第四章 频率域滤波

主要内容：

1.傅立叶变换

2.傅立叶变换在图像处理中的应用

3.空间域与变换域

4.余弦变换

5.沃什变换和哈达玛变换

6.低通滤波

7.高通滤波

1 概述(背景知识)

设f(t)是定义在[-T/2,T/2]上的函数(信号),0<T<∞.

将信号f(t)分解成一系列基本信号的叠加具有理论和工程意义. “分解—综合”是解决复杂问题的常用思路.

◆泰勒展式

$$f(t)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n+\frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}(t-t_0)^N$$

◆傅立叶级数

$$f(t) \sim \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \{a_n \cos\frac{2n\pi}{T} t + b_n \sin\frac{2n\pi}{T} t\}$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\dfrac{2n\pi}{T} t)dt \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(\dfrac{2n\pi}{T} t)dt \end{cases}$$

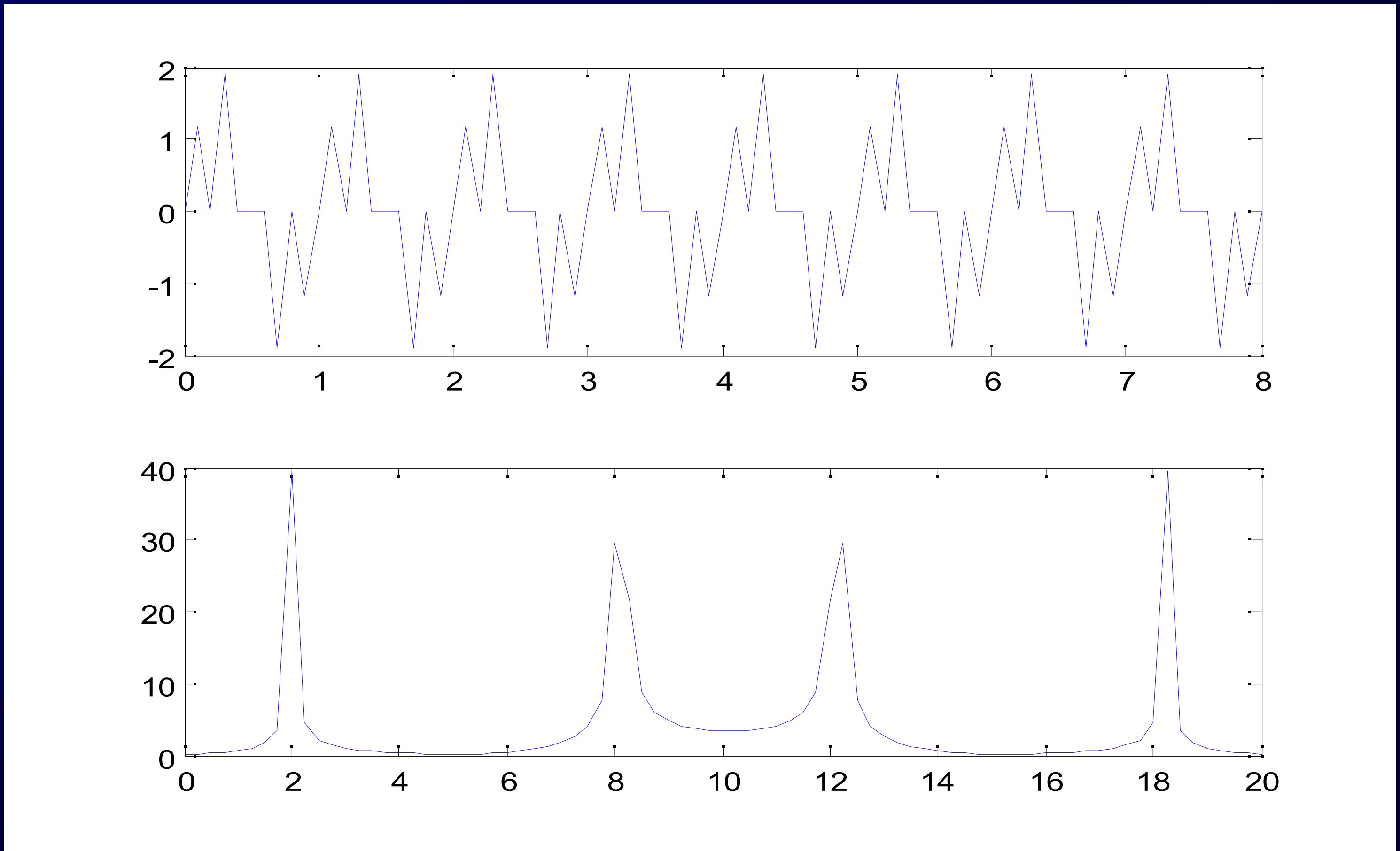
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j(2n\pi/T)t}, \quad j = \sqrt{-1}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j(2n\pi/T)t} dt$$

称1/T为基频.令T趋向于无穷大，可导出傅立叶变换的概念.Cn是频率为n/T的谐波信号所占的“比重”.

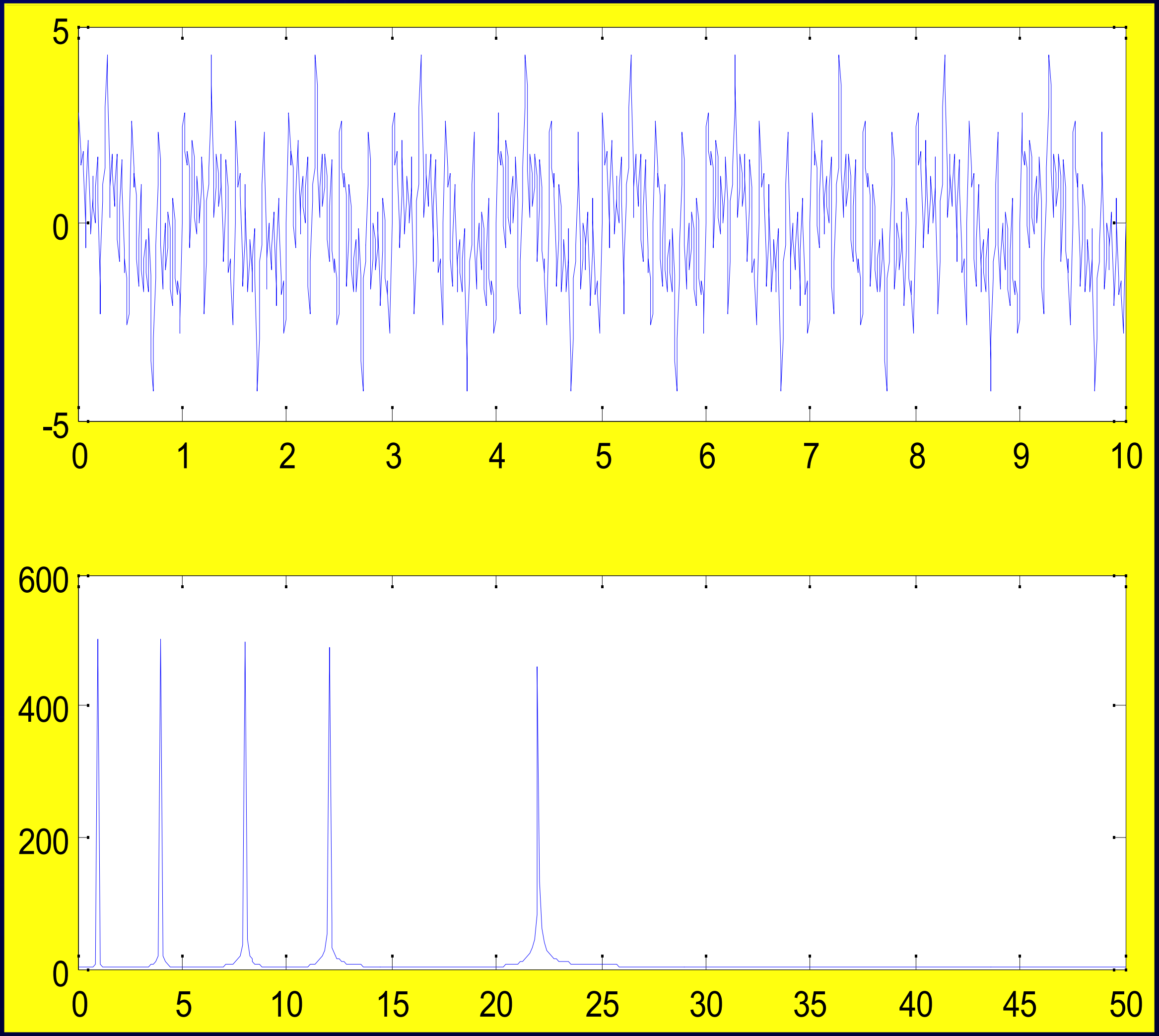
将信号f(t)分解成一系列基本信号的叠加具有理论和工程意义.“分解一综合”是解决复杂问题的常用思路.

```
t=0:0.1:8;
y=sin(2*pi*t)+sin(4*2*pi*t)+sin(8*2*pi*t)+sin(12*2*pi*t);
yy=fft(y);
subplot(2,1,1);plot(t,y);
subplot(2,1,2);plot(2.5*t,abs(yy));
```

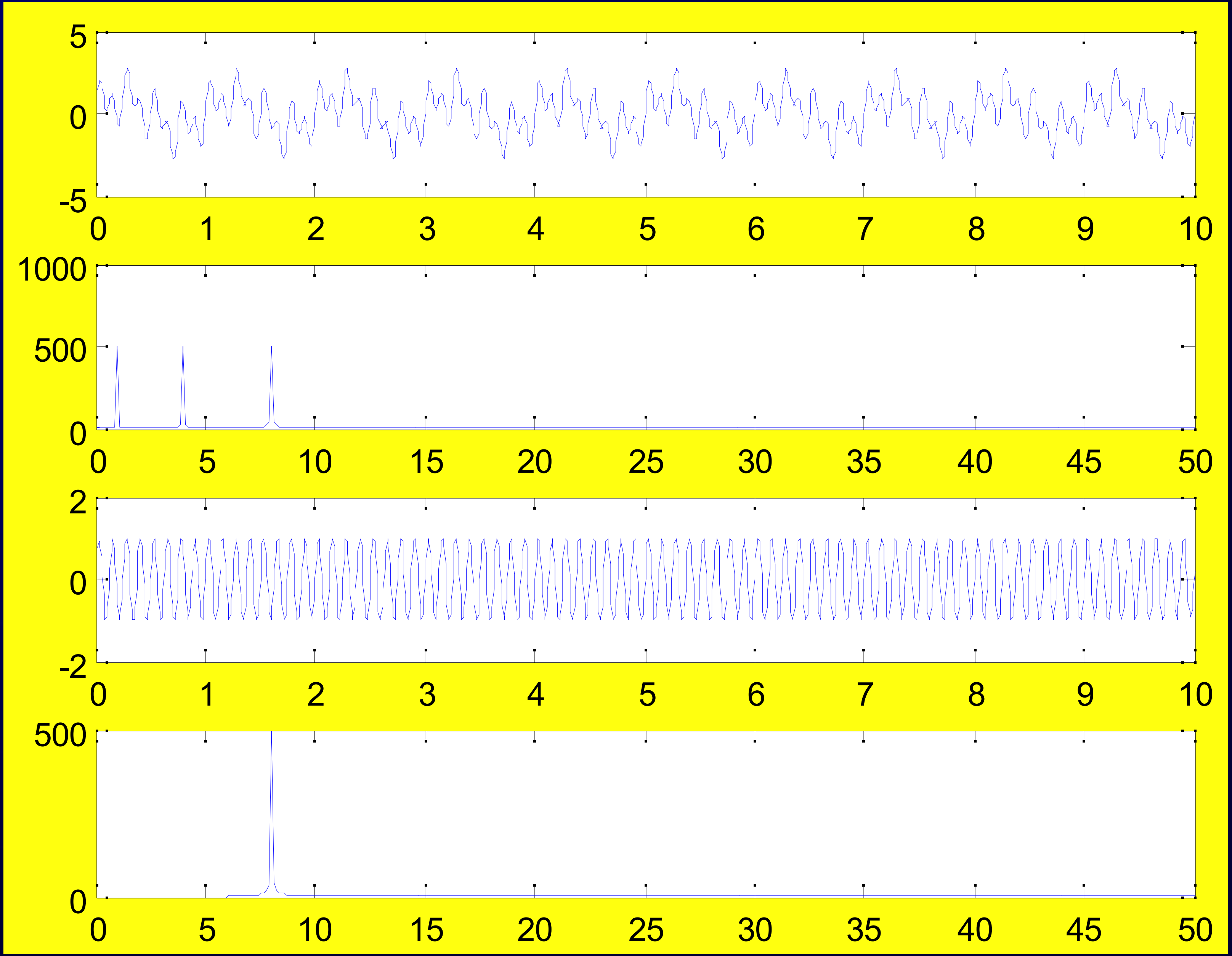


$$y = \sin(2\pi \times t) + \sin(2\pi \times 4t) + \sin(2\pi \times 8t) + \sin(2\pi \times 12t) + \sin(2\pi \times 22t)$$

```
ttt=10;
tt=0.01;
N=ttt/tt;
TT=2;
t=0:tt:ttt;
y=sin(2*pi*t)+sin(4*2*pi*t)+sin(8*2*pi*t)+sin(12*2*pi*t)+sin(22*2*pi*t);
yy=fft(y);
subplot(2,1,1);plot(t,y);
i=0:1/(N*tt):1/tt/TT;
u=N/TT+1;
yyy=yy(1:u);
subplot(2,1,2);plot(i,abs(yyy));
```



$$y = \sin(2\pi \times t) + \sin(2\pi \times 4t) + \sin(2\pi \times 8t)$$



```
ttt=10;
tt=0.01;
N=ttt/tt;
TT=2;
t=0:tt:ttt;
y=sin(2*pi*t)+sin(4*2*pi*t)+sin(8*2*pi*t);
yy=fft(y);
subplot(4,1,1);plot(t,y);
i=0:1/(N*tt):1/tt/TT;
u=N/TT+1;
yyy=yy(1:u);
subplot(4,1,2);plot(i,abs(yyy));
TTT=60;
yy(N-TTT:N+1)=0;
yy(1:TTT)=0;
z=ifft(yy);
subplot(4,1,3);plot(t,real(z));
yyy=yy(1:u);
subplot(4,1,4);plot(i,abs(yyy));
```

$$y=\sin(2\pi t)+\sin(2\pi 4t)+\sin(2\pi 8t)$$

2.一维Fourier变换

➢一维连续傅立叶变换

引理1：若一维实空间上的函数*f*(x)绝对可积，则函数

$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-j2\pi xu)dx$$

存在，若F(u)绝对可积，则

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\exp(j2\pi ux)du$$

其中 $j=\sqrt{-1}$ （下同）

定义：通常称F(u)为f(x)的Fourier变换，f(x)为F(u)的Fourier反变换.记

$$F(u)=\boldsymbol{F}(f(x)), f(x)=\boldsymbol{F}^{-1}(F(u))$$

将$F(u)$写成$F(u)=R(u)+jI(u)=|F(u)|e^{j\theta(u)}$

其中$|F(u)|=\sqrt{R(u)^2+I(u)^2}, \theta(u)=arctg\dfrac{I(u)}{R(u)}$

$F(u)$称为$f(x)$的振幅谱（频谱, $Fourier$谱)

$\theta(u)$称为$f(x)$的相位谱，$E(u)=|F(u)|^2$ 称为$f(x)$的能量谱。

通常，我们将$Fourier$变换前的变量域，即x的变化范围称为空间域，而将变换后的 变量域，即变量u的变化范围称为频率域或变换域。

关于傅里叶谱的叫法

例1.设$f(x)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n)e^{-j2\pi nx/T}$,则$f(x)$的 Fourier 变换为

$$\boldsymbol{F}(u)=\boldsymbol{F}(f(x))=\boldsymbol{F}\left(\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n)e^{-j2\pi nx/T}\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n)\frac{1}{T}\boldsymbol{F}(e^{-j2\pi nx/T})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n)\delta(u-Tn)$$

例2.设$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n)\delta(x-Tn)$,则$f(x)$的 Fourier 变换为

$$\boldsymbol{F}(u)=\boldsymbol{F}(f(x))=\boldsymbol{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n)\delta(x-Tn)\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n)\boldsymbol{F}(\delta(x-Tn))=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n)e^{j2\pi un/T}$$

其中，$\delta(0)=+\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$, 为单位脉冲函数。

➢一维离散傅立叶变换

对有限长序列$f(x)$, x=0,1,2,…,N-1,可定义一维离散傅立叶变换对如下：

$$F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp(-2\pi ux/N),\ u=0,1,\cdots,N-1 \quad \text{(A)}$$

$$f(x)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} F(u)\exp(2\pi ux/N),\ x=0,1,\cdots,N-1 \quad \text{(B)}$$

令 $W=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 则以上两式可写为：

$$F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)W^{xu},\ u=0,1,\cdots,N-1$$

$$f(x)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} F(u)W^{-ux},\ x=0,1,\cdots,N-1$$

傅立叶变换对也可以简记为：$f(x)\Leftrightarrow F(u)$

注意到(A)和(B)的结构，傅立叶变换也可以写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \cdots \\ f(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^{-1\times 1} & W^{-2\times 1} & \cdots & W^{-(N-1)\times 1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W^0 & W^{-(N-1)\times 1} & W^{-(N-1)\times 2} & \cdots & W^{-(N-1)\times(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \cdots \\ F(N-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \cdots \\ F(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^{1\times 1} & W^{2\times 1} & \cdots & W^{(N-1)\times 1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W^0 & W^{1\times(N-1)} & W^{2\times(N-1)} & \cdots & W^{(N-1)\times(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \cdots \\ f(N-1) \end{pmatrix}$$

例3 $f(x)=1, x=0,1,2,\ldots,N-1$有限长常数序列的离散傅立叶变换：

$$F(u) = \begin{cases} 1 & u = 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

3 一维快速傅立叶变换

1.概述
2.一维傅立叶变换
3.一维快速傅立叶变换
4.二维傅立叶变换
5.余弦变换
5'.数字图像处理方法
6 沃什变换和哈达玛变换
7 低通滤波
8 高通滤波

$$F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp(-2\pi ux/N)$$

N	N^2(**DFT**) 乘法N^2 加法N(N-1)	$N\log_2N$(**FFT**) 乘法$(N/2)\log_2N$ 加法$N\log_2N$	$N^2/N\log_2N$
2	4	2	2.0
4	16	8	2.0
16	256	64	4.0
64	4096	394	10.7
512	262144	4608	56.9
1024	1048576	10240	102.4

N>8000，IBM7094(1962.9), 耗时40分钟

设t_N为N个数据的傅立叶变换所用总时间,则

t_N/N为得到每个傅立叶变换系数所用的平均时间.

$$(40\text{分钟}/8000)\times 8000^2 = 0.609\text{年} = 5334.84\text{小时}$$

$$(40\text{分钟}/8000)\times 8000^2 \times \frac{(N/2)\log_2 N}{N^2} = 0.18\text{天} = 4.33\text{小时}$$

