

厦门大学《微积分 III-1》课程期中试卷参考答案



_____学院_____系_____年级_____专业

试卷类型:(经济类A卷)

考试时间:2019. 11. 16

一、计算下列极限:(每小题 6 分, 共 24 分)

1. $\lim_{x \rightarrow -1} (\frac{1}{1+x} - \frac{3}{1+x^3});$

解: $\lim_{x \rightarrow -1} (\frac{1}{1+x} - \frac{3}{1+x^3}) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{1-x+x^2}$
 $= \frac{-1-2}{1-(-1)+(-1)^2} = -1$

或者

$$\lim_{x \rightarrow -1} (\frac{1}{1+x} - \frac{3}{1+x^3}) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{3x^2} = \frac{2 \cdot (-1) - 1}{3 \cdot (-1)^2} = -1$$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{2-x}{x})^{\frac{\pi}{\sin(\pi x)}};$

解: $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{2-x}{x})^{\frac{\pi}{\sin(\pi x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \ln \frac{2-x}{x}}{\sin \pi x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \ln [1 + \frac{2(1-x)}{x}]}{\sin \pi(1-x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cdot \frac{2(1-x)}{x}}{\pi(1-x)}} = e^2$

或者

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{2-x}{x})^{\frac{\pi}{\sin(\pi x)}} = \lim_{x \rightarrow 1} [1 + \frac{2(1-x)}{x}]^{\frac{x}{2(1-x)} \cdot \frac{\pi(1-x)}{x \sin \pi(1-x)}} = e^2$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\sqrt{1+x^2} \sin x - \sqrt{1+x^4}};$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\sqrt{1+x^2} \sin x - \sqrt{1+x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\tan x - x} - 1)(\sqrt{1+x^2} \sin x + \sqrt{1+x^4})}{x^2 \sin x - x^4}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x^2} \sin x + \sqrt{1+x^4}) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

4. 求数列的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{2^n + 3^n})$ 。

解：注意到 $3 \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq 3 \cdot \sqrt[n]{2}$ ，又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$ ，由夹逼准则，可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{2^n + 3^n}) = 3$ 。

二、求下列函数的导数：（本题 16 分，第一小题 9 分，第二小题 7 分）

1. 求函数 $y = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \arctan \frac{1-x}{1+x}$ 的一阶导数；

解：

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot (1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) + \frac{1}{1+(\frac{1-x}{1+x})^2} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} \\ &= 2\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2} = 2\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

2. 求函数 $y = \sqrt[6]{\frac{x^2-1}{(x+2)(x+4)}}$ 在 $x=2$ 处的微分 $dy|_{x=2}$ 。

解：两边取对数，得

$$\ln |y| = \frac{1}{6} (\ln |x-1| + \ln |x+1| - \ln |x+2| - \ln |x+4|)$$

两边取 x 求导，得

$$y' = \frac{1}{6} \sqrt[6]{\frac{x^2-1}{(x+2)(x+4)}} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right)$$

$$\text{代入得 } y'(2) = \frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{11}{144} \sqrt{2}$$

$$\text{从而 } dy|_{x=2} = \frac{11}{144} \sqrt{2} dx。$$

三、（本题 10 分）设方程 $e^{x-y} = y-1$ 确定了隐函数 $y = y(x)$ ，求此隐函数在点 $(2, 2)$ 处的一阶导数和二阶导数。

解：方程两边对 x 求导，得

$$e^{x-y} (1 - y') = y'，\text{解得 } y' = \frac{e^{x-y}}{e^{x-y} + 1} = \frac{y-1}{y}。$$

对此式子两边再对 x 求导，得

$$y'' = \frac{y'}{y^2} = \frac{y-1}{y^3}，\text{代入得 } y'|_{(2,2)} = \frac{1}{2}，y''|_{(2,2)} = \frac{1}{8}。$$

