

# 让 3D 建模和数学“强关联”起来

## ——谈“数学建模和 3D 打印”课程的设计

■ 谢作如 周源远

**摘要：**本文以“数学建模和 3D 打印”课程为例，将数学教育与新兴科技相结合，培养学生的设计思维，提高学生的动手能力，通过教学案例及学生作品的分析将 3D 建模和数学“强关联”起来，对中小学创客课程和 STEAM 课程的设计，提供了可借鉴的经验。

**关键词：**数学建模；3D 打印；创客课程；STEAM 课程

### 一、课程开设的背景

近年来，3D 打印技术在社会各领域得到了广泛应用。3D 打印机作为创客空间的必备设备，已经“飞入寻常学校”，有些学校甚至配置了十多台，并开设了 3D 打印课程。但目前大多数 3D 打印课程往往侧重于作品的打印，其实 3D 作品的打印仅是学习结果的呈现，最值得学生学习的核心技术应该是 3D 建模。利用 3D 打印“边学边做”的特点，能够将抽象的数学概念形象化、直观化，激发学生对数学的学习兴趣。现有的 3D 建模软件关注如何用鼠标绘制出模型，与数学的关联有点“弱”。如果能将数学学习与 3D 建模很好地结合起来，不仅会拓展课程的深度和广度，还能够培养学生学以致用能力。

参数化建模是近些年流行起来的建模思想。它是指在一个模型中，通过参数来控制模型的尺寸、形状等特点，通过变更参数的方法来修改设计意图。若要实现这一功能，得依靠设计者利用数学知识构造出特殊的表达式。这是与数学结合非常紧密的 3D 建模思想，不仅有趣，还富有挑战性，让学生能够在造物的同时体验跨学科学习。基于以上认识，温州中学开设了“数学建模和 3D 打印”校本课程。

### 二、课程的设计

#### （一）课程目标

“数学建模和 3D 打印”课程以参数化建模为核心学习内容，重在培养学生的逻辑思维、数学建模思维以及 3D 空间设计能力，提高学生推理运算、

数据处理、分析和解决数学问题的能力，增强学生的创新意识。

课程的三维教学目标如下：1. 了解并学会使用基于编程的 3D 建模软件；掌握 3D 建模的一般过程；了解 3D 打印的基本流程，即建模、格式转换和打印。2. 能够利用数学中的相关知识点去分析、解释较复杂的模型结构特点，理解参数化建模的一般步骤，亲历跨学科学习的过程。3. 理解数学之美，能对现实世界中蕴含的数学知识进行思考并做出判断。

#### （二）建模软件选择

参数化建模软件并不多，如 OpenScad、UG、BlockSadd、3D 程序员等。考虑到 UG 的价格过高，而 OpenScad 编程门槛较高，BlockSadd 的功能偏弱，我们最终选择了 3D 程序员。3D 程序员是基于可视化编程语言 Google Blockly 开发的 3D 建模软件，只需拖曳所需要的积木，修改相应参数即可实现 3D 模型的快捷设计与生成。3D 程序员界面如图 1 所示。

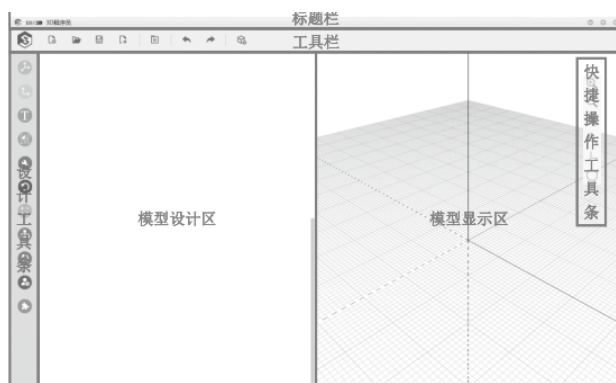


图 1 3D 程序员的软件界面概览图

3D 程序员的最大特色是, 能够利用各种数学基础模型的叠加和删减, 形成新的 3D 模型。软件中的模块运用都与数学知识密切相关, 软件不仅提供了 2D 图形、3D 图形和文字的输入, 甚至还能用各种函数绘制曲线。图形化的编程界面则降低了学习建模的门槛。

