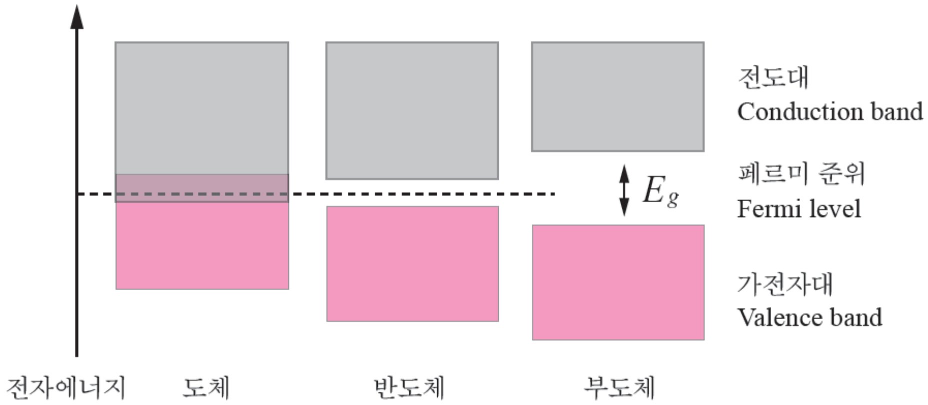
Ch. 5. 도체와 유전체

- Ch. 2~ 4: 진공공간에서 전기장 세기를 구함
- Ch. 5: 도체, 유전체, 또는 복합매질에서 전기장 세기를 구함

5-1. 도체(Conductor)

도체의 특성



- 도체(Conductor): 밴드갭이 없거나 매우 작아서 전자가 손쉽게 전도대로 이동
- 부도체(Insulator): 밴드갭이 너무 커서 전도대로 전자의 이동이 불가능
- 반도체(Semiconductor): 중간 정도 밴드갭 → 외부에너지를 가하면 도체로 동작

* 에너지 밴드갭(Band gap): 전자가 존재할 수 없는 에너지층

전기전도율(Electrical Conductivity)

전하가 매질의 내부를 쉽게 이동할 수 있는 정도

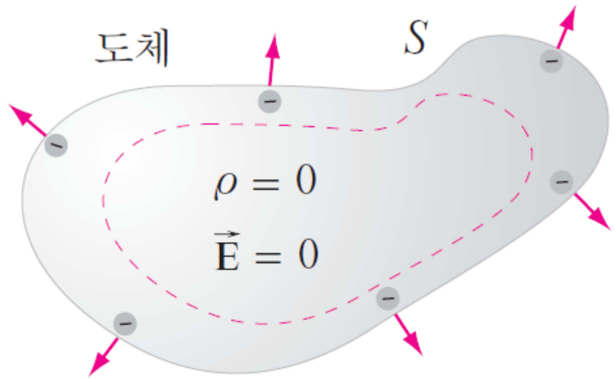
- 완벽한 도체: $\sigma = \infty$
- 완벽한 부도체: $\sigma = 0$

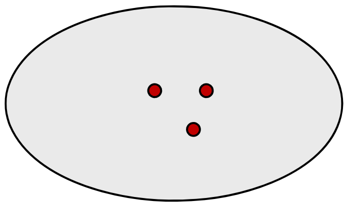
표 5-1 다양한 매질의 전도율 @ 20°C[1)]

물질	전도율 σ (S/m)
은	6.2×10^{7}
구리	5.8×10^{7}
금	4.1×10^{7}
철	10^{7}
바다물	4
실리콘	4.4×10^{-3}
민물	10^{-3}
유리	10^{-12}
고무	10^{-17}
PET	10^{-24}

