Praktikum - Elastizität

Max Mustermann

5. November 2015 Wintersemester 2015/2016

Inhaltsverzeichnis

1 Elastizitätsmodul (statischer Fall)

1.1 Messuhr

In diesem Versuch wird das E-Modul verschiedener Stoffe durch eine eine statische Messmethode gemessen. Dazu wird jeweils ein langer, dünner Stab des jeweiligen Stoffes an beiden Enden aufgelagert und durch verschiedene in der Mitte angehängte Gewichte belastet. Es wird die zusätzliche Durchbiegung s in der Mitte des Stabes mit Hilfe einer Messuhr gemessen. Die zusätzliche Gewichtskraft, mit der die Messuhr auf die Mitte des Stabes drückt beträgt 3.6g/mm.

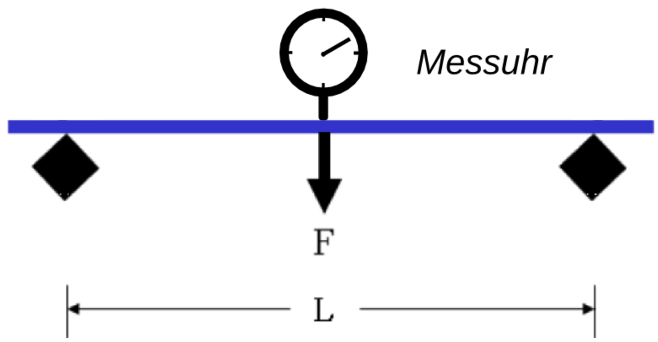


Abbildung 1: Versuchsaufbau Aufgabe 1.1 (Modifizierte Skizze aus Versuchsmappe)

Die Durchbiegung s steht mit der Länge des Stabes zwischen den Auflagerungspunkten L , der Normalkraft F, dem E-Modul E , der Dicke d und der Breite b in folgender Beziehung:

$$s = \frac{L^3 F}{4Ebd^3}$$

Diese Formel wird dem Aufgabenblatt entnommen. Die explizite Herleitung befindet sich in dem Lehrbuch Demtröder (S.178).
Da, wie oben erwähnt, die Messuhr ebenfalls drückt muss der Ausdruck dementsprechend modifiziert werden:

$$\begin{aligned} s &= \frac{L^3(m - (3.6\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mm}} \cdot s)) \cdot g}{4Ebd^3} \\ &= \frac{L^3 g}{4Ebd^3} \left(m - 3.6\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mm}} \cdot s \right) \end{aligned}$$

Daraus folgt für das E-Modul:

$$E = \underbrace{\frac{L^3 g}{4bd^3}}_{=const} \frac{(m - (3.6\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mm}} \cdot s))}{s}$$

Die Konstanten sind $L = 41cm$, $g = 9.81\frac{m}{s^2}$, $b = 0.5cm$, $d = 2.5cm$.

Messwerte: Auslenkung der Stäbe

m/g	**PVC** s/cm	**Aluminium** s/cm	**Messing** s/cm	**Edelstahl** s/cm	**Kupfer** s/cm
200	0.51	0.12	0.09	0.05	0.08
500	1.28	0.31	0.23	0.13	0.2
1000	2.54	0.61	0.45	0.29	0.39

Für jeden Stoff wurden jeweils 3 Wertepaare (m, s) aufgenommen

Wertepaar Nr.	**PVC** E / (N/m²)	**Aluminium** E / (N/m²)	**Messing** E / (N/m²)	**Edelstahl** E / (N/m²)	**Kupfer** E / (N/m²)
1	7.71E+07	3.53E+08	4.73E+08	8.58E+08	5.33E+08
2	7.67E+07	3.41E+08	4.63E+08	8.24E+08	5.33E+08
3	7.74E+07	3.47E+08	4.73E+08	7.38E+08	5.47E+08
Mittelwert	7.69E+007	3.47E+008	4.68E+008	8.41E+008	5.33E+008
Standardabweichung	2.72E+005	4.75E+006	4.93E+006	5.03E+007	6.54E+006
Fehler des Mittelwertes	1.57E+005	2.74E+006	2.84E+006	2.90E+007	3.77E+006

