

Lesson 1. Topological Phase 拓扑相

Berry Phase. 定义在绝热近似上。(Adiabatic Approximation)
即系统尺寸，环境... 缓慢变化，这样 Hamiltonian $H(t)$ 可以微扰展开，由缓慢变化的 V 组成。 $H(t) = H_0 + \hat{V}[A(t)]$

写出 Schrödinger Equation: $i\hbar \frac{\partial (\hat{H}(t)\psi(t))}{\partial t} = \hat{H}(t) \hat{U}(t) \psi(t)$
么正变换 $\hat{U}(t)$

写出时间演化算符: $\hat{U}(t) = \sum_n |\psi_n(0)\rangle \langle \psi_n(t)|$

代入，化简: 定义 t 时刻本征能量: $H(t)|\psi_n(t)\rangle = E_n(t)|\psi_n(t)\rangle$

定义: $D_m(t) = \langle \psi_m(0) | \psi(t) \rangle$. 有:

$$i\hbar \frac{dD_m}{dt} = E_m(t) D_m - i\hbar \sum_n \langle \psi_m(t) | \frac{d|\psi_n(t)\rangle}{dt} \rangle D_n$$

差分方程关于 D_m 可设一阶线性齐次通解 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$, ie:

$$D_m(t) = C_n e^{i\theta_n(t)} \quad ; \quad \theta_n(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'$$

回代原方程，关于 C_n 方程，绝热近似 $\frac{dE_n(t)}{dt}$ 小，忽略此振荡项，得:

$$\dot{C}_m = -C_m \langle \psi_m(t) | \frac{d|\psi_m(t)\rangle}{dt} \rangle$$

分离变量求解得:

$$C_m(t) = C_m(0) e^{-i\theta_m(t)} \quad \theta_m(t) = -i \int_0^t \langle \psi_m(t') | \frac{d|\psi_m(t')\rangle}{dt'} \rangle dt'$$

最终，如果0时刻，系统处于m本征态上， $|\Psi(0)\rangle$ 即 $|\Psi_m(0)\rangle$
 $|\Psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle |\Psi(0)\rangle$

$$= \sum_n |\psi_n(0)\rangle \langle \psi_n(0) | \Psi(0)\rangle$$

而： $D_m(t) = \langle \psi_m(t) | \psi(t) \rangle$ 已解出为： $C_m(0) e^{i\varphi_m(t)} e^{i\theta_n(t)}$ ，代入。

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_n |\psi_n(0)\rangle C_n(0) e^{i\varphi_m(t)} e^{i\theta_n(t)}$$

即本征态 $|\Psi_m(0)\rangle = \sum_n [C_n(0)]_{mn} |\psi_n(0)\rangle$ ，ie.

$$C_n(0) = \delta_{mn}.$$

那么，在t时刻：

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(0) | \Psi(0)\rangle \\ = \sum_n \delta_{mn} |\psi_n(t)\rangle e^{i\varphi_m(t)} e^{i\theta_n(t)}.$$

即 $|\Psi(t)\rangle = |\psi_m(t)\rangle e^{i\varphi_m(t)} e^{i\theta_n(t)}$

t时刻系统也会处于m本征态上(t时刻的)只不过差一相位。

$$\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \quad \text{动力学相位.}$$

$$\varphi_m(t) = i \int_0^t \langle \psi_m(t') | \frac{d\psi_m(t')}{dt'} \rangle dt' \quad \text{几何相位.}$$

Actually, $\Psi(t)$ 不直接依赖于t，而依赖于外场，etc. eg.

