Ring exchange model

REF
[1]**J.-Y. P. Delannoy, M. J. P. Gingras, P. C. W. Holdsworth, and A.-M. S. Tremblay,Néel order, ring exchange, and charge fluctuations in the half-filled Hubbard model ,Phys. Rev. B 72, 115114 (2005)**
[2]**A. H. MacDonald, S. M. Girvin, and D. Yoshiokat, t/U expansion for the Hubbard model,Phys. Rev. B 37, 9753 (1988)**

正则变换(canonical transformation)求解高阶哈密顿量

四费米子之间的相互作用是有趣的，然而我们一般讨论的哈密顿量只包括二费米子。我们以半充满的**Hubbard(t-J)**模型为例，得到 **t-J**模型有几种方法，一种就是曾经提到的投影矩阵的方法，即：

$$H=\begin{pmatrix} H_{00} & H_{单0} & H_{双0} \\ H_{单0} & H_{单单} & H_{双单} \\ H_{双0} & H_{双单} & H_{双双} \end{pmatrix} \begin{array}{l} H=H_{Hubbard} \\ H_{ij}=<P_i|H|P_j> \\ P_i\text{为向}i\text{占据态的投影算符} \end{array}$$

写出矩阵元之后，就可以求解能量本征方程利用单占据条件=1就可以得到半充满的哈密顿量了。另一种方法是我们在从**Anderson Impurity Model**求解**Kondo**的哈密顿量中所用的**Schrieffer-Wolff** 变换，即利用正则变换矩阵**S**将**Anderson Hamiltonian** 投影去除了跃迁项，再通过单占据条件得到了以单占据态为主导的**Kondo Hamiltonian**。这里我们用类似的方法处理**Hubbard Hamiltonian** 。不同的是，在处理**Kondo Hamiltonian**的时候我们只保留了哈密顿量的零阶项与二阶项，这里为了得到四费米子的项，我们需要保留更高阶的项。对**Hubbard Hamiltonian**做如下的分解: 使得哈密顿量能够对体系**+1**双占据态，**-1**双占据态，以及双占据态数目不变。

$$H=-t\sum_{i,j,\sigma}c_{i\sigma}^{+}c_{j\sigma}+U\sum_{j,\sigma}n_{j\sigma}n_{j\bar\sigma}$$

左乘 $I=n_{i\bar\sigma}+h_{i\bar\sigma}$, $h_{i\bar\sigma}=I-n_{i\bar\sigma}$; 右乘: $I=n_{j\bar\sigma}+h_{j\bar\sigma}$

$$H=H_U+H_{+1}+H_{-1}+H_0$$

$$H_{+1}=-t\sum_{i,j,\sigma}n_{i\bar\sigma}c_{i\sigma}^{+}c_{j\sigma}h_{j\bar\sigma}$$

$$H_{-1}=-t\sum_{i,j,\sigma}h_{i\bar\sigma}c_{i\sigma}^{+}c_{j\sigma}n_{j\bar\sigma}$$

$$H_0=-t\sum_{i,j,\sigma}[n_{i\bar\sigma}c_{i\sigma}^{+}c_{j\sigma}n_{j\bar\sigma}+h_{i\bar\sigma}c_{i\sigma}^{+}c_{j\sigma}h_{j\bar\sigma}]$$

比如，H_{+1} 项非零，则要求右矢满足：

$$\begin{array}{ccccc} | & 0 & 1 & 1 & 0\ \rangle \\ & i\sigma & i\bar\sigma & j\sigma & j\bar\sigma \end{array}$$

这正是增加双占据态的表述。根据**Schrieffer-Wolff** 变换，一阶**S**矩阵的目的就是要消除**+1**项与**-1**项，然而正如我们在**Kondo Hamiltonian**中看到的，这不可避免会在引入二阶小量，我们再用三阶**S**矩阵消去二阶小量就得到了所要求的四阶哈密顿量,如下：

