为使$P\{|\bar{X}-\mu|\}\geq 0.95$，问 n 至少为多少？

解：由中心极限定理知，当 n 很大时

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}=\frac{n\bar{X}-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\sim N(0,1)$$

$$P\{|\bar{X}-\mu|<1\}=P\left\{\frac{-n}{\sqrt{n\sigma^2}}<\frac{n\bar{X}-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}<\frac{n}{\sqrt{n\sigma^2}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{n}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)-\Phi\left(-\frac{n}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

$$=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{20}\right)-1\geq0.95$$

所以$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{20}\right)\geq0.975$

查标准正态分布表知

$$\frac{\sqrt{n}}{20}\geq1.96$$
$$n\geq1536.64$$

即 n 至少取 1537。

第六章　样本及抽样分布

1.[一] 在总体 N（52，6.3^2）中随机抽一容量为 36 的样本，求样本均

值$\bar{X}$落在 50.8 到 53.8 之间的概率。

解：

$$\overline{X} \sim N(52, \frac{6.3^2}{36}), P\{50.8 < \overline{X} < 53.8\} = P\{-\frac{1.2}{\frac{6.3}{6}} < \frac{\overline{X}-52}{\frac{6.3}{6}} < \frac{1.8}{\frac{6.3}{6}}\}$$

$$= \Phi(\frac{12}{7}) - \Phi(\frac{-8}{7}) = 0.8293$$

2.[二]　在总体 N（12，4）中随机抽一容量为 5 的样本 X_1，X_2，X_3，X_4，X_5.

（1）求样本均值与总体平均值之差的绝对值大于 1 的概率。

（2）求概率 $P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) > 15\}$.

（3）求概率 $P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) > 10\}$.

解：（1）$P\{|\overline{X}-12| > 1\} = P\left\{\left|\frac{\overline{X}-12}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\right| > \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\right\} = 2P\left\{\left|\frac{\overline{X}-12}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\right| > \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

$$=2[1-\Phi(\frac{\sqrt{5}}{2})] = 0.2628$$

（2）$P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) > 15\} = 1 - P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \le 15\}$

$$=1-\prod_{i=1}^{5} P\{X_i \le 15\} = 1-[\Phi(\frac{15-12}{2})]^5 = 0.2923.$$

（3）$P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) < 10\} = 1 - P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \ge 10\}$

$$=1-\prod_{i=1}^{5} P\{X_i \ge 10\} = 1-[1-\Phi(\frac{10-12}{2})]^5 = 1-[\Phi(1)]^5 = 0.5785.$$

4.[四]　设 $X_1, X_2 \cdots, X_{10}$ 为 $N(0, 0.3^2)$ 的一个样本，求 $P\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\}$.

解：$\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \Big/ 0.3^2 \sim \chi^2(10), P\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\} = P\{\sum_{i=1}^{10} \frac{X_i^2}{0.3^2} > 16\} = 0.1$(查表5)

7．设 X_1，X_2，…，X_n 是来自泊松分布 $\pi(\lambda)$ 的一个样本，$\overline{X}$，S^2 分别为样本均值和样本方差，求 $E(\overline{X}), D(\overline{X}), E(S^2)$.

解：由 $X\sim\pi(\lambda)$ 知 $E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$

$$\therefore E(\overline{X})=E(X)=\lambda,\ D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{\lambda}{n},\ E(S^2)=D(X)=\lambda.$$

[六] 设总体 X~$b(1,p)$，X_1，X_2，…，X_n 是来自 X 的样本。

（1）求 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布律；

（2）求 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的分布律；

（3）求 $E(\overline{X}), D(\overline{X}), E(S^2)$.

解：（1）（X_1，…，X_n）的分布律为

$$P\{X_1=i_1,X_2=i_2,\cdots,X_n=in\}\overset{\text{独立}}{=\!=}\prod_{k=1}^{n}P\{X_k=i_k\}=\prod_{k=1}^{n}P^{i_k}(1-P)^{1-i_k}$$

$$=P^{\sum_{k=1}^{n}i_k}(1-P)^{n-\sum_{i=1}^{n}i_k},\ i_k=0\text{或}1,\ k=1,\cdots,n.$$

（2）$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim b(n,p)$

(由第三章习题 26[二十七]知)

（3）$E(\overline{X})=E(X)=P$，

$$D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{P}{n}$$

$$E(S^2)=D(X)=P(1-P)$$

[八]设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，X_1，…，X_{10} 是来自 X 的样本。

（1）写出 X_1，…，X_{10} 的联合概率密度（2）写出 $\overline{X}$ 的概率密度。

解：（1）(X_1，…，X_{10})的联合概率密度为

$$f(x_1,\cdots x_{10})=\prod_{i=1}^{10}f(x_i)=\prod_{i=1}^{10}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

（2）由第六章定理一知

$$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right),n=10$$

即 $\overline{X}$ 的概率密度为

$$f_{\overline{X}}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}e^{-\frac{n(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$