[假设运算效率主要由乘法效率决定]

Cooley（库利）和Tukey（图基）在1965年提出FFT算法

例 3609×5455，PIV 2.0G, 256M, Matlab 2006,语句
t=cputime;f=fft2(double(a(:,:,1)));tt=cputime;
内存不够；463×687，0.4844s

➢二维连续傅立叶变换

引理2：若二维实空间上的函数f(x，y)绝对可积，则

$$F(u,v)=\int_{R^2} f(x,y)\exp(-j2\pi(xu+yv))dxdy$$

若F(u,v)绝对可积，则有反演公式

$$f(x,y)=\int_{R^2} F(u,v)\exp(j2\pi(ux+vy))dudv$$

为了记号简略起见，若f的Fourier变换为F,则记

$$f(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)$$

将$F(u,v)$写成$F(u,v)=R(u,v)+jI(u,v)=|F(u,v)|e^{j\theta(u,v)}$

其中$|F(u,v)|=\sqrt{R(u,v)^2+I(u,v)^2}$,$\theta(u,v)=arctg\dfrac{I(u,v)}{R(u,v)}$

$F(u,v)$称为$f(x,y)$的振幅谱（频谱 ,$Fourier$ 谱(变换））

$\theta(u,v)$称为$f(x,y)$的相位谱， $E(u,v)=|F(u,v)|^2$ 称为 $f(x,y)$的能量谱。

通常，我们将 $Fourier$ 变换前的变量域，即 (x,y)的变化范围称为空间域，而将 变换后的变量域，即变 量(u,v)的变化范围称为频率域或 变换域。

➢二维离散傅立叶变换

将连续傅立叶变换离散化，可得离散傅立叶变换.（详细推导过程请参考相关文献）

设有离散函数$f(x,y)$，则可定义其傅立叶变换对：

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp(-2j\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}))$$

$$u=0,1,\cdots M-1;v=0,1,\cdots N-1$$

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp(2j\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}))$$

$$x=0,1,\cdots M-1;y=0,1,\cdots N-1$$

有些文献是这样 定义傅立叶变换对的：

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp(-2j\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}))$$

$$u=0,1,\cdots M-1;v=0,1,\cdots N-1$$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp(2j\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}))$$

$$x=0,1,\cdots M-1;y=0,1,\cdots N-1$$

或者：

$$F(u,v)=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp(-2j\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}))$$

$$u=0,1,\cdots M-1;v=0,1,\cdots N-1$$

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp(2j\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}))$$

$$x=0,1,\cdots M-1;y=0,1,\cdots N-1$$

傅立叶变换的数学表达形式问题

当$M = N$时，傅立叶变换对可以写为

$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp(-2j\pi\frac{ux+vu}{N})$$

$$u = 0,1,\cdots N-1; v = 0,1,\cdots N-1$$

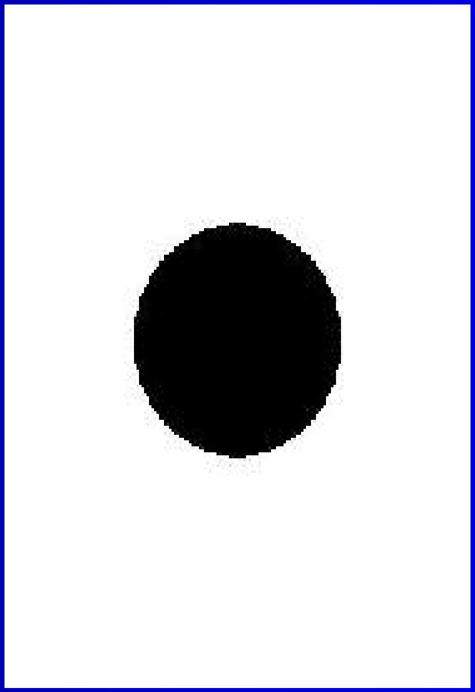
$$f(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\exp(2j\pi\frac{ux+vu}{N})$$

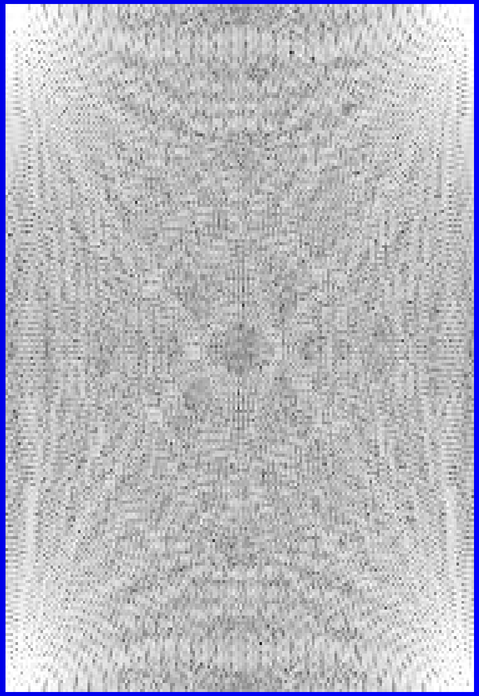
$$x = 0,1,\cdots N-1; y = 0,1,\cdots N-1$$

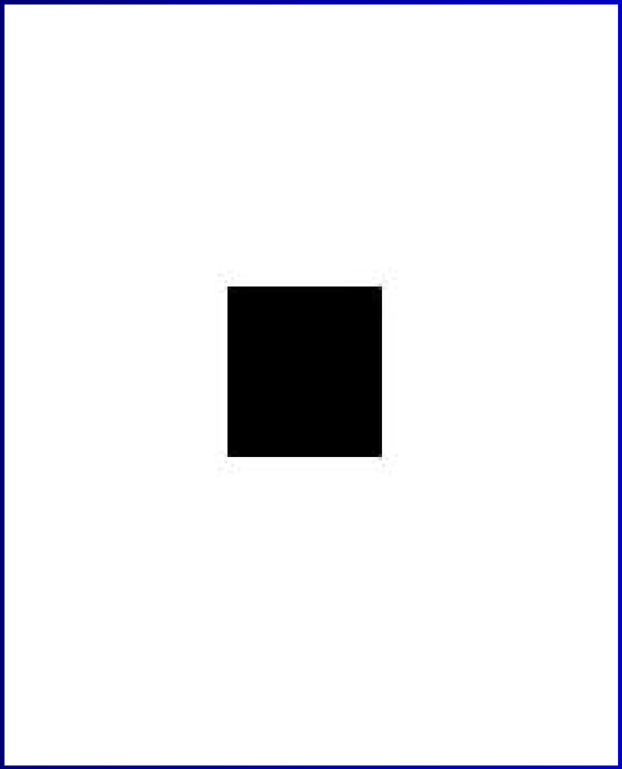
一般来讲，数字图像是空间域中的连续图像的一种满足人为满意尺度的近似，对图像进行频谱分析，对应地，对数字图像也可以进行频谱分析，有关的分析数据都有相同的物理解释.

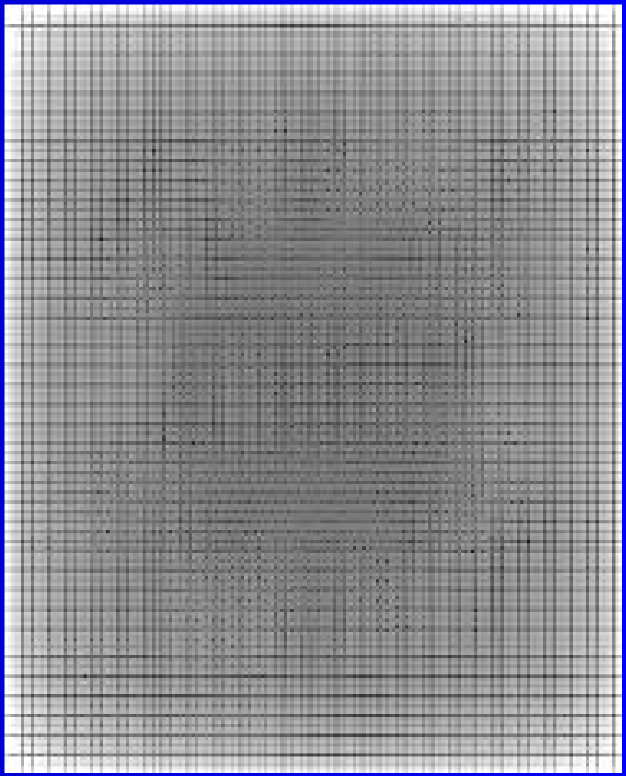
例4 图像的傅立叶谱

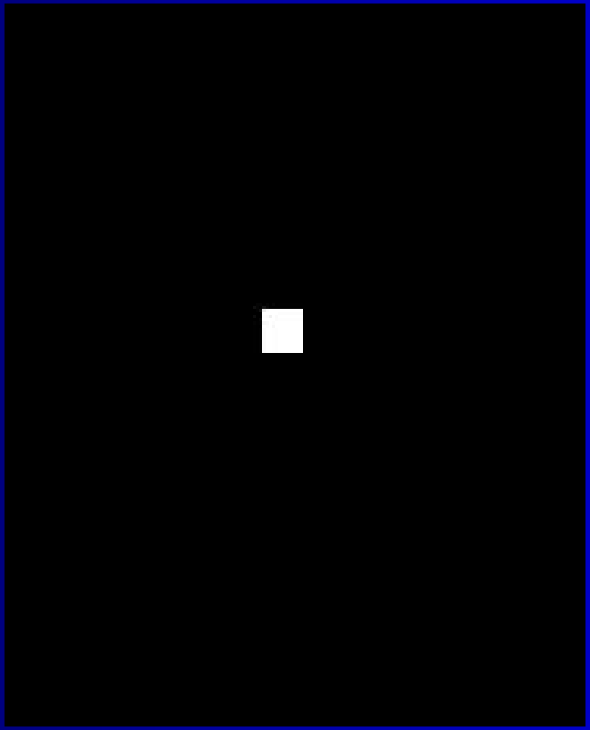
```
a=imread('fft1.jpg');
b=uint8(a(:,:,1));
subplot(1,2,1);
imshow(b);
f=fft2(double(a(:,:,1)));
subplot(1,2,2);
imshow(log(1+abs(f)),
[0 10],'notruesize');
```