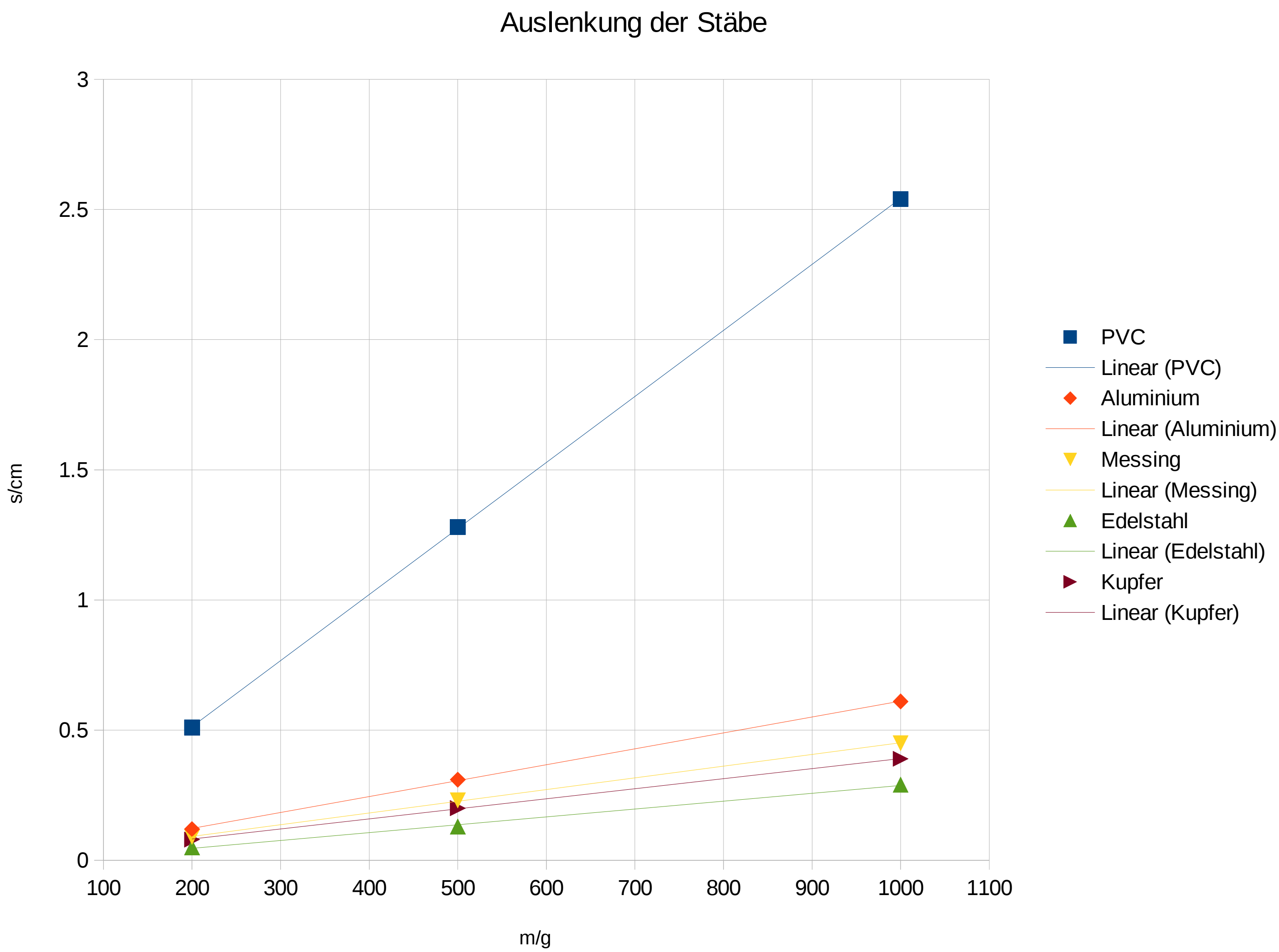
Damit berechnen sich die E-Moduln zu:

- $E_{PVC} = (7.69 \pm 0.02) \cdot 10^7 N/m^2$
- $E_{Aluminium} = (3.47 \pm 0.03) \cdot 10^8 N/m^2$
- $E_{Messing} = (4.68 \pm 0.03) \cdot 10^8 N/m^2$
- $E_{Edelstahl} = (8.41 \pm 0.3) \cdot 10^8 N/m^2$
- $E_{Kupfer} = (5.33 \pm 0.04) \cdot 10^8 N/m^2$

Tabelle der Literaturwerte der E-Moduln

PVC	$0.003 \cdot 10^9 N/m^2$	–	$0.01 \cdot 10^9 N/m^2$
Aluminium, rein, weich	$72 \cdot 10^9 N/m^2$		
α-Messing, kaltgezogen	$100 \cdot 10^9 N/m^2$		
V2A-Stahl	$195 \cdot 10^9 N/m^2$		
Kupfer, kaltgezogen	$126 \cdot 10^9 N/m^2$		

Diese Werte stammen aus dem Lehrbuch *Gerthsen Physik* (24. überarbeitete Auflage) und der Wert für PVC stammt von der Webseite des Instituts für Materialwissenschaft der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel (http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_7/illustr/t7_1_2.html) .



