概率论作业 5

P39

28. 设三次独立试验中，事件A出现的概率相等，若已知A至少出现一次的概率为$\frac{19}{27}$，试求事件A在一次试验中的概率

解：设 B＝"事件A在至少一次试验中出现"

$P(B) = 1 - P(\bar{A})^3 = \frac{19}{27}$

$\therefore P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$

$P(A) = \frac{1}{3}$

29. 某大厦内有4部电梯，由经验知它们平均每小时运行30min，且各部电梯运行相互独立，试求在某时刻下列事件的概率

(1) 恰有两部电梯在运行

(2) 至少有一部电梯在运行

(3) 全部电梯都在运行

解：(1)

$P = C_4^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(2)

$P = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{16}$

(3)

$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

30. 某人参加射击选拔赛，对指定目标独立射击三次，假设他每次的命中率均为0.9，三次均未击中目标，一定不能入选；目标被击中一次而入选的概率为0.2，击中两次而入选的概率为0.5，三次均击中则一定入选，试求该人能入选的概率

解：

$P = (0.9)^3 + C_3^2 (0.9)^2 \times 0.1 \times 0.5 + C_3^1\, 0.9 \times (0.1)^2 \times 0.2 =$

$= 0.8559$

P72、填空 2

73 单选 3 13 5 6 8　填 2 3 8

74 3 7 8 三、2(2) 39 1418

综合 3 7 8 13

P75 14 24

陈智飞 信工2001班 2020111973

P72

2. 设随机变量的X的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ A\sin x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

则 $P(|X| < \frac{\pi}{6}) = \underline{\frac{1}{2}}$

解 2°. $P(|X| < \frac{\pi}{6}) = P(-\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{6}) = P(X < \frac{\pi}{6}) - P(X < -\frac{\pi}{6})$

$= F(\frac{\pi}{6}) - F(-\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

1°. $\because F(x)$在$x = \frac{\pi}{2}$具有右连续性

$\therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} F(x) = F(\frac{\pi}{2}) = A = 1.$

概率论作业 6.

P73. 3. 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} Ax^2 & 1\le x<2 \\ Ax & 2\le x<3 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$ 则 $P(0.5<X<2.5)=$ ___

解：由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

即 $\int_{-\infty}^{1} 0dx+\int_{1}^{2} Ax^2dx+\int_{2}^{3} Axdx+\int_{3}^{+\infty} 0dx$

$= \frac{A}{3}x^3\Big|_1^2+\frac{A}{2}x^2\Big|_2^3=\frac{7}{3}A+\frac{5}{2}A=1$

$A=\frac{6}{29}$

$P(0.5<X<2.5)=\int_{0.5}^{2.5} f(x)dx$

$=\int_{1}^{2}\frac{6}{29}x^2dx+\int_{2}^{2.5}\frac{6}{29}xdx$

$=\frac{1}{3}\times\frac{6}{29}\times 7+\frac{1}{2}\times\frac{6}{29}\times\frac{9}{4}$

$=\frac{336+162}{29\times4\times6}=\frac{83}{116}$

设某实验室每天的用电量是一个随机变量X,其密度函数为 $f(x)=\begin{cases} 6x(1-x) & 0<x<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$ 如果每天的供电量为0.9万度,则供电量不足的概率为___.

解. $P(0.9<X<1)=\int_{0.9}^{1} 6x(1-x)=\int_{0.9}^{1} 6x-6x^2$

$=(3x^2-2x^3)\Big|_{0.9}^{1}=0.028$

8 设随机变量X服从参数(2,P)的二项分布,随机变量Y服从参数(3,P)的二项分布,若 $P(X\ge1)=\frac{5}{9}$,则 $P(Y\ge1)=$ ___ ?