依赖磁场 $B[B(t)]$. ψ_m 亦为 $\psi_m[B(t)]$ or 参数 R $\psi_m[R(t)]$

几何相位因此有： $\varphi_m[R(t)] = i \int_0^t \langle \psi_m[R(t')] | \psi_m[R(t')] \rangle dR' R(t')$

$$\text{可做 } \varphi_m(t) = i \int_{\vec{R}_{\text{begin}}}^{\vec{R}_{\text{end}}} \langle \psi_m(\vec{R}) | \nabla_{\vec{R}} \psi_m(\vec{R}) \rangle d\vec{R}$$

我们定义参数空间中运动一周 $\vec{R}_{\text{begin}} = \vec{R}_{\text{end}}$. eg. 磁场变化一个周期，eg. A-B effect 绕磁场源转一周为 Berry Phase. ie:

$$P_n = i \oint \langle \psi_n(\vec{R}) | \nabla_{\vec{R}} \psi_n(\vec{R}) \rangle d\vec{R}$$

Berry Connection: γ_n 又可以写为:

$$\gamma_n = \int_S \nabla_{\vec{R}} \times \underbrace{\langle \psi_n(\vec{R}) | i \nabla_{\vec{R}} \psi_n(\vec{R}) \rangle}_{\text{Berry connection.}} d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \gamma_n = \int_S (\nabla_{\vec{R}} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad \text{Berry curvature}$$

$$\text{Berry 曲率. } \Omega_n = \nabla_{\vec{R}} \times A_n(\vec{R})$$

晶格体系中 \vec{R} 即是动量 \vec{k} $\psi_{n,k}(\vec{r}) = e^{ik \cdot \vec{r}} u_{n,k}(\vec{r})$. Bloch 波

$$\Omega_n(k) = \nabla_k \times \langle u_n(\vec{k}) | \nabla_{\vec{k}} u_n(\vec{k}) \rangle$$

$$\gamma_n = \int_{BZ} \Omega_n(\vec{k}) d\vec{k}$$

例子: Quantum Hall Effect; Chern number.

[Topological Insulators; Shun-Qing Shen] Chapter. 4.3.

$$\text{Hall 电导: } \sigma_{xy} = n \frac{e^2}{h} = \frac{e^2}{h} / \int_{BZ} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} \text{ 呈现平台特征.}$$

假定: [E. 磁场, A] 电磁场参数, 回忆电磁场 Hamiltonian 及其带来的一系列对易关系, 我们仍然利用绝热近似波函数

$$|\Psi_n(t)\rangle = \sum_n e^{i\lambda_n(t)} e^{i\theta_n(t)} C_n(t) |\psi_n(t)\rangle$$

$C_n(t)$ 难解, 但可微扰展开, 回代 Schrödinger Equation 求解.

0阶项为 δ_{mn} ; 1阶项为 (微扰展开 $|\psi_n(t)\rangle$)

$$\langle \Psi_n(t) | \text{由 } C_n^0(t) = \delta_{mn} \Rightarrow e^{i\lambda_n(t)} e^{i\theta_n(t)} \delta_{mn} |\psi_n(t)\rangle = |\psi_m(t)\rangle,$$

$\rightarrow C_n^1(t)$ 部分组成,

$$\Psi_n(t) = \underbrace{|u_n(g,t)\rangle}_{\text{zero-order}} - ik \sum_{m \neq n} \underbrace{\frac{\langle u_m(g,t) | \partial_t u_n(g,t) \rangle}{E_n - E_m}}_{\text{first-order}}$$

$$\text{速度算符: } V = -i\hbar[H, \vec{r}] \xrightarrow{\text{Fourier}} V(q) = \frac{i}{\hbar} \nabla_q [H(q, t)]$$

$$\text{求 } V_n(q) := \langle \psi_n | \frac{i}{\hbar} \nabla_q H(q, t) | \psi_n \rangle$$

$$= \frac{i}{\hbar} \nabla_q E_n(q) - i \sum_{m \neq n} \frac{1}{E_n - E_m} \left(\langle U_n(q, t) | \nabla_q H | U_m(q, t) \rangle \times \langle U_m(q, t) | \partial_t U_n(q, t) \rangle + h.c. \right)$$

$$\text{利用: } \langle U_n(q, t) | \nabla_q H | U_m(q, t) \rangle = (E_n - E_m) \langle \nabla_q U_n(q, t) | U_m(q, t) \rangle$$

$$(\nabla_q U_n(q, t)) = (\nabla_q u) t + (\nabla_q u(t)) u.$$

$$\text{得到 } V_n(q) = \frac{i}{\hbar} \nabla_q E_n(q) - \Omega_{q, t}^n$$

$$\text{其中: } \Omega_{q, t}^n = i \left(\langle \nabla_q U_n | \partial_t U_n \rangle - \langle \partial_t U_n | \nabla_q U_n \rangle \right)$$

