

5. F분포에 의한 검정

- ① 종속변수가 양적 변수인 하나의 모집단 혹은 두 개의 모집단의 평균 모수치에 대한 검정은 Z 분포와 t 분포를 사용한다. 그러면 3개 이상의 모집단을 비교할 경우에는 어떠한 통계적인 방법을 사용할까?
- ② 만약 3개의 모집단을 비교할 경우에는 두 독립집단끼리 비교하는 t -검정을 세 번 실시해야 한다. 그러나 R.A.Fisher(1924)에 의해 제안된 분산분석 방법을 이용할 수 있다.
- ③ 즉, 세 집단 이상 비교를 가능하게 하기 위해서는 집단간 변화량(between group variation)과 집단내 변화량(within group variation)을 비교하는 분산분석 방법을 이용하며, 이는 F 분포에 의하여 검정된다.

5-1. 분산분석(Analysis of variance : ANOVA)

- ① 분산분석은 세 집단 이상의 평균차이가 통계적으로 유의한가를 검정하는 분석방법이다. 즉, 분산의 원인이 어디에 있는가를 알아보는 통계적 방법이다.
 - ② 동일한 세 개의 집단에 각기 다른 처치를 가하여 각 집단마다 다른 결과가 나왔다고 할 때, 처치에 효과가 있다면 세 집단은 서로 다른 평균을 가지므로 집단간 분산이 클 것이고, 처치효과가 없다면 집단간 차이가 없으므로 집단간 분산은 적을 것이다.
 - ③ 실험연구에서 처치를 가하기 전인 실험 전에 각 집단의 초기 단계는 동일하며, 처치를 가한 후 처치의 효과가 크다면 실험 후 집단간 차이는 클 것이다. 이는 종속변수의 총 변화량 중 집단간의 차이가 크므로 집단간 변화량 또는 집단간 분산이 크다는 것을 나타낸다.
- 【예】 연령(10대, 20대, 30대; 요인)에 각기 다른 처치를 가하여 각 집단마다 어떤 결과가 나오는지 분석할 때,
- ㉠ 만약 처치효과가 있다면 세 집단은 서로 다른 평균을 가짐 = 집단 간 분산이 클 것임.
 - ㉡ 만약 처치효과가 없다면 집단 간 차이가 없음 = 집단 간 분산은 적을 것임.
- ④ 집단간 분산의 크기가 얼마 만큼이어야 집단의 차이가 있다고 결론을 내릴 수 있는지를 설정해야 하며, 이 때 F 통계값을 사용한다.

$$F = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_W^2} = \frac{\text{집단간 분산}}{\text{집단내 분산}}$$

즉, 집단간의 분산이 집단내 피험자들의 분산에 비추어 그 크기가 클 때 집단간의 차이가 있다고 결론을 유도할 수 있다.

- ⑤ 집단내 분산에 대한 집단간 분산의 비율을 F 값이라 부르고, 이 F 값이 F 분포에 의한 기각값보다 클 때 집단 간의 유의한 차이가 있다고 결론을 유도한다.
- ⑥ 분산분석, 즉 F 검정의 기본 가정은 다음과 같다.
 - ㉠ 종속변수가 양적변수이어야 한다.
 - ㉡ 정규분포가정 : 각 집단에 해당되는 모집단의 분포가 정규분포이어야 한다.
 - ㉢ 등분산가정 : 각 집단에 해당되는 모집단들의 분산이 같아야 한다.
 만약 정규분포가정과 등분산가정이 충족되지 않으면 비모수 통계(non-parametric statisticsd)를 사용하여야 한다.
- ⑦ 분산분석의 종류

- ㉠ 일원분산분석 : 요인변수 하나 (예) 지역
- ㉡ 이원분산분석 : 요인변수 두 개 (예) 성별, 교육수준
- ㉢ 다원분산분석 : 요인변수 3개 이상
- ⑧ 일원분산분석에서 정규분포가정과 등분산가정을 충족시키지 못한다면 비모수 통계의 하나인 Kruskal-Wallis검정을 실시해야 한다.

