厦门大学微积分（III-2）课程期末试卷

经管类试卷：（A 卷）　　考试日期：2018.6.20

得分	
评阅人	

1、(5 分) 计算曲线积分$I=\int_L (x^2+y^2)ds$，其中 L 是圆心在(1, 0)、半径为 1 的上半圆周。

解：由于上半圆周的参数方程为

$$x=(1+\cos t), y=\sin t \quad (0\le t\le \pi)$$

所以

$$I=\int_0^{\pi}[(1+\cos t)^2+\sin^2 t]\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}dt$$
$$=2\int_0^{\pi}(1+\cos t)dt=2[t+\sin t]|_0^{\pi}=2\pi$$

得分	
评阅人	

2、(10 分) 设曲线积分$\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$与路径无关，其中φ具有连续的导数，且$\varphi(0)=0$，计算$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy$。

解：由$P(x,y)=xy^2, Q(x,y)=y\varphi(x)$，得

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)=2xy, \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[y\varphi(x)]=y\varphi'(x)$$

因积分与路径无关，有$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故$y\varphi'(x)=2xy$，从而

$$\varphi(x)=x^2+C$$

由$\varphi(0)=0$，得$C=0$，即$\varphi(x)=x^2$。所以

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy=\int_0^1 0dx+\int_0^1 ydy=\frac{1}{2}$$

得分	
评阅人	

3、(10 分) 计算$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点(1, 0)为中心，R 为半径的圆周（$R\neq 1$），方向取逆时针方向。

解：记 L 围成的闭区域为 D，当$R<1,(0,0)\notin D$时，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{4x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{4x^2+y^2}\right)=\frac{\partial P}{\partial y}$$

根据格林公式，$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$

当$R>1,(0,0)\in D$时，作一位于 D 内的椭圆$l: 4x^2+y^2=r^2$，方向取逆时针方向。

记由 l 和 L 所围成的区域为D_1，则由格林公式得

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}-\oint_l \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$$

所以利用 l 的参数式方程$x=\frac{r}{2}\cos t, y=r\sin t\quad(0\leq t\leq 2\pi)$，得

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_l \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{r^2}{2}\cos^2 t+\frac{r^2}{2}\sin^2 t}{r^2}\mathrm{d}t=\pi$$

得分	
评阅人	

4. 判断下列级数是绝对收敛、条件收敛还是发散。(每小题 5 分，共 20 分)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 2^n}{(n+1)!}$

解： 根据比值审敛法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n^2 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=0$$

该级数绝对收敛。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\sin\frac{\pi}{3^n}$

解： 因为$sin\frac{\pi}{3^n}\sim\frac{\pi}{3^n}$，所以$|(-2)^n\sin\frac{\pi}{3^n}|\sim\left(\frac{2}{3}\right)^n\pi$

且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，知原级数绝对收敛。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$

解： $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{(-1)^n n}{n+1}|=1\neq 0$

所以原级数发散。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$

解： 绝对级数$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}>\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$，易知绝对级数发散

令$\mathrm{f(x)}=\frac{\ln x}{x}$ $(\mathrm{x}>3)$，则

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x})=\frac{1-\ln x}{x^2}<0\ \ (x>3)$$

即$\mathrm{x}>3$时，$\{\frac{\ln n}{n}\}$是递减数列，又利用洛必达法则，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

故由莱布尼茨定理知该级数条件收敛。

5、(10 分) 求$\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}$的收敛域及和函数，并计算$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$的和。

解： 因为幂级数只有奇数阶次幂，所以利用比值审敛法

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}4^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{2n-1}{2n+1}4x^2|=4x^2<1$$

所以收敛半径$\mathrm{R}=\frac{1}{2}$。当$\mathrm{x}=\frac{1}{2}$时，$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，交错级数满足莱布尼茨定理的条件，收敛；当$\mathrm{x}=-\frac{1}{2}$时，$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$，同理收敛。综上，收敛域$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$。

$$s(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$s'(x)=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n}=\frac{-2}{1+4x^2}\quad(|x|<\frac{1}{2})$$

又$s(0)=\frac{\pi}{4}$，由积分公式

$$s(x)=s(0)+\int_0^x s'(x)dx=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}2x\quad(|x|<\frac{1}{2})$$

因为$s(x)$在$|x|=\frac{1}{2}$点处连续，所以$s(x)=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}2x\quad(|x|\le\frac{1}{2})$。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}-s\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-(\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}1)=\frac{\pi}{4}$$