### (三) 课程内容和教学计划

“数学建模和 3D 打印”课程通过一系列源于生活的 3D 模型设计, 让学生熟悉建模软件中的基本模块或者指令, 如 2D 图形、3D 模型、2D/3D 文字、2D/3D 函数、布尔运算、凸壳处理、平移与缩放、镜像与旋转变换、2D 图形的平直与扭曲等多种拉伸造型以及旋转造型、数学运算与函数、逻辑与循环控制、自定义变量等, 最终结合数学知识完成个性化的 3D 模型设计。课程共设计了 18 课时, 分为四个单元。

#### 第一单元: 认识 3D 打印 (2 课时)

介绍 3D 建模和 3D 打印, 展示各种精彩的 3D 建模作品。

#### 第二单元: 从 2D 到 3D (6 课时)

设计铭牌、手镯、纽扣、笔搁、花瓶和手机支架等简单的生活小物品。从软件中的 2D 模型, 到拉伸、旋转、函数等高级功能, 建模难度不断提高。

#### 第三单元: 3D 设计基础 (6 课时)

设计杯盖、收纳盒、房屋模型、吊坠和笔筒等较复杂的生活小物品。从 3D 模型到布尔运算、变量、镜像、循环等复杂的功能, 让学生初步体验参数化建模。

#### 第四单元: 3D 综合设计 (4 课时)

设计复杂的花瓶、笼子、扇叶、拱桥等。结合数学计算和科学探究类的真实问题, 让学生完成有一定难度的 3D 模型, 进一步掌握参数化建模的技巧。

## 三、教学片段

### (一) 用函数设计笔搁

“用函数设计笔搁”是第二单元的教学内容。教师引导学生观察生活中常见的笔搁, 总结出笔搁的一般形状为山形, 即曲线的凹处搁置毛笔 (如图 2)。实现笔搁的设计建模, 核心工作是设计一个曲线面。

问题 1: 需要用到怎么样的曲线面? ——引导



图 2 笔搁

学生思考数学函数。

问题 2: 怎么得到曲线面的一部分? ——进一步学习函数取值范围的应用。

问题 3: 曲线的厚薄程度? ——进一步强调 2D 转化为 3D 图形时要与生活实际结合。

教师演示利用正弦函数  $\sin x$  的图像:  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ , 通过问题启发式教学法引导学生完成建模。建模过程如图 3 所示。

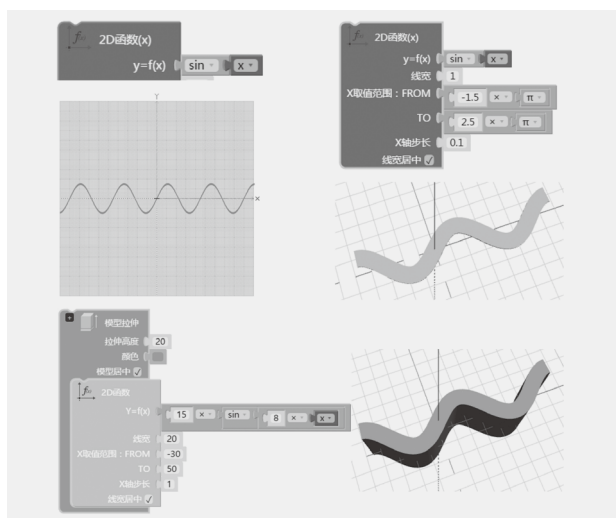


图 3 笔搁的建模过程

### (二) 扭曲的笼子

“扭曲的笼子”是第四单元的综合任务。教师引导学生观察图 4 中笼子的基本结构。笼子主要由底盘和筒身两部分组成。其中, 筒身是由多根柱子均匀排布而成的。教师提出问题“如何让柱子均匀地分布在底盘 (圆形) 的边缘”。均匀分割一个圆的边缘是能否实现笼子模型的关键。在 3D 建模中, 柱子与底盘的位置关系使用平面坐标  $(x, y)$  就可确定。

要想确定柱子的平面坐标  $(x, y)$ , 就需要一定的数学知识的支持。我们先设定柱子的平面坐标为  $(x, y)$ , 柱子的数量为 16 根。

思路 1: 通过圆的函数公式来寻找柱子的平面坐标  $(x, y)$

圆的函数公式可表示为



图 4 笼子

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ , 由于模型的中心位置为原点  $(0, 0)$ , 因此该圆的公式可以简化为  $x^2+y^2=r^2$ 。设定底盘的半径为 24, 则  $x$  的范围为  $[-24, 24]$ ,  $y$  坐标则可用  $x$  来表示,  $y=\pm\sqrt{24^2-x^2}$

