参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	B	C	D	D	B	A	C	C

二、填空题

1．500；700

2．33.3%

3．$nf(v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}v$

4．25%

5．400

6．$x = 0.02\cos(4\pi t + \frac{\pi}{3})$

7．$\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$

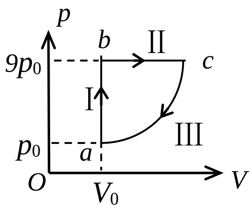
8．$y = 2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda} - \frac{\pi}{2})\cos(2\pi\nu t + \frac{\pi}{2})$ 或 $y = 2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{2})\cos(2\pi\nu t - \frac{\pi}{2})$ 或 $y = 2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{2})\cos(2\pi\nu t)$

9．1.59×10^{-7}

10．90°或$\frac{\pi}{2}$

三、计算题：本题 12 分。请在答题纸上按题序作答，并标明题号。

1mol 单原子分子的理想气体，经历如图所示的可逆循环，联结 *ac* 两点的曲线III的方程为 $p = p_0 V^2 / V_0^2$，*a* 点的温度为 T_0



(1) 试以 T_0，普适气体常量 *R* 表示I、II、III过程中气体吸收的热量。

(2) 求此循环的效率。

参考答案：

设 *a* 状态的状态参量为 p_0, V_0, T_0，则 $p_b=9p_0, V_b=V_0, T_b=(p_b/p_a)T_a=9T_0$

∵ $p_c = \dfrac{p_0 V_c^2}{V_0^2}$ ∴ $V_c = \sqrt{\dfrac{p}{p_0}} V_0 = 3V_0$

∵ $p_c V_c = RT_c$ ∴ $T_c = 27T_0$

(1) 过程I $Q_V = C_V(T_b - T_a) = \dfrac{3}{2}R(9T_0 - T_0) = 12RT_0$ ……………………………3 分

过程II $Q_p = C_p(T_c - T_b) = 45\,RT_0$ ………………………………………3 分

过程III $Q = C_V(T_a - T_c) + \int_{V_c}^{V_a} (p_0 V^2)\,\mathrm{d}V / V_0^2$

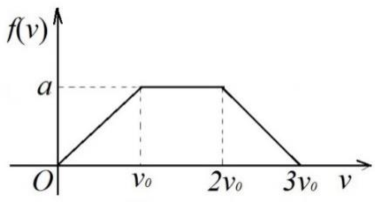
$$= \frac{3}{2}R(T_0 - 27T_0) + \frac{p_0}{3V_0^2}(V_a^3 - V_c^3)$$

$$= -39RT_0 + \frac{p_0(V_0^3 - 27V_0^3)}{3V_0^2} = -47.7RT_0$$ ……………………………3 分

(2) $$\eta = 1 - \frac{|Q|}{Q_V + Q_p} = 1 - \frac{47.7RT_0}{12RT_0 + 45RT_0} = 16.3\%$$ ……………………3 分

四、计算题：本题 12 分。请在答题纸上按题序作答，并标明题号。

设有 N 个粒子，其速率分布函数如图所示，其中 v_0 为已知常量。求：



(1) *a* = ?

(2) 速率在 $1.5v_0$ 和 $2v_0$ 之间的粒子数；

(3) 粒子的平均速率；

(4) 0 到 $1.5v_0$ 之间内分子的平均速率。

参考答案

(1) 满足归一化条件，$\int_0^\infty f(v)dv = 1$ (3 分)

$2av_0=1$，可得：$a=\dfrac{1}{2v_0}$

(2) 速率在 $1.5v_0$ 和 $2v_0$ 之间的粒子数为

$$\Delta N = N\int_{1.5v_0}^{2v_0} a dv = \frac{N}{4} \qquad (3\text{ 分})$$

(3) 考虑到 $0\sim v_0$ 之间的 $f(v)=\dfrac{a}{v_0}=\dfrac{1}{2v_0^2}v$，$2v_0$ 和 $3v_0$ 之间 $f(v)=a-\dfrac{a}{v_0}(v-2v_0)=\dfrac{1}{2v_0}(3-\dfrac{v}{v_0})$

粒子的平均速率为

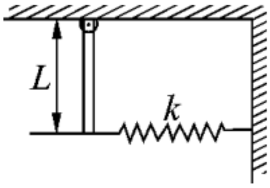
$$\bar{v}=\int_0^{3v_0} vf(v)dv=\frac{3}{2}v_0 \qquad (3\text{ 分})$$

(4) 0 到 $1.5v_0$ 之间内分子的平均速率为

$$\bar{v}=\frac{\int_0^{1.5v_0} vf(v)dv}{\int_0^{1.5v_0} f(v)dv}=\frac{\int_0^{v_0}\frac{a}{v_0}v^2dv+\int_{v_0}^{1.5v_0} avdv}{\int_0^{v_0}\frac{a}{v_0}vdv+\int_{v_0}^{1.5v_0} adv}=\frac{23}{24}v_0 \qquad (3\text{ 分})$$