Potentielle Systematische Fehler
Die Messuhr muss sich so weit wie möglich in der Mitte des Stabes befinden, um die maximale Durchbiegung zu messen.
Falls die Messuhr nicht richtig geeicht sein sollte, würde dies ebenfalls einen Fehler darstellen, der jeden Messwert in die gleiche Richtung beeinflusst.
Die zusätzlich angehängten Gewichte müssen möglichst so aufgehängt werden, dass die Normalkraft über die Breite des Stabes gleichmäßig verteilt wird, sodass zu große zusätzliche Scherungen vermieden werden.

Die erzielten Ergebnisse für die E-Moduln weichen sehr stark vom Literaturwert ab. Dies ist auf einen Fehler systematischer Art zurückzuführen.

1.2 Laser

Bei diesem zweiten Versuch zur Messung des Elastizitätsmoduls wird der Versuchsaufbau aus Aufgabe 1.1 modifiziert. Statt der Durchbiegung s des Balkens wird hier der Neigungswinkel α des Stabes an den aufgelagerten Enden gemessen. Dazu wird auf jeder Seite direkt über den Auflageflächen ein zur Stabmitte hin gerichteter Spiegel angebracht. Diese sind leicht geneigt, sodass der punktförmige Strahl eines Lasers über diese Spiegel auf einen entfernten Schirm geführt werden kann (s. Skizze). Der Winkel α, um den sich die Stabenden bei Belastung neigen, kann dann aus der vertikalen Auslenkung des Strahls auf dem Schirm berechnet werden. Dazu muss vorher natürlich die Position des Lasers auf dem Schirm ohne zusätzliche Belastung des Stabes aufgenommen werden.

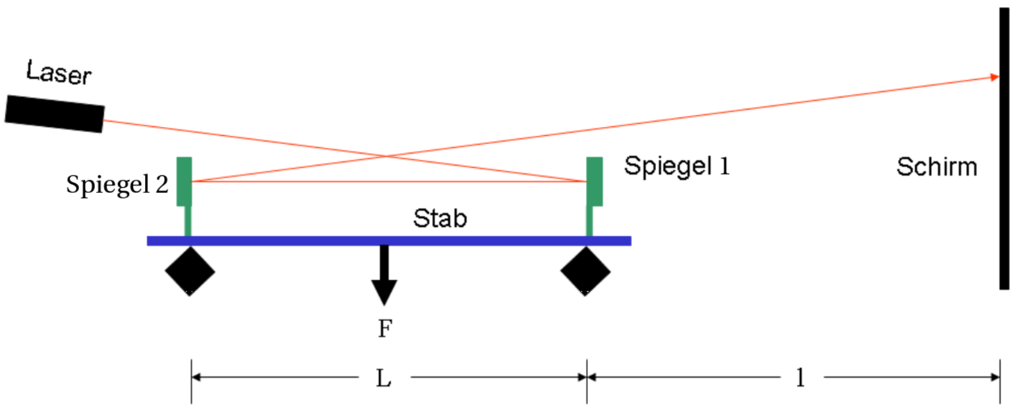


Abbildung 2: Versuchsaufbau Aufgabe 1.2 (Skizze aus Versuchsmappe)

Die Neigung der Stabenden α, der Abstand der Auflagerungen des Stabes L, die Normalkraft F der E-Modul E und die Breite b und Dicke d des Stabes hängen folgendermaßen voneinander ab:

$$\alpha = \frac{3L^2F}{4Ebd^3}$$

Diese Formel wird der Vorbereitungsmappe entnommen.
Die vertikale Auslenkung Δs des Laserpunktes auf dem Schirm wird duch folgende Formel beschrieben:

$$\Delta s = 2\alpha \cdot L + 4\alpha(L+l)$$

Dabei ist l der Abstand vom schirmnahen Spiegel (Spiegel 1) zum Schirm. Diese Formel kann folgendermaßen nachvollzogen werden: Der Laser wirft einen Strahl auf Spiegel 1, welcher um den Winkel α zusätzlich gekippt ist. Der Strahl wird also um 2α gekippt und auf Spiegel 2 geworfen. Dort wird er wieder um 2α gekippt und dann auf den Schirm geworfen. Die Position des Laserpunktes auf dem Schirm ändert sich also um $\tan(4\alpha)(L+l)$. Gleichermaßen wird schon von der Reflexion an Spiegel 1 die Auslenkung des Punktes auf dem Schirm um $\tan(2\alpha)L$ verschoben. Für kleine Winkel α gilt die Näherung $\tan\alpha = \alpha$. Durch die Addition der Verschiebungen ist die Gesamtverschiebung Δs, die oben angegeben ist.