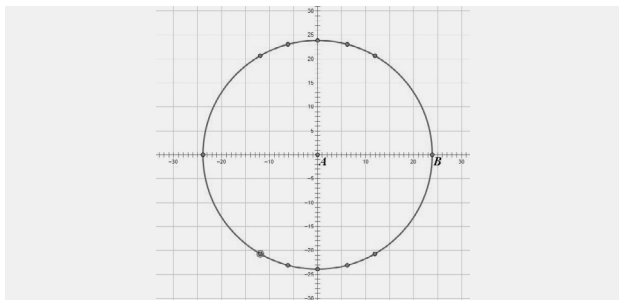


图 5 圆的函数曲线

然而如图 5 所示, 根据  $x$  坐标无法简单有效地实现柱子在底盘上的均匀分布, 因此我们放弃思路 1。

思路 2: 通过角度来确定柱子的  $xy$  平面坐标  $(x, y)$

要实现柱子在底盘上位置的均匀分布, 其实就是对底盘上进行 16 等分, 而这 16 个坐标位置则可以用角度  $\theta$  来表示。通过数学中的三角函数, 即可得出柱子的横坐标  $x=r\cos\theta$ , 纵坐标  $y=r\sin\theta$ ,  $r$  为底盘的半径,  $\theta$  的范围是  $[0, 360]$ , 如图 6 所示。

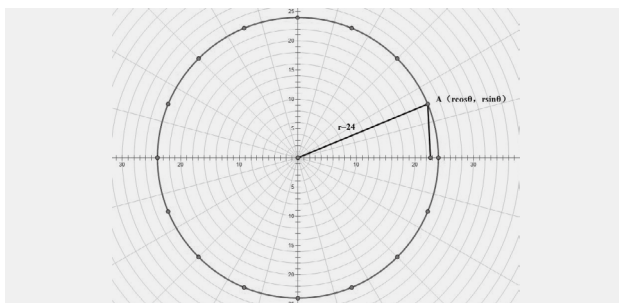


图 6 16 等分圆与每个等分点的  $xy$  平面坐标

按照思路 2 的分析, 在编程过程中代表角度的循环变量  $\theta$  的变化范围是 0 至 360 度, 步长为 22.5 (即:  $360/16$ ) 度, 柱子的平面坐标为  $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ,  $r=24$ 。

根据建模准备中的思路 2, 可以确定循环模块的几个参数设置。循环变量  $\theta$  的变化范围:  $0\sim 2\pi$ 。循环步长: 22.5 (即:  $\pi/8$ ) 度。16 根细柱子所在  $xy$  平面上的坐标公式:  $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ , 半径  $r$ : 24 (如图 7)。



图 7 在软件中编程实现



图 8 学生设计的篮子作品

完成对圆的均分后, 教师让学生进一步思考“如何使篮子扭曲一定的角度”, 再次强调高级拉伸的一些特殊用法, 可以让学生自己尝试, 在做中学。教师再引导

学生找出一个合适的表达式, 直接修改变量即可产生不同的模型, 来比较参数的最佳选择。最终, 学生设计出如图 8 所示的篮子。如果将柱子的数量 16 替换为变量  $c$ , 一个简单的参数化模型作品就设计完成了。

#### 四、课程特色

本课程从 2014 年开始开发, 一开始使用的是 OpenScad, 后来换成 3D 程序员, 一共上过多次, 不断迭代。学生们不仅设计出参数化的模型作品, 也设计出非常复杂的建筑模型 (如图 9), 其中输入参数, 就可以控制笔筒的孔数和大小, 或控制风扇的叶子数量。运用该软件, 学生还设计出了如图



图 9 学生设计出的参数化模型作品

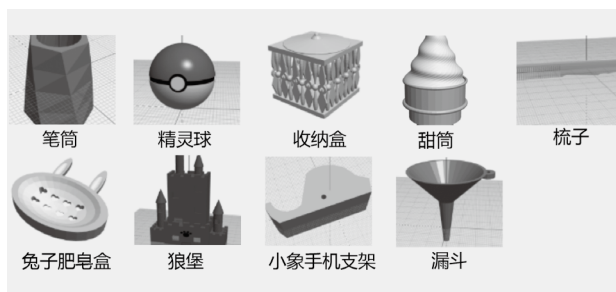


图 10 学生设计的部分作品



10 所示的 3D 作品。

具体分析,“数学建模和 3D 打印课程”有以下特色。

### (一) 让抽象的数学形象起来

“数学建模和 3D 打印”课程以 3D 建模为落脚点,用数学方法描述物体内外部的空间关系,用数学函数、数学运算符号与计算机语言创建模型,并用数学中的相关知识去解释、分析模型的形成和结构特点,提高学生解决问题的能力。在培养学生逻辑思维、3D 空间设计能力和数学建模思维的同时,提高学生推理论证、运算求解、数据处理等基本能力。

