

算法实现题 6-1

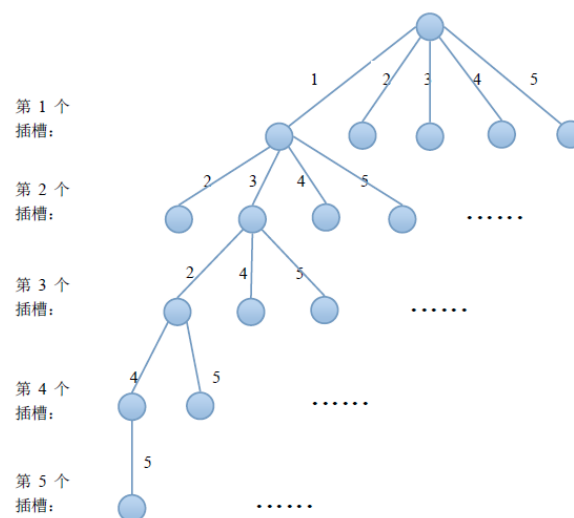
最小长度电路板排列问题是大规模电子系统设计中提出的实际问题。该问题的提法是，将 n 块电路板以最佳排列方案插入带有 n 个插槽的机箱中。 n 块电路板的不同的排列方式对应于不同的电路板插入方案。

设 $B=\{1, 2, \dots, n\}$ 是 n 块电路板的集合。集合 $L=\{N_1, N_2, \dots, N_m\}$ 是 n 块电路板的 m 个连接块。其中每个连接块 N_i 是 B 的一个子集，且 N_i 中的电路板用同一根导线连接在一起。最小长度电路板排列问题中，连接块的长度是指该连接块中第 1 块电路板到最后 1 块电路板之间的距离。

试设计一个队列式分支限界法找出所给 n 个电路板的最佳排列，使得 m 个连接块中最大长度达到最小。

1、解空间的定义和形式

此问题的解空间树是一棵排列树，采用优先队列式分支限界法找出所给电路板的最小长度布局。算法中采用最小堆表示活结点优先队列。算法中解空间树的图示如下：



2、结点活性的判断

设确定排列顺序时前 s 个结点都已经确定，当前的扩展结点 $s+1$ 可以分为两种情况：

(1) 当 $s=n-1$ 时，已排定 $n-1$ 块电路板，故当前扩展结点是排列树中的叶结点的父结点，设 x 表示相应于该叶结点的电路板排列，则计算出与 x 对应的连接块的最大长度，并在必要时更新当前的最优值和相应的最优解；

(2) 当 $s < n-1$ 时，算法依次产生当前扩展结点的所有儿子结点。对于当前扩展结点的每一个儿子结点，计算出其相应的最大长度。如果这个最大长度小于当前最优值，则将该儿子结点插入到活结点优先队列中，而当这个最大长度大于当前最优值时，以此儿子结点为根的子树中不可能有比当前最优解更好的解，故此结点的活性丧失，舍去。

3、搜索策略

对于解空间树的搜索采用广度优先的方式，将符合要求的结点插入到活结点优先队列中。采用最小堆表示活结点优先队列，优先级的判断标准为对应于当前结点的电路板排列的最大长度（即 m 个连接块中第 1 块电路板到最后 1 块电路板之间的距离的最大值），最大长度越小，优先级越高。

4、终止条件

本题中需要找的是最优解，故搜索的终止条件是活结点优先队列中的结点全部为空。

算法实现题 6-2

给定一个赋权无向图 $G=(V, E)$ ，每个顶点 $v \in V$ 都有一个权值 $w(v)$ 。如果 U 包含于 V ，且对于任意 $(u, v) \in E$ 有 $u \in U$ 或 $v \in U$ ，就称 U 为图 G 的一个顶点覆盖。 G 的最小权顶点覆盖是指 G 中所含顶点权之和最小的顶点覆盖。