电子在电场中加速 $\partial_t^u = \frac{\partial u}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial t}$ 而正因 \vec{E} 在 t 下产生动量 $q \cdot \frac{dq}{dt} = -e/\hbar \vec{E}$ $\therefore \partial_t^u = (-e/\hbar) \vec{E} \cdot \nabla_K$, 化简上式:

$$V_n(q) = \frac{i}{\hbar} \nabla_q E_n(q) - \frac{e}{\hbar} \vec{E} \times \Omega_{q, t}^n$$

✓ Berry 曲率

$$\Omega_{q, t}^n = e \nabla_K \times \langle U_n(q) | i \nabla_q U_n(q) \rangle$$

电流定义为 V_q 集体效应:

$$j = -e \sum_n \int \frac{dK q}{(2\pi)^2} V_n(q) f(q) \xrightarrow{\text{Fermi-Dirac Distribution}}$$

代入 $V_n(q)$ 第一项: $-e \sum_n \int \frac{dE_n(q)}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{\hbar} f(q)$ 奇 Function. 假设费米面上全填满, 0阶电子不动. $j^0 = 0$.

$$j^z \rightarrow \text{给出 Hall 电导 } j = \underbrace{\delta_H}_{\perp} \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta$$

注意 $V_n(q) E \otimes \Omega^n$ 纵向电场产生横向电流

代入 Hall Conductance

$$\delta_H = \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{2\pi} \int_{BZ} d\vec{q} \cdot \Omega_{K_x K_y}$$

现在计算这个积分: $\int \frac{f_{k_x, k_y}}{(2\pi)^2} dk$

计算 $S_{x,y}$. 利用 Stokes 定理:

$$\nabla_k \times A = \nabla_{k_x} A_y - \nabla_{k_y} A_x$$

$$\Rightarrow dk_x dk_y \nabla_k \times A(k_x, k_y) = dk_y [A_y(2\pi, k_y) - A_y(0, k_y)] \\ + dk_x [A_x(2\pi, k_x) - A_x(0, k_x)]$$

而: $A_x(k_x, 2\pi) = \langle u(k_x, 2\pi) | \partial_{k_x} | u(k_x, 0) \rangle$ 代入:
 $= -\partial_{k_x} \theta_x(k_x) + A_x(k_x, 0)$

Therefore: 原式 = $\int_0^{2\pi} dk_y [-\partial_{k_y}(\theta_{k_y})] + (x\text{方向}) \dots = 2\pi$

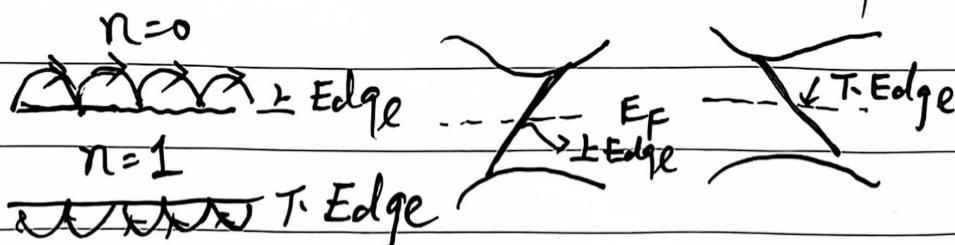
Therefore: Hall Conductance. 称 ν 为 第一类陈数

$$S_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$$

[Topological Insulator]

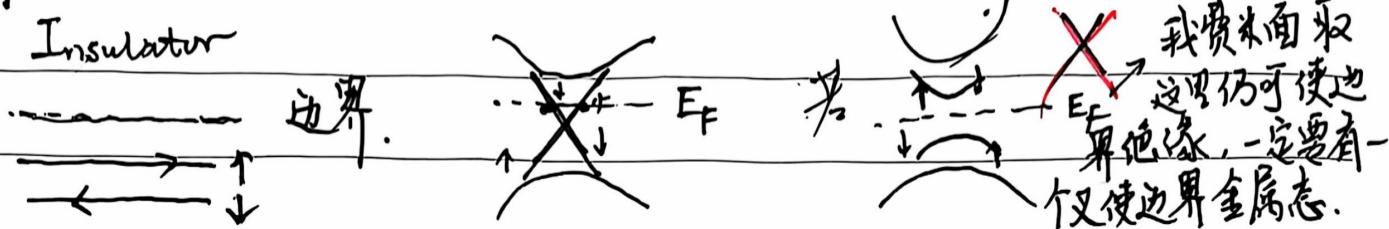
例子: Quantum Spin Hall Effect; Z_2 invariant