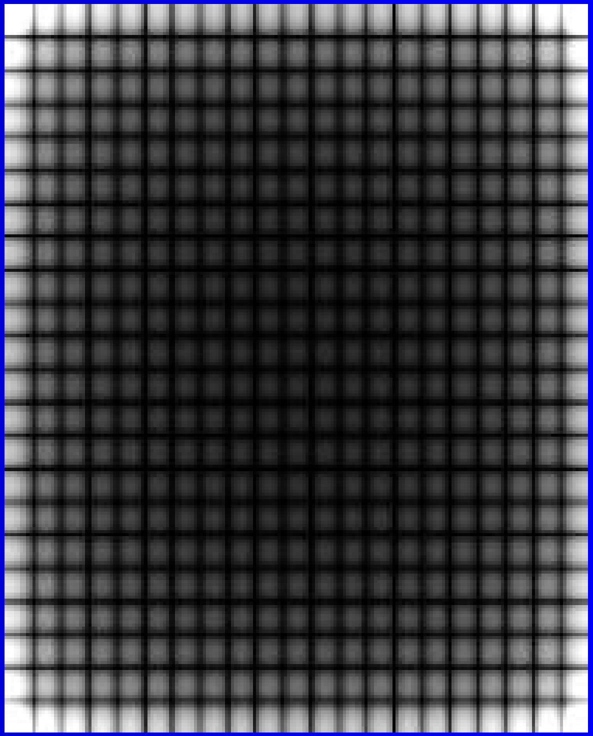


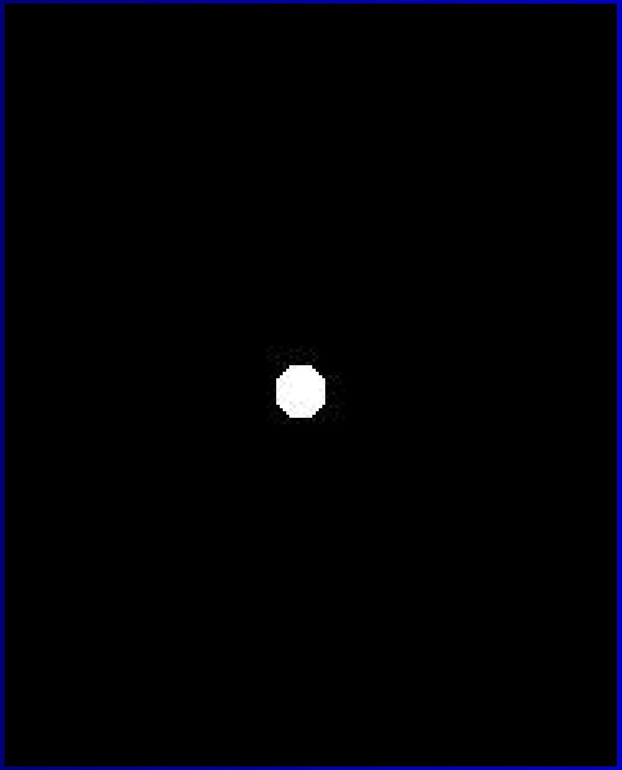


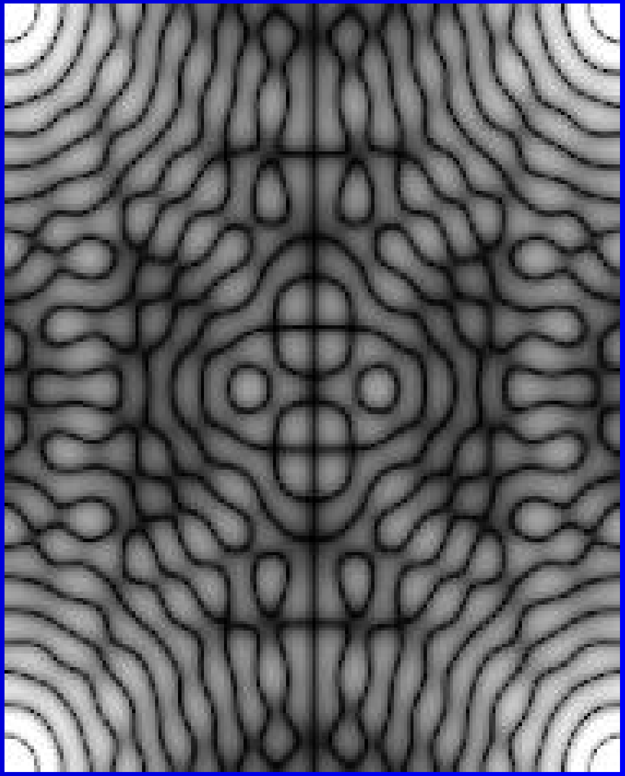


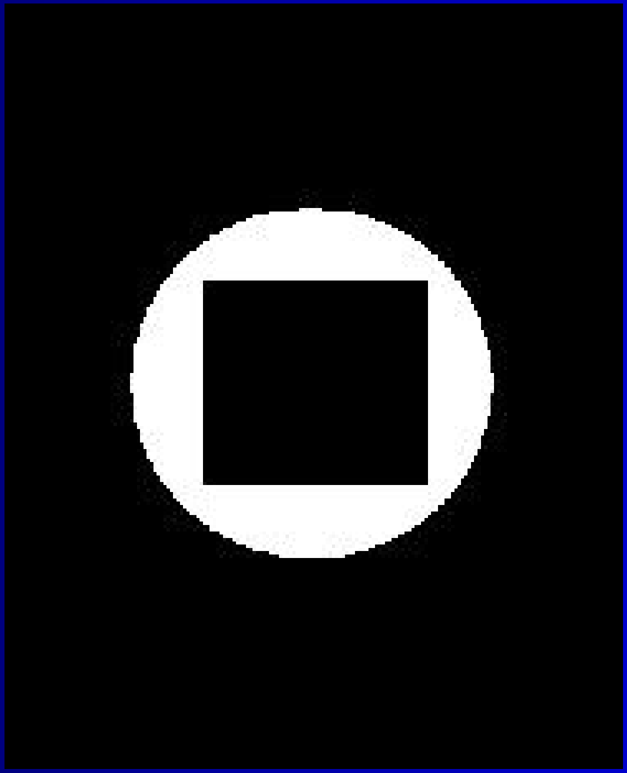


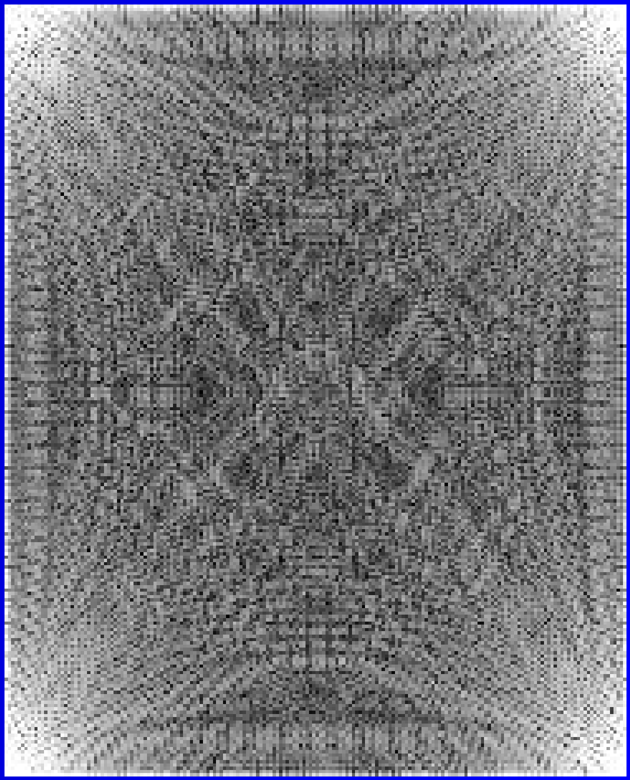




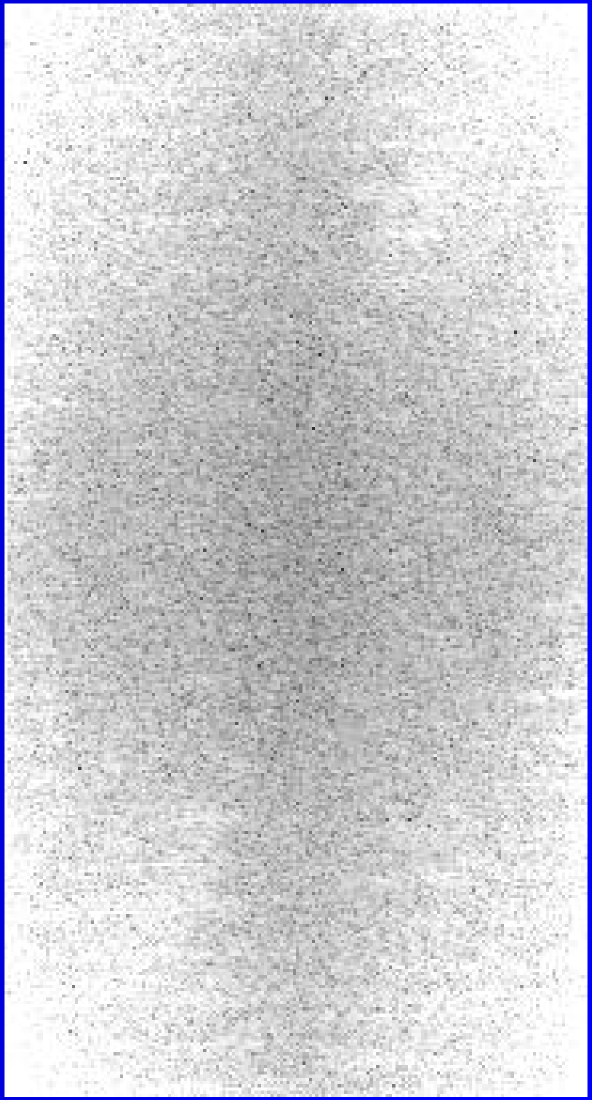








例5 灰度图像的傅立叶谱

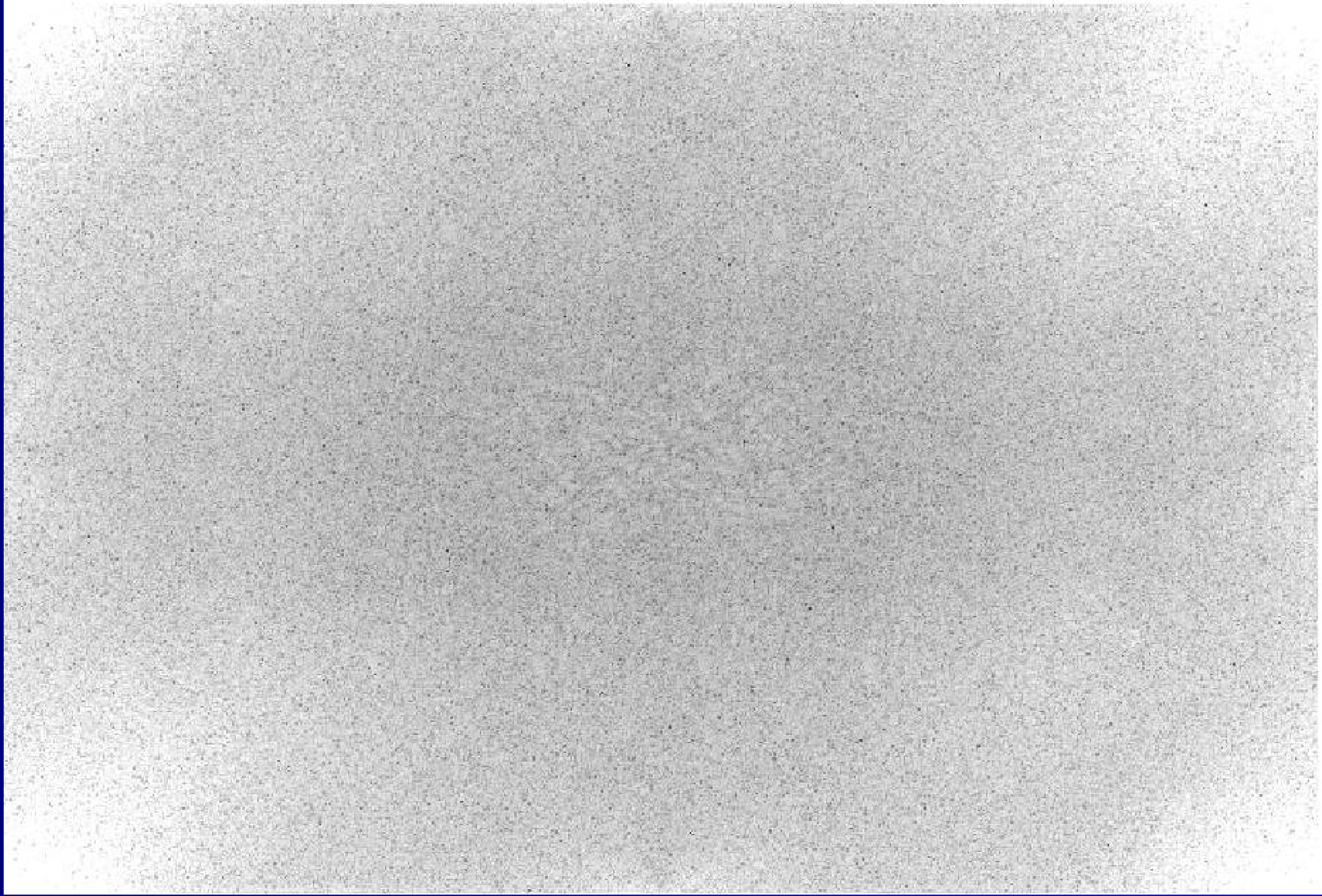


例6

报春花（http://www.shyu.net/hhzp/hhzp_c05.htm）

亮度分量图　　I=R+G+B

Fourier变换



F=FFT2(I); imshow(log(1+abs(F)),[0 10],'notruesize');

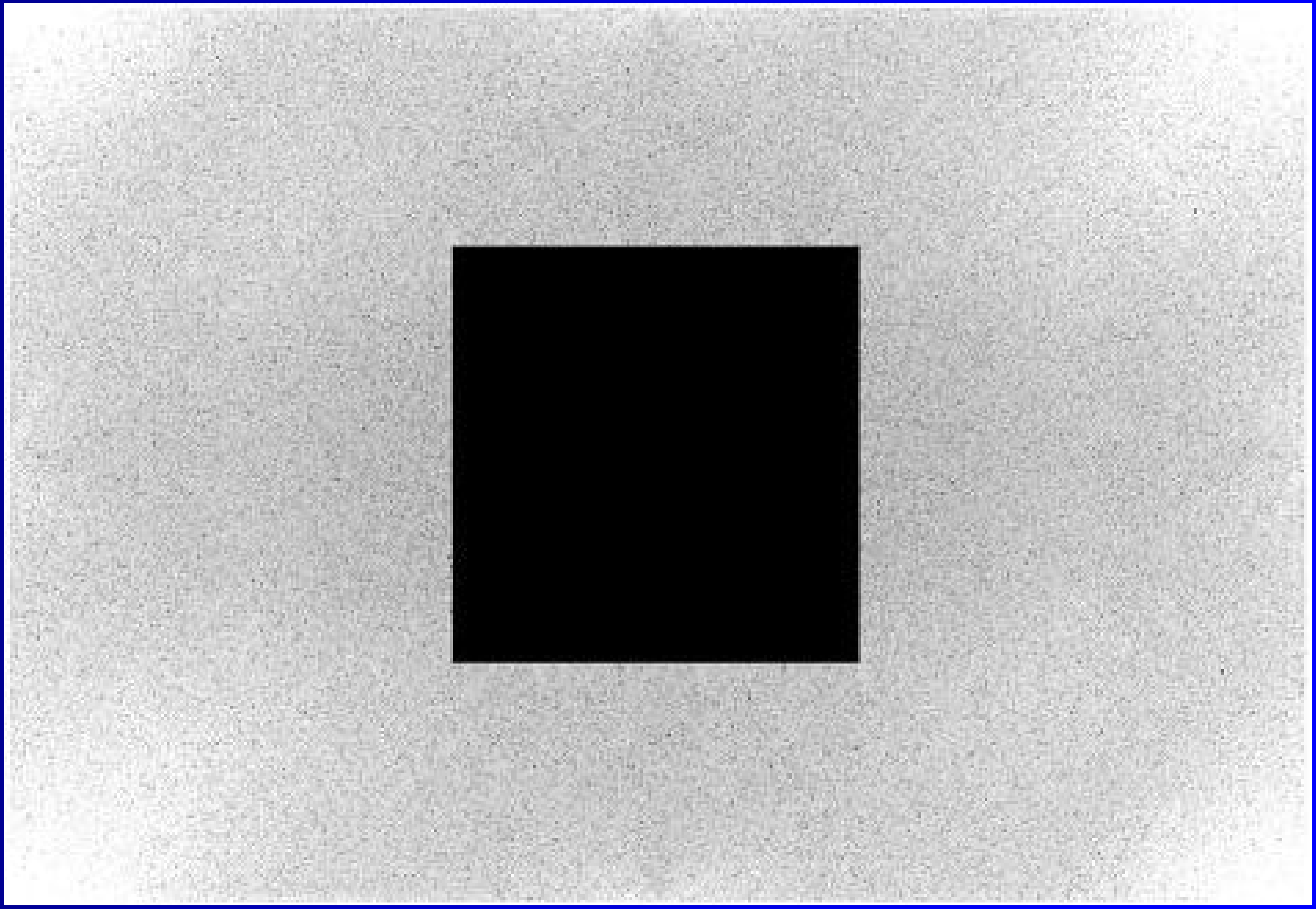
Fourier反变换

FF=IFFT2(F); imshow(abs(FF),[0 256],'notruesize');

例7. Fourier变换的一个应用

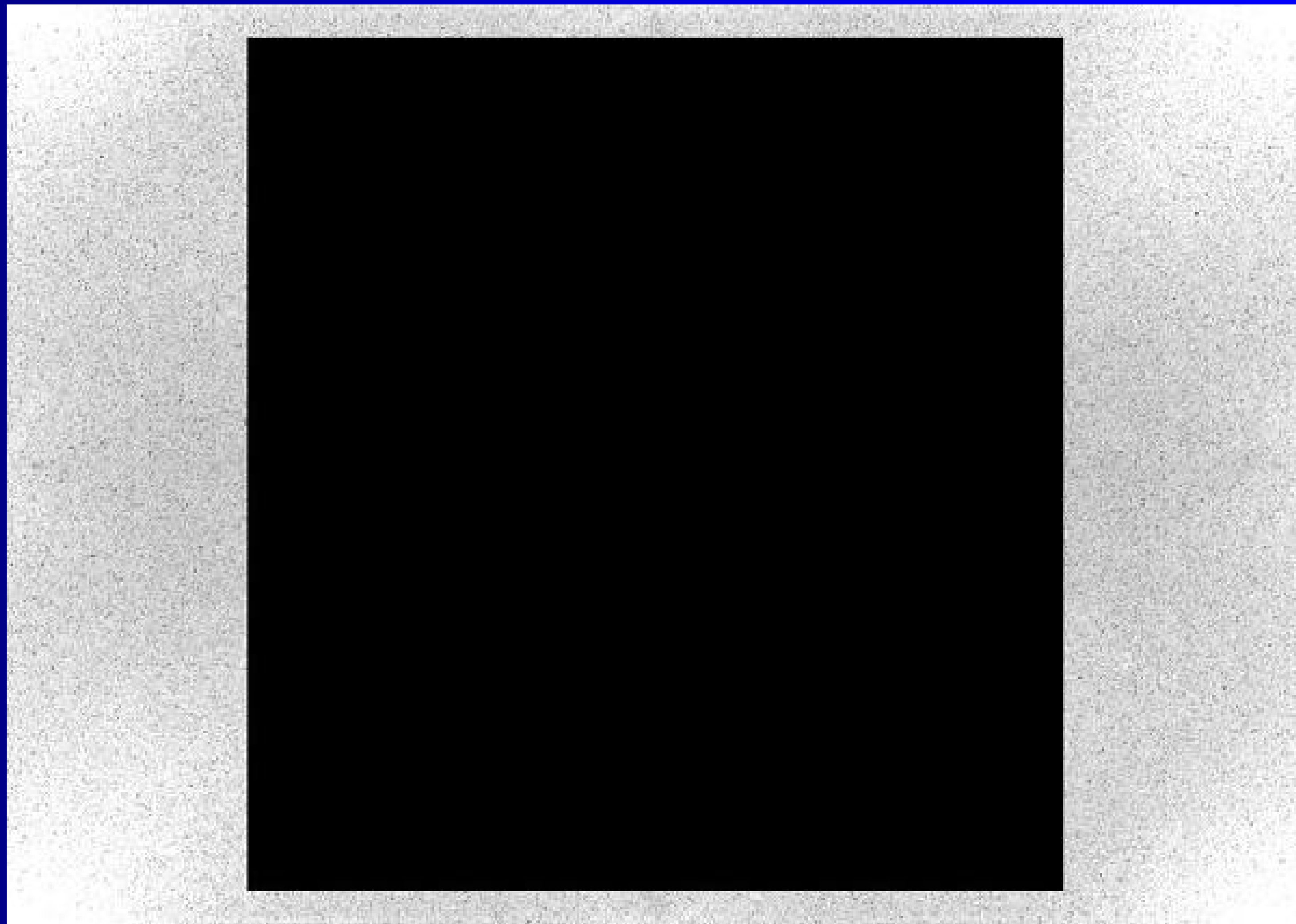
(1)

20%



(2)

50%



(3)

80%

(4)

90%

➢二维Fourier变换的性质

为简化问题，只讨论离散二维图像函数的**Fourier变换,并且图幅参数为N×N的特殊情况.**

✓可分离性

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp(-2j\pi\frac{ux+vy}{N})$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp(-2j\pi\frac{ux}{N})\exp(-2j\pi\frac{vy}{N})$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\exp(-2j\pi\frac{ux}{N})\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp(-2j\pi\frac{vy}{N})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1}\exp(-2j\pi\frac{ux}{N})\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp(-2j\pi\frac{vy}{N})$$

$$=\boldsymbol{F}_x(\boldsymbol{F}_y(f))$$

高维变换可以通过一维变换复合而成！

✓线性

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}(af(x,y)+bg(x,y))\exp(-2j\pi\frac{ux+vy}{N})$$

$$=a\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp(-2j\pi\frac{ux+vy}{N})$$

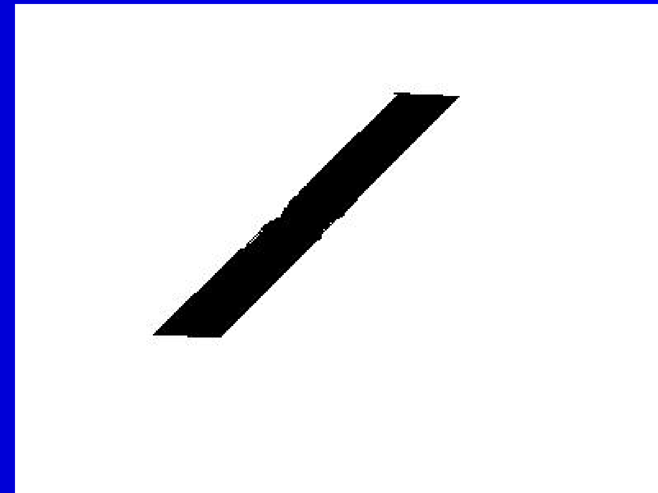
$$+b\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}g(x,y)\exp(-2j\pi\frac{ux+vy}{N})$$

即

$$\boldsymbol{F}(af(x,y)+bg(x,y))=a\boldsymbol{F}(f(x,y))+b\boldsymbol{F}(g(x,y))$$

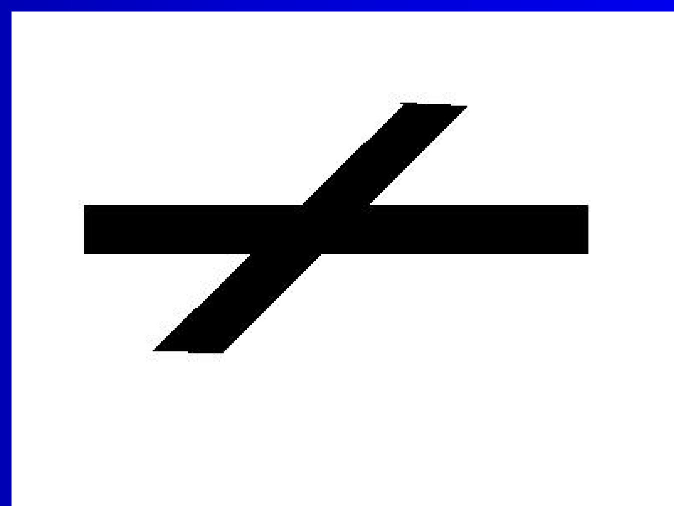
例8

f

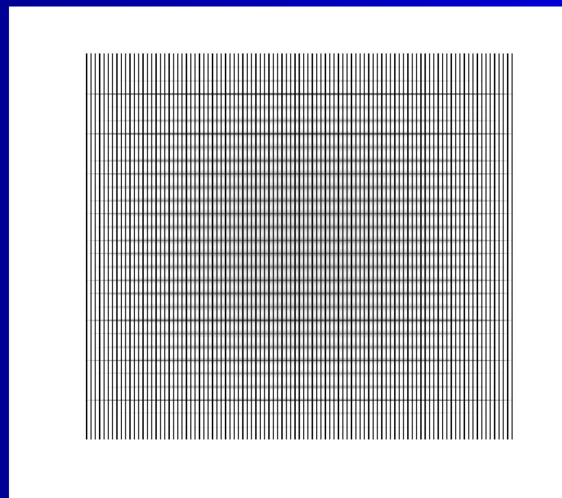


g

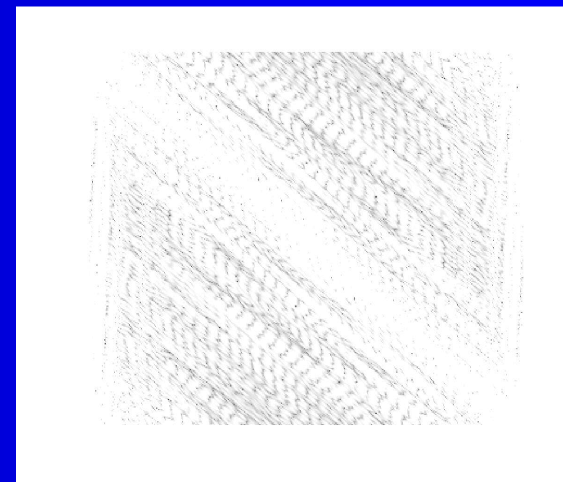
f+g



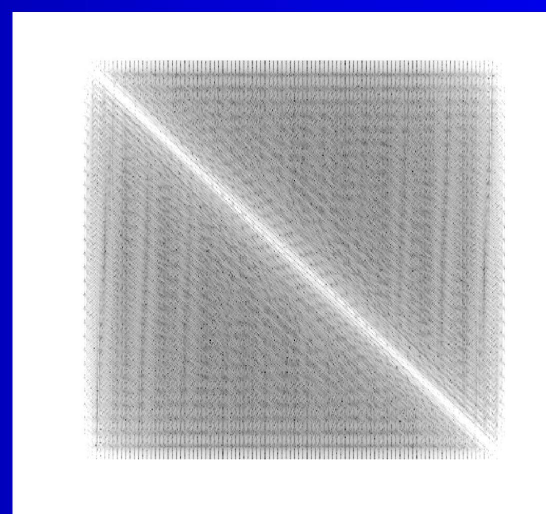
$$\boldsymbol{F}(f(x,y)+g(x,y))=\boldsymbol{F}(f(x,y))+\boldsymbol{F}(g(x,y))$$