解 $P(X\ge1)=1-P(X=0)=1-C_2^0P^0(1-P)^2=$

$=1-(1-P)^2=\frac{5}{9}$ $(\frac{4}{9}=(1-P)^2 \rightarrow \frac{2}{3}=1-P)$

$P=\frac{1}{3}$

$P(Y\ge1)=1-P(Y=0)=1-C_3^0P^0(1-\frac{1}{3})^3$

$=1-(\frac{2}{3})^3=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$

单选题 P73 3. 下列函数中可以作为某随机变量的分布函数的是( )

A $\frac{1}{1+x^2}$ B $\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}\arctan x$

C. $\begin{cases} 0 & x\le0 \\ \frac{x}{1+x} & x>0 \end{cases}$ D. $\frac{2}{\pi}\arctan x+1$

解 A $\frac{1}{1+x^2}$ 不满足单调非减性.

B $F(-\infty)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}\times(-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\neq0$

C. 1° 单调非减 ✓

2° $F(-\infty)=0$

$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=1$ ✓

3° $F(0+0)=F(0)=0$ ✓

∴ $\begin{cases} 0 & x\le0 \\ \frac{x}{1+x} & x>0 \end{cases}$ 可以作为某随机变量的分布函数

D. $F(-\infty)=0$

但 $F(+\infty)=2\neq1$

∴ $\frac{2}{\pi}\arctan x+1$ 不可作为某随机变量的分布函数

分布函数的性质

1° 单调非减 $x_1<x_2$

$F(x_1)\le F(x_2)$

2° $F(-\infty)=0$

$F(+\infty)=1$

3° 右连续性

$F(x+0)=F(x)$

凡满足以上三条性质的函数都是某个随机变量的分布函数

P81. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 则随 σ 增大,概率 $P(|X-\mu|<\sigma)$ ( )

A. 单调增大 B. 单调减小 C. 保持不变 D. 不定

解. 遇到一个任意正态分布,最好先将其标准化

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 则 $F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ $f(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

标准化后可用的重要公式：对 $\forall a>0$

$Z\sim N(0,1)$

1° $\Phi(-a)=1-\Phi(a)$ 记

2° $P(|Z|\le a)=2\Phi(a)-1$ 记

3° $P(|Z|\ge a)=2[1-\Phi(a)]$ 推

对 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

即 $\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z}\sim N(0,1)$ $P(|Z|<1)$

$P(|X-\mu|<\sigma)=P(|\frac{X-\mu}{\sigma}|<1)\overset{由2°}{=\!=}2\Phi(1)-1$ 为定值.

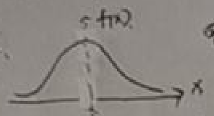
故选 C

概率论作业 7

P73 2. 设随机变量 $X \sim N(u, \sigma^2)$ 则 $P(X \le u) = ($ $)$

A $\frac{1}{2}$　B 0　C 1　D 无法确定

解：由图



可知

$P(X \le u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)dx = \frac{1}{2}$

又由 $P(u-a < X \le u) = P(u < X < u+a)$ 得

$P(-\infty < X \le u) = P(u < X < u+\infty)$

即 $P(X \le u) = P(X > u)$

又 $P(X \le u) + P(X > u) = 1$

$\therefore P(X \le u) = \frac{1}{2}$

P73 5. 设随机变量 X 的密度函数 $\phi(x)$，且 $\phi(-x) = \phi(x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a 有（ ）

A $F(-a) = 1 - \int_0^a \phi(x)dx$　B $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a \phi(x)dx$

C $F(-a) = F(a)$　D $F(-a) = 2F(a) - 1$

解：密度函数的性质

1° $f(x) \geq 0$

2° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3° $P(a < x \le b) = \int_a^b f(x)dx$

4° 连续型 RV 分布 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续，且在 $f(x)$ 的连续点处有 $F'(x) = f(x)$

A、$F(-a) = 1 - F(a) = 1 - \underline{\int_{-\infty}^{a}} \phi(x)dx$ 不同　×

B　$F(-a) = 1 - F(a) = 1 - P(X \le a)$

$= 1 - \int_{-\infty}^{a} \phi(x)dx$

$= 1 - \int_{-\infty}^{0} \phi(x)dx - \int_0^a \phi(x)dx$

$\because \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)dx = 1$ 且 $\phi(-x) = \phi(x)$

$\therefore \int_{-\infty}^{0} \phi(x)dx = \int_0^{+\infty} \phi(x)dx = \frac{1}{2}$

$\therefore$ 原式 $= 1 - \frac{1}{2} - \int_0^a \phi(x)dx$　✓

$= \frac{1}{2} - \int_0^a \phi(x)dx$

C　$F(-a) = P(X \le -a) = \int_{-\infty}^{-a} \phi(x)dx$

$F(a) = P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} \phi(x)dx$　不同　×

D 同 A.