Schrieffer-wolf Matrix S:

$$H' = e^{iS} H e^{-iS} = H + \frac{[iS, H]}{1!} + \frac{[iS,[iS,H]]}{2!} + \cdots$$

$$H = H'^{(1)} = H_u + H_{+1} + H_0 + H_{-1}$$

while: using:

$$iS^{(1)} = u^{-1}(H_{+1} - H_{-1})$$

We arrives:

$$H'^{(2)} = e^{iS^{(1)}} H e^{-iS^{(1)}} = H_u + H_0 + u^{-1}\{[H_0, H_{-1}] + [H_1, H_{+1}] + [H_1, H_0]\} + O(u^{-2})$$

Define:

$$H^{(k)}(m_1, m_2, m_3 \cdots) = H_{m_1} H_{m_2} H_{m_3} \cdots H_{m_K}$$

$$S^{(2)} = u^{-2}\{[H_1, H_0] + [H_{-1}, H_0]\}$$

$$H'^{(3)} = V + T_0 + U^{-1}[T_1, T_{-1}] + U^{-2}\{T^{(3)}(1,0,-1) + T^{(3)}(-1,0,1) - [T^{(3)}(0,1,-1) + T^{(3)}(1,-1,0) + T^{(3)}(-1,1,0) + T^{(3)}(0,-1,1)]/2\} + \cdots ,$$

$$H_L'^{(4)} = V + T_0 - U^{-1}T^{(2)}(-1,1) + U^{-2}\{T^{(3)}(-1,0,1) - [T^{(3)}(-1,1,0) + T^{(3)}(0,-1,1)]/2\} + U^{-3}\{T^{(4)}(-1,0,-1,0) + T^{(4)}(-1,1,-1,1) + T^{(4)}(0,-1,0,1) - T^{(4)}(-1,0,0,1) - [T^{(4)}(-1,1,0,0) + T^{(4)}(0,0,1,1) + T^{(4)}(-1,-1,1,1)]/2\} + O(U^{-5}) .$$

具体推导过程可见附录。上面的讨论排除了一次哈密顿量的非单占据态，而对于四阶哈密顿量，还需要排除在同阶U下面的其它非单占据态，具体来说，有以下三种，读者稍加推导就可发现这些项都是零了。

$H_1 H_1 H_0$ or $H_1 H_0 H_0$ …… $\Leftrightarrow$ $(+2)$ or $(+1)$、舍

$H_1 H_0 H_{-1}$ 态 $|i_1, j_1\rangle \otimes |i_2, j_2\rangle \otimes |i_3, j_3\rangle$ $i_1 = i_3 ; j_1 = j_3$

$H_0 |\varphi_单\rangle = 0$，故 $H_{-1} H_0 H_1$ ✓ $H_{-1} H_1 H_0$ ✗

$$\therefore H^{(4)} = -u^{-1} H^{(2)}(-1,1) + u^{-2} H^{(3)}(-1,0,1) + u^{-3}[H^{(4)}(-1,1,-1,1) - H^{(4)}(-1,0,0,1) - \frac{1}{2} H^{(4)}(-1,-1,1,1)]$$

转化为自旋表示：

$$

下一个公式没看懂 **updating...** 此步得到的四自旋项就是**ring exchange** 项 **$$**

磁矩的表示 (Staggered Magnetization)

Staggered Magenetization 我们并不陌生，可以参考**Asaa**教材的第五章。具体来说，通常磁矩的弱点就在于对于反铁磁态，尤其是半满的反铁磁态，统计下来总磁矩可能会是零，这带来了计算上的奇点。我们按照子格(**Assa.Chap3**)将格点分类，并整体翻转一部分子格的磁矩，以此定义新磁矩，这样便于计算同时由于确定的子格分类保留了原体系的信息，它的定义如下，其中不同子格**i**对应的**-1**项就代表了这种翻转：