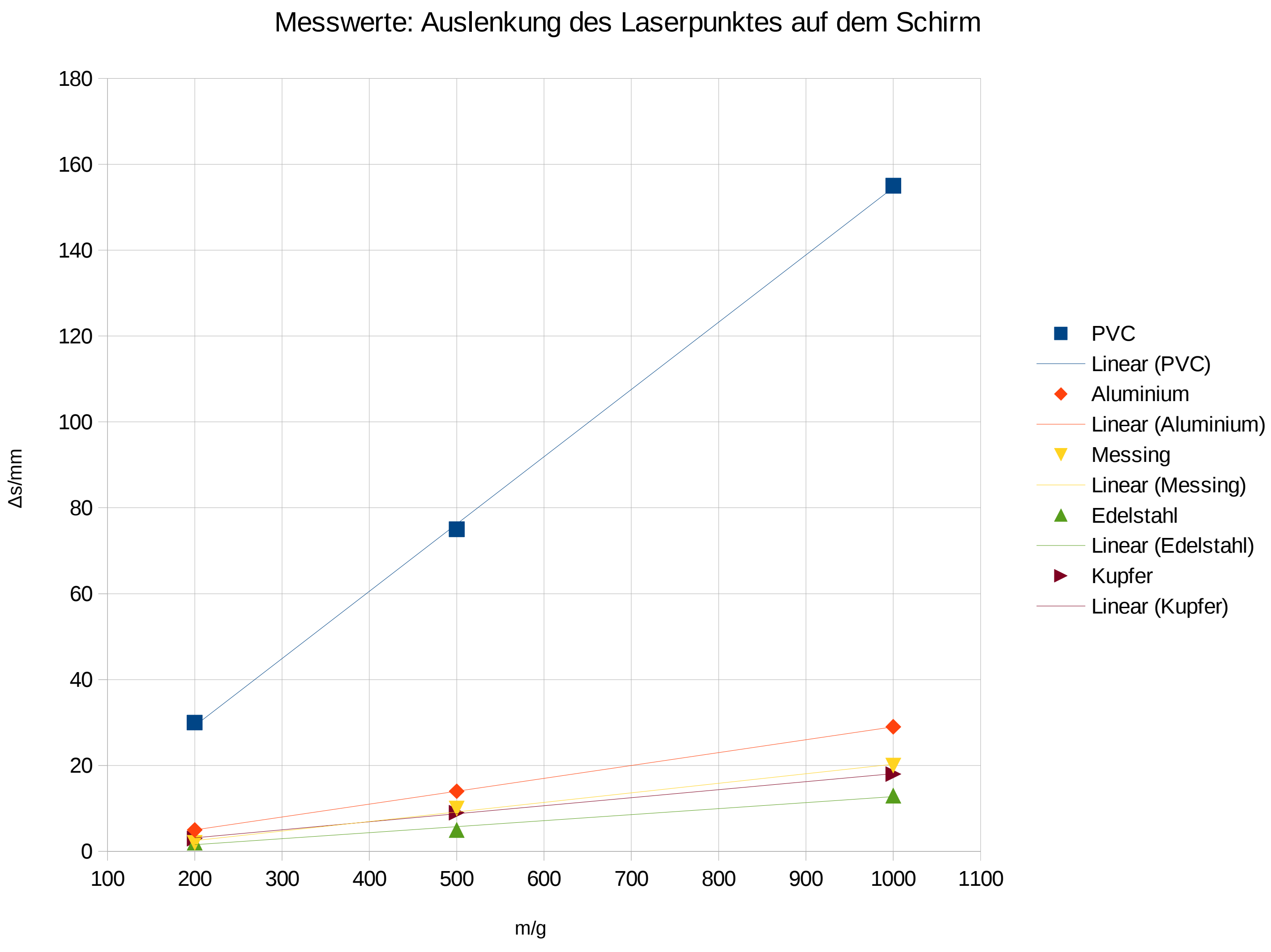
Das E-Modul wird nun mit Hilfe der folgenden Gleichungen berechnet:

$$\Delta s = 2 \cdot \alpha \cdot L + 4 \cdot \alpha \cdot (L+l)$$
$$\implies \alpha = \frac{(3 \cdot L^2 \cdot F)}{(4 \cdot E \cdot b \cdot d^3)}$$
$$\implies E = \underbrace{\frac{(3L^2(2L+4(L+l))g)}{(4bd^3)}}_{=const} \cdot \frac{m}{\Delta s}$$

Die Konstanten sind $L = 41cm$, $g = 9.81\frac{m}{s^2}$, $b = 0.5cm$, $d = 2.5cm$ und $l = 141cm$.