P73 6. 设随机变量的分布函数 $F(x) = \frac{K}{1+e^{-x}}$　$x \in (-\infty, +\infty)$，则 $k = ($ $)$

A. 1　B e^{-1}　C e^{-2}　D e

解：$\because \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{K}{1+e^{-x}} = K = 1$

$\therefore K = 1$

P73 7. 设随机变量 X Y 服从正态分布，$X \sim N(u, 4^2)$，$Y \sim N(u, 5^2)$，记 $P_1 = P(X \le u-4)$，$P_2 = P(Y \geq u+5)$ 则（ ）

A 对任何实数 u，都有 $P_1 = P_2$　B 对 u，都有 $P_1 < P_2$

C 只有对 u 的个别值，才有 $P_1 = P_2$　D 对 u，都有 $P_2 < P_1$

解：正交化

$\because P_1 = P(X \le u-4) = P(\frac{X-u}{4} \le -1) = \Phi(-1)$

$= 1 - \Phi(1)$

$P_2 = P(Y \geq u+5) = P(\frac{Y-u}{5} \geq 1) = 1 - P(\frac{Y-u}{5} < 1)$

$= 1 - \Phi(1)$

$\therefore P_1 = P_2$　A ✓

P73 8. 已知随机变量 $X \sim f(x) = \begin{cases} Ae^{-x} & x > \lambda \\ 0 & x \le \lambda \end{cases}$　A 为常数，$\lambda > 0$，则 $P(\lambda < x < \lambda + a)\ (a > 0)$ （ ）

A 与 a 无关，随着 λ 增大而增大　B 与 a 无关，随 λ 增大而减小 ✓

C 与 λ 无关，随 α 增大而增大　D 与 λ 无关，随 α 增大而减小 ✓

解：遇到含参 (A)，先把参求出，利用 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$，以免后续做不出来

$\because \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ 即 $\int_{\lambda}^{+\infty} Ae^{-x}dx =$

$= -Ae^{-x}\Big|_{\lambda}^{+\infty} = -A(0 - e^{-\lambda})$

$= Ae^{-\lambda} = 1$

$\therefore A = e^{\lambda}$

$P(\lambda < x < \lambda + a) = \int_{\lambda}^{\lambda+a} Ae^{-x}$

$= -Ae^{-x}\Big|_{\lambda}^{\lambda+a}$

$= Ae^{-\lambda} - Ae^{-\lambda-\alpha}$

$= Ae^{-\lambda}(1 - e^{-\alpha})$　（若不求 A 会卡在这里）

$= 1 - e^{-\alpha}$

与 a 有关 且 α↑ P↑

概率论作业8

三 综合题

P74 3. 设随机变量X的分布律为

X	-1	0	1	2	3
P	0.16	$\frac{a}{10}$	a^2	$\frac{a}{5}$	0.3

(1) 确定常数a

(2) 求X的分布函数F(x)

解 (1) 由离散型随机变量性质:

$\sum P_i = 1 \quad P_i \geq 0$

得 $0.16 + \frac{a}{10} + a^2 + \frac{a}{5} + 0.3 = 1$

$a^2 + 0.3a = 0.54$

$a = 0.6$

(2) $\because F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P$

$\therefore$ 1° $x < -1$时

$F(x) = P(X \leq -1) = 0$

2° $-1 \leq x < 0$时

$F(x) = P(X \leq x) = P(X=-1) = 0.16$

3° $0 \leq x < 1$时

$F(x) = P(X=-1) + P(X=0)$

$= 0.16 + 0.06$

$= 0.22$

4° $1 \leq x < 2$时

$F(x) = P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1)$

$= 0.22 + 0.36 = 0.58$

5° $2 \leq x < 3$时

$F(x) = P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$= 0.58 + 0.12 = 0.7$