1、解空间的定义和形式

该问题解空间的实质是子集树的形式。本题要求我们从顶点集中的所有顶点中取出一部分的顶点构成一个顶点覆盖，所以对于每个顶点来说都有取和不取两种情况。所以问题的解空间可以看做是 $n+1$ 层的完全二叉树。

2、结点活性的判断

根据题意，如果一个顶点已经在我们所要寻找的顶点覆盖这个集合中，那么这个顶点所对应的边的另外一个顶点是不可以放入顶点覆盖这个集合中的。混句话说，这个顶点相对应的结点是没有活性的，是不能被放入优先队列中的。结点活性的判断就相当回溯法中的剪枝函数作用。

3、搜索策略

本题采用优先队列式分支限界法，所以涉及到优先队列的设计。考虑到题目要求寻找权值之和最小的顶点覆盖，那么我们就构造极小堆这种优先队列的形式。

具体的搜索过程采用广度优先搜索策略，对于每一个有活性的结点都加入到优先级队列之中，但是在加入到队列之前，要提前计算优先级。本题优先级的判断依据是当前所有点权值大小之和，越小则优先级越高，相对应的就要放在队列的前端。

利用这种方法进行搜索的时候，当从优先级队列弹出的结点的子节点是叶子结点时，则说明找到了一个可行解，那么就可以标注当前的可行解为当前的最优解。在本题中，会先找到一个当前的最小权值之和，我们记录这个当前最优值。对于之后从队列中弹出的活结点，会出现两种情况：

(1)对于之后弹出的活性结点，如果它所对应的权值之和大于之前的最优值权值之和，那么这个结点就没有必要设成扩展结点了，包括在队列中排列在之后的那些结点（因为是按照优先级进行排列的，越后面权值之和就越大）就更没有必要设成扩展结点，直接从队列中弹出即可，这里相当于回溯法中的限界功能。

(2)对于之后弹出的活性结点，如果它所对应的权值之和小于之前的最优值权值之和，那么继续设成扩展结点进行扩展，到达叶结点计算权值，如果小于当前最优权值，则更新当前的最优值。

4、终止条件

因为该方法使用的优先队列式分支限界法，所以终止条件是以权值之和越小，优先级越高的优先队列中的结点的数量为 0。

算法实现题 6-4

设某一机器由 N 个部件组成，每一个部件都可以从 M 个不同的供应商处购得。设 w_{ij} 是从供应商 j 处购得部件 i 的重量， c_{ij} 是相应的价格。试设计一个算法，给出总价格不超过 c 的最小重量机器设计。

1、解空间的定义和形式

该问题解空间的实质是子集树的形式。本题要求我们为每一种部件都从 m 个不同的供应商选择一个供应商，所以对于每个顶点来说都有 m 种选择。所以问题的解空间可以看做是 $n+1$ 层的完全 m 叉树。

2、结点活性的判断

根据题意，要给出总价格不超过 d 的最小重量机器设计，那么对于搜索到的一个部件来

说,如果它从某个供应商获得价值量加上之前的总价值量会大于 d ,那么这个选择是不能加入到设计中的。混句话说,这个供应闪的选择相对应的结点是没有活性的,是不能被放入优先队列中的。结点活性的判断就相当回溯法中的剪枝函数作用。

3、搜索策略

本题采用优先队列式分支限界法,所以涉及到优先队列的设计。考虑到题目要求寻找重量最小的部件供应商选择,那么我们就构造极小堆这种优先队列的形式。

具体的搜索过程采用广度优先搜索策略,对于每一个有活性的结点都加入到优先级队列之中,但是在加入到队列之前,要提前计算优先级。本题优先级的判断依据是当前所有部件重量之和,越小则优先级越高,相对应的就要放在队列的前端。

利用这种方法进行搜索的时候,当从优先级队列弹出的结点的子节点是叶子结点时,则说明找到了一个可行解,那么就可以标注当前的可行解为当前的最优解。在本题中,会先找到一个当前的最小部件重量之和,我们记录这个当前最优值。对于之后从队列中弹出的活结点,会出现两种情况:

