# 系统定义

$$x_k = A x_{k-1} + B u_{k-1} + w_{k-1} \quad (Q\ 过程噪声)$$
$$z_k = H x_k + v_k \quad (R\ 测量噪声)$$

# 卡尔曼滤波五大公式

需要 $\hat{x}$ 和 $P_k$ 初始值.

预测
$$\hat{x}_k^- = A \hat{x}_{k-1} + B u_{k-1}$$
$$P_k^- = A P_{k-1} A^T + Q$$

$$K = \frac{P_k^- H^T}{H P_k^- H^T + R}$$

校正
$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-)$$
$$P_k = (I - KH) P_k^-$$

---

定义状态变量 $x = [q_0\ q_1\ q_2\ q_3\ g_{x\_b}\ g_{y\_b}\ g_{z\_b}]$

（四元数　gyro 偏差）

先验估计
$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -w_x & -w_y & -w_z \\ w_x & 0 & w_z & -w_y \\ w_y & -w_z & 0 & w_x \\ w_z & w_y & -w_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$q_k = q_{k-1} + \dot{q}\Delta t.$$

$w_x, w_y, w_z$ 中要减去偏差

$$\underline{\Omega(w - w\_bias)}$$

$$q_k = q_{k-1} + \frac{1}{2}\Omega(w - w\_bias)\Delta T\, q_{k-1} = \left(I + \frac{1}{2}\Omega(w - w\_bias)\Delta T\right) q_{k-1}$$

$$\hat{x}_k^- = \underbrace{\begin{bmatrix} I + \frac{1}{2}\Omega(w - w_{bias})\Delta T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{A(t)} \hat{x}_{k-1}$$

## 先验估计协方差

注意、A(t)是时变矩阵，直接使用

$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$ 有问题，

问题在于：符合高斯分布的协方差，经过时变矩阵后就不一定符合了。

需要线性化、将A近似为线性时不变

工具：一阶导数雅可比矩阵，对 $q$ 求导。

推导结果见 Method1_EKF_AHRS_Formula_Derivation.m

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

## 测量方程

H(t)也是时变矩阵，因为求得 H(t) 的 Jocobi 之后才能计算 kalman gain.

①重力量测方程

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = q^* \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes q$$

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_2q_3 + 2q_0q_1 \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} + w_a$$

acc 的测量误差

② 磁力计量测方程

磁力数据
从载体数据转化为大地坐标

$$\begin{bmatrix} 0 \\ m_x^e \\ m_y^e \\ m_z^e \end{bmatrix} = q \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ m_x^b \\ m_y^b \\ m_z^b \end{bmatrix} \otimes q^*$$

大地坐标中、只有 y 轴（北），z 轴（天）有数据.

$$\hat{m}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_y^n \\ m_z^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{m_x^{e\,2} + m_y^{e\,2}} \\ m_z^e \end{bmatrix}$$

再把 $\hat{m}$ 转换回载体坐标
（如果 q 理想、则转换回去不应该有差别）

$$\begin{bmatrix} 0 \\ m_x^b \\ m_y^b \\ m_z^b \end{bmatrix} = q^* \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_y^n \\ m_z^n \end{bmatrix} \otimes q$$

总的量测方程 $\rightarrow H(t)$.

$$z_k = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ m_x^b \\ m_y^b \\ m_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_2q_3 + 2q_0q_1 \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \\ \text{见推导} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_a \\ w_m \end{bmatrix}$$

由该量测方程可得 $H$

卡尔曼增益

$$K = \frac{P_k^- H^T}{H P_k^- H^T + R}$$

后验估计

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(z_k - H(t))$$

后验估计协方差

$$P_k = (I - KH) P_k^-$$

完结撒花 ~