Quantum Hall 电流处于边界态、由外场控制定向流动，
 Quantum Spin Hall 无电流、自旋定向移动上↑; 下↓; 不必
 依赖外向. 而内生一拓扑序, QHE 能带:



上, T. Edge 各有一条拓扑边缘态. 从拓扑不变量的角度, 外界 $n=0$
 内部 $n=1$ 为绝缘态. $\int_{\text{内部}} \psi dS = 1$ 而从外部到内部无法连
 续过渡. $\int_{\text{Boundary}} \psi dS$ 既非零亦非一, 而是任意; 就如同

K有缺陷，不能完全空间积分而言。布里渊区未填满才非整数，因此边界呈现金属态。而就 Quantum Spin Hall 而言：



QHE 边缘态是自旋简并边缘态； QSHE 是两条自旋非简并的态。关键是要有个叉，中间交叉点严格保护。不同于石墨，石墨的叉对应 \times 每条都双重简并，中间四重简并；现在要中间二重简并。

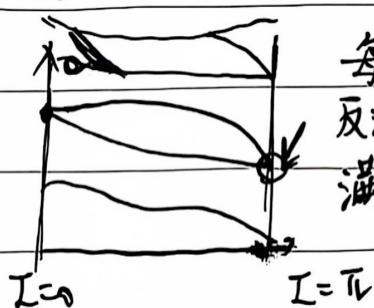
回忆时间反演算符 \mathcal{H} 及 Kramers 简并，回顾时间反演不变点。

$\mathcal{H}(k=0)$ $\mathcal{H}(0,0)$ $\mathcal{H}(0,\pi)$ $\mathcal{H}(\pi,0)$ $\mathcal{H}(\pi,\pi)$ 满足 2-D

$\mathcal{H}(\vec{G} + \vec{H}_0)$ 同 \mathcal{H} 为不变点

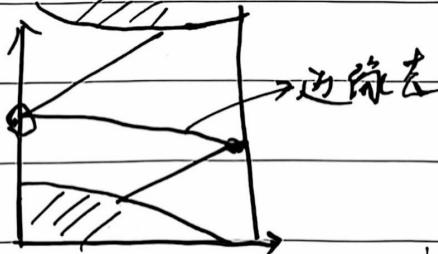
(Homework: 3-D situation) Kramers 在这些点至少二重简并

Situation 1. $\gamma = 0$



每个点时间
反演 2 重简并。
满足 Kramers 定理

Situation 2 $\gamma = 1$

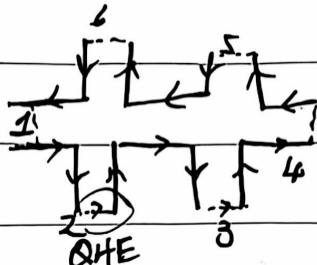


但是我动手从下往上走。Situation 1 有金属边缘态，有绝缘边缘态，其性质随 k 而变，一般边缘态；而 Situation 2 一直金属态，且费米能级多级对 Situation 1 交点恒为偶数；Situation 2 恒为奇数；奇数拓扑不平庸；从理论上说，可定义矩阵 $w_{mn}(\vec{k}) = \langle u_m(-\vec{k}) | \psi | u_n(\vec{k}) \rangle$ 反映宇称结构。要实现 Situation 2 计算所有时间反演点所有能带宇称相乘其必经历反转。