5-2. 일원분산분석(one-way ANOVA)

- ① 일원분산분석이란 독립변수가 하나일 때 분산의 원인이 집단간 차이에 기인한 것인지를 분석하는 통계적 방법이다.
- ② 하나의 독립변수에서 p개의 수준(level)들 사이의 차이를 비교하는 방법이다.
 - ㉠ 인종간 지능의 차이 (황인종, 백인종, 흑인종 사이에 지능의 차 비교)
 - ㉡ 사회계층에 따른 사회에 대한 만족도
 - ㉢ 교수법에 따른 학업성취의 차
- ③ 귀무가설이 기각된다함은 모집단의 평균이 같지 않음을 의미한다. 그러므로 귀무가설은 모집단들이 어떻게 다른지를 구체적으로 설명하지 않는 일반적 형태로 표현된다.
- ④ 세 집단 이상을 비교하기 위해 집단간 편차제곱의 평균(MS_B)과 집단내 편차제곱의 평균(MS_W)을 비교한다.

$$F_{\text{통계값}} F = \frac{MS_B}{MS_W}$$

[설명]

개인 점수는 연구에 참여한 모든 피험자가 가질 수 있는 평균점수와 소속된 해당집단의 평균에서 전체 평균을 뺀 값인 집단효과, 개인점수에서 집단의 평균을 뺀 오차점수로 합성될 수 있다.

$$\text{개인점수} = \text{전체평균} + \text{집단효과} + \text{개인오차}$$

따라서 ‘개인의 총편차’는 집단의 평균에서 전체평균을 뺀 집단간 효과인 ‘집단간 편차’와 개인점수에서 개인이 속한 해당 집단의 평균을 뺀 ‘집단내 편차’로 설명된다.

$$\begin{array}{ccccc} (\text{개인점수}-\text{전체평균}) & = & (\text{집단간 평균}-\text{전체평균}) & + & (\text{개인점수}-\text{집단평균}) \\ \text{각 개인의 총편차} & & \text{집단간 편차} & & \text{집단내 편차} \\ \text{total deviation} & & \text{deviation between groups} & & \text{deviation within group} \\ d_T & & d_B & & d_W \end{array}$$

만약 집단간의 편차 부분이 매우 크다면, 집단간의 차이가 존재함을 암시한다. 즉, 실험연구일 경우는 처치효과가 존재함을 의미한다. 상대적으로 집단간 편차 부분이 작고 집단내 편차가 크다면 집단간의 차이가 없음을 의미한다.

이때, 개인의 편차들을 모두 더하면 연구에서 나타난 모든 편차가 될 수 있다고 할 수 있으나, 편차의 합은 항상 0이므로 편차를 제곱하여 합한 후 사제 수로 나누어 분산을 계산하는 원리를 사용한다.

$$\begin{array}{ccccc}
 SS_T & & SS_B & & SS_W \\
 \text{총편차 제곱합} & = & \text{집단간 편차제곱합} & + & \text{집단내 편차제곱합} \\
 \text{실험으로 인한 종속변} & & \text{처치에 의한 집단간} & & \text{집단내에서의 개인차인} \\
 \text{수의 총변화량} & & \text{변화량} & & \text{집단내 변화량}
 \end{array}$$

- 총변화량(total variation) = 총편차 제곱합(SS_T , sum of square total deviation) : 연구에 참여한 모든 대상들의 총편차를 제곱하여 모두 더한 값
- 집단간 편차제곱합 = 집단효과에 의한 집단간 편차 제곱합(SS_B , sum of square between groups)
- 집단내 편차제곱합 = 개인오차에 의한 집단내 편차의 제곱합(SS_W , sum of square within group)