Messwerte: Auslenkung des Laserpunktes auf dem Schirm

m/g	PVC Δs/mm	Aluminium Δs/mm	Messing Δs/mm	Edelstahl Δs/mm	Kupfer Δs/mm
200	30	5	2	2	3
500	75	14	10	5	9
1000	155	29	20	13	18



Wertepaar Nr.	PVC E / (N/m²)	Aluminium E / (N/m²)	Messing E / (N/m²)	Edelstahl E / (N/m²)	Kupfer E / (N/m²)
1	8.55E+08	5.13E+09	1.28E+10	1.28E+10	8.55E+09
2	8.55E+08	4.58E+09	6.41E+09	1.28E+10	7.12E+09
3	8.27E+08	4.42E+09	6.41E+09	9.86E+09	7.12E+09
Mittelwert	8.46E+008	4.71E+009	8.55E+009	1.18E+010	7.60E+009
Standardabweichung	1.30E+007	3.03E+008	3.02E+009	1.39E+009	6.72E+008
Fehler des Mittelwertes	7.51E+006	1.75E+008	1.75E+009	8.05E+008	3.88E+008

Damit berechnen sich die E-Moduln zu:

- $E_{PVC} = (8.46 \pm 0.08) \cdot 10^8 N/m^2$
- $E_{Aluminium} = (4.71 \pm 0.2) \cdot 10^9 N/m^2$
- $E_{Messing} = (8.55 \pm 1.8) \cdot 10^9 N/m^2$
- $E_{Edelstahl} = (1.18 \pm 0.08) \cdot 10^{10} N/m^2$
- $E_{Kupfer} = (7.60 \pm 0.4) \cdot 10^9 N/m^2$

Potentielle Systematische Fehler
Wird nach Ausrichtung des Lasers, z.B. beim Wechseln der Stäbe einer der Spiegel verschoben und wird dies nicht korrigiert, kann dies zu verhältnismäßig kleinen systematischen Fehlern führen. Dies kann aber durch die Markierung der Laserposition im unbelasteten Zustand leicht vermieden werden.

In den beiden vorangehenden Teilversuchen wird eine klare lineare Korrellation zwischen den angehängten Massen und den Auslenkungen der Stäbe bzw. des Laserpunktes gemessen.
Die Ergebnisse der Werte der E-Moduln aus diesem Versuchsteil kommen schon näher an die Literaturwerte heran, liegen aber immer noch eine Größenordung darunter. Es muss hier, wie beim ersten Versuch, ein systematischer Fehler vorliegen. In Abschnitt 1.1 befindet sich eine Tabelle mit Literaturwerten zum Vergleich.
Die dynamische Messmethode im nächsten Versuch liefert deutlich bessere Ergebnisse als diese beiden statischen Messmethoden. Möglicherweise liegt es aber nicht an der Genaugikeit der Methode, sondern an systematischen Fehlern, die in den Versuchen 1.1 und 1.2 mit eingegangen sind.

2 Elastizitätsmodul (dynamischer Fall)

In diesem Versuchsteil wird der E-Modul verschiedener Stoffe mittels einer dynamischen Messmethode bestimmt. Dazu werden die Zeitintervalle gemessen, die eine Longitudinalwelle benötigt, um von einem Ende eines Stabes zum anderen zu laufen und wieder zurückzukehren. Als Erreger fungiert dabei eine Pendelkugel, die axial an ein Stabende stößt und somit eine sich im Stab fortpflanzende Verdichtungswelle auslöst. Am erregerfernen Ende des Stabes befindet sich ein Messinstrument, welches dazu in der Lage ist, mit Hilfe eines Piezokristalls die Schallsignale aus dem Stab in elektrische Spannungsimpulse umzuwandeln und diese dann mit einem Oszilloskop aufzuzeichnen.

Abbildung 3: Versuchsaufbau Aufgabe 2

Bevor die Messung für einen bestimmten Stoff ausgeführt wird, empfiehlt es sich vorher die Anschlagsstärke herauszufinden, die vernünftige Messdaten produziert. Je klarer der Hauptschwingungsmodus im Oszillogramm zu erkennen ist, desto höher ist die Reproduzierbarkeit dieser Daten. Bei PVC wird die Welle so stark gedämpft, dass es hier schwierig ist, vernünftige Daten aufzunehmen, außerdem treten zusätzlich noch andersartige Anregungsmoden auf.