测量 QSHE；利用 L 通系统，电流 1 入而 4 出 $I_1 = -I_4$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \dots$ 在边界上电流 Spin 从中流动。

$$I_2 = \frac{e^2}{h} \sum_j [T_{j2} V_2 - T_{2j} V_j]$$



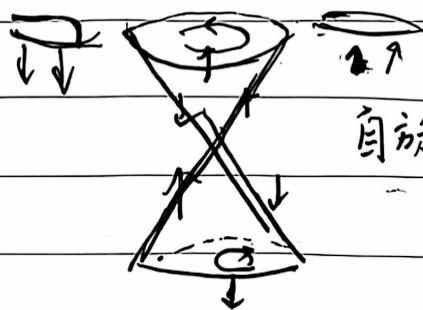
T_{ij} 矩阵代表穿透率， i, j 相邻才有值 ($T_{23}, T_{16} \dots$ 不相邻无电流过)

$$T: \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (I)_{6 \times 1} = \frac{e^2}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} (V)$$

代入 $I_1 = -I_4$ $I_2 = I_3 = I_5 = I_6 = 0$ 。测量是 2, 3 电势差 $V_{23} = V_2 - V_3$

计算得 $V_{23} = \frac{\pi}{2e^2} I_1 \quad \therefore G_{\text{QSHE}} = 2G_{\text{QHE}} = \frac{2e^2}{h}$

测量装置决定出 2 倍



三维拓扑绝缘体 QSHE

2D $\rightarrow \mathbb{Z}_2$ invariant

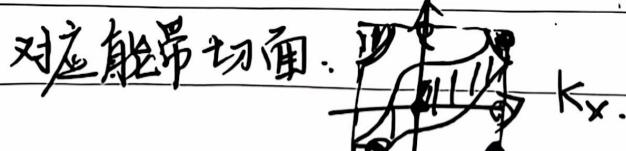
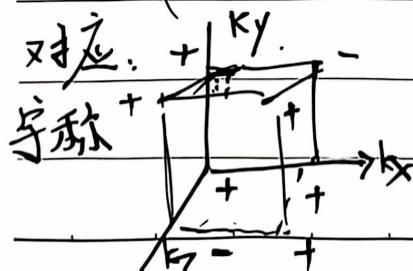
3D $\rightarrow ?$

2D. 4 时间反演不变点相乘出 \mathbb{Z}_2 invariant

3D 8 时间反演不变点，每四个于一平面可相乘出 4 个 \mathbb{Z}_2 不变量。

1 个为主 γ_0 。3 个 $\gamma_{1,2,3}$ 表示 xy, yz, zx 面。

比如 $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (0, 1, 1, 1)$



从白区至阴影区拓扑数变，中有金属态。

拓扑超导体 [Topological Superconductor]

$H_{\text{superconductor}}$ + H_{normal} 组成 $H_{\text{Topo-super}}$

$$H_{\text{normal}}: H = \frac{1}{2} \sum_{p, \sigma} C_{p\sigma}^+ E(p) C_{p\sigma} + h.c. + (-) C_{-p\sigma}^+ E(-p) C_{-p\sigma} + h.c..$$

$$E(p) = \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right) \text{ 正常色散 能带}$$

$H_{\text{superconductor}}$ According to BCS theory:

$$H_{\text{BCS}} = \sum_{k\delta} E_k C_{k\delta}^+ C_{k\delta} + \sum_{kk'} V_{kk'} C_{kk'}^+ C_{-k}^+ C_{-k'} C_{k'}.$$

Using Mean-Field:

$$H_{\text{BCS}}^{\text{MF}} = \sum_{k\delta} E_k C_{k\delta}^+ C_{k\delta} - \sum_k \Delta_k C_{k\uparrow}^+ C_{k\downarrow} - \sum_k \Delta_k^* C_{-k\downarrow}^+ C_{k\uparrow}$$

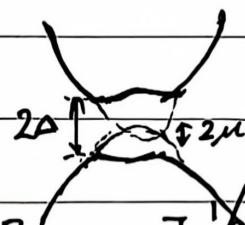
$$\Delta_k = - \sum_{kk'} V_{kk'} \langle C_{-k\downarrow} C_{k'\uparrow} \rangle \text{ Pairing potential.}$$