本课程精选的很多范例,都尤其关注数学知识的应用,尽可能让数学的学习和应用无痕地融入到模型设计的过程中。如第二单元的“从圆锥到手镯”一课中,教师让学生运用多种方式来制作圆锥。在数学中形成圆锥有两种途径:既可以由一个三角形绕着中轴线形成,也可以由无数个逐渐缩小的圆组成(如图 11)。在 3D 程序员中建模则可以清晰地看到圆锥的形成过程,让原本抽象又难以理解的数学学习过程变得直观。而在“用函数设计笔搁”“神奇的旋转”等案例中,教师则是鼓励学生对高中阶段学习的几个常见函数进行描述、建模,让学生对函数的图形有直观的认识。

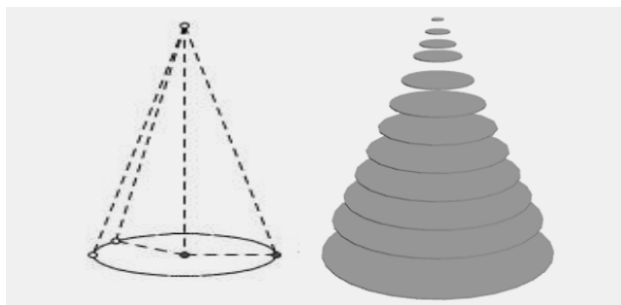


图 11 形成圆锥的两种途径

### (二) 初步体验数学建模

数学的重要应用便是建模。“数学建模和 3D 打印”课程就是以培养学生建模能力为目标之一的 STEAM 课程。从第二单元开始,课程围绕如何从二维平面建模拓展到三维空间模型的建立,逐步引入空间直角坐标系,让学生学会运用坐标系在 3D 空间中精确度量位置、距离和角度。第三单元则从几个基本几何模型(长方体、圆锥、圆环)的建立

开始,让学生掌握决定模型形状的几个参数。贯穿整个课程的是几个集合运算(交、并、补),即软件中的布尔交集、布尔合并、布尔裁剪等指令,这也是对高中数学必修一“集合”一章恰到好处的直观感受和实际应用,如图 12 所示。

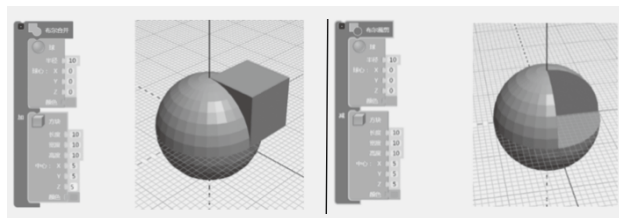


图 12 学生用模型作品体验集合的运算

建模一般分为提出问题、选择建模方法、推导模型的公式、求解模型等步骤。在这一课程中,学生无论是学习范例还是最终设计自己的个性化作品,都在不断重复经历这一建模过程。本课程强调的参数化建模方法,与直接建模相比虽然速度会慢一些,但从数学的角度提出了更高的要求。因为学生要找出模型的特征以及不同参数之间的关系,这些都是数学建模的核心能力。

让 3D 打印进入中小学课堂,是一件非常有意义的事情。借助于 3D 打印机,可以让学生亲身体验从无到有的设计、开发过程,使他们头脑中的想象、创意变成真实的事物。但是,3D 打印课程不能仅仅满足于学生将模型打印出来。本课程在 3D 建模与数学结合方面做了一些尝试,让学生在造物的过程中应用学科知识,同时提高学生的动手操作能力、创新意识和创新能力,希望对中小学教师开发、设计创客课程和 STEAM 课程有一定的借鉴价值。

#### 参考文献:

- [1] 谢作如.3D 打印进课堂,看上去很美[J].中国信息技术教育,2015(19):6-8.
- [2] 陈扬帆.数学视野下的 3D 打印课程设计[J].中国信息技术教育,2015(19):11-13.

(作者谢作如系浙江省温州中学创客教育工作室负责人、高级教师,周源远系温州大学教师教育学院教育技术专业学生)

责任编辑:牟艳娜