Um den E-Modul zu bestimmen, muss zunächst eine theoretische Formel bestimmt werden, die die Beziehung zwischen den gemessenen Größen und dem E-Modul beschreibt.

Betrachtet wird ein Stabelement mit der Länge Δx und der Masse $\Delta m = \rho dV = \rho A \Delta x$. Der E-Modul ist

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L} \quad \Longrightarrow \quad F = E \cdot A \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

Beim Übergang zu infinitesimalen Größen über s so ergibt sich mit der Auslenkung s des Stabelements:

$$F = EA\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \cdot \Delta x$$

Nach dem 2. Newtonschen Axiom gilt:

$$F = ma = \Delta m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = A\rho \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

Dies ist die Normalkraft, die auf die Fläche A wirkt und das Stabelement beschleunigt. Durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für F folgt diese Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = v^2 = \frac{E}{\rho}$$

Damit gilt für den E-Modul

$$E = \rho v^2$$

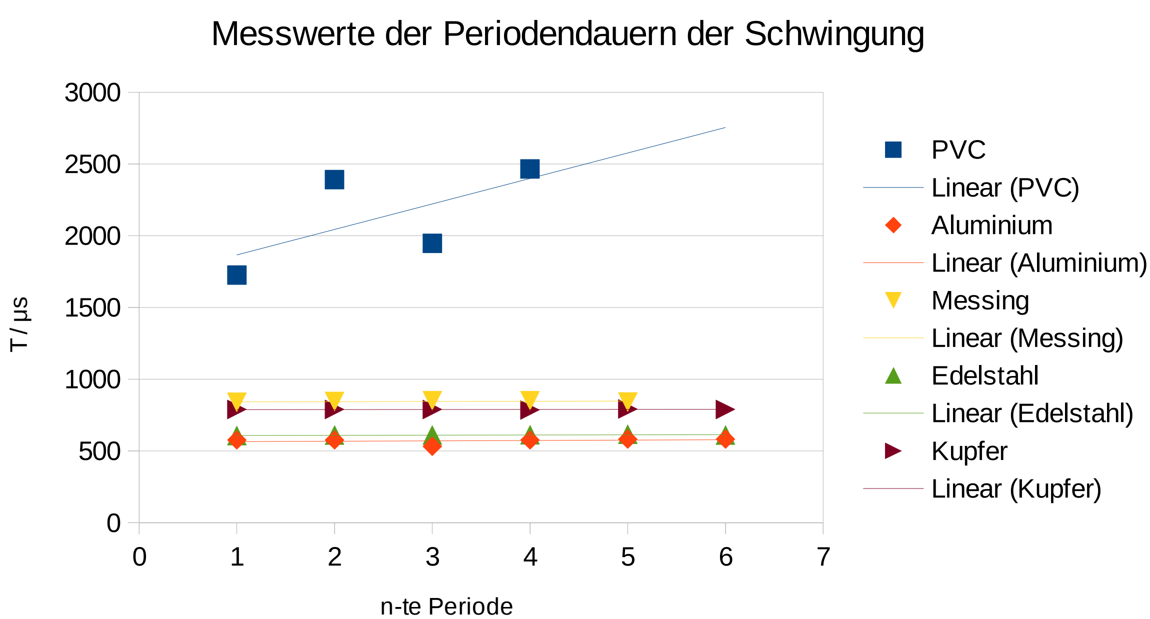
Folgende Formeln werden für die Berechnungen benutzt:

$$E = v^2 \cdot \rho \quad , \quad v = s/t = (2L)/T$$
$$\Longrightarrow \; E = \frac{1}{T^2} \cdot s^2 \cdot \rho$$

Für die Dichteberechnung gilt die Formel $\rho = \frac{m}{V}$.
Die Konstanten sind $L = 146.8cm$, $d = 1cm$.
Der Fehler auf den Periodendauern fließt in die Berechnung des Fehlers des E-Mouls mit ein. Der Fehler auf die Werte von E wird mit einer Gausschen Fehlerfortpflanzung für die Größe T in der Formel für E berechnet, auf deren explizite Durchführung hier nicht näher eingegangen wird.