此两项相加.. $H_{\text{BdG}}: H_{\text{normal}} + H_{\text{MF-BCS}}$

$$H = \sum_p H_{\text{BdG}}^+(p, \Delta) \Psi_p. \quad \Psi_p = (C_{p\uparrow}, C_{p\downarrow}, C_{-p\uparrow}^+, C_{-p\downarrow}^+)$$

$$H_{\text{BdG}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E(p) & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & E(p) & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta^* & E(p) & 0 \\ \Delta^* & 0 & 0 & E(p) \end{pmatrix}$$

H_{BdG} 能带:



$$E_{\pm} = \left[\left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right)^2 + \Delta^2 \right]^{1/2} (\pm)$$

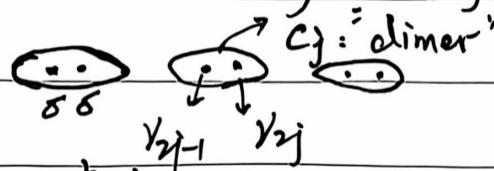
根据改 Δ 大小, μ 正负
可得不同能带

我们知道拓扑绝缘体边缘态那个又为金属性QSHE; Now
 拓扑超导体边缘态那个又称 Majorana 霍米子。(spinless)
 利用 spinless majorana 帽辱 $d = d^\dagger$ 才成立。有了自旋的自由
 度 $d = a c_\uparrow^\dagger + b c_\downarrow$, $d^\dagger \neq d$ 故此种 s-wave 不可。一般 p-wave 中可
 找到 spinless mode.

1-D lattice gapless modes.

定义 C: $\{c_i^\dagger, c_j\} = \delta_{ij}$ 定义: γ : $\gamma_j^\dagger = \gamma_j$, $\{\gamma_j^\dagger, \gamma_j\} = 2\delta_{jj}$

那么 γ_j 可以定义为: $c_j = (\gamma_{j-1} + i\gamma_j)/2$, cooper 对:



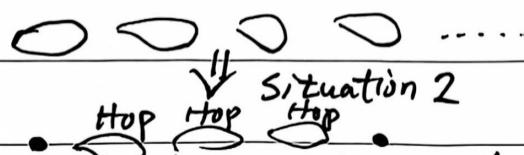
重写 H_{BdG} 用 γ 算符

$$H_{BdG} = (i/2) \sum -\mu \gamma_{j-1} \gamma_j + (t + |\Delta|) \gamma_j \gamma_{j+1} + (-t + |\Delta|) \gamma_{j-1} \gamma_{j+2}$$

① $\mu < 0$. $|\Delta| = t = 0$. $\gamma_{j-1} \gamma_j$ 同-dimer, 同一格点 Quasi 不产生新激发

② $\mu = 0$ $|\Delta| = t > 0$. $\gamma_j \gamma_{j+1}$ 相邻 hopping

系统角边界, 一定多出来一个粒子 γ_j



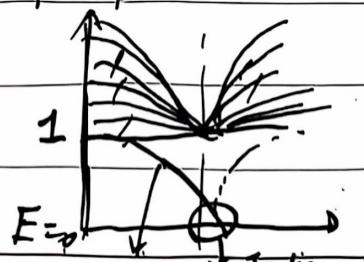
此二粒子处于边缘态, 此种边缘激发 Majorana 霍能模

2D spinless Chiral p-wave

$$H_{BdG} = \frac{1}{2} \sum_P \frac{eP}{\epsilon_P} \left(\begin{array}{c} \epsilon_P \\ \Delta(P_x + iP_y) \\ \Delta(P_x - iP_y) - \epsilon_P \end{array} \right) \frac{eP}{\epsilon_P} \cdot E$$

结论: 一维边界上有巡游 MF

vortex core 上有霍能模



Possible Topological Superconductor

① P-wave. Sr_2RuO_4 . (Time-Reversed Broken \Rightarrow Kerr Effect)

Really ?