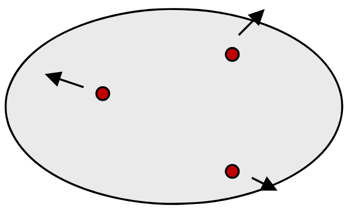
도체내부 전기장 세기는 0

정전기장(Electrostatic Fields) 조건에서,





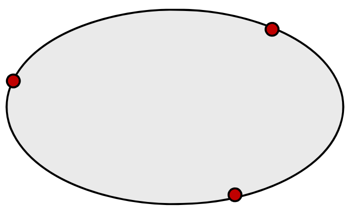
1. 도체내부에 자유전하가 있다면,



2. 모든 전하는 전기력에 의해서 도체의 표면까지 밀리고,

→ 도체 내부의 전하량=0 → 도체 내부의 전기장 세기=0

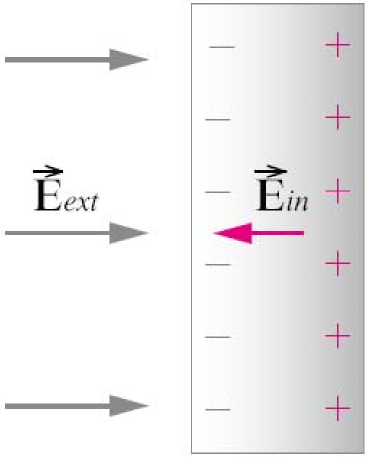
↓ Gauss's law



3. 측면방향 힘의 균형을 이루면 전하는 움직임을 멈춘다.

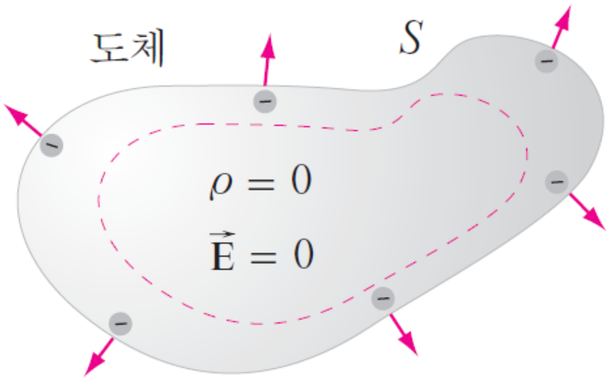
→ 표면에 수직한 전기장만 존재

외부 전기장을 가해도 도체내부 전기장 세기는 0



- 외부 전기장에 의해서 전자가 도체 표면으로 이동
- 전자의 이동에 의해서 내부전기장 $\vec{E}_{in}$ 가 생성
- 내부전기장과 외부전기장이 상쇄되어 도체 내부 전기장 세기는 0

도체의 전기적 특성



① 내부에 자유전하가 존재하지 않음
② 내부 전기장 세기가 0
③ 모든 부위의 전위가 동일한 등전위체

$$\vec{E} = -\nabla V = 0 \longrightarrow V = \text{Const.}$$

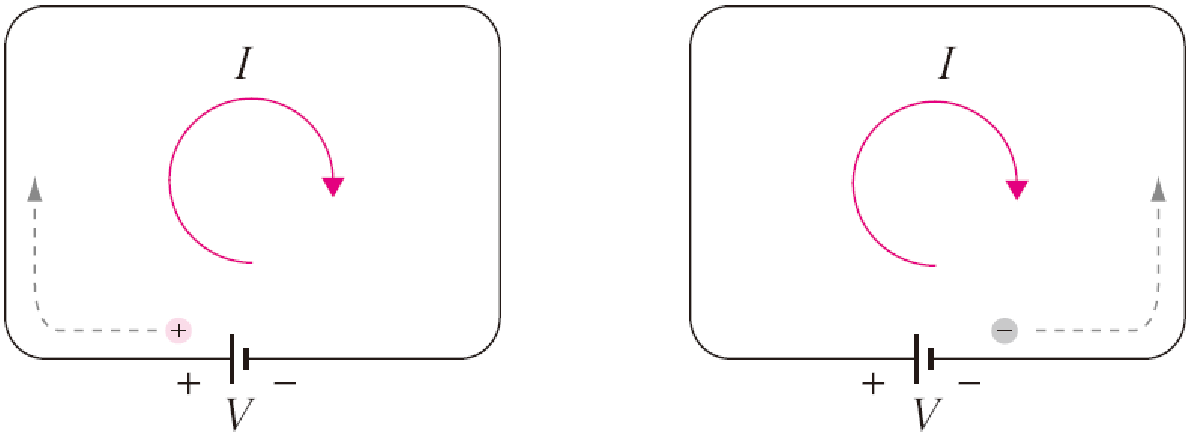
5-1-2. 전류(Electric Current)

전류의 정의

전류: 기준면을 통과하는 전하량 변화의 속도

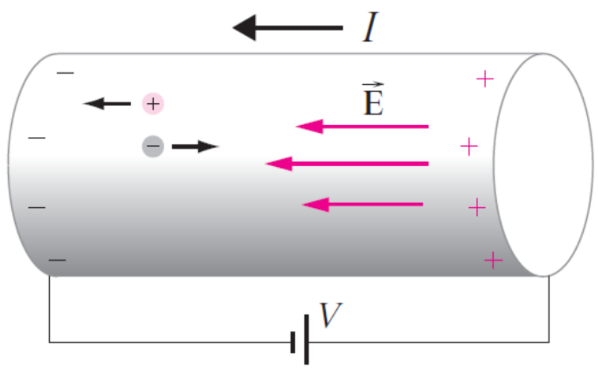
$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \ \text{(A)}$$