집단간 차이의 유무를 결정하기 위하여 집단간 차이에 의한 분산추정치와 집단내 차이에 의한 분산추정치인 집단간 편차제곱의 평균(MS_B)과 집단내 편차제곱의 평균(MS_W)을 비교한다.

$$F_{\text{통계값}} = F = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{\frac{SS_B}{J-1}}{\frac{SS_W}{N-J}} = \frac{\frac{\text{집단간 편차제곱합}}{\text{집단간 자유도}}}{\frac{\text{집단내 편차제곱합}}{\text{집단내 자유도}}}$$

(J =집단 수, N =연구에 참여한 모든 대상 수)

| | 제곱합 (SS) | 자유도 (df) | 제곱평균 (MS) | F | η^2 |
|-------------------------|-------------|-------------|---------------------------|---------------------|---------------------|
| 집단간 (between groups) | SS_B | $J-1$ | $MS_B = \frac{SS_B}{J-1}$ | $\frac{MS_B}{MS_W}$ | $\frac{SS_B}{SS_T}$ |
| 집단내 (within group) | SS_W | $N-J$ | $MS_W = \frac{SS_W}{N-J}$ | | |
| 총(total) | SS_T | $N-1$ | | | |

- ⑤ 집단간 차이가 없으며 표본의 크기에 관계없이 $E(MS_B) = E(MS_W) = \sigma_X^2$ 이며, 집단간의 차이가 크다면 $E(MS_B)$ 가 $E(MS_W)$ 보다 클 것이다.
 - ⑥ F 값은 제곱값들의 비율이므로 항상 양수이며, 1이하인 경우는 매우 드물다.
 - ⑦ F 값이 크면 집단간 분산이 집단내 분산보다 크다는 뜻이며, 일반적으로 집단끼리는 이질적이며 집단내에서는 동질적이라는 의미이다.
 - ⑧ η^2 (에타제곱) = $\frac{\text{집단간 차이}}{\text{총편차의 제곱합}}$ 는 독립변수에 의한 부분이 얼마인가를 설명하는 중요한 정보를 제공한다. 이는 상관계수와 회귀분석을 설명할 때 R^2 (상관비 혹은 결정계수)의 개념과 동일한 의미를 지닌다.
- 【예】 $\eta^2=0.5$: 종속변수 총 변화량의 50%가 독립변수에 의한 영향이라 해석

【예】 교수법(설명식 교수법, 시청각 교수법, 개인 교수법)에 따라
중학교 3학년 학생들의 수학점수에 차이가 있는지를
유의수준=0.05에서 검정하여라.

| 설명식 | 시청각 | 개인 |
|-----|-----|----|
| 1 | 3 | 6 |
| 4 | 5 | 4 |
| 4 | 7 | 8 |
| 1 | | 8 |
| | | 9 |

[풀이]

㉠ 귀무가설과 대립가설

$$H_0 : \mu_{\text{설}} = \mu_{\text{시}} = \mu_{\text{개}}$$

(세 교수법에 따른 중학교 3학년 학생들의 수학점수에 차이가 없다.)

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_j$$

(세 교수법에 따른 중학교 3학년 학생들의 수학점수에 차이가 있다.)

㉡ 집단간 편차제곱합과 집단내 편차제곱합 계산

| | 설명식 | 시청각 | 개인 | 전체평균 |
|-----|-----|-----|----|------------------------------------|
| 학생수 | 4 | 3 | 5 | $= \frac{(10+15+35)}{(4+3+5)} = 5$ |
| 총 합 | 10 | 15 | 35 | |
| 평 균 | 2.5 | 5 | 7 | 전체분산 = 7.09 |
| 분 산 | 3 | 4 | 4 | |