3° $x \geq 3$时

$F(x) = 1$

P74 7. 生产某种产品的废品率为0.1，抽取20件产品，初步检查已发现有2件废品，这时有多大概率推断这20件产品中废品不少于3件。

解 设X="废品件数"

则本题符合 $X \sim B(20, 0.1)$

初步检查已有2件废品：$X \geq 2$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$= 1 - C_{20}^{0}(0.1)^0(0.9)^{20} - C_{20}^{1}\, 0.1 \times 0.9^{19}$

$= 0.6075$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$

$= 0.6075 - C_{20}^{2}(0.1)^2(0.9)^{18}$

≈ 0.3223

$P(X \geq 3 \mid X \geq 2) = \frac{P(X \geq 3, X \geq 2)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(X \geq 3)}{P(X \geq 2)}$

≈ 0.5305

P74 8. 某店内有4名售货员，据经验，每名售货员平均在一小时内只用秤15min，问该店配置几台秤比较合理

解 用秤概率 $P = \frac{1}{4}$

设X="用秤人数"

则X满足 $X \sim B(4, \frac{1}{4})$

若只有一台秤，顾客不用等待的概率

$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$= C_4^0(\frac{1}{4})^0(\frac{3}{4})^4 + C_4^1(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^3$

$= \frac{189}{256} \approx 0.73$ 顾客等待率较大

若有两台秤

$P(X \leq 2) = P(X \leq 1) + P(X=2)$

$= \frac{189}{256} + C_4^2(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^2 \approx 0.96$ 较为合理

概率论作业 9

13. 某螺钉厂生产的螺钉的不合格品率为0.01，试用泊松分布近似计算：

(1) 若用100个螺钉装一盒，盒中不合格品不超过3个的概率

(2) 盒中应装多少个螺钉，才能以不低于95%的概率保证盒中的合格品不少于100个？

解：设 X = "盒中不合格品的个数"

(1) 则 $X \sim B(100, 0.01)$

由于 $n=100$ 较大，且 $\lambda = np = 100 \times 0.01 = 1$

$(n=100 > 50)$

近似地 $X \sim P(1)$

从而 $P(X \le 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

(查泊松表1 $\lambda=1$ $k=0,1,2,3$) $= 0.367879 + 0.367879 + 0.183940 + 0.061313$

$= 0.981011$

解：(2) 设盒中装 Y 个螺钉.

则 $X \sim B(Y, 0.01)$

由于 $Y > 100$ 较大. $\lambda = np = 0.01Y$

近似地 $X \sim P(0.01Y)$

当 $Y=101$ 时 $\lambda = 1.01 \approx 1$

$X \sim P(1)$，

为使盒中合格品不少于100个，$X \le 1$

$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$= 0.367879 + 0.367879$

< 0.95

当 $Y=102$ 时 X 需小于等于2

$P(X \le 2) = P(X \le 1) + P(X=2)$

$\approx 0.91 < 0.95$

当 $Y=103$ 时

$P(X \le 3) \approx 0.98 > 0.95$

∴ 盒中应至少装103个螺钉.

P75

14. 设某一大型设备在任何长为 t (单位: h) 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数 $\lambda = \frac{t}{100}$ 的泊松分布

(1) 求设备无故障工作20h的概率 ($t=20$ 时，发生故障概率为0)

(2) 求在40h内，设备至少发生一次故障的概率.