F



G



F+G

✓共轭对称性

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp(-2j\pi\frac{ux+vy}{N})$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp(-2\overline{j}\pi\frac{(-u)x+(-v)y}{N})$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\overline{\exp(-2j\pi\frac{(-u)x+(-v)y}{N})}$$

$$=\overline{\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp(-2j\pi\frac{(-u)x+(-v)y}{N})}$$

$$=\overline{F(-u,-v)}$$

$$z=x+jy,\ \overline{z}=x-jy$$

共轭对称性告诉我们:

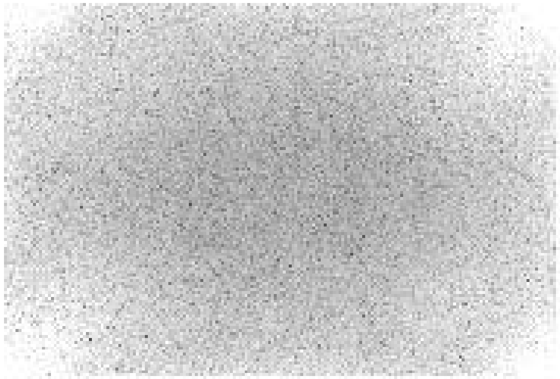
傅立叶变换的逆变换，可以通过求其正变换而得到

$$\mathcal{F}^{-1}(F(u,v)) = \mathcal{F}(\overline{F(u,v)})$$

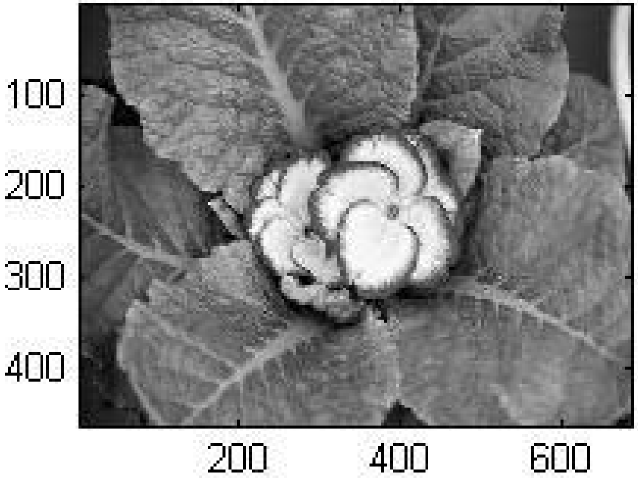
```
colormap(gray);
a=imread('fft7.jpg');
%b=uint8(a(:,:,1));
subplot(2,2,1);
imshow(a);
xlabel('原始图像');
f=fft2(double(a));
subplot(2,2,2);
imshow(log(1+abs(f)),[0 10],'notruesize');
xlabel(傅立叶变换');
ff=fft2(double(conj(f)));
subplot(2,2,3);
cc=abs(ff);
imagesc(cc);
xlabel('傅立叶变换的共轭的傅立叶变换');
fff=ifft2(f);
subplot(2,2,4);
cc=abs(fff);
imagesc(cc);
xlabel('傅立叶反变换');
```

逆变换可以通过"正向"变换和"共轭运算"复合而成!

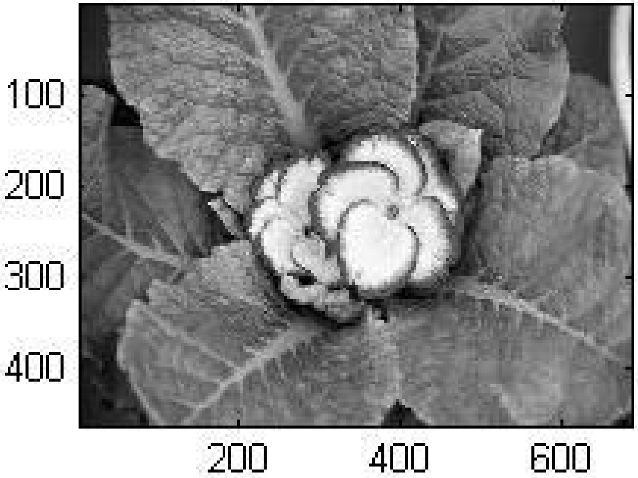
原始图像



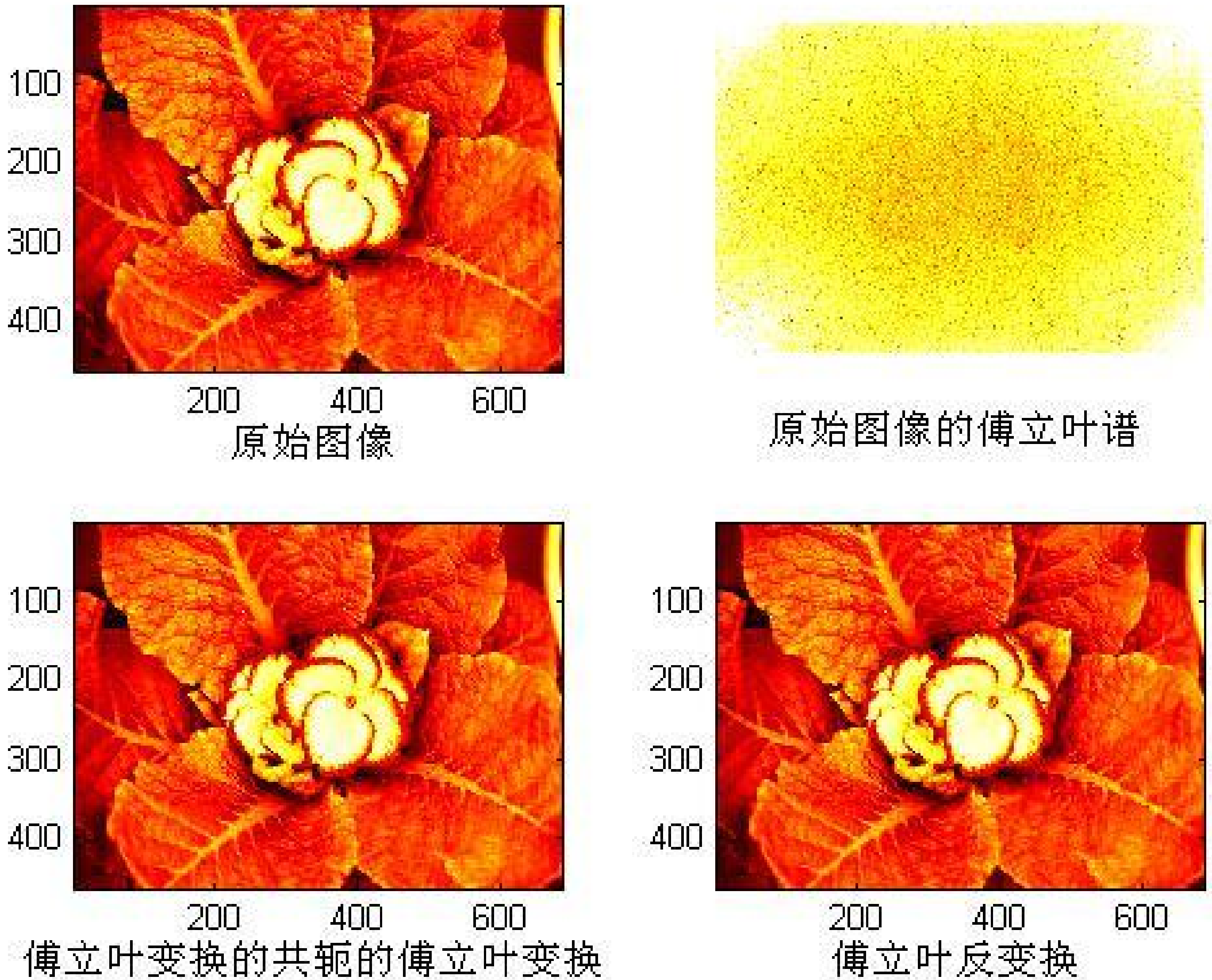
原始图像的傅立叶谱



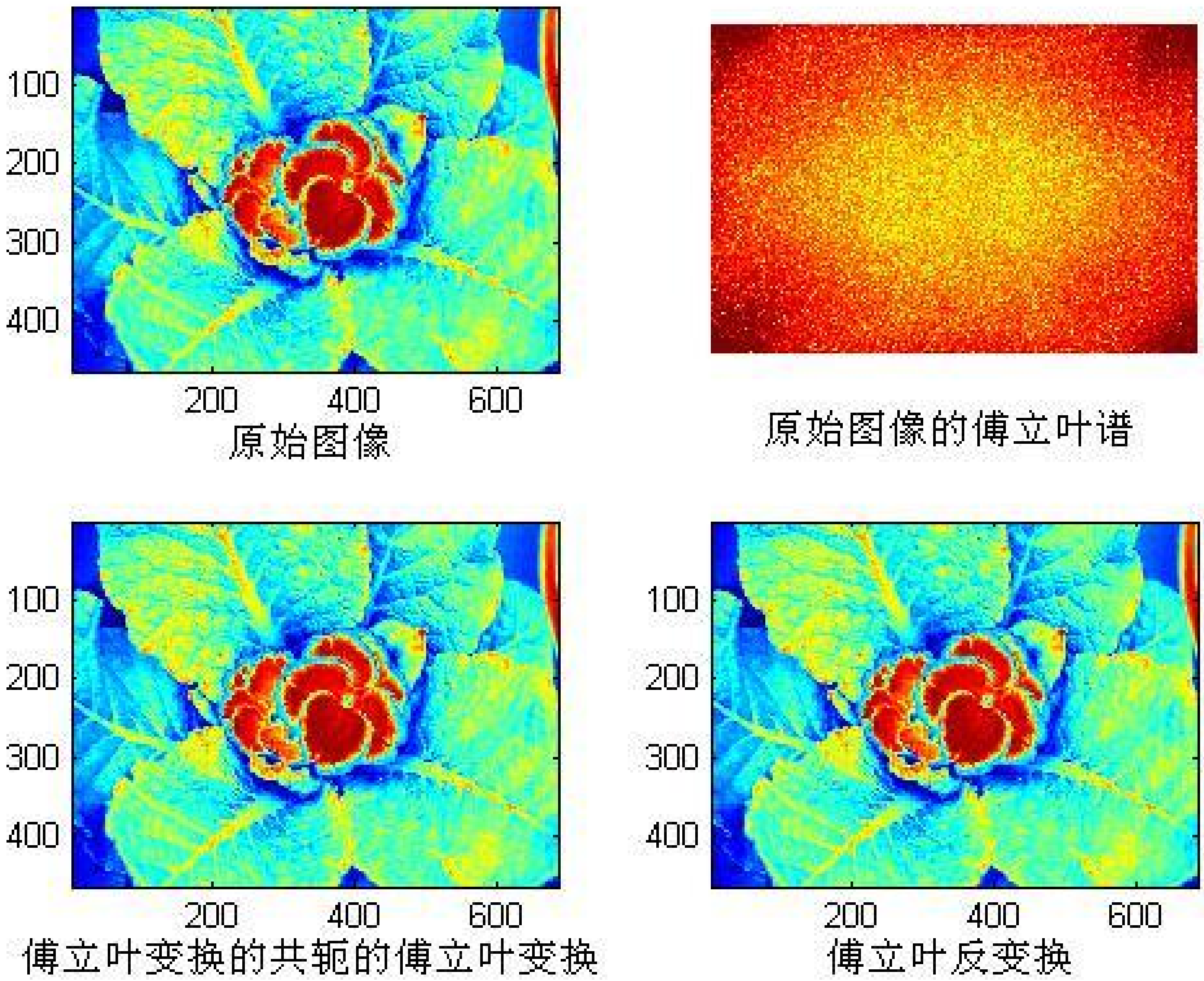
傅立叶变换的共轭的傅立叶变换



傅立叶反变换


100
200
300
400
200 400 600
原始图像
原始图像的傅立叶谱
100
200
300
400
200 400 600
傅立叶变换的共轭的傅立叶变换
100
200
300
400
200 400 600
傅立叶反变换

hot


100
200
300
400
200
400
600
原始图像
原始图像的傅立叶谱
傅立叶变换的共轭的傅立叶变换
傅立叶反变换

jet

✓平均值

$$F(0,0)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp(-2j\pi\frac{0x+0y}{N})$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$

直流分量
AC

✓位移性（平移与频移）

如果$f(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)$,则

$$f(x-x_0,y-y_0)\Leftrightarrow F(u,v)\exp(-j2\pi(ux_0+vy_0)/N)$$
$$f(x,y)\exp(j2\pi(u_0x+v_0y)/N)\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

✓周期性

Fourier变换和反变换均以N为周期

$$
\begin{aligned}
F(u+kN, v+lN) &= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp(-2j\pi\frac{(u+kN)x+(v+lN)y}{N}) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp(-2j\pi\frac{ux+vy}{N})\exp(-2j\pi\frac{(kx+ly)N}{N}) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp(-2j\pi\frac{ux+vy}{N})\exp(-2j\pi(kx+ly)) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp(-2j\pi\frac{ux+vy}{N}) \\
&= F(u,v)
\end{aligned}
$$

其中k,l是任意整数

注意到正变换与反变换的形式上的对称性，可知，反变换也是具有周期性

✓尺度变换

1。 $af(x,y) \Leftrightarrow aF(u,v)$

2。 $f(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{ab}F(\frac{u}{a},\frac{v}{b})$, 其中$ab \neq 0$

✓旋转性

若$f(r,\theta) \Leftrightarrow F(\omega,\phi)$, 则

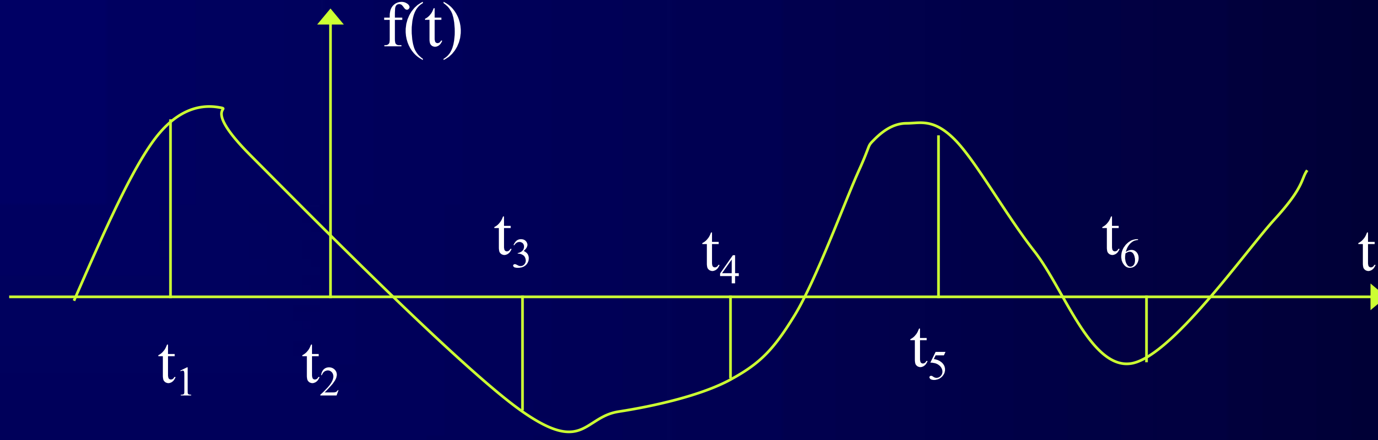
$f(r,\theta+\theta_0) \Leftrightarrow F(\omega,\phi+\theta_0)$

$f(r,\theta)$, $F(\omega,\phi)$分别为 f, F的极坐标形式。

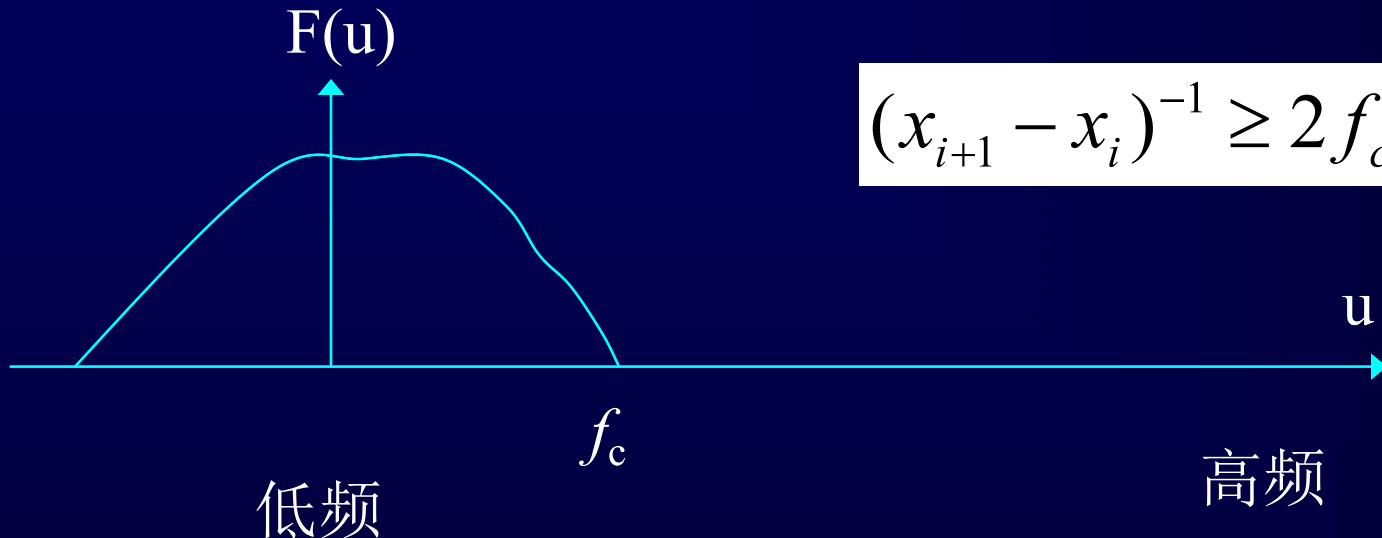
➢连续Fourier变换与离散傅立叶变换的联系及他们的物理解释

◆采样定理（Nyquist)

❑一维采样定理：若连续信号f(t)的最高截止频率为f_c，则采样频率必须满足 $f_s \geq 2f_c$ 时，才能保证采样信号不失真地表示原信号.



$$(x_{i+1}-x_i)^{-1} \geq 2f_c$$



❑二维采样定理：如果二维信号f(x,y)的Fourier频谱F(u,v)满足：

$$F(u,v)=\begin{cases}F(u,v) & |u|\le U_c,|v|\le V_c \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中，Uc,Vc是相应于空间变量x,y的最高截止频率，则当采样周期 $\Delta x,\Delta y$

$$\frac{1}{\Delta x}=U_s\ \ge\ 2U_c,\frac{1}{\Delta y}=V_s\ \ge\ 2V_c$$

时，采样信号 $f(m\Delta x,n\Delta y),m,n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 能唯一地恢复原信号f(x,y),且有

$$f(x,y)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(m\Delta x, n\Delta y)\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta x}(x-m\Delta x)}{\frac{\pi}{\Delta x}(x-m\Delta x)}\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta y}(y-m\Delta y)}{\frac{\pi}{\Delta y}(y-m\Delta y)}$$

适当地调整 $\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v$ 之间的值的搭配关系，就能从连续参数的Fourier变换公式出发，通过离散化步骤，得到离散傅立叶变换关系.一般取：

$$\frac{1}{\Delta x}=2U_c, \frac{1}{\Delta y}=2V_c, \Delta x \Delta u=\frac{1}{N}, \Delta y \Delta v=\frac{1}{N}$$

通俗地讲，违反如上原则，离散正变换和反变换无法成对出现.