> $$M_{Hubbard} = \frac{1}{N}\sum_i(-1)^i(n_{i\uparrow} - n_{i\downarrow})$$

在本文中我们在半满态下求磁矩，就是把磁矩算符投影到半满态子空间上，具体计算类似**Appendix**中对**H**操作的过程，保留到两阶即可。不同的只有磁矩存在于**z**轴，**x,y**的项与磁矩对易；**staggered**表示的**-1**项不能丢掉；

> $$M_s = M_H + \frac{1}{U}(\overline{H_1} - \overline{H_{-1}}) + \frac{1}{2U^2}(\overline{H_{-1}}H_1 - H_{-1}\overline{H_1})$$
> $$\overline{H_1} = \sum_i(-1)^i H_{1i}\sigma_z$$

$$同样缺一个公式updating...$$

相较于海森堡模型基态的**Neel State**，即自旋同子格相同，子格间相反的情况，更高阶的磁矩多了一项，即：**(z为最近邻个数)**

$$M_s = M_{heisenberg}(1 - 2z\frac{t^2}{U^2})$$

Ring exchange discription from ChatGPT

Ring Exchange项是一种非常重要的量子效应，它可以影响量子自旋液体的性质。量子自旋液体是一种特殊的量子相，其中自旋被量子化，并且存在非常强的量子涨落。在这种相中，自旋的取向和排列方式非常复杂，并且具有非常有趣的拓扑性质和潜在的应用价值。

Ring Exchange项在量子自旋液体中的作用机制是通过增加自旋的量子涨落和自旋-轨道耦合，从而引起拓扑相变。这种拓扑相变可以导致量子自旋液体的性质发生明显变化，例如出现非平凡的拓扑序参量、自旋液体-有序相的相变等。

具体来说，**Ring Exchange**项可以通过增加量子自旋液体中的自旋环交换，从而增强自旋的量子涨落。这种量子涨落可以导致自旋的取向和排列方式发生变化，并且引起自旋的非平凡的拓扑序参量的出现。例如，在一个三角晶格上的自旋液体中，通过增加三个自旋环的交换项，可以引起一种非平凡的拓扑序参量的出现，这种序参量可以被看作是一种自旋液体的拓扑序参量，具有非常有趣的物理性质。

此外，**Ring Exchange**项还可以增强自旋-轨道耦合，从而引起自旋的非平凡的拓扑序参量的出现。这种拓扑序参量可以被看作是自旋和轨道的耦合效应，具有非常有趣的物理性质和潜在的应用价值。

需要注意的是，**Ring Exchange**项只在一些特殊的晶格结构中才会存在，并且需要较强的相互作用才能显现出来。因此，研究**Ring Exchange**在量子自旋液体中的作用机制需要结合理论计算和实验验证，以便更好地理解这种量子效应的物理本质和应用潜力。最近的研究表明，**Ring Exchange**项对于量子自旋液体的性质具有非常重要的影响，并且可以被用来解释一些实验观测结果。

例如，最近的一项实验研究发现，在一个三角晶格上的自旋液体中，通过增加环交换项可以引起一种非平凡的拓扑序参量的出现，这种序参量可以被看作是一种自旋液体的拓扑序参量。此外，一些理论研究也表明，**Ring Exchange**项可以导致一些非常有趣的物理现象，例如自旋液体-有序相的相变、非阿贝尔拓扑序参量等。

总之，**Ring Exchange**项是影响量子自旋液体性质的重要因素之一，它可以通过增加自旋的量子涨落和自旋-轨道耦合，引起拓扑相变，从而导致量子自旋液体的性质发生明显变化。研究**Ring Exchange**在量子自旋液体中的作用机制和应用潜力，有助于深入理解量子自旋液体的物理本质和发展量子计算、拓扑电子学等领域的相关技术应用。

接下来我将解读以下几篇论文以了解**Ring echange term** 的含义

REF

[3]Variational study of triangular lattice spin-1⁄2model with ring exchanges and spin liquid state in κ−(ET)2Cu2(CN)3.Olexei I. Motrunich.Phys. Rev. B 72, 045105(2005) [4]