(3) 求在设备已经无故障工作20h的情况下，再无故障工作20h的概率

(4) 对参数 λt，求相继两次故障之间时间间隔 T 的概率分布

在此之间不发生故障

解：(1)

$N(t) \sim P(\frac{t}{100})$

当 $t=20$ 时

$N(20) \sim P(\frac{1}{5})$

$P(N=0) = 0.818731$

(2) 当 $t=40$ 时

$N(40) \sim P(\frac{2}{5})$

$P(N \ge 1) = 1 - P(N=0)$

$= 1 - 0.670320$

≈ 0.3297

(3) $\dfrac{P[N(20)=0,\ N(40)=0]}{P[N(20)=0]} = \dfrac{0.670320}{0.818731} \approx 0.8187$

(4) $N(t) \sim P(\frac{t}{100})$

由(1) ⇒ 设备无障碍工作 t 时的概率

$\Rightarrow P[N(t)=0] = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$ ⇕

设备相继两次发生故障的概率（在 t 内）

$F(t) = 1 - e^{-\lambda}$ $\quad t > 0$

$$\therefore F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & t > 0. \end{cases}$$

10

概率论作业

P75 18. 某厂检验产品质量的方法是每1000件为一批，随机抽取10件，若次品数不超过1件，就验收通过，否则逐件检验。

解. (1) 若1000件产品中有200件次品，验收通过的概率有多大？

(2) 某1000件产品中有10件次品，验收通过的概率为多大？（提示：用二项分布近似计算。）

解. 设 X = "次品数"

(1) 次品率 $p = \frac{200}{1000} = 0.2$

$P = P(X=0) + P(X=1) = C_{10}^{0} \times 0.8^{10} \times 0.2^{0} + C_{10}^{1} \times 0.8^{9} \times 0.2^{1}$

≈ 0.376

(2) $p = \frac{10}{1000} = 0.01$

$P = P(X=1) + P(X=0)$

$= C_{10}^{1} \times 0.01 \times 0.99^{9} + 0.99^{10}$

≈ 0.995

P75 19 设连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ Ax^2e^{-2x} & x \geq 0 \end{cases}$$

(1) 求A、B的值

(2) 求X的分布函数 $F(x)$

(3) 求 $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$ 与 $P(X=\frac{1}{2})$

解. (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$\int_0^{+\infty} Ax^2e^{-2x}dx = 1$

$A\int_0^{+\infty} x^2e^{-2x}dx$

$= -\frac{A}{2}\int_0^{+\infty} x^2 d(e^{-2x})$

分部积分

$= -\frac{A}{2}x^2e^{-2x}\Big|_0^{+\infty} + \frac{A}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}d(x^2)$?

$= \left(-\frac{A}{2}x^2e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}\right) - \frac{A}{2}xe^{-2x}\Big|_0^{+\infty} - \frac{A}{4}e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}$

$= \frac{A}{4} = 1$

$A = 4$

(2)
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_0^x 4t^2e^{-2t}dt & x \geq 0 \end{cases}$$

反对幂指三（分部积分）

$\cancel{\int_0^x 4t^2e^{-2t}dt}$

$= \int_0^x 4t^2 d(e^{-2t})$

$= 4t^2e^{-2t}\Big|_0^x - \int_0^x e^{-2t}d4t^2$

$= 4t^2e^{-2t}\Big|_0^x - e^{-2t}4t\Big|_0^x \int_0^x 4t \, dt^2$

展开

?

$$= \begin{cases} 0 \\ -e^{-2x}(2x^2+2x-1)+1 & x \geq 0 \end{cases}$$

(3) $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) = \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{x} f(x)dx\right) = F(\frac{1}{2}) - F(-\frac{1}{2})$

$= 1 - \frac{1}{2e}$

(4) $P(X=\frac{1}{2}) = 0$.