전류 방향



- Benjamin Franklin: 전류는 양전기가 흐르는 것 (+ → −)
- 실제로는 음전기(전자)가 흐르는 것 (− → +)
- 혼란을 염려하여 이전의 전류방향(+ → −)을 유지함

전류: 전기장에 의한 전하의 흐름



- 전류는 특정방향으로의 전하량 변화
- 전기장이 전자에 전기력을 가하는 경우에만 전류가 흐름
- 전기장은 전위차에 의해서 발생

$$V \longrightarrow \vec{E} = -\nabla V \longrightarrow \vec{F} = Q\vec{E} \longrightarrow i = \frac{dQ}{dt}(\mathrm{A})$$

저항, 옴의 법칙, 전자의 이동속도

- 저항: 전기장에 의해서 움직이는 전자가 이동 중에 방해 받는 정도

  (손실되는 에너지가 열로 방출 → 저항이 뜨거워짐)

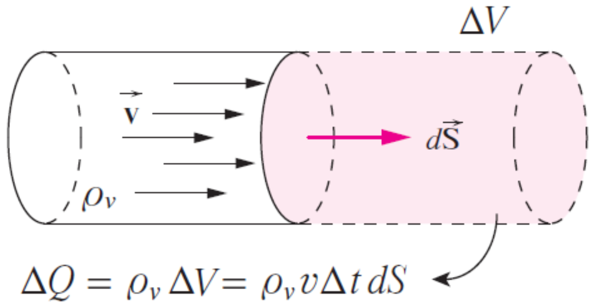
- 옴의 법칙: 전위차가 클수록, 저항이 작을수록 전자의 이동속도는 빨라짐

  → 전류는 증가 $I = \frac{V}{R}\ (\mathrm{A})$

- 전자의 이동속도: 도선내 전자의 움직임은 느린 편임. 빠른 전기신호의 전달은 전자기파에 의한 것임

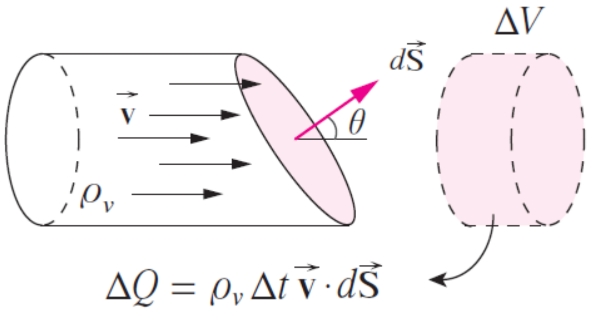
5-1-3. 전류밀도(Current Density)

도선의 전류와 달리 면, 체적도체에 흐르는 전류는 전류밀도를 이용하여 정의



전류와 기준면의 방향이 동일한 경우

$$\Delta Q = \rho_v \Delta V = \rho_v (\Delta l)(dS) = \rho_v v \Delta t\, dS$$



임의의 상대각을 가정한 경우

$$\Delta Q = \rho_v \Delta t\, \vec{\mathbf{v}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_v \vec{\mathbf{v}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \longrightarrow \vec{\mathbf{J}} = \rho_v \vec{\mathbf{v}} \quad (\mathrm{A/m^2})$$: 전류밀도(current density)

예제 5-1

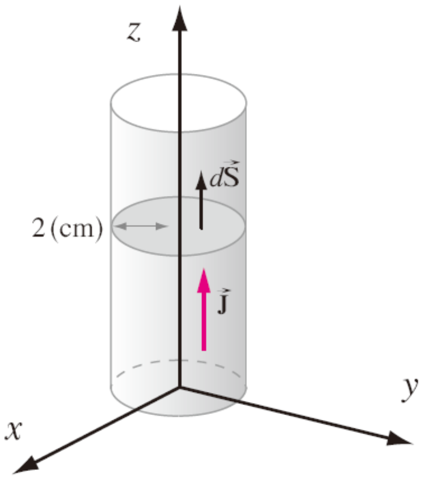
$\vec{\mathbf{J}} = 10^2 \sin\theta\, \hat{\mathbf{r}}$ (A/m²)일 때, $r = 0.2$ (m)인 구형 폐곡면을 통과하는 전류를 구하라.