不确定性原理

编辑

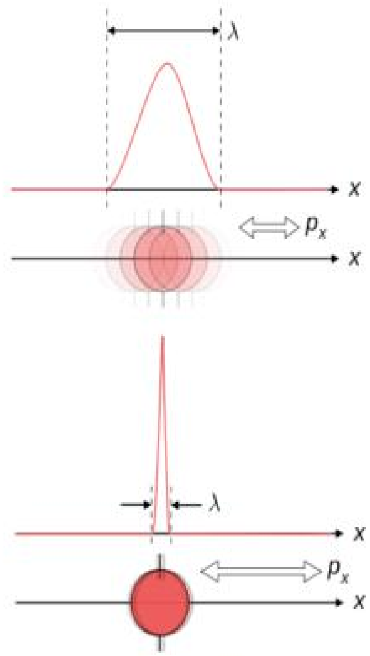
同义词 测不准原理一般指不确定性原理

本词条由"科普中国"百科科学词条编写与应用工作项目 审核。

不确定性原理（Uncertainty principle）是由海森堡于1927年提出，这个理论是说，你不可能同时知道一个粒子的位置和它的速度，粒子位置的不确定性，必然大于或等于普朗克常数（Planck constant）除于4π（ΔxΔp≥h/4π），这表明微观世界的粒子行为与宏观物质很不一样。此外，不确定原理涉及很多深刻的哲学问题，用海森堡自己的话说："在因果律的陈述中，即'若确切地知道现在，就能预见未来'，所得出的并不是结论，而是前提。我们不能知道现在的所有细节，是一种原则性的事情。"

中文名	不确定性原理	提出者	维尔纳·海森堡（Werner Heisenberg）
外文名	Uncertainty principle	提出时间	1927年
别　称	测不准原理；不确定原理	应用学科	物理
表达式	ΔxΔp≥h/4π	适用领域范围	量子力学

目录



不确定性原理图册

问题：哪些区域，像素值变化比较快（慢）？

◆傅立叶变换的**统计特性**

图像的能量主要集中在低频区，其高频区的幅值很小或趋于零，对于大多数无明显颗粒噪音的图像来说，低频区集中了85%以上的能量.

图像中如果存在有明显的颗粒噪音，或明显的细节亮度跳跃变化，则变换后，高频数据增加，分布增多.

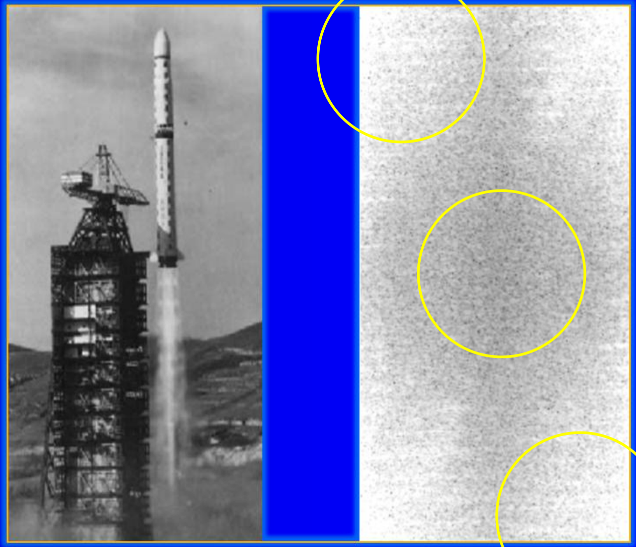
先验知识，后验知识.高频、低频.

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp(-2j\pi\frac{ux+vu}{N})$$

$$u=0,1,\cdots N-1; v=0,1,\cdots N-1$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp(2j\pi\frac{ux+vu}{N})$$

$$x=0,1,\cdots N-1; y=0,1,\cdots N-1$$



➢卷积定理

（1）

设$f(x), g(x)$是定义在 $(-\infty,+\infty)$上的函数，则

$$f*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(a)g(x-a)da$$

称为$f(x)$与$g(x)$的卷积

（2）

设$f(x,y), g(x,y)$是定义在 R^2上的函数，则

$$f*g(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(a,b)g(x-a,y-b)da\,db$$

称为$f(x,y)$与$g(x,y)$的卷积

◆一维函数的卷积定理

设$f(x), g(x)$的$Fourier$ 变换为 $F(u), G(u)$,
则存在如下的 $Fourier$ 变换对:

$$f(x) * g(x) \Leftrightarrow F(u)G(u)$$

$$f(x)g(x) \Leftrightarrow F(u) * G(u)$$

◆二维函数的卷积定理

设$f(x, y), g(x, y)$的$Fourier$ 变换为 $F(u, v), G(u, v)$,
则存在如下的 $Fourier$ 变换对:

$$f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)G(u, v)$$

$$f(x, y)g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * G(u, v)$$

◆离散卷积定理

定义：设 $f(x,y), g(x,y)$是定义在 $[0,N-1]\times[0,N-1]$上的离散函数，则

$$f*g(x,y)=\sum_{a=0}^{N-1}\sum_{b=0}^{N-1}f(a,b)g(x-a,y-b)$$

称为$f(x,y)$与$g(x,y)$的卷积。

设$f(x,y), g(x,y)$的$Fourier$ 变换为 $F(u,v), G(u,v)$,

则存在如下的 $Fourier$ 变换对：

$$f(x,y)*g(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)G(u,v)$$

$$f(x,y)g(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)*G(u,v)$$

证明：不妨设f,g都是定义在 $\overline{0,N-1}\times\overline{0,N-1}$ 上的离散函数，

$$\boldsymbol{F}(f(x,y)*g(x,y))=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\{\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)g(x-m,y-n)\}\exp(-j2\pi\frac{ux+vy}{2N})$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)\exp(-j2\pi\frac{um+vn}{2N})\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}g(x-m,y-n)\exp(-j2\pi\frac{u(x-m)+v(y-n)}{2N})$$

$$=F(u,v)G(u,v)$$

注意2N,以上只是一个形式推导

➢空间域与变换域

（1） $f(x,y) \xrightarrow{\text{处理}} f'(x,y)$

$f(x,y) \xrightarrow{h(x,y)} f'(x,y)$

（2） $f(x,y) \xrightarrow{\text{傅立叶变换}} F(u,v)$

$f'(x,y) \xleftarrow{\text{反变换}} F(u,v)H(u,v)$

H=$\mathcal{F}$(h)是滤波器

空域法和变换域法

问题模型：

空间域： $f'(x,y) = h(x,y) * f(x,y)$

变换域： $F'(u,v) = H(u,v)F(u,v)$

➢图像变换的通用公式

✓标量表达式

设有离散函数$f(x,y)$，则可定义其傅立叶变换对：

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp(-2j\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}))$$

$$u=0,1,\cdots M-1;v=0,1,\cdots N-1$$

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp(2j\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}))$$

$$x=0,1,\cdots M-1;y=0,1,\cdots N-1$$

✓矩阵表达式

令$P(u,x)=\frac{1}{\sqrt{N}}e^{-j\frac{2\pi}{N}ux}$, $Q(y,v)=\frac{1}{\sqrt{N}}e^{-j\frac{2\pi}{N}yv}$，则

$$F(u,v)=\sum_{x,y}P(u,x)f(x,y)Q(y,v)$$

$$f(x,y)=\sum_{u,v}P^*(x,u)F(u,v)Q^*(v,y)$$

令$F=[F(u,v)]_{N\times N}, f=[f(x,y)]_{N\times N}$

$P=[P(u,x)]_{N\times N}, Q=[Q(y,v)]_{N\times N}$

注意到矩阵乘法的定义，可知：

$$F=PfQ, f=P^{*}FQ^{*}$$

P是正交矩阵（酉矩阵）

*是共轭转置运算

一般地，若 P是正交矩阵，则称

$F=PfP^{T}$是图象的正交变换

➢二维离散余弦变换

$$F(u,v)=\frac{2}{N}C(u)C(v)\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}f(j,k)\cos[\frac{\pi u(j+\frac{1}{2})}{N}]\cos[\frac{\pi v(k+\frac{1}{2})}{N}]$$

$$F(u,v)=\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}C(u)C(v)F(u,v)\cos[\frac{\pi u(j+\frac{1}{2})}{N}]\cos[\frac{\pi v(k+\frac{1}{2})}{N}]$$

其中

$$\begin{cases} C(0)=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ C(w)=1, w=1,2,\cdots,N-1. \end{cases}$$

令

$$P = \left[\sqrt{\frac{2}{N}}\cos\left[\frac{\pi u\left(j+\frac{1}{2}\right)}{N}\right]\right]_{N\times N}$$

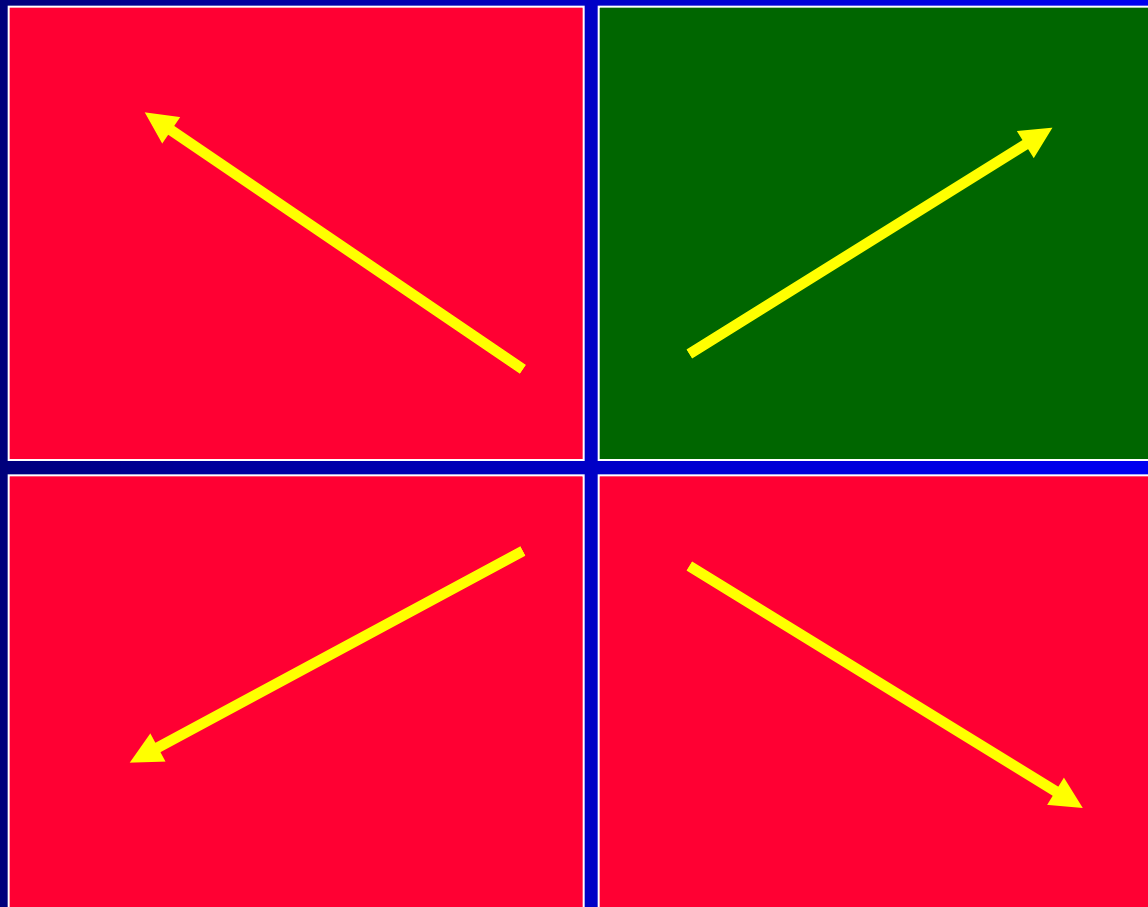
则

$$C = PfP^{T}$$

从理论推导可知，余弦变换是一种“特殊的”傅立叶变换

$$g(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & x\ge 0, y\ge 0 \\ f(-1-x,y) & x<0, y\ge 0 \\ f(x,-1-y) & x\ge 0, y<0 \\ f(-1-x,-1-y) & x<0, y<0 \end{cases}$$

是g(x,y)的在[-N,N-1]×[-N,N-1]“子空间”上的傅立叶变换



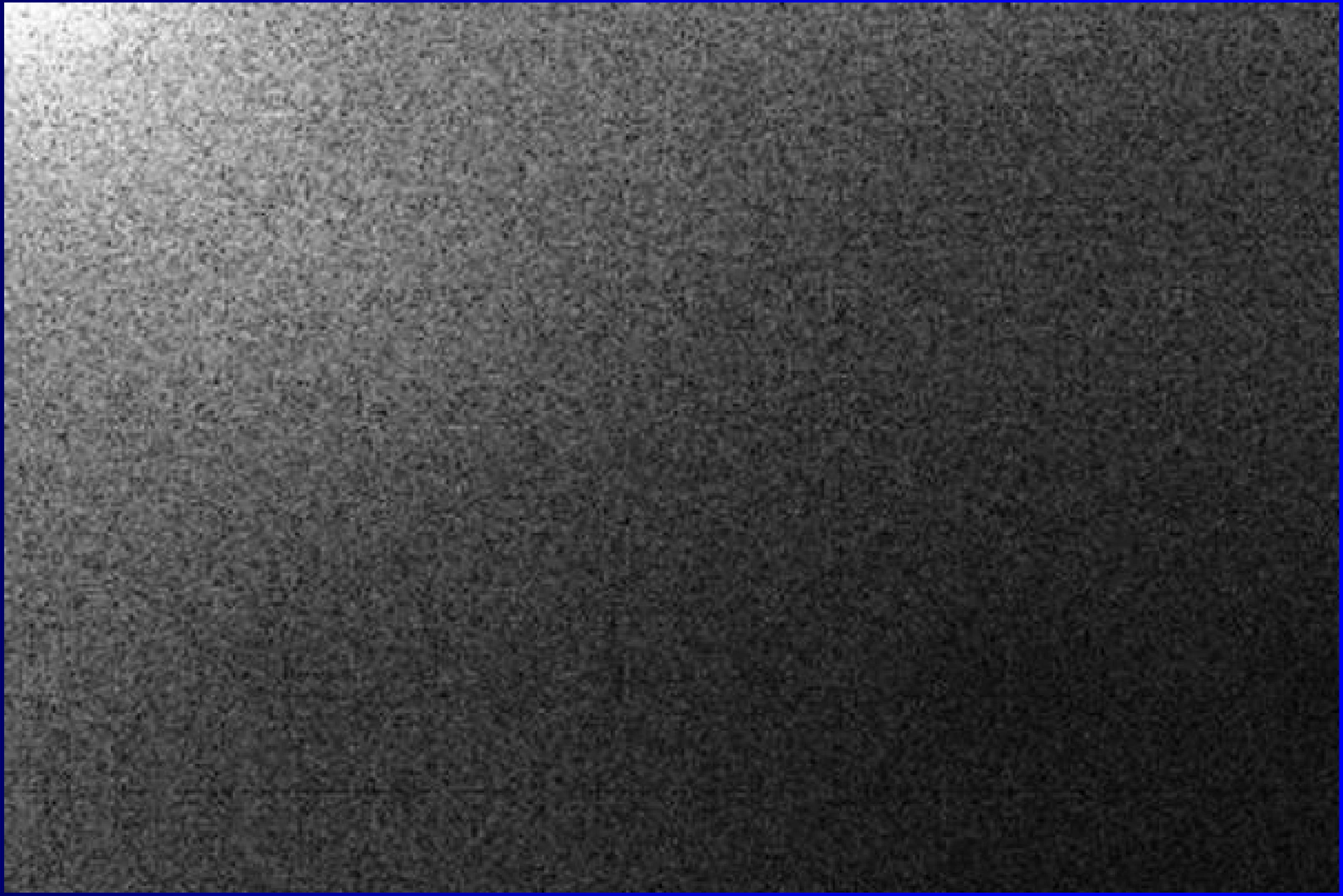
f(x,y)

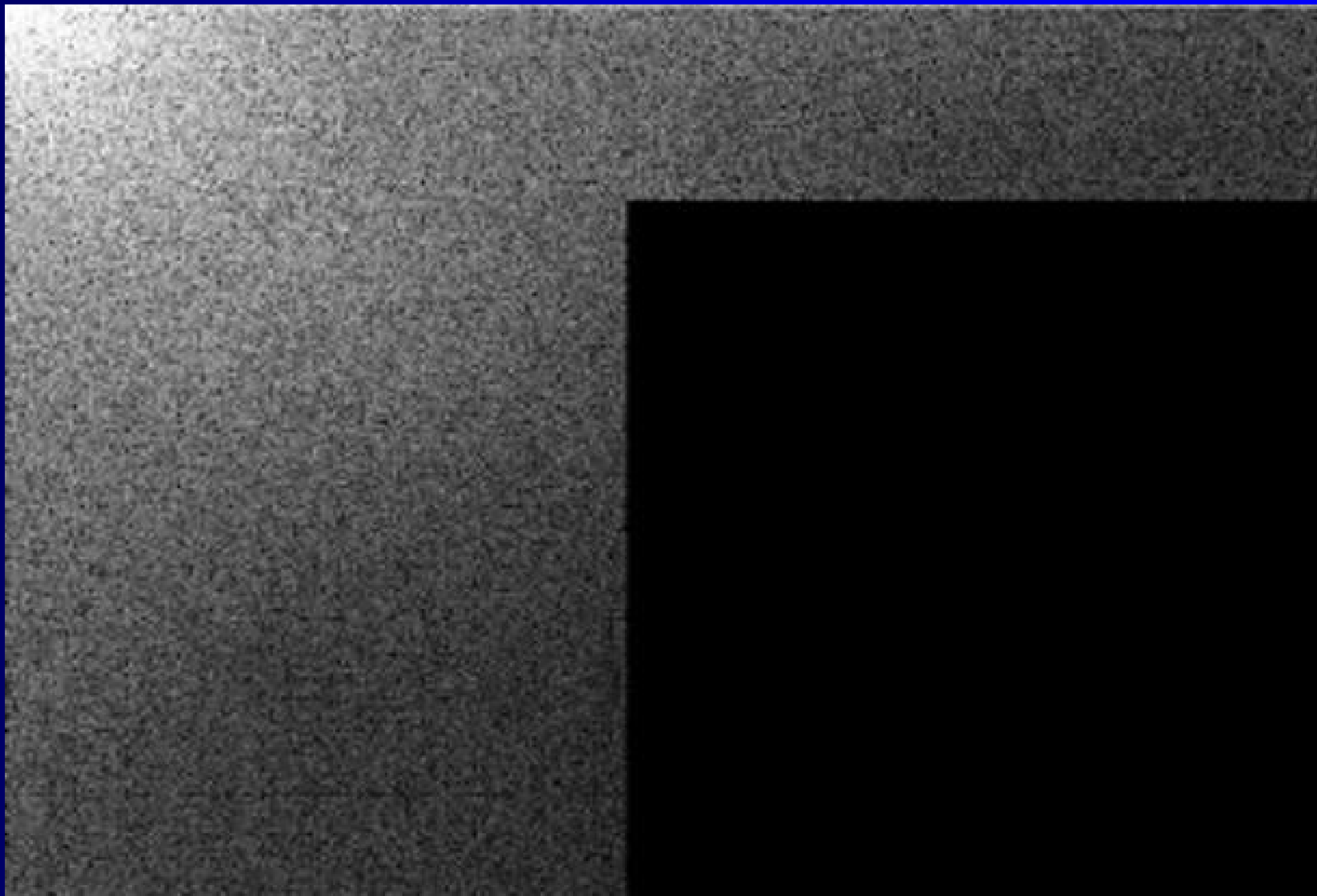
$$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$$