P75 20. 设随机连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ A + Be^{-\frac{x^2}{2}} & x > 0 \end{cases}$$

(1) 求A、B的值

(2) 求X的概率密度 $f(x)$

解. (1) 由分布函数的性质

$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} A + Be^{-\frac{x^2}{2}} = 1$

$= A + B \times 0 = 1$

$A = 1$

由右连续性

$\lim_{x \to 0^+}(A + Be^{-\frac{x^2}{2}}) = F(0) = 0$

$A + B = 0 \quad B = -1$

$(1 - e^{-\frac{x^2}{2}})' = x e^{-\frac{x^2}{2}}$

(2)
$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \cancel{2e^{-\frac{x^2}{2}}} \; xe^{-\frac{x^2}{2}} & x > 0 \end{cases}$$

概率论作业

P75

24 顾客在某银行窗口等待服务的时间 X(以min计)服从参数为5的指数分布，某顾客在窗口等待服务，若超过10min就离开，该顾客一个月要去该银行5次，试求他至少有一次未等到服务而离开窗口的概率

解：指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

由题 $X\sim E(\frac{1}{5})$

设 Y = "未等到服务的次数"

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{5}x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$x\geq 10$ 时未等到服务离开

$P(X\geq 10)=1-P(X<10)$

$=1-F(10)$

$=1-(1-e^{-2})=e^{-2}$

$P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)$

$=1-C_5^0(1-e^{-2})^5(e^{-2})^0$

$=1-(1-e^{-2})^5$

P75

27 设 $X\sim N(160,\sigma^2)$，欲使 $P(120<X\leq 200)\geq 0.8$，允许 σ 最大为多少？

解 $X\sim N(160,\sigma^2)$ 正态分布 $\begin{cases}\Phi(-a)=1-\Phi(a)\\ P(|X|<a)=2\Phi(a)-1\\ P(|X|\geq a)=2[1-\Phi(a)]\end{cases}$

1° 先标准化

$$\frac{X-160}{\sigma}\sim N(0,1)$$

$\because P(120\leq X\leq 200)=P(\frac{-40}{\sigma}\leq\frac{X-160}{\sigma}\leq\frac{40}{\sigma})$

$=\Phi(\frac{40}{\sigma})-\Phi(-\frac{40}{\sigma})$

$=\Phi(\frac{40}{\sigma})-(1-\Phi(\frac{40}{\sigma}))$

$=2\Phi(\frac{40}{\sigma})-1\geq 0.8$

$\Phi(\frac{40}{\sigma})\geq 0.9$

由书P225表得

$\frac{40}{\sigma}\geq 1.29$

$\sigma\leq 31.0078$

即 σ 最大为31.0078

P76

28 某地抽样调查表明，考生的外语成绩(百分制)近似服从正态分布 $N(72,\sigma^2)$，96分以上的考生占考生总数的2.3%，试求考生的外语成绩在60分至84分之间的概率

解 设 X = "考生的外语成绩"

$X\sim N(72,\sigma^2)$

$\frac{X-72}{\sigma}\sim N(0,1)$

$\because P(X\geq 96)=P(\frac{X-72}{\sigma}\geq\frac{24}{\sigma})=1-P(\frac{X-72}{\sigma}\leq\frac{24}{\sigma})$

$=1-\Phi(\frac{24}{\sigma})=2.3\%$

$\therefore \Phi(\frac{24}{\sigma})=0.977$

由书P225表可得

$\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.977=\Phi(2)$ $\therefore \sigma=12$

$\therefore P(60\leq X\leq 84)=P(-1\leq\frac{X-72}{12}\leq 1)$

$=\Phi(1)-\Phi(-1)$

$=\Phi(1)-[1-\Phi(1)]$

$=2\Phi(1)-1$

$=0.8413\times 2-1$

$=0.6826$

29 设某地区某年高考考生成绩服从正态分布 $N(430,80^2)$，试问：

(1) 成绩在470分以上的人数比例是多少？

(2) 按成绩由高到低取10%，分数线应为多少？

解：(1) 设 X = "高考成绩"

则 $\frac{X-430}{80}\sim N(0,1)$

$P(X\geq 470)=1-P(X\leq 470)=1-P(\frac{X-430}{80}\leq\frac{1}{2})$

$=1-\Phi(\frac{1}{2})=1-0.6915=0.3085$

(2) 设分数线 M = " "