实验进展 [Experimental Procedure]

① 1-D \Rightarrow 关键 spinless. 利用 Nanowire

通过 S-wave superconductor 引诱 Nanowire

S-wave 诱发 S-wave, 而由于 Nanowire 中

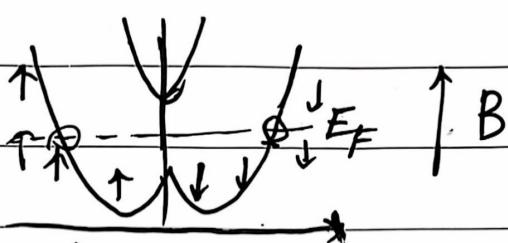
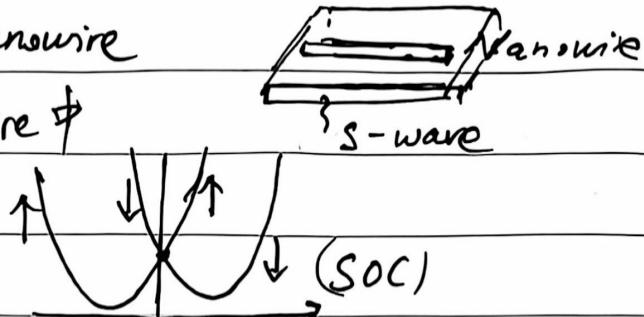
自旋-轨道耦合, \uparrow, \downarrow 破裂

此时用外场打开 Gap. 而把费米能级居于 Gap 中, 如图

则凡诱发 $k > 0$ 皆 spin \downarrow . 凡

诱发 $k < 0$ 皆 spin \uparrow . 取 Nanowire

测定 k 分类 $k > 0$ part, 则皆 spin \downarrow 则 spinless.



At $P=0$, $E_g = B^2 - \sqrt{\Delta^2 + \mu^2}$, 则调整 B or μ . 让某个 Gap E_g 上下反转 $E_g < 0$. 负 Gap 意味新的拓扑超导态
要寻找 Majorana Fermion, 要找量子电导, 而非杂质散射电导.

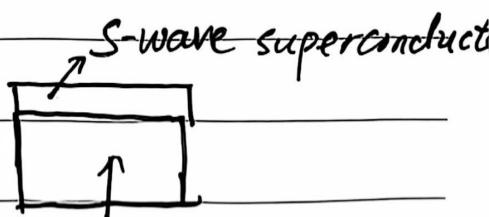
[Quantized Majorana conductance] 10.1038/nature26142.

Really ? 至今尚未实现

② 2-D 拓扑绝缘体表面态, ~~不管 E 在哪里, 也激发 $k > 0$~~
Spin \uparrow ; $k < 0$ Spin \downarrow 自然 spinless

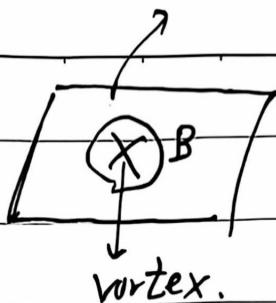
Topological insulator 边缘态为 S-wave SC.

诱发 ~~X~~ cooper pair 为 spinless



Topological insulator

因此在 s-wave superconductor 的
边缘(四条边)上存在 Majorana, 但难
测. 通过加磁场形成 vortex, vortex



的中心亦为此 s-wave superconductor 边缘态,
即 vortex 中心有一 Majorana. 即实验可测中心
有一个量子电导峰.

③ 2-D 量子反常霍尔异质结 (QAHE)

\Rightarrow Possible chiral Majorana Fermion Really?

④ 3-D Cu-doped Bi_2Se_3 .

宏观测量有量子电导峰而微观测不到

⑤ 铁基超导 (iron-based)

虽然金属. 但是有局部能隙的弱约转. 则出现表面态.

体态 SC \Rightarrow 表面态 SC \Rightarrow 边缘 or vortex 有 Majorana.

Majorana 零能模. 拓扑量子计算.

(Zero-modes) Topological Quantum Computation.

Abelian vs NonAbelian Anyon.

Fermion $|\phi_1\phi_2\rangle = -|\phi_2\phi_1\rangle$ Boson $|\phi_1\phi_2\rangle = |\phi_2\phi_1\rangle$

Abelian Anyon $|\phi_1\phi_2\rangle = e^{i\theta}|\phi_2\phi_1\rangle$

NonAbelian Anyon $|\phi_1\phi_2\rangle = U|\phi_2\phi_1\rangle$

$2N$ -vortex, i.e. $2N$ 零能模. 两两配对组成费米算符.

$$f_i = (\gamma_{2i-1} + i\gamma_{2i})/2$$

$$n_i = f_i^* f_i \quad n_i = 0 \text{ or } 1$$

Ground State 2^N degeneracy 重 = $|n_1 \dots n_N\rangle$

回忆 Majorana 代数. Now 交换 γ_1, γ_2 .