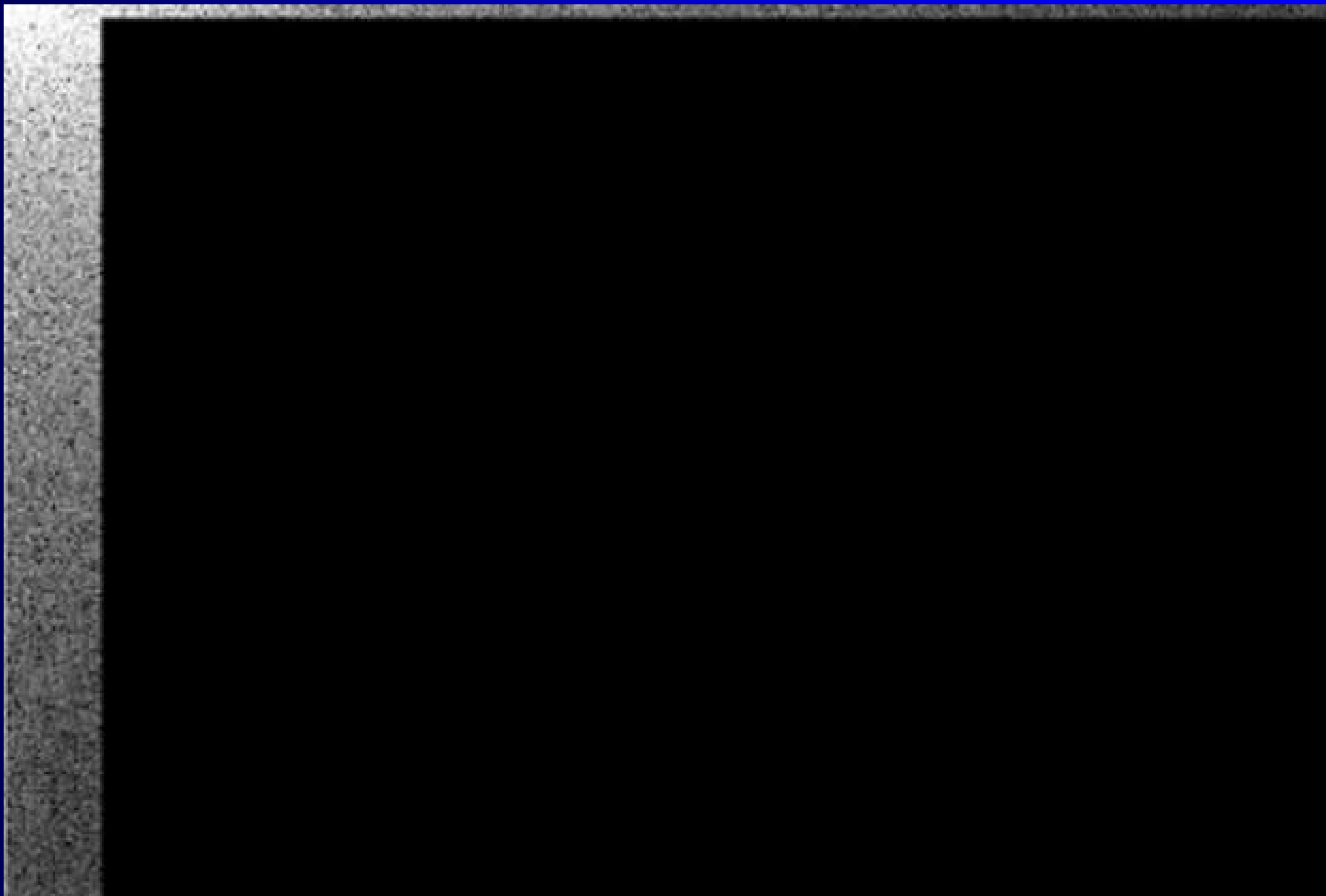
对称点

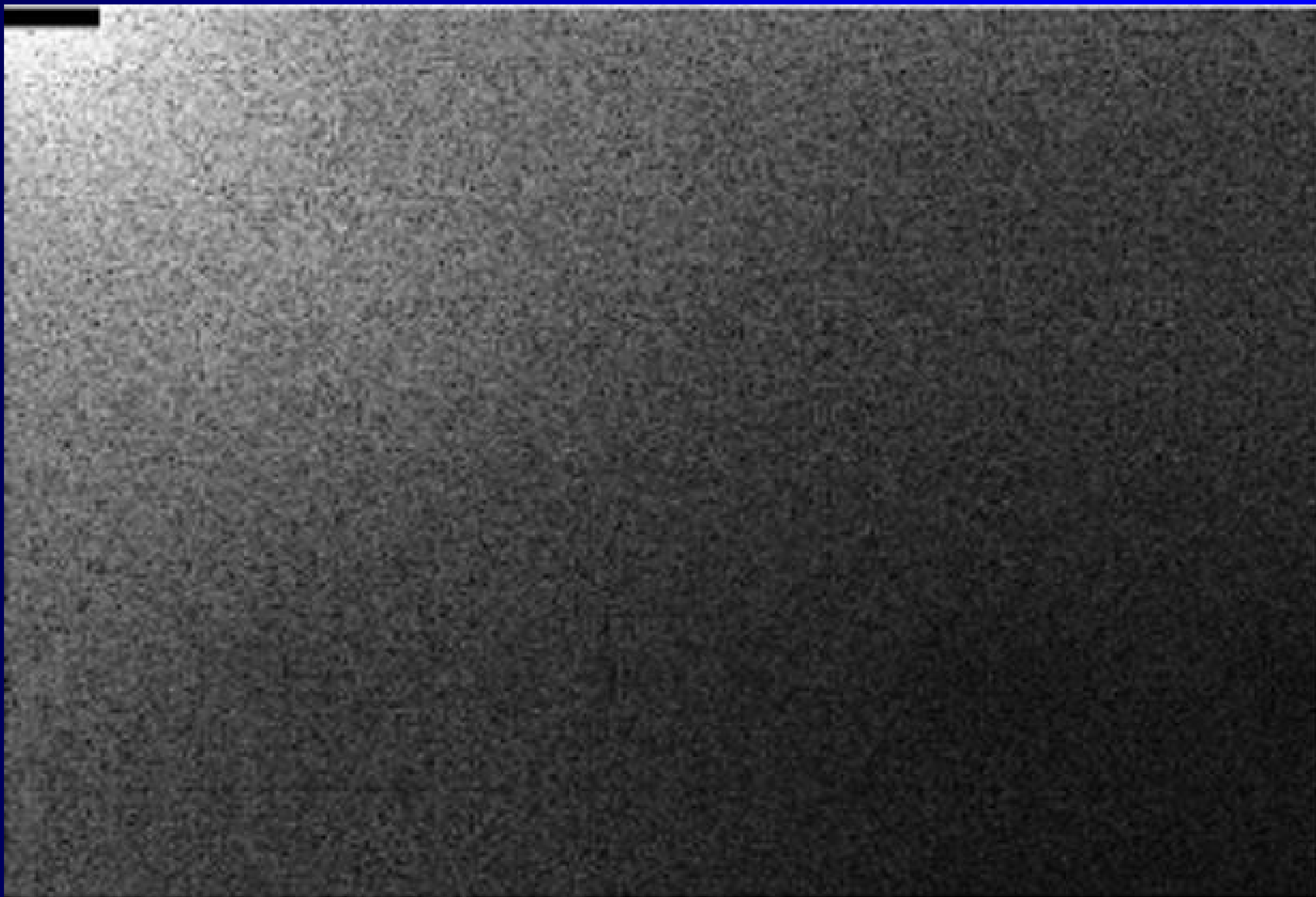
偶函数g(x,y)

例9









➢数字图像处理方法

$$\begin{cases} \text{空间域法} \begin{cases} \text{点处理法} \\ \text{邻域处理法} \end{cases} \\ \text{变换域法} \end{cases}$$

➢可分离图像变换

设有离散函数$f(x,y)$，则可定义其图像变换对：

$$T(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)g(x,y;u,v)$$

$$u=0,1,\cdots M-1;v=0,1,\cdots N-1$$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}T(u,v)h(x,y;u,v)$$

$$x=0,1,\cdots M-1;y=0,1,\cdots N-1$$

其中, g,h为变换核。若

$$g(x,y;u,v)=g_1(x,y)g_2(u,v),h(x,y;u,v)=h_1(x,y)h_2(u,v)$$

则称T是可分离的。

图象变换的要点之一：选取恰当的变换核

变换	变换核
二维傅立叶变换	$\exp(-2\pi j(xu/M+yv/N))$
二维余弦变换	$\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}$
沃什变换	$\frac{1}{N^2}(-1)^{\sum_{i=0}^{N-1}b_i(x)b_{N-1-i}(u)}(-1)^{\sum_{i=0}^{N-1}b_i(y)b_{N-1-i}(v)}$
哈达玛变换	$\frac{1}{N^2}(-1)^{\sum_{i=0}^{N-1}b_i(x)b_i(u)}(-1)^{\sum_{i=0}^{N-1}b_i(y)b_i(v)}$

$b_k(z)$为z的二进制表示的第k位

Hadamard变换的矩阵

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, H_n = \begin{pmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hadamard变换

$$T = \frac{1}{N^2} H_n f H_n^{/}, N = 2^n$$

7低通滤波器

$$g(x,y)=h(x,y)*f(x,y) \tag{4-1}$$

$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v) \tag{4-2}$$

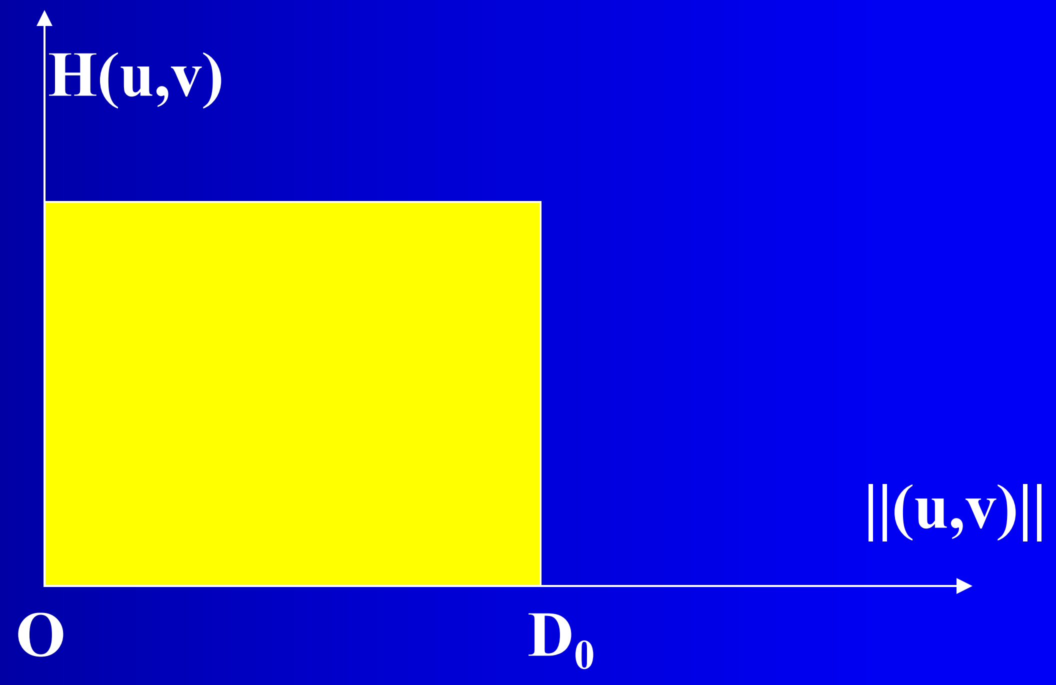
$$g(x,y)=\mathcal{F}^{-1}(H(u,v)F(u,v)) \tag{4-3}$$

✓理想低通滤波器

$$H(u,v)=\begin{cases}1 & \|(u,v)-(u_0,v_0)\|\le D_0 \\ 0 & \|(u,v)-(u_0,v_0)\|> D_0\end{cases}$$

(u_0,v_0)是低频中心，D_0是滤波器的截止频率.

若设$(u_0,v_0)=(0,0),\|(u,v)\|=\sqrt{u^2+v^2}$，则理想低通滤波器传递函数径向剖面图为



例10

```
a=imread('c:\1.jpg');
b=a(:,:,1);
f=fft2(b);
ff=f;
h=50;
xy=imfinfo('c:\1.jpg');
x=xy.Width/2;
y=xy.Height/2;
%(x,y)为图象的中心
ff(x-h:x+h,y-h:y+h)=0;
fff=ifft2(ff);
imshow(abs(fff),[0,255]);
```