(1) 对于之后弹出的活性结点,如果它所对应的部件重量之和大于之前的最优值权值之和,那么这个结点就没有必要设成扩展结点了,包括在队列中排列在之后的那些结点(因为是按照优先级进行排列的,越后面部件重量之和就越大)就更没有必要设成扩展结点,直接从队列中弹出即可,这里相当于回溯法中的限界功能。

(2) 对于之后弹出的活性结点,如果它所对应的部件重量之和小于之前的最优值权值之和,那么继续设成扩展结点进行扩展,到达叶结点计算部件重量之和,如果小于当前最优部件重量之和,则更新当前的最优值。

4、终止条件

因为该方法使用的优先队列式分支限界法,所以终止条件是以部件重量之和越小,优先级越高的优先队列中的结点的数量为 0。

算法实现题 6-5

羽毛球队有男女运动员各 n 人。给定 2 个 $n \times n$ 矩阵 P 和 Q 。 $P[i][j]$ 是男运动员 i 和女运动员 j 配对组成混合双打的男运动员竞赛优势; $Q[i][j]$ 是女运动员 i 和男运动员 j 配合的女运动员竞赛优势;由于技术配合和心理状态等各种因素影响, $P[i][j]$ 不一定等于 $Q[j][i]$ 。男运动员 i 和女运动员 j 配对组成混合双打的男女双方竞赛优势为 $P[i][j]*Q[j][i]$ 。设计一个算法,计算男女运动员最佳配对法,使各组男女双方竞赛优势的总和达到最大。

1、解空间的定义和形式

该问题的解空间实质是排列树的形式。根据题意,我们要求的是男女运动员的最佳配对法,那么我们可以先把男队员按照一种规定的方式进行排列(之后男队员的排列顺序不再发生改变),那么让女队员以不同的顺序去和男队员匹配,那么女队员的不同排列方式就构成了男女运动员的不同配对方式。所以我们只要求出女队员的不同排列方式即可,所以问题解空间是排列树。

2、结点活性的判断

该问题并不存在任何约束条件,对于每个结点(叶结点除外)都是活结点,因为我们选择配对方式的话是对于一定顺序的男生,每个女生都是要被选择到的。至于活结点是否可以被设成扩展结点,这得取决于下个模块讨论的相当于回溯法中的限界条件。

3、搜索策略

本题采用优先队列式分支限界法,所以涉及到优先队列的设计。考虑到题目要求寻找男女双方竞赛优势总和最大,那么我们就构造极大堆这种优先队列的形式。

具体的搜索过程采用广度优先搜索策略,对于每一个有活性的结点都加入到优先级队列

之中，但是在加入到队列之前，要提前计算优先级。本题优先级的判断依据是当前男女双方竞赛优势总和，越大则优先级越高，相对应的就要放在队列中竞赛优势总和相对较小的结点的前面。

利用这种方法进行搜索的时候，当从优先级队列弹出的结点的子节点是叶子结点时，则说明找到了一个可行解，那么就可以标注当前的可行解为当前的最优解。在本题中，会先找到一个当前的最大男女双方竞赛优势，我们记录这个当前最优值。对于之后从队列中弹出的活结点，会出现两种情况：

（1）对于之后弹出的活性结点，如果它所对应的男女双方竞赛优势小于之前的最优值权值之和，那么这个结点就没有必要设成扩展结点了，包括在队列中排列在之后的那些结点（因为是按照优先级进行排列的，越后面男女双方竞赛优势就越小）就更没有必要设成扩展结点，直接从队列中弹出即可，这里相当于回溯法中的限界功能。

（2）对于之后弹出的活性结点，如果它所对应的男女双方竞赛优势总和大于之前的男女双方竞赛优势总和，那么继续设成扩展结点进行扩展，到达叶结点计算男女双方竞赛优势总和，如果大于当前最优男女双方竞赛优势总和，则更新当前的最优值。

4、终止条件

因为该方法使用的优先队列式分支限界法，所以终止条件是以男女双方竞赛优势总和越大，优先级越高的优先队列中的结点的数量为 0。