Messwerte: Periodendauern der Schwingung (aus Spannungskurve)

	PVC	**Aluminium**	**Messing**	**Edelstahl**	**Kupfer**
Periode Nr.	T / µs	T / µs	T / µs	T / µs	T / µs
1	1726	576.5	838.5	607.3	789.1
2	2392	576.5	844.7	610.4	789.2
3	1948	532.4	850.8	610.4	789.2
4	2466	576.5	850.8	613.5	786.1
5	-	582.6	841.6	616.6	792.3
6	-	582.6	-	610.4	789.2
Mittelwert	2.13E+003	5.71E+002	8.45E+002	6.11E+002	7.89E+002
Standardabweichung	3.07E+002	1.76E+001	4.92E+000	2.92E+000	1.79E+000
Fehler des Mittelwertes	1.54E+002	7.17E+000	2.20E+000	1.19E+000	7.31E-001



Dichten

	L / cm	d / cm	V / m³	m / g	ρ / kg/m³
PVC	146.8	1	1.15E-004	167	1.45E+003
Aluminium	146.8	1	1.15E-004	327	2.84E+003
Messing	146.8	1	1.15E-004	984	8.53E+003
Edelstahl	146.8	1	1.15E-004	926	8.03E+003
Kupfer	146.8	1	1.15E-004	1032	8.95E+003

Geschwindigkeiten

	v / m/s
PVC	1376.47
Aluminium	5140.21
Messing	3473.41
Edelstahl	4801.83
Kupfer	3720.30

Elastizitätsmoduln

	PVC	**Aluminium**		**Edelstahl**	**Kupfer**
	E / (N/m²)	E / (N/m²)	E / (N/m²)	E / (N/m²)	E / (N/m²)
Ergebnis E-Modul	2.74E+009	7.49E+010	1.03E+011	1.85E+011	1.24E+011
Fortgepflanzter Fehler	9.89E+007	4.70E+008	1.34E+008	1.81E+008	5.74E+007

Damit berechnen sich die E-Moduln zu:

- $E_{PVC} = (2.78 \pm 0.1) \cdot 10^9 N/m^2$
- $E_{Aluminium} = (7.58 \pm 0.05) \cdot 10^{10} N/m^2$
- $E_{Messing} = (1.04 \pm 0.001) \cdot 10^{11} N/m^2$
- $E_{Edelstahl} = (1.87 \pm 0.002) \cdot 10^{11} N/m^2$
- $E_{Kupfer} = (1.25 \pm 0.0006) \cdot 10^{11} N/m^2$

Die Literaturwerte sind in einer Tabelle in Abschnitt 1.1 zusammengestellt.

Potentielle systematische Fehler

Durch eine beschädigte Messapparatur können die Daten verfälscht werden. Der Piezodetektor verträgt keine harten Stöße, weshalb das Pendel nicht zu stark ausgelenkt werden darf.

Wenn das Material zu stark dämpft oder störende Schwingungsmoden darin zu stark zum Ausdruck kommen, kann es passieren, dass, wenn trotzdem gemessen wird, die Peaks der Hauptschwingung mit anderen eventuell vorhandenen Peaks verwechselt werden, die von unvermeidbaren andersartigen Anregungsmoden stammen. Dies sollte jedoch vermeidbar sein, wenn mehrmals überpfüft wird, ob die aufgenommenen Messdaten reproduzierbar sind.

Der Stoff der sich in den vorangehenden Versuchen am meisten heraushebt ist PVC. Es besitzt einen wesentlich geringeren E-Modul als die Metalle, was an den Ergebnissen der drei vorangehenden Versuche klar zu sehen ist.

Die Messung mit der dynamischen Messmethode scheint um einiges akkurater zu sein als die Messungen in Versuchsteil 1. Die berechneten Größen passen alle recht gut zu den Werten in der Fachliteratur. Eine Tabelle befindet sich in Abschnitt 1.1.

3 Torsionsmodul

Aufgabenstellung: Ziel des Versuchs ist es, durch den weiter unten geschilderten Versuch, das Schubmodul G der vorliegenden Probe zu bestimmen. Benötigte Geräte:

- eine zu untersuchende stabförmige Probe
- eine horizontale Fixierungsmöglichkeit
- eine Drehscheibe (mit vier Aussparungen zur besseren Anbringung der Zusatzmassen)
- vier Zusatzmassen (von gleicher Beschaffenheit, hier zylindrisch)
- eine Stoppuhr
- evtl. weitere Fixierungsteile

Aufbau/Durchführung: Zunächst wird der zu untersuchende Stab an seinem oberen Ende festgespannt und an seinem unteren Ende eine Drehscheibe angebracht. Diese Scheibe wird um einem Winkel $< 10°$ ausgelenkt, damit die Schwingung als harmonisch gesehen werden darf. Diese wird dann losgelassen und beginnt zu schwingen. Dabei werden 10 Perioden mit der Stoppuhr gemessen. Danach wird die Scheibe angehalten. Dann werden zwei und danach vier Zusatzmassen auf der Drehscheibe angebracht, diese ausgelenkt, und jeweils wieder die für 10 Perioden benötigte Zeit mit der Stoppuhr festgehalten.

