厦门大学《概率论与数理统计 B 类》课程试卷

__________学院_________系__________年级__________专业

主考教师：　试卷类型：（A 卷/B 卷）

一: 填空题（每题 3 分，共 10 题）

1．从 1，2，3，4，5 这五个数字中任取四个构成一个四位数，求此四位数的个位是 1 的概率。（　　　　　）

2．一盒子装有 5 只产品，其中有 3 只一等品，2 只二等品，从中取产品两次，每次任取 1 只，进行不放回抽样。设事件 A 为“第 1 次取到是一等品”，事件 B 为“第 2 次取到的是一等品”，试求条件概率 $P(B|A)$。　　　　（　　　　　）

3．袋中有 5 个球，其中 1 个是红球，每次取 1 个球，取出后不放回，求第 2 次取到的是红球的概率。（　　　　　）

6．设随机变量 X 的分布律如下表：

X	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

，求 $E(X^2)$

（　　　　　）

8．设二维随机向量 (X,Y)□　　$_2,\sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ r)$,求（X，Y）的协方差矩阵。

（　　　　　）

10．设 X 服从区间[0,1]上的均匀分布，当观察到 $X=x\ (0<x<1)$ 时，Y 服从区间（x,1）上的均匀分布，求（X，Y）的联合概率密度函数

二:计算和证明　(每题 10 分)

（1）。 随机和独立掷三个骰子，令 X 表示的点数和，计算 X 的数学期望。

（2）。 一个人随机地从一堆有 12 生肖邮票（等可能发生）任取 10 张， 问这 10 张邮票中不同生肖的个数的数学期望？

4　(每题 10 分)

(1)　设 X_1,X_2 为相互独立，遵从均值 λ_1,λ_2 的 Poisson 分布的随机变量，证明 X_1+X_2 遵从均值 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 分布，

（2）设 $X_1,\cdots$　为相互独立，遵从均值 1 的 Poisson 分布的随机变量 $Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，写出分布律 $P(Y_n=k)$ 及概率 $P(Y_n\le n)$，

6．设某系统由两个相互独立的元件 A_1,A_2 连接而成，其连接方式为串联，设 A_1,A_2 的寿命分别为 X， Y，已知它们的概率密度分别为：

$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}, f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$，其中$\alpha>0,\beta>0$为参数，求系统 S 的寿命概率密度函数。

厦门大学标准试卷说明

一、主考教师在出卷时应填写课程名称、学院、系、年级、专业、主考教师，并注明 A 卷或 B 卷。全校性选修课试卷只须注明课程名称。

二、试卷中文字体一律采用宋体，行距 1.5 倍。大标题采用四号宋体、小标题号采用小四号宋体。其它外文、特殊专业符号的字体和字号由任课教师自已确定。

四、主考教师出卷后交到系里，由系里统一印刷保管，开考前由主考教师向系里领取。

五、答题卷和试卷分开。答题卷由各系根据学校标准格式统一印制，开考前由主考教师向系里领取。

答案：

1. （1）$3.5\times 3=10.5$

（2）

$X_i=\begin{cases}1 & \text{至少第i种邮票出现在１０个取样；}\\ 0 & \text{其它情形。}\end{cases}$

$E\left(X_i\right)=(1-\left(\frac{11}{12}\right)^{10})$

$E(X)=E\left(X_1\right)+\cdots$ 、$_{25})=12\times(1-\left(\frac{11}{12}\right)^{10})$

2.（1） 右边展开后

$$\begin{aligned}&\text{右边}=\sigma_X^2\sigma_Y^2+\mu_X^2\sigma_Y^2+\mu_Y^2\sigma_X^2+\mu_X^2\mu_Y^2\\&=\left(\sigma_X^2+\mu_X^2\right)\left(\sigma_Y^2+\mu_Y^2\right)=D(X)D\left(Y\right)\\&=D\left(XY\right)=\text{左边}\end{aligned}$$

（2）$\operatorname{cov}(X+Y,X-Y)$=D(X)+cov(X,Y)-cov(X,Y)-D(Y)=0 且 $X+Y,X-Y$ 仍为正态。

3．（1）

$$\phi\left(0\right)=1;\phi'\left(0\right)=\mu_X;\phi''\left(0\right)=\sigma_X^2+\mu_X^2$$

（2）$\phi\left(t\right)=\exp\left(t\mu_X+\dfrac{t^2\sigma_X^2}{2}\right)$

4．（1）

$$\begin{aligned}P\left(X_1+X_2=k\right)&=\sum_{k_1=0}^{k}\frac{\lambda_1^{k_1}}{k_1!}e^{-k_1}\frac{\lambda_2^{k-k_1}}{\left(k-k_1\right)!}e^{-(k-k_1)}\\&=\frac{\left(\lambda_1+\lambda_2\right)^k}{k!}e^{-k}\sum_{k_1=0}^{k}\frac{1}{k_1!}\frac{1}{\left(k-k_1\right)!}\left(k_1+(k-k_1)\right)!\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k-k_1}\\&=\frac{\left(\lambda_1+\lambda_2\right)^k}{k!}e^{-k}\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right]^k\\&=\frac{\left(\lambda_1+\lambda_2\right)^k}{k!}e^{-k}\end{aligned}$$

（2）

$$P\left(Y_n=k\right)=\frac{n^k}{k!}e^{-n},k=1,2,\cdots$$

$$P(Y_n\le n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}e^{-n},$$

（3）$\text{左边}=\lim\limits_{n\to\infty}P\left(Y_n\le n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{Y_n-n}{\sqrt{D\left(Y_n\right)}}\le 0\right)=\Phi\left(0\right)=1/2$

5．

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{第i个人选对自己的帽子；}\\ 0 & \text{其它的情形。}\end{cases}$$

$$E\left(X_i\right)=P\left(X_i=1\right)=\frac{1}{50}$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{50}X_i\right)=50\times\frac{1}{50}=1$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{50}X_i\right)=\sum_{i=1}^{50}D\left(X_i\right)+2\sum\nolimits_{1\le i<j\le 50}\operatorname{cov}\left(X_i,X_j\right)$$

$$=50*\left(\frac{1}{50}-\left(\frac{1}{50}\right)^2\right)+50*49*(\frac{1}{50*49}-\left(\frac{1}{50}\right)^2)$$

$$=1$$