四、(本题 8 分) 设函数 $f(x) = x \ln(1-x^2)$, 求 $f^{(11)}(0)$ 。

解:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(1-x^2) + 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \\ f''(x) &= \frac{2x}{x^2-1} + \left(\frac{1}{x-1}\right)' - \left(\frac{1}{x+1}\right)' \\ &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \left(\frac{1}{x-1}\right)' - \left(\frac{1}{x+1}\right)' \\ f^{(11)}(x) &= \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(9)} + \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(9)} + \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(10)} - \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(10)} \\ &= \frac{-9!}{(x-1)^{10}} + \frac{-9!}{(x+1)^{10}} + \frac{10!}{(x-1)^{11}} - \frac{10!}{(x+1)^{11}} \end{aligned}$$

代入得 $f^{(11)}(0) = -\frac{11!}{5}$ 。

五、(本题 8 分) 求星形线 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad (0 < t < 2\pi)$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$ 处的切线方程。

解:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\sin^2 t \cdot \cos t}{-3\cos^2 t \cdot \sin t} = -\tan t$$

代入得 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\cot \frac{\pi}{4} = -1$

所求的切线方程为 $y - \frac{\sqrt{2}}{4} = -(x - \frac{\sqrt{2}}{4})$, 即 $y = -x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

六、(本题 12 分) 设数列 $\{x_n\}$ 由递推公式 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sin x_n$ 给出,

(1) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其极限值;

(2) 试求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ 。

(1) 证明: 先证 $0 < x_n \leq 1$ 。用归纳法。

当 $n=1$ 时, $x_1 = 1$ 显然满足。

假设 $n=k$ 时, 结论成立, 即有 $0 \leq x_k \leq 1$, 则当 $n=k+1$ 时, $0 = \sin 0 < x_{k+1} = \sin x_k \leq \sin 1 \leq 1$,

因此有 $0 < x_n \leq 1$ 。

令 $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 1]$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 单调增加, 又由 $x_1 = 1 > \sin 1 = x_2$, 故可知数列 $\{x_n\}$ 为单调减少数列, 由单调有界准则, 此数列 $\{x_n\}$ 极限存在。令 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 则 $0 \leq a \leq 1$ 。由 $x_{n+1} = \sin x_n$, 令 $n \rightarrow \infty$, 得 $a = \sin a$, 故 $a = 0$, 即有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 。

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{\sin x - x}{x})}{x^2}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{3x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

七、(本题 12 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{1}{1 + e^{1/x}} & x > 0 \end{cases}$ 。

(1) 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导;

(2) 求导函数 $f'(x)$ 的连续区间和间断点, 并判别其间断点类型。

(1) 证明: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x}$, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} = 0$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0, \text{ 即有 } f'_-(0) = 0. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} \stackrel{t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{1 + e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} = 0, \text{ 即有}$$

$f'_+(0) = 0$ 。从而 $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

$$(2) \text{ 求得导函数 } f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{e^{1/x}}{x^2 (1 + e^{1/x})^2} & x > 0 \end{cases} \text{。由初等函数的连续性结论, } f'(x) \text{ 在 } (-\infty, 0) \text{ 和}$$

$(0, +\infty)$ 连续。

取点列 $\{x_n\}$, 其中 $x_n = -\frac{1}{2n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, 则 $f(x_n) = -1$; 再取点列 $\{x'_n\}$, 其中 $x'_n = -1/(2n\pi + \frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{Z}^+$, 则 $f(x'_n) = 2/(2n\pi + \frac{\pi}{2}) \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$)。

故 $x=0$ 是第二类间断点中的振荡间断点。

八、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ 。试证:

(1) 存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $f(x_0) = x_0$;

(2) 存在不同的 $\xi, \eta \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) \cdot f'(\eta) = 1$ 。

证明: (1) 作辅助函数 $F(x) = f(x) - x$, $x \in [0,1]$ 。则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 注意到 $F(0) = f(0) - 0 = 1, F(1) = f(1) - 1 = -1$, 故由零点存在定理知, 存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $F(x_0) = 0$, 即有 $f(x_0) = x_0$ 。

(2) 在区间 $[0, x_0]$ 和 $[x_0, 1]$ 分别用朗格朗日中值定理, 可得, 存在 $\xi \in (0, x_0), \eta \in (x_0, 1)$,

使得
$$x_0 - 1 = f(x_0) - f(0) = f'(\xi)x_0,$$

$$-x_0 = f(1) - f(x_0) = f'(\eta)(1 - x_0),$$

因此 $f'(\xi) \cdot f'(\eta) = 1$, 得证。