✓Butterworth低通滤波器

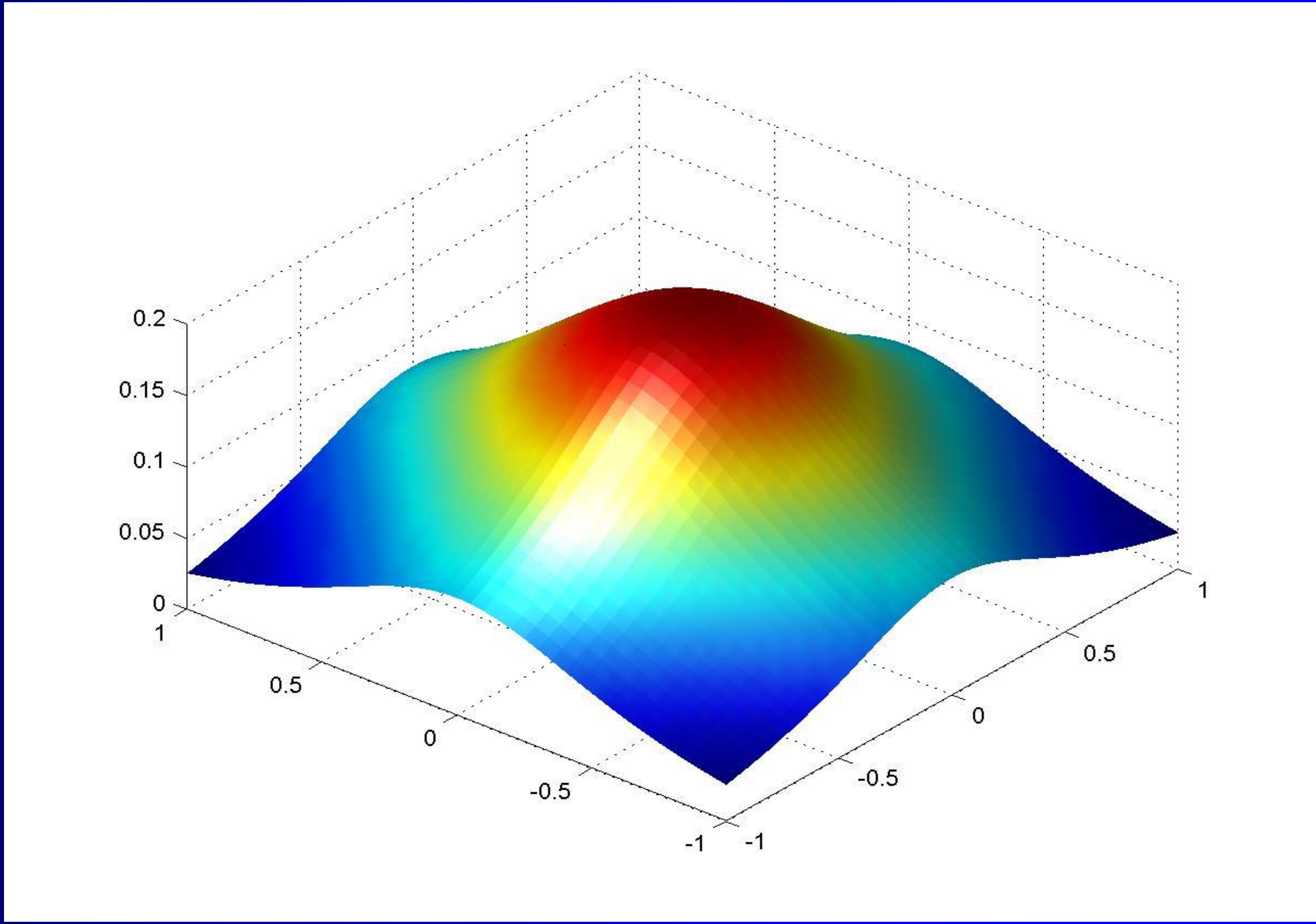
n阶Butterworth低通滤波器的传递函数由下式定义：

$$H(u,v) = \frac{1}{1+[\frac{D(u,v)}{D_0}]^{2n}}$$

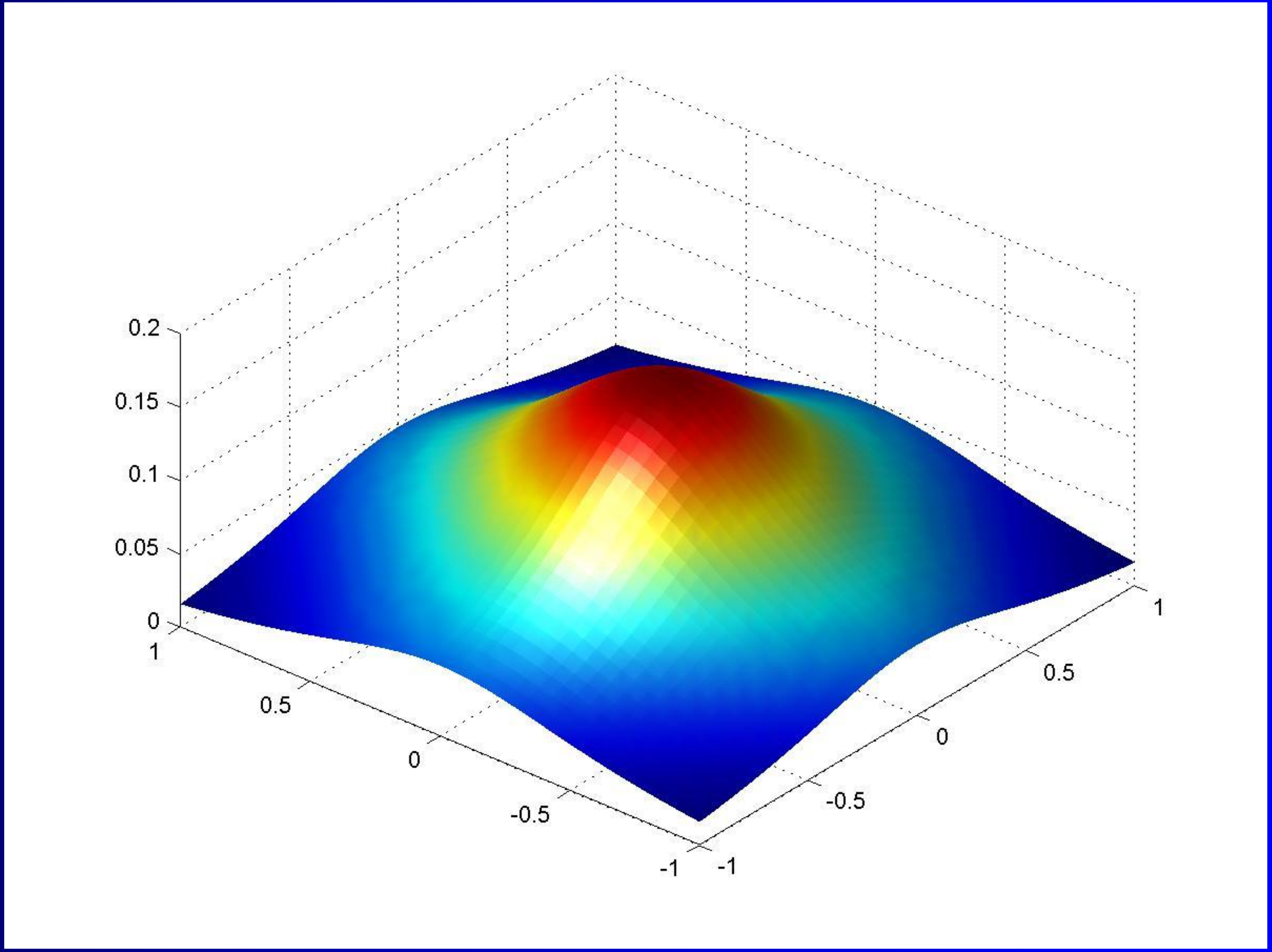
其中

$$D(u,v) = \sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2}$$

(u_0,v_0)是低频中心，D_0是滤波器的截止频率.

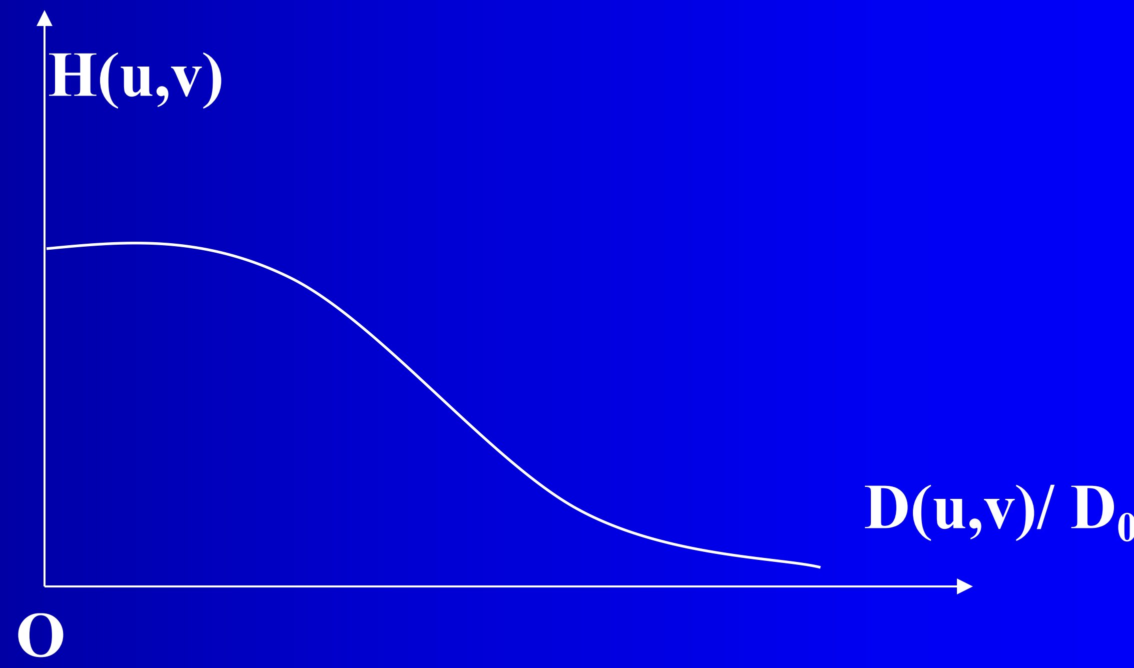


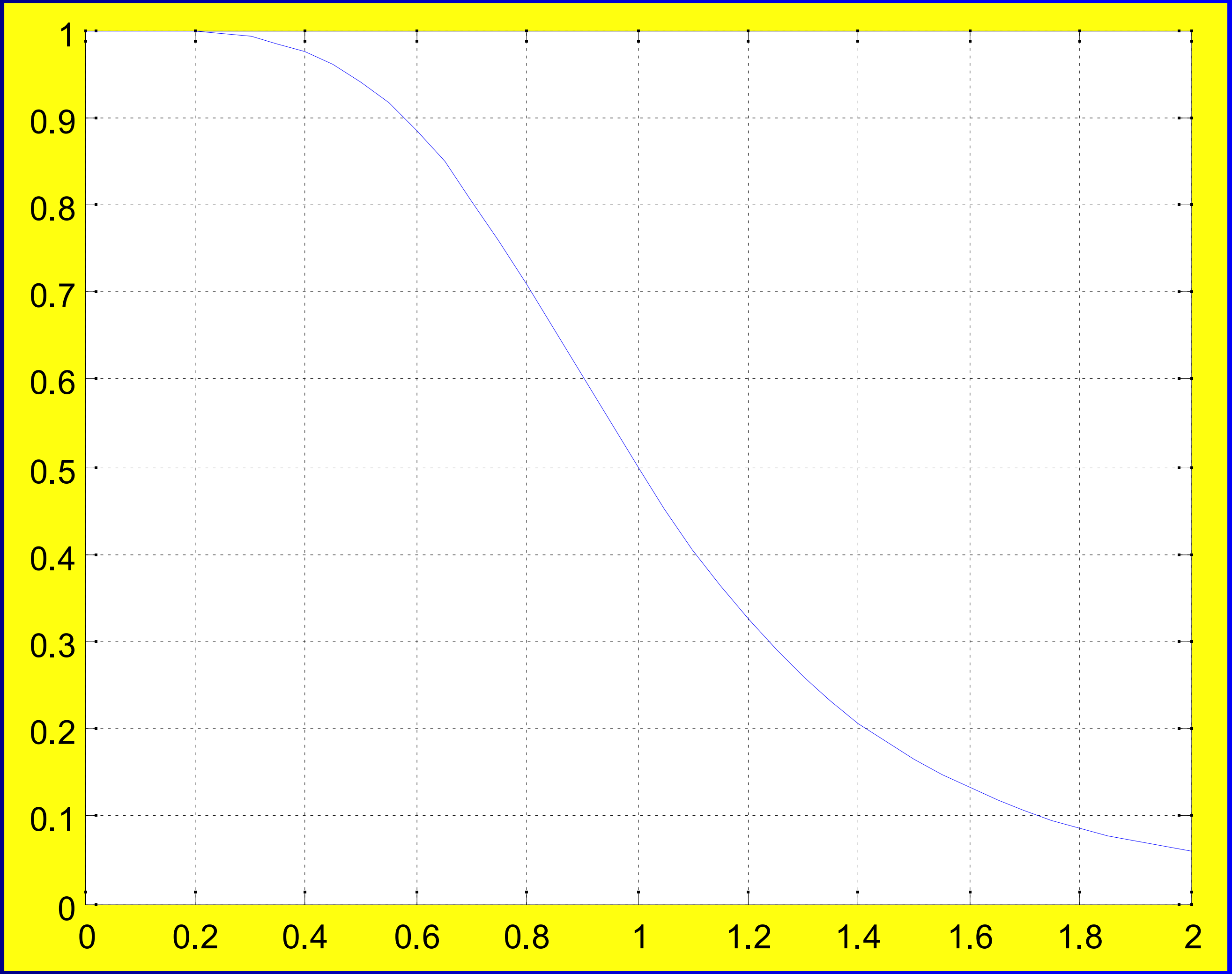
n=2



n=3

其传递函数径向剖面图为




1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

理想低通滤波器在数学上定义得很清楚，在计算机模拟中也可以实现，但不能用实际的电子器件实现，是“非物理”的理想滤波器.Butterworth滤波器是物理上可以实现的.令

$$B=\sum_{D(u,v)\le D_0} E(u,v) \Big/ \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1} E(u,v)$$

B为低通能量百分比.

8高通滤波器

$$g(x,y)=h(x,y)*f(x,y) \quad (4\text{-}1b)$$

$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v) \quad (4\text{-}2b)$$

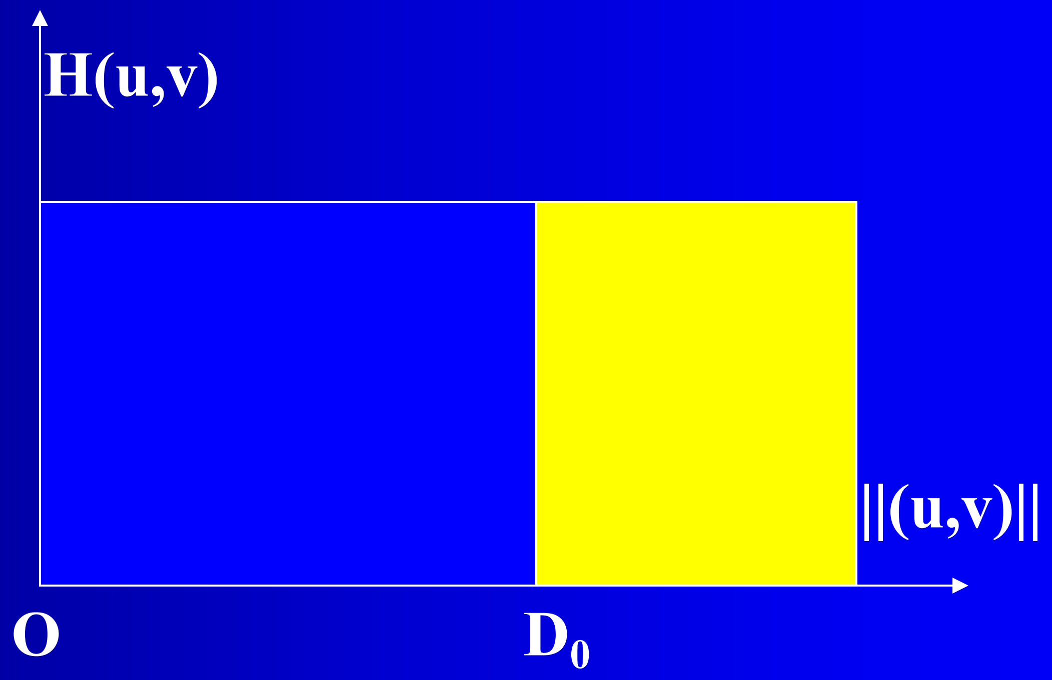
$$g(x,y)=\mathcal{F}^{-1}(H(u,v)F(u,v)) \quad (4\text{-}3b)$$

✓理想高通滤波器

$$H(u,v)=\begin{cases}1 & \|(u,v)-(u_0,v_0)\| \geq D_0 \\ 0 & \|(u,v)-(u_0,v_0)\| < D_0\end{cases}$$

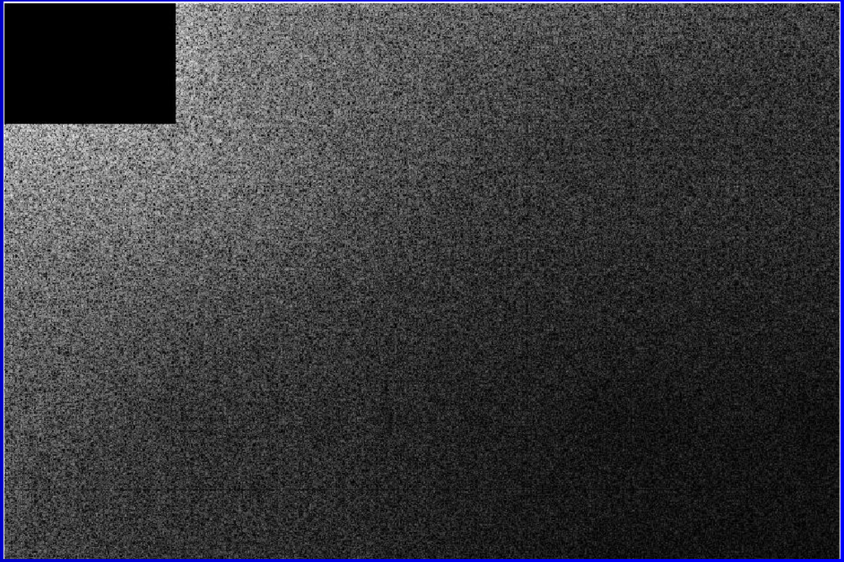
(u_0,v_0)是低频中心，D_0是滤波器的截止频率.

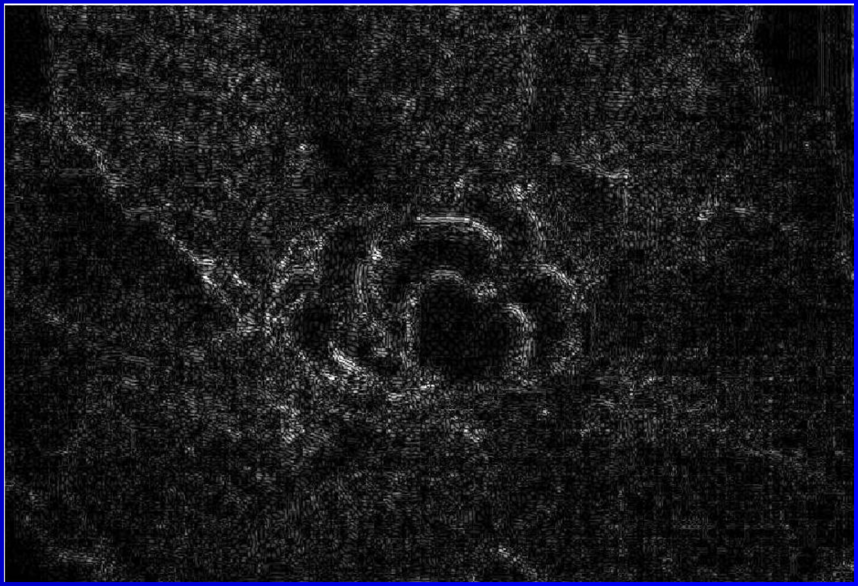
若设$(u_0, v_0) = (0,0), \|(u,v)\| = \sqrt{u^2+v^2}$，则理想高通滤波器传递函数径向剖面图为



例11

```
a=imread('a.jpg');
f=dct2(a);
h=400;
xy=imfinfo('a.jpg');
x=xy.Width;
y=xy.Height;
f(1:y-h,1:x-h-200)=0;
imshow(log(1+abs(f)),[0
5],'notruesize');
%fff=idct2(f);
%imshow(5*abs(fff),[0
256],'notruesize');
```