$$d\vec{\mathbf{S}} = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{\mathbf{r}}$$

$$I = \oint_S \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} 10^2 (0.2)^2 \sin^2\theta\, d\theta\, d\phi = 39.5 \text{ (A)}$$

예제 5-2

반지름이 2(cm)인 원통형 도체의 축을 따라서 흐르는 전류의 밀도가 $J = 10^3 e^{-100\rho}$ (A/m^2)이다. 도체의 내부를 흐르는 전류를 구하라.



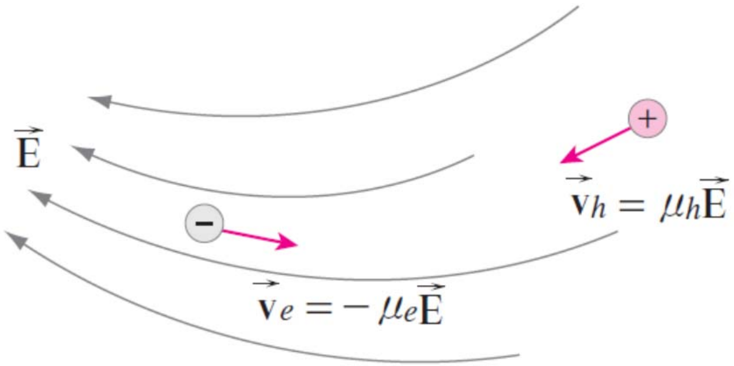
$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{0.02} 10^3 e^{-100\rho} \rho \, d\rho \, d\phi = 10^3 (2\pi) \int_0^{0.02} e^{-100\rho} \rho \, d\rho$$

부분적분 공식 $\int fg' = fg - \int f'g$ 를 적용하면 $f = \rho,\ g' = e^{-100\rho}$ 이므로,

$$I = 10^3 (2\pi) \left[-\frac{\rho}{100} e^{-100\rho} \Big|_0^{0.02} - \int_0^{0.02} \left(-\frac{1}{100} e^{-100\rho} \right) d\rho \right]$$

$$\simeq 0.37 \ \text{(A)}$$

전하 표류속도(Drift Velocity)



전기장에 의한 전하의 이동속도

$$\vec{v}_e = \boxed{-\mu_e}\vec{E}\ \text{(m/s)}$$: 전자(electron)의 표류속도

$$\vec{v}_h = \boxed{\mu_h}\vec{E}\ \text{(m/s)}$$: 정공(hole)의 표류속도

→ 전하의 이동도(mobility)

전도율(Conductivity)

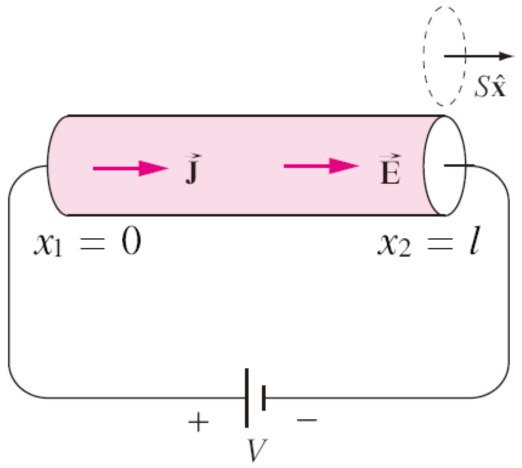
$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{J}}_e + \vec{\mathbf{J}}_h = \rho_e \vec{v}_e + \rho_h \vec{v}_h$$
$$= (-\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h)\vec{\mathbf{E}}$$
$$= \sigma \vec{\mathbf{E}} \ \ (\mathrm{A/m^2})$$

$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h$: 전도율(conductivity)

부도체: $\sigma = 0, \vec{\mathbf{J}} = 0$

완전한 도체: $\sigma = \infty$

도체 저항(Resistance)



$$V = -\int_{-}^{+} \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{l} = -\int_{x=l}^{0} E\hat{\mathbf{x}} \cdot dx\,\hat{\mathbf{x}} = El \ \ (\mathrm{V})$$

$$I = \int_S \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_S \sigma E\hat{\mathbf{x}} \cdot dS\,\hat{\mathbf{x}} = \sigma ES \ \ (\mathrm{A})$$

$R = \dfrac{V}{I} = \dfrac{l}{\sigma S} \ (\Omega)$ → 저항은 길이에 비례하고, 전도율과 단면적에 반비례

예제 5-3

지름이 1.3 (mm), 길이가 1 (km)인 구리선의 저항을 구하라. 이 도선에 10 (A)의 전류가 흐를 때, 전류밀도, 양쪽 끝단의 전위차, 구리선 내부의 전계강도, 그리고 소모되는 파워를 구하라.