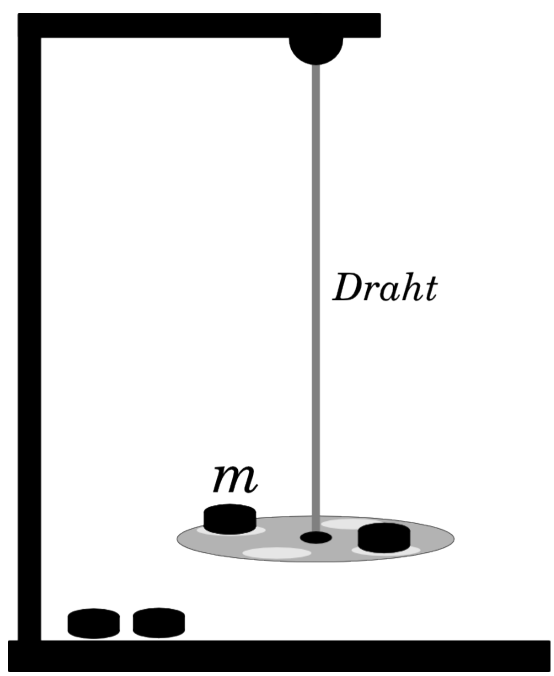


Abbildung 4: Versuchsaufbau Aufgabe 3

Greift eine Kraft F tangential an einer Fläche A an, so ergibt sich für die Torsionsspannung der Ausdruck:

$$\tau = \frac{F}{A}$$

Für kleine Auslenkungen vom Scherwinkel α gilt mit der Kleinwinkelnäherung $\tan\alpha = \alpha$ die folgende lineare Beziehung:

$$F = AG\alpha$$

Die Materialkonstante G wird als Torsions- bzw. Schubmodul bezeichnet. Wenn der Zylinder gedanklich in infinitesimal dünne Hohlzylinder mit der Länge L , der Dicke dr und dem Radius r unterteilt wird, dann ist das Drehmoment $dM = r \cdot dF$ und der Schwerwinkel ergibt sich zu

$$\tan\alpha \approx \alpha = r \cdot \frac{\phi}{L}$$

Der Hohlzylinder wird um den Winkel ϕ verdreht. Hier wird die Kleinwinkelnäherung für kleine α angewendet. Für das Drehmoment gilt dann

$$dM = r \cdot dF = r^2 G \frac{\phi}{L} dA = 2\pi r dr \cdot r^2 G \frac{\phi}{L} = \frac{2\pi r^3 \phi G}{L} dr$$

Das Drehmoment folgt aus der Integration von 0 bis R :

$$M = \int_0^R 2\pi r^3 \frac{G \cdot \phi}{L} dr = \frac{\pi}{2} \frac{GR^4 \phi}{L}$$

Die Konstanten werden zur Winkelrichtgröße D^* zusammengefasst.

$$M = D^* \phi \quad , \quad D^* = \frac{\pi G R^4}{2L}$$

Es ist leicht zu sehen, dass sich daraus die typische DGL des harmonischen Oszillators ergibt:

$$\ddot{\phi} + \frac{D^*}{\Theta} \phi = 0$$

Nach dem Identifizieren der Kreisfrequenz ω kann T bestimmt werden:

$$\omega^2 = \frac{D^*}{\Theta}$$

Also ergibt sich für den Torsionsmodul

$$G = \frac{8\pi L \Theta}{R^4 \Delta(T^2)}$$

Messdaten: siehe originale Messdaten

Dies ist eine dynamische Messmethode für das Torsionsmodul. Allerdings lässt sich das Torsionsmodul auch recht einfach mit einer statischen Methode bestimmen. Dazu müsste gemessen werden, welches Drehmoment benötigt wird, um den Draht um einen kleinen Winkel α auszulenken. Dafür würde sich die obige Formel eignen , die den linearen Zusammenhang für kleine Winkel ϕ zwischen dem Torsionsmodul G und dem Drehmoment beschreibt.

Schlussbemerkungen und Ergebnisse zum Versuch 3 befinden sich auf separaten, handgeschriebenen Blättern, die zusätzlich zu diesem Dokument mit abgegeben werden.