则 $P(X\leq M)\geq 0.9$

即 $P(\frac{X-430}{80}\leq\frac{M-430}{80})\geq 0.9$

$\Phi(\frac{M-430}{80})\geq 0.9$

由P225表得 $\frac{M-430}{80}\geq 1.29$

$M=533.2$

分数线应为533分

12 概率论作业

P71

33. 求下列随机变量的函数分布

(1) 设X的概率分布为

X	-2	-1	0	1	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求$Y=3-2X$与$Z=(X-1)^2$的概率分布

解. (表上作业)

由

$Z=(X-1)^2$	9	4	1	0	4
$Y=3-2X$	7	5	3	1	-3
X	-2	-1	0	1	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

有 Y的概率分布为

Y	-3	1	3	5	7
P	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{15}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$

Z的概率分布为

Z	0	1	4	9
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{5}$

(2) 设$X \sim f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 2-x & 1\le x<2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，求$Y=1-2X$

的概率密度与分布函数

解. 思路: 先求Y的分布函数，

再用$f(y)=F_Y'(y)$求密度

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(1-2X\le y)$

$=P(X\ge \frac{1-y}{2})=1-P(X\le\frac{1-y}{2})$

$=1-F(\frac{1-y}{2})$

当 $-1\le y\le 1$时，即$0\le\frac{1-y}{2}\le 1$时

$F(y)=1-F(\frac{1-y}{2})=1-\int_0^{\frac{1-y}{2}}x\,dx$

$=1-\left[\frac{1}{2}(\frac{1-y}{2})^2\right]$

$=1-\frac{(1-y)^2}{8}$

$f(y)=F'(y)=\frac{1}{8}\times 2(1-y)=\frac{1-y}{4}$

当$\frac{1-y}{2}<0$时，即$y>1$时

$F(y)=1-F(\frac{1-y}{2})=1$

$f(y)=0$

当 $1\le\frac{1-y}{2}\le 2$时，即$-3\le y\le -1$时

$F(y)=1-\int_0^1 x\,dx-\int_1^{\frac{1-y}{2}}(2-x)\,dx$

$=1-\frac{1}{2}-(2x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_1^{\frac{1-y}{2}}$

$=\frac{1}{2}-\left[(1-y-\frac{1}{2}(\frac{1-y}{2})^2)-(2-\frac{1}{2})\right]$

$=\frac{1}{2}-1+y+\frac{(1-y)^2}{8}+\frac{3}{2}=1+y+\frac{(1-y)^2}{8}$

$=\frac{8+8y+y^2+1-2y}{8}=\frac{(y+3)^2}{8}$

$f(y)=F'(y)=2\cdot\frac{1}{8}(y+3)=\frac{1}{4}(y+3)$

当$\frac{1-y}{2}>2$时 即 $y\le -3$时

$F(y)=1-F(\frac{1-y}{2})=0$

$f(y)=0$

综上所述，

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{y+3}{4} & -3\le y\le -1\\ \frac{1-y}{4} & -1\le y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$F(y)=\begin{cases}0 & y\le -3\\ \frac{(y+3)^2}{8} & -3\le y\le -1\\ 1-\frac{(1-y)^2}{8} & -1\le y\le 1\\ 1 & y>1\end{cases}$$

35. 假设随机变量X服从参数为2的指数分布，证明$Y=1-e^{-2X}$在区间(0,1)上服从均匀分布.

解. $F(Y)=F(1-e^{-2X})=P(1-e^{-2X}\le y)=P(e^{-2X}\ge 1-y)$

当$y\ge 1$时 $F_Y(y)=1$

当$y<1$时 $F_Y(y)=P[X\le -\frac{1}{2}\ln(1-y)]$

$=F[-\frac{1}{2}\ln(1-y)]$

当 $y<0$时 $-\frac{1}{2}\ln(1-y)<0$

$F(y)=0$

当 $0<y<1$时 $F(y)=1-e^{-2[-\frac{1}{2}\ln(1-y)]}$

$=1-(1-y)=y$

当$y>1$时 $F(y)=1$

故 $F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ y & 0<y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$

$f(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

服从均匀分布.