구리의 전도율은 $\sigma = 5.8 \times 10^7$ (S/m)

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{10^3}{(5.8 \times 10^7)\pi(0.65 \times 10^{-3})^2} \simeq 13\ (\Omega)$$

$$J = \frac{I}{S} = \frac{10}{\pi(0.65 \times 10^{-3})^2} \simeq 7.53 \times 10^6\ (\mathrm{A/m^2})$$

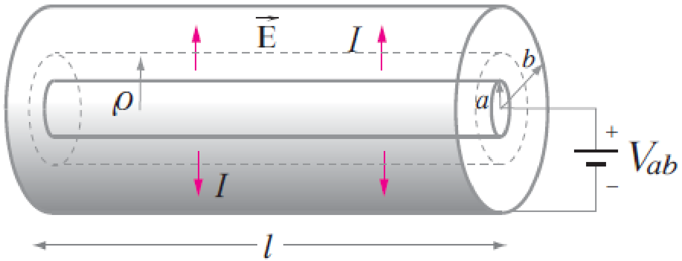
$$V = IR = 10 \times 13 = 130\ (\mathrm{V})$$

$$E = \frac{V}{l} = \frac{130}{1,000} = 0.13\ (\mathrm{V/m})$$

$$P = VI = 130 \times 10 = 1,300\ (\mathrm{W})$$

예제 5-4

길이가 l인 동축케이블의 안쪽에서 바깥쪽 도체로 흐르는 총전류가 I일 때, 도체 사이 부도체의 저항을 구하라.



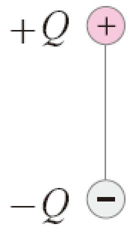
$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{2\pi\rho l} \longrightarrow \vec{\mathbf{J}} = \frac{I}{2\pi\rho l}\hat{\boldsymbol{\rho}} \ (\mathrm{A/m^2})$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{J}}}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma\rho l}\hat{\boldsymbol{\rho}} \ (\mathrm{V/m})$$

$$V = -\int_{-}^{+} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -\int_{b}^{a} \frac{I}{2\pi\sigma\rho l}\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{I}{2\pi\sigma l}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \ (\mathrm{V})$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma l}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \ (\Omega)$$

5-2. 전기쌍극자(Electric Dipole)

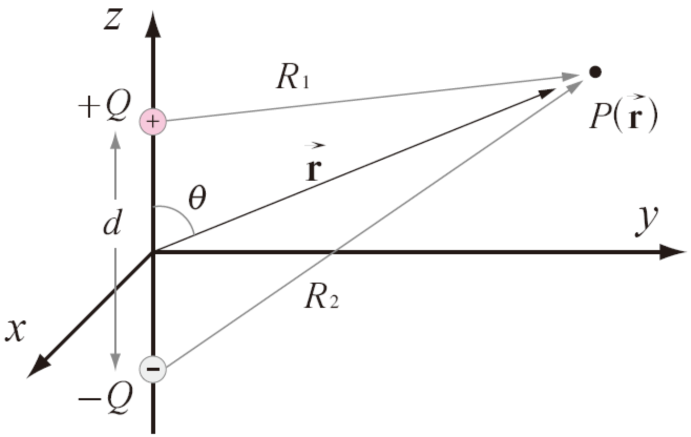


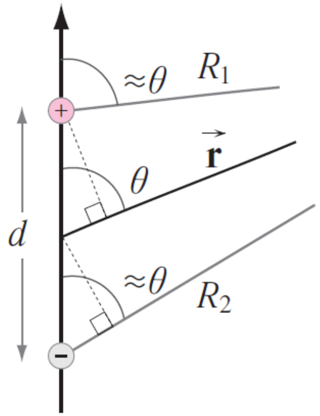
쌍극자(Dipole):