6、(10 分) 设$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x^2)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，(1) 将$f(x)$展成 x 的幂级数，给出收敛域；

(2) 求$f^{(45)}(0)$。

解：(1)

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\qquad(-1<x\le 1)$$

$$\ln(1+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n}\qquad(-1\le x\le 1)$$

当$-1\le x\le 1$且$x\neq 0$时，$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+1}$，易知$f(x)$在 0 点处连续，所以收敛域$[-1,1]$。

(2) 由$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+1}\qquad(-1\le x\le 1)$，

$$f^{(45)}(0)=45!\frac{(-1)^{22}}{22+1}=\frac{45!}{23}$$

7、(10 分) 求方程$y^{(4)}+y''=x-5$的通解。

得分	
评阅人	

解：对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^4+\lambda^2=0$$

解得$\lambda=0,0,\pm i$，于是对应齐次方程的通解为$Y=(C_1+C_2x)+C_3\cos x+C_4\sin x$。

设所给方程的特解为$y^*=x^2(ax+b)$，代入方程有

$$6ax+2b=x-5$$

比较系数，得$a=\frac{1}{6}, b=-\frac{5}{2}$，于是$y^*=\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{2}x^2$。从而得到所给方程的通解

$$y(x)=(C_1+C_2x)+C_3\cos x+C_4\sin x+\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{2}x^2$$

其中C_1, C_2, C_3, C_4为任意常数。

8、(10 分) 已知二阶常系数非齐次线性方程的三个特解分别为$y_1=\cos 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x, y_2=\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x, y_3=-\frac{1}{4}x\cos 2x$，求该微分方程并给出通解。

得分	
评阅人	

解：根据二阶常系数非齐次线性方程解的结构，可以推出$-\frac{1}{4}x\cos 2x$是方程的一个特解。$\cos 2x, \sin 2x$是对应齐次方程的两个特解，即对应齐次方程的通解为$C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$。特征方程$r^2+pr+q=0$有一对共轭复根$\pm 2i$。

$$r^2+pr+q=(r-2i)(r+2i)=r^2+4=0$$

对应齐次方程为$y''+4y=0$。设非齐次方程为$y''+4y=f(x)$，将$-\frac{1}{4}x\cos 2x$代入非齐次方程求得$f(x)=\sin 2x$。所以该微分方程为

$$y''+4y=\sin 2x$$

通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x$$

9、(10 分)设曲线 L 上位于第一象限内任意一点 M 处的切线总于 y 轴相交，交点为 A，已知$|\overline{MA}|=|\overline{OA}|$，且曲线 L 过点$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$，求曲线 L 的方程。

得分	
评阅人	

解： 易知点 M 处的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)$$

点 A 坐标为$(0, y-xy')$。由$|\overline{MA}|=\sqrt{x^2+(xy')^2}, |\overline{OA}|=|y-xy'|$可得

$$x^2+(xy')^2=y^2-2xyy'+(xy')^2$$

化简得

$$y'=\frac{1}{2}(\frac{y}{x}-\frac{x}{y})$$

该方程是齐次方程，令$u=\frac{y}{x}$，代入方程并分离变量得到

$$\frac{2uu'}{u^2+1}=-\frac{1}{x}$$

两端分别积分并化简可得通解$u^2=\frac{C}{x}-1 \quad (C\neq 0)$，其中 C 为任意常数。将$u=\frac{y}{x}$代入通解并令通解过$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$点，解出$C=3$，所以曲线 L 的方程为

$$y^2=3x-x^2$$

10、(5 分)求方程$y_{x+1}+2y_x=2x-1+e^x$的通解。

得分	
评阅人	

解:

对应齐次方程的通解为

$$y=C(-2)^x$$

设$y_1^*(x)=a_0x+a_1, y_2^*=Ae^x$，于是$y^*(x)=a_0x+a_1+Ae^x$代入方程有

$$3a_0x+a_0+3a_1+(Ae+2A)e^x=2x-1+e^x$$

比较系数，得$a_0=\frac{2}{3}, a_1=-\frac{5}{9}, A=\frac{1}{e+2}$，从而有

$$y^*(x)=\frac{2}{3}x-\frac{5}{9}+\frac{1}{e+2}e^x$$

所给方程的通解为

$$y(x)=C(-2)^x+\frac{2}{3}x-\frac{5}{9}+\frac{1}{e+2}e^x$$

其中 C 为任意常数。