㉢ $SS_B, SS_W, SS_T, MS_B, MS_W$ 를 구하면

$$SS_B = 4(2.5 - 5)^2 + 3(5 - 5)^2 + 5(7 - 5)^2 = 45$$

$$SS_W = (1 - 2.5)^2 + (4 - 2.5)^2 + (4 - 2.5)^2 + (1 - 2.5)^2 \\ + (3 - 5)^2 + (5 - 5)^2 + (7 - 5)^2 \\ + (4 - 7)^2 + (6 - 7)^2 + (8 - 7)^2 + (8 - 7)^2 + (9 - 7)^2 = 33$$

$$SS_T = (1 - 5)^2 + (4 - 5)^2 + (4 - 5)^2 + (1 - 5)^2 \\ + (3 - 5)^2 + (5 - 5)^2 + (7 - 5)^2 \\ + (4 - 5)^2 + (6 - 5)^2 + (8 - 5)^2 + (8 - 5)^2 + (9 - 5)^2 = 78$$

$$MS_B = \frac{SS_B}{3-1} = \frac{45}{2} = 22.5, \quad MS_W = \frac{SS_W}{9} = \frac{33}{9} = 3.667$$

㉣ F 검정통계량을 구하면 $F = \frac{MS_B}{MS_W} = \frac{22.5}{3.667} = 6.136$

㉤ 유의수준 0.05, 집단간 자유도=2, 집단내 자유도=9이므로 $F_{0.05}(2, 9) = 4.26$

㉥ 따라서 F 통계값은 기각값보다 크므로 귀무가설을 기각하게 된다. 그러므로 연구자는 ‘유의수준 0.05에서 교수법에 따른 중학교 3학년 학생의 수학점수의 차이가 있다’ 라고 결론을 내리게 된다.

| | 제곱합 | 자유도 | 제곱평균 | F | η^2 | 유의확률 |
|----------|-----|-----|-------|-------|----------|-------|
| 집단간(교수법) | 45 | 2 | 22.5 | 6.136 | 0.577 | 0.021 |
| 집단내(오차) | 33 | 9 | 3.667 | | | |
| 총 | 78 | 11 | | | | |

㉦ η^2 (에타제곱)=0.577로, 수학점수의 총변화량의 57.7%가 교수법에 기인한 것임

【예】 스포츠 센터의 수영 강습생 중 수준이 비슷한 24명을 임의 추출하여 4수준으로 나눈 후 4가지 방법을 적용하여 강습하였다. 강습법에 차이가 있는지, 어느 것이 효과적인지에 관심이 있어 1개월 과정이 끝난 후 이들 수료자들에게 25m를 접영하여 수영하게 한 결과 걸린 시간을 기록한 자료가 다음과 같다. 유의수준 0.05에서 검정하여라.

| 강습법 | 시간(초) | | | | | |
|----------------|-------|------|------|------|------|------|
| 강의 & 비디오 촬영 | 21.4 | 20.1 | 21.1 | 19.6 | 21.8 | 19.0 |
| 강의 | 17.8 | 19.3 | 19.1 | 18.8 | 18.3 | 19.0 |
| 비디오 촬영 | 18.9 | 20.3 | 19.1 | 19.6 | 20.0 | 20.1 |
| 강의 & 비디오 촬영 없음 | 19.9 | 18.4 | 18.0 | 17.9 | 20.2 | 19.5 |

[풀이]

㉠ H_0 : 강습법에 효과가 같다. H_1 : 강습법에 효과가 다르다.

㉡ F검정하기 위한 일원분산분석표

| 요인 | 제곱합 | 자유도 | 제곱평균 | 분산비 |
|----|-------|-----|------|------|
| 처리 | 11.42 | 3 | 3.81 | 5.31 |
| 오차 | 14.35 | 20 | 0.72 | |
| 전체 | 25.77 | 23 | | |

㉢ 검정통계량 $F = 5.31$, 자유도 (3, 20)

$F_{0.05}(3, 20) = 3.10$ 보다 크므로 기각역에 속한다.

㉣ 분산분석의 결과 귀무가설은 기각되고 수영 강습법의 효과에는 차이가 있다고 볼 수 있다.