补充知识：递推方程的特征方程求解

一、常系数线性递推方程的特征方程解法

1. 齐次常系数线性递推方程的特征方程解法

（1）定义：k阶齐次常系数线性递推方程:

(R): $H(n) = a_1H(n-1) + a_2H(n-2) + \dots + a_kH(n-k)$

其中：1）$a_1, a_2, \dots, a_k$为常数；

2）$a_k \neq 0$, $n \geq k$。

（2）定义：（R）对应的特征方程:

(E): $x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \dots - a_{k-1}x - a_k = 0$

(3) 求（R）的通解

1）若(E)有k个互不同的实根$x_1, x_2, \ldots, x_k$，则(R) 的通 解是：$H(n) = c_1x_1^n + c_2 x_2^n + \ldots + c_k x_k^n$

其中：c_1，c_2、…、c_k是常数，它由H(n)的初始条件确定（下同）。

2）若(E)存在e重根x_p（$e \geq 2$），即:(E)的根是:

$$x_1, x_2, \ldots x_{k-e}, \underbrace{x_p, x_p, \ldots, x_p}_{\text{共有e个}}$$

则(R)的通解是:

$$H(n) = c_1x_1^n + c_2 x_2^n + \ldots + c_{k-e} x_{k-e}^n$$

$$+ c_{k-e+1}x_p^n + c_{k-e+2}\, n\, x_p^n + \ldots + c_k\, n^{e-1} x_p^n$$

共轭虚根情况

3）若(E)有一对共轭虚根

$x_{1,2} = \rho(\cos\theta \pm i\sin\theta)$,则：

(R)的通解： $T(n) = c_1\rho^n \cos n\theta + c_2\rho^n \sin n\theta$

二、非齐次常系数线性递推方程的特征方程解法

（1）定义：k阶非齐次常系数线性递推方程:

(R’): $H(n) = a_1H(n-1)+a_2H(n-2)+\ldots+a_kH(n-k)+f(n)$

其中： 1）$a_1, a_2, \ldots, a_k$为常数；

2）$a_k \neq 0,\ n \geq k,\ f(n) \neq 0$。

（2）（R’）的解结构:

设：（R’）的通解是H(n)，且它有一个特解H*(n);

而与（R’)相对应的齐次方程(R)的通解是H’(n)。

则有（R’）的解：$H(n) = H'(n) + H^*(n)$

(3) (R')的特解形式讨论（可跳过）

1）当f(n) 形如bn^t(b≠0, t:非负整数）时，(R')的特解为：

$$H^*(n) = p_1 n^t + p_2 n^{t-1} + \ldots + p_t n + p_{t+1}$$

其中：$p_1, p_2, \ldots, \quad p_{t+1}$是待定系数。

但，当x = 1是(R)的 j 重特征根（j ≥ 1）时，其特解应

改设为： $H^*(n) = p_1 n^{t+j} + p_2 n^{t+j-1} + \ldots + p_{t+1} n^j$

2）当f(n) 形如 $b \cdot r^n$(b≠0, r ≠0 ）时，(R')的特解为：

$H^*(n) = p \cdot r^n$ 其中：p是待定系数。

但，当 x = r 是(R') 对应的(R)的 j 重特征根(j ≥ 1)时，

(R')的特解应改设为： $H^*(n) = p \cdot n^j \cdot r^n$