五、计算题：本题 12 分。请在答题纸上按题序作答，并标明题号。

一根质量为 m、长为 L 的均匀细杆，上端挂在无摩擦的水平轴上，杆下端用一根轻弹簧连在墙上，如图所示。弹簧的劲度系数为 k。当杆竖直静止时弹簧处于水平原长状态，试求杆做微小振动时的周期。（杆绕过一端点且垂直杆的轴的转动惯量为 $\frac{1}{3}mL^2$）



参考答案：

当杆离开平衡位置，且与竖直方向夹角为 θ 时，其受到的力矩为

$$M=\frac{1}{2}mgL\sin\theta+kL\sin\theta L\cos\theta \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

由于杆做微小振动，θ 趋于零，力矩可写为

$$M=\frac{1}{2}mgL\theta+kL^2\theta \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

根据转动定律 $M=J\alpha$ 可得

$$\frac{1}{2}mgL\theta+kL^2\theta=-\frac{1}{3}mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{3(mg+2kL)}{2mL}\theta=0 \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

振动的角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{3(mg+2kL)}{2mL}}$$ ……………………………………………2 分

所以振动周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2mL}{3(mg+2kL)}}$$ ……………………………………………2 分

六、计算题：本题 12 分。请在答题纸上按题序作答，并标明题号。

绳索上的波以波速 v=25 m/s 传播，若绳的两端固定，相距 2 m，在绳上形成驻波，且除端点外其间有 3 个波节。设驻波振幅为 0.1 m，t=0 时绳上各点均经过平衡位置。试写出：

（1）驻波的表示式；

（2）形成该驻波的两列相向进行的行波表示式。

参考答案：

设绳索的一端为坐标原点，沿着绳索指向另一端为 x 轴的正方向。

(1)　8 分

根据驻波的定义，相邻两波节(腹)间距：$\Delta x=\frac{\lambda}{2}$

绳的两端固定，那么两个端点上都是波节，根据题意除端点外其间还有 3 个波节，可见两端点之间有四个半波长的距离，

$\Delta x=4\times\frac{\lambda}{2}=2$，故 λ=1m……………………………………………2 分

又 v=25 m/s，故 $\omega=\frac{2\pi u}{\lambda}=50\pi\text{Hz}$ ……………………………………2 分

又已知驻波振幅为 0.1 m，t=0 时绳上各点均经过平衡位置，故初相位为 $\pm\frac{\pi}{2}$，…………2 分

时间部分的余弦函数应为：$\cos\left(50\pi t\pm\frac{\pi}{2}\right)$,

因为坐标原点（x=0）是波节，空间部分的余弦函数应为：$\cos\left(2\pi x\pm\frac{\pi}{2}\right)$

驻波方程为：$y=0.1\cos\left(2\pi x\pm\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(50\pi t\pm\frac{\pi}{2}\right)$ ………………………………2 分

(2) 4 分

由合成波的形式为：$y=y_1+y_2$

该驻波的两列波的波动方程为：

$$y_1 = 0.05\cos(50\pi t - 2\pi x) \quad y_2 = 0.05\cos(50\pi t + 2\pi x \pm \pi)$$

或者

$$y_1 = 0.05\cos(50\pi t - 2\pi x \pm \pi) \quad y_2 = 0.05\cos(50\pi t + 2\pi x)$$

七、计算题：本题 12 分。请在答题纸上按题序作答，并标明题号。

同一方向上 N 个同频率的简谐振动，它们的振幅都为 a，初相分别为 0，φ，2φ，…，依次差一个恒量 φ，振动表达式写成

$$x_1 = a\cos\omega t$$

$$x_2 = a\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x_3 = a\cos(\omega t + 2\varphi)$$

……

$$x_N = a\cos\left[\omega t + (N-1)\varphi\right]$$

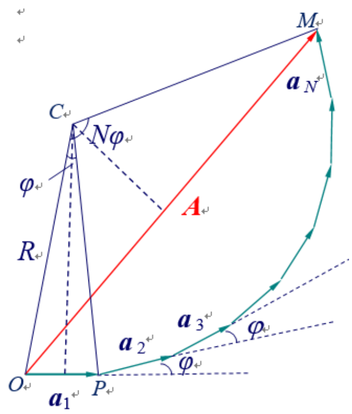
试求这 N 个振动的合振动

（1）振幅；　（2）初相；　（3）表达式。

参考答案：

按矢量合成法则，将每一谐振动在 t=0 时刻的振幅矢量 a_1、a_2、…、a_N 首尾相接，相邻矢量的夹角均为φ，它们构成正多边形的一部分，如图所示。a_1、a_2 中垂线的交点为 C，连接 CO、CP 和 CM。设 CO=R，则 CP=CM=R。由图可知 $\angle COM = N\varphi$，合振幅可写作

$$A = 2R\sin\frac{N\varphi}{2}$$



在 ΔOCP 中

$$a = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$$

故合振幅为

$$A = a\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

又因为

$$\angle COM = \frac{1}{2}(\pi - N\varphi)$$

$$\angle COP = \frac{1}{2}(\pi - \varphi)$$

所以合振动的初相为

$$\varphi' = \angle COP - \angle COM = \frac{N-1}{2}\varphi \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

因为同频率同方向简谐振动合成不改变振动频率，合振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi') = a\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cos\left(\omega t + \frac{N-1}{2}\varphi\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4 \text{ 分}$$