回忆 A-B Effect. 交换 $\gamma_1, \gamma_2 \leftrightarrow$ 交换 γ_1, γ_2 代表的 2 个 vortex.

双连通反不能同时做, 先后做必加一负号

$$\gamma_1 \rightarrow -\gamma_2, \quad \gamma_2 \rightarrow \gamma_1.$$

只考虑 γ_1, γ_2 两个, 确定 n_1 量子数.

\Rightarrow 定义 U : $U_{12} = (1 + \gamma_1\gamma_2)/\sqrt{2}$, 则

$$U_{12}\gamma_{12}U_{12}^+ = \mp \gamma_{21} \text{ 交换负号}$$

交换 γ_1, γ_2 $U_{12}|0\rangle = e^{i\pi/4}|0\rangle$ \rightarrow 只多一相位.

$$U_{12}|1\rangle = e^{-i\pi/4}|1\rangle$$

再次利用定义 U_{ij} 的形式. 应用 4 个 γ . $|n_1, n_2\rangle$ 态.

交换有几种 $|n_1, n_2\rangle \rightarrow U_{12}|n_1, n_2\rangle$.

$$\left\{ \begin{array}{l} |n_1, n_2\rangle \rightarrow U_{23}|n_1, n_3\rangle \\ \cdot |n_1, n_2\rangle \rightarrow U_{34}|n_1, n_4\rangle \end{array} \right.$$

$|n_1, n_2\rangle$ 仅交换 U_{12} U_{34} , 变一相位.

但若交换 2, 3.

$$|n_1, n_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|n_1, n_2\rangle + i(-1)^{n_1} |1-n_1, 1-n_2\rangle \right)$$

$$U_{23}|100\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|100\rangle + i|111\rangle)$$

$$U_{34}|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|100\rangle + i|111\rangle)$$

$$U_{12}|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|100\rangle + i|111\rangle)$$

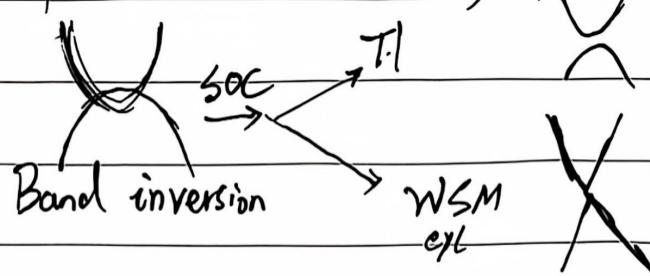
\Rightarrow 非阿贝尔特性. $[U_{i+1,i}, U_{i,i+1}] = \gamma_{i-1} \gamma_{i+1}$

$$[U_{12}, U_{34}] = 0$$

即若已知末态, 我便知交换的所有路径. 可以此定义拓扑量子计算的 Qubit $|\bar{0}\rangle = |00\rangle$ $|\bar{1}\rangle = |11\rangle$

拓扑半金属 (Topological Semimetal)

金属 K 点未充满, 区域积分非整数, 难呈现拓扑性质. 然而, 金属色散 \times 早恰 E 落在点上. $\int_2 \text{Fermi surface} = 0$. 重金属而不激发; 或利用分层逐层计算材料体 Σ_2 (eg. 定死区算此层 Σ_2). 在此层中出现 $\Sigma_2 = -1$ 可能, 则沿 Σ 方向 (or 在体内某处) 会存在这样一个 \times 能带, 对应某处高迁移率.



γ_2, I_r, O_1

to be found

Fermi Surface
2-D



表面、体态

不再区分了

因其仅存在于内

部, 对特定范围才有“边缘态”

关键寻找 Dirac point. 一种方法磁性 (拉开) 未找到；另外用 Bond-inversion system, 故至少 2 个点. Na_3Bi