✓Butterworth高通滤波器

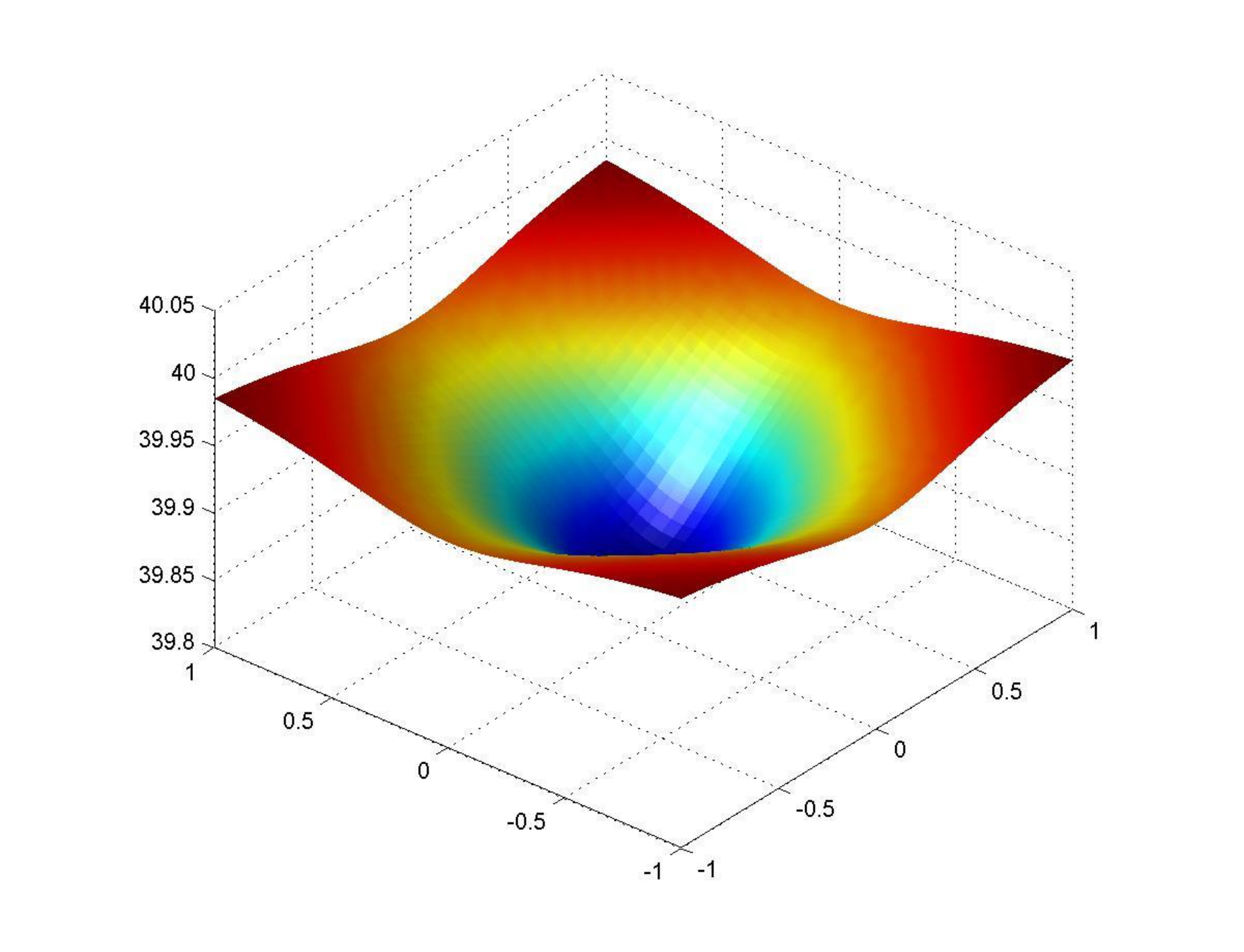
n阶Butterworth高通滤波器的传递函数由下式定义：

$$H(u,v)=\frac{1}{1+[\frac{D(u,v)}{D_0}]^{-2n}}$$

其中

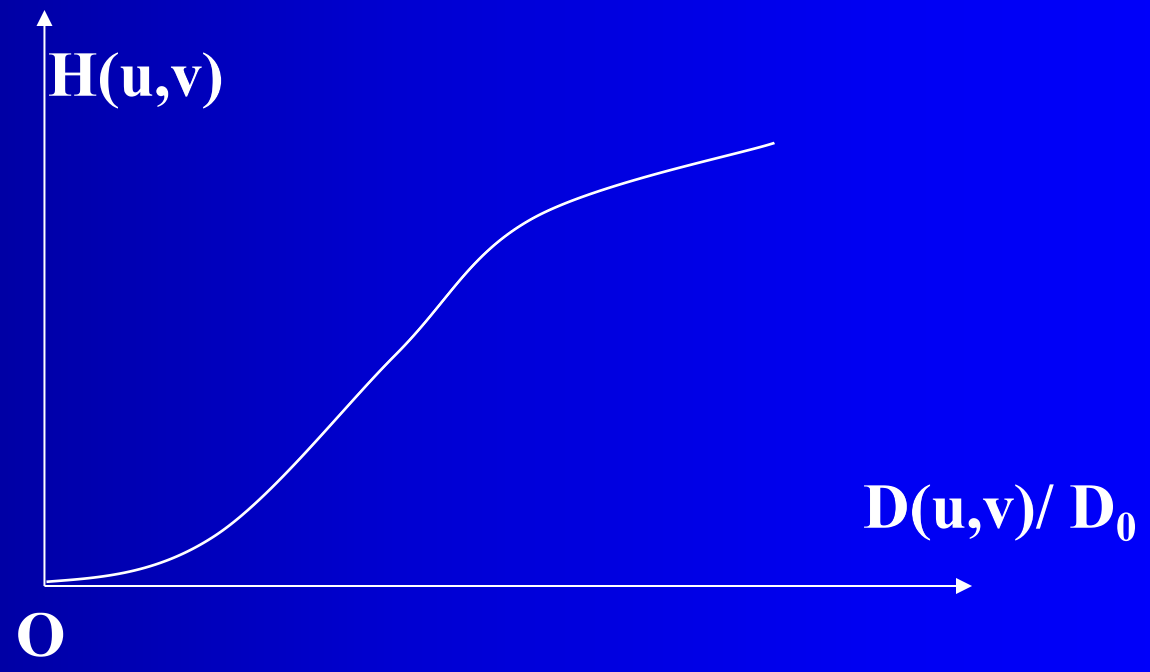
$$D(u,v)=\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}$$

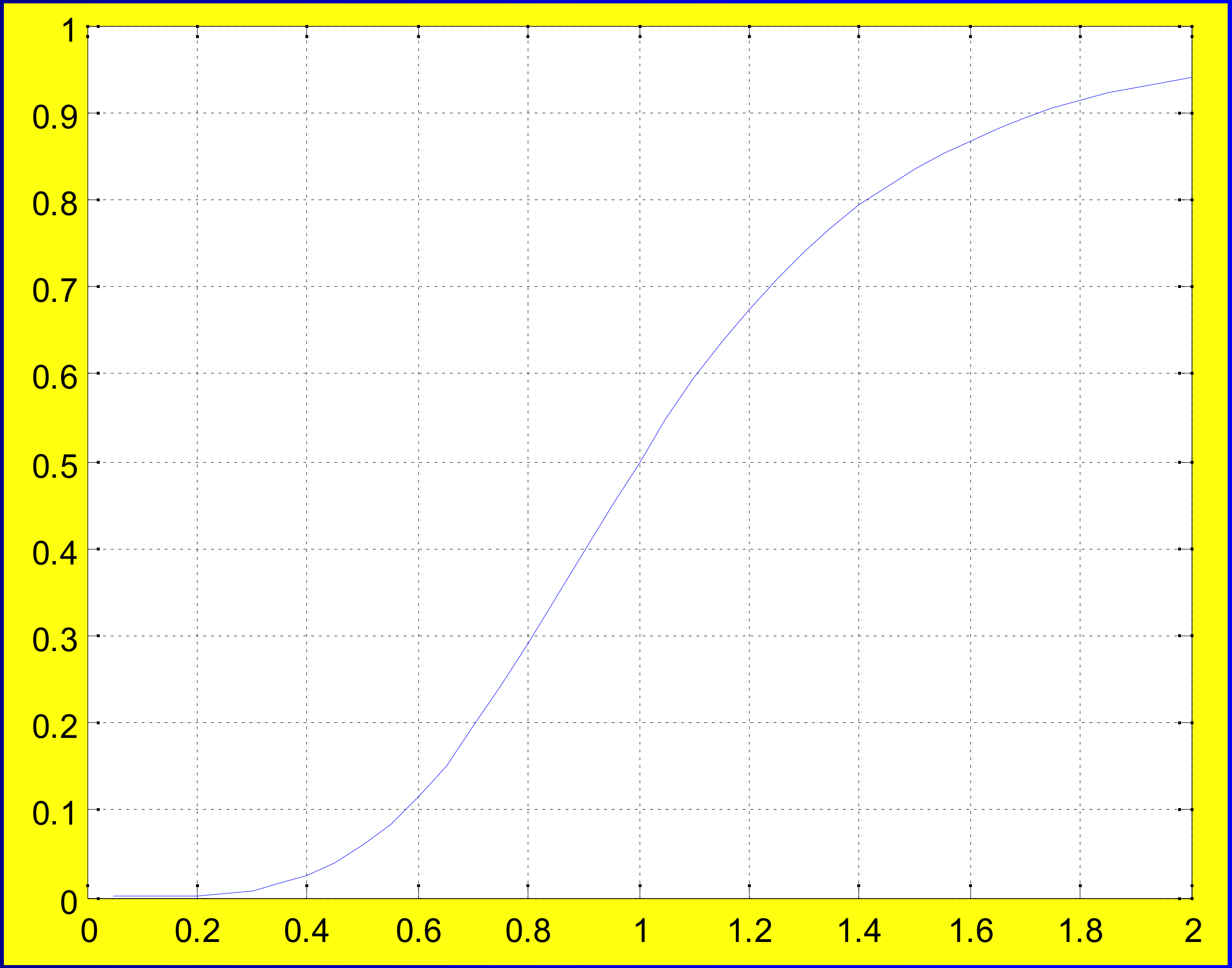
(u_0,v_0)是低频中心，D_0是滤波器的截止频率.



n=3

其传递函数径向剖面图为





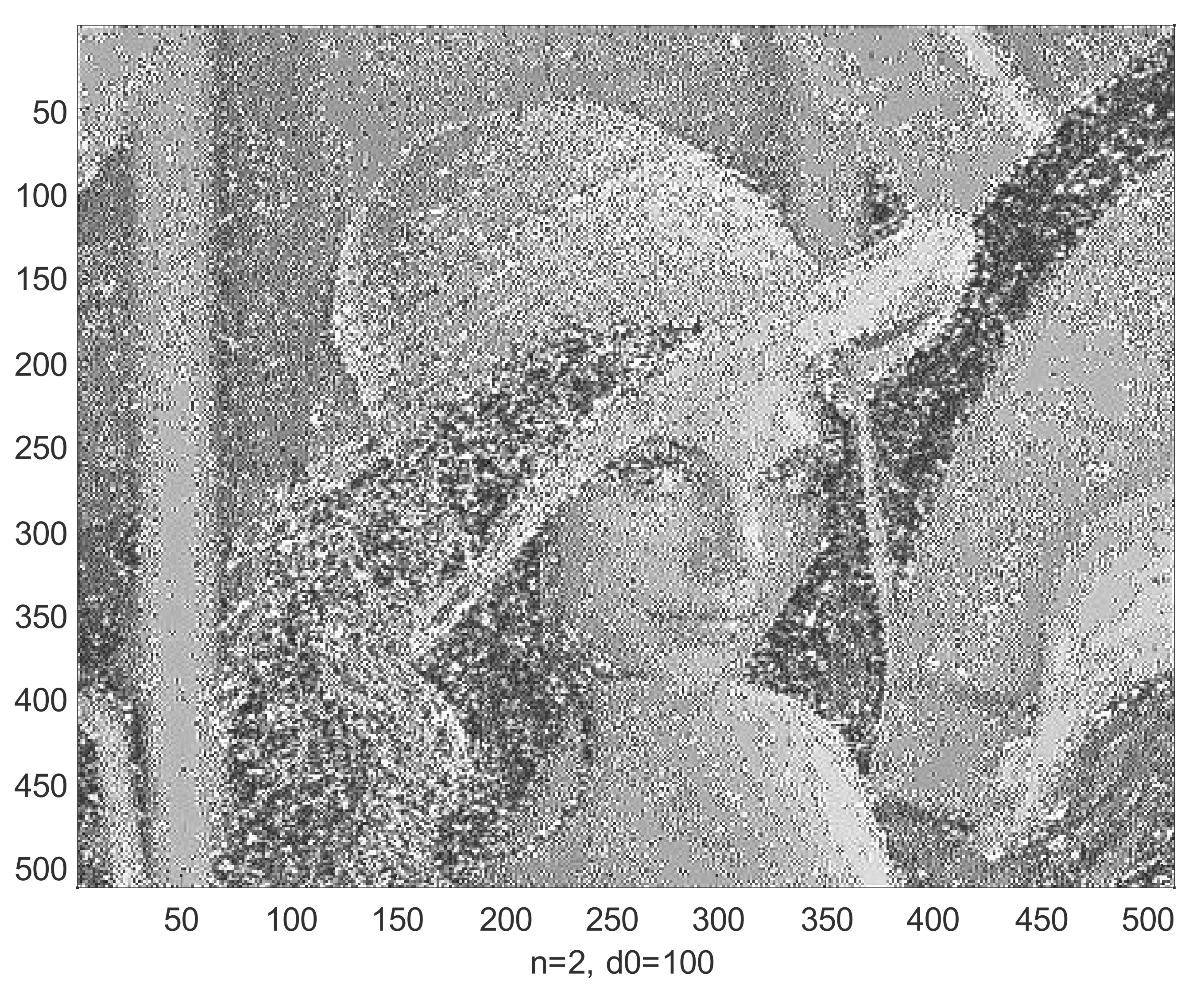
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

例13（仅供参考）

```
b=imread('t.gif');
%b=(a(:,:,1)+a(:,:,2)+a(:,:,3))/3;
colormap(gray);
imagesc(b);
c=size(b);
x=c(1);
y=c(2);
for i=1:x
    for j=1:y
    d(i,j)=double(b(i,j));
    end;
end;
e=fft2(d);
f=e;
n=-4;
d00=x/5;
d0=d00*d00;
for i=1:x
    for j=1:y
    f(i,j)=1/(1+(((i-x/2)^2+(j-y/2)^2)/d0)^n);
    end;
end;
g=f.*e;
h=ifft2(g);
imagesc(abs(h),[0,50]);
xlabel('n=-4, d0=100');
```


50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
50 100 150 200 250 300 350 400 450 500

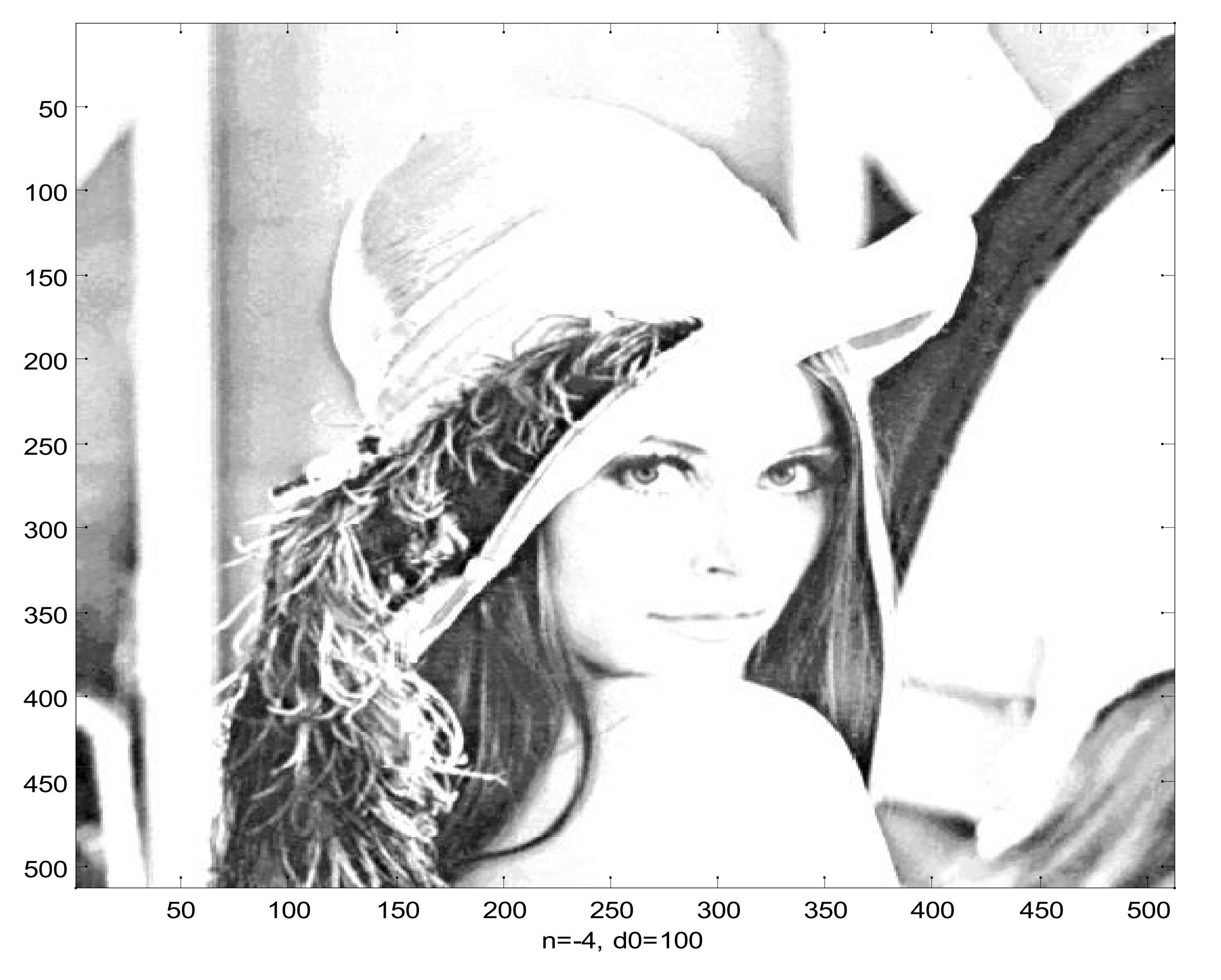

50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
n=3, d0=230


50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
n=2, d0=100


50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
n=4, d0=230


50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
n=-4, d0=230


50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
n=-2, d0=230


50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
n=-4, d0=100

低通和高通滤波器之间的关系

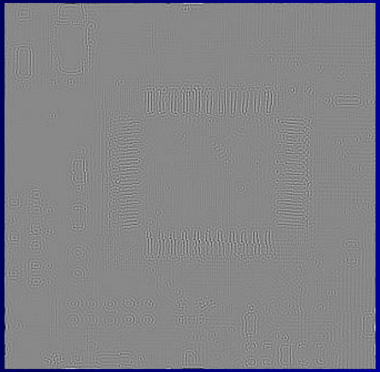
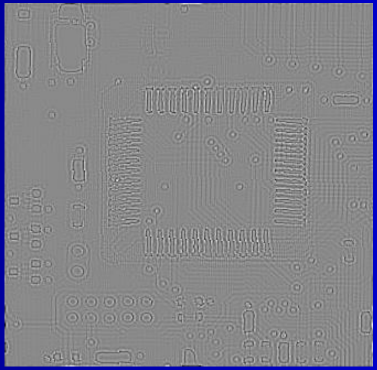
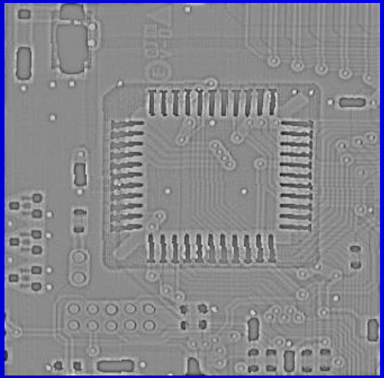
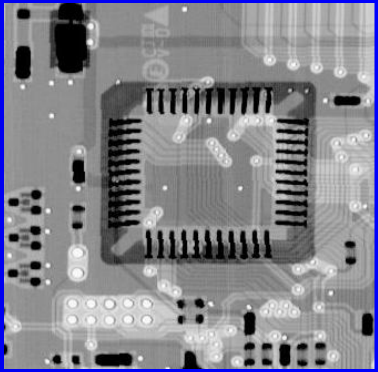
$$H_L(u,v) = \frac{1}{1+[\frac{D(u,v)}{D_0}]^{2n}}$$

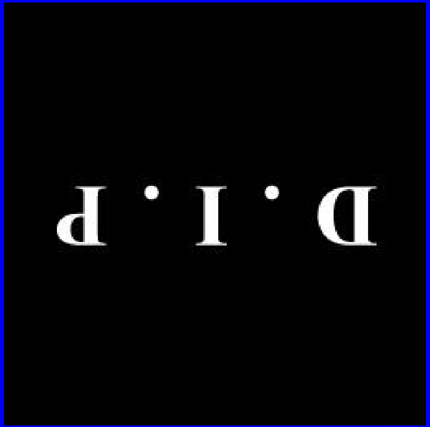
$$H_H(u,v) = \frac{1}{1+[\frac{D(u,v)}{D_0}]^{-2n}}$$

$$H_L(u,v) + H_H(u,v) = 1$$

提问

作业 4.41，4.43，4.57，4.58, 4.64 （第四版）

http://www.imageprocessingplace.com

提交截止日期：10月24日晚24点