◆ 크기는 같고 극성이 다른 두 전하가 아주 작은 거리만큼 분리된 구조

◆ 부도체 내부의 전기장 분포에 중요한 역할을 함

쌍극자에 의한 전위와 전기장 세기





쌍극자에 의해서 형성되는 전위와 전기장 세기

$$V(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{(r - \frac{d}{2}\cos\theta)(r + \frac{d}{2}\cos\theta)}$$

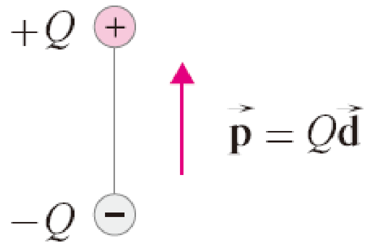
$$\approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\cos\theta}{r^2} \quad (\mathrm{V})$$

$$\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\nabla V$$

$$= -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}\right)$$

$$= \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\theta})$$

쌍극자 모멘트

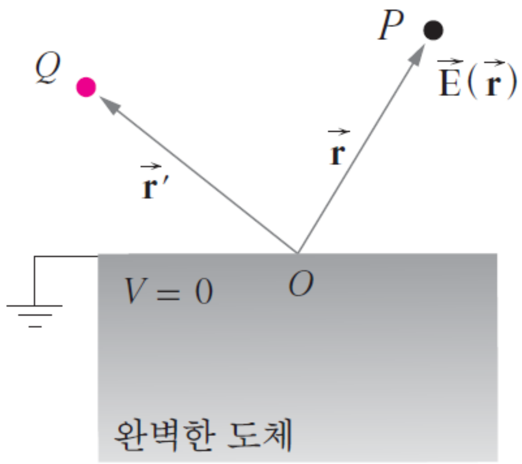


쌍극자 모멘트: 쌍극자를 표현하는 물리량 $\vec{\mathbf{p}} = Q\vec{\mathbf{d}} \ \ (\mathrm{C \cdot m})$

쌍극자에 의한 전위는, $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \ \ (\mathrm{V})$

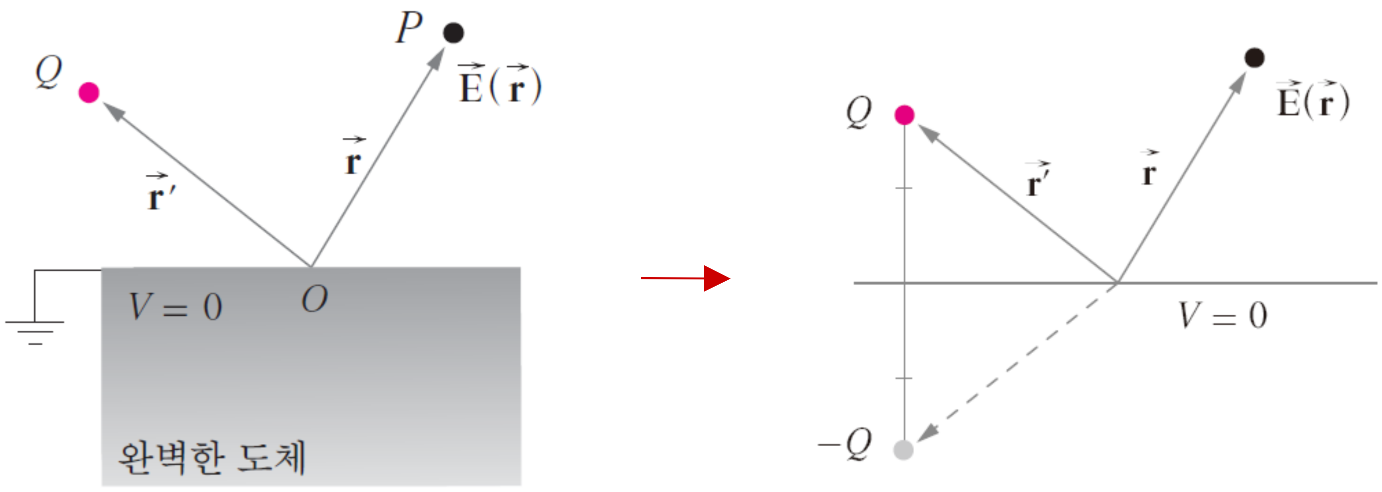
5-3. 영상법(Image Method)

접지된 도체위 전기장 분포



- 도체 표면의 전하분포를 알지 못함 → 쿨롱 법칙, 가우스 법칙 적용 불가
- 기존 방법으로는 접지된 도체 위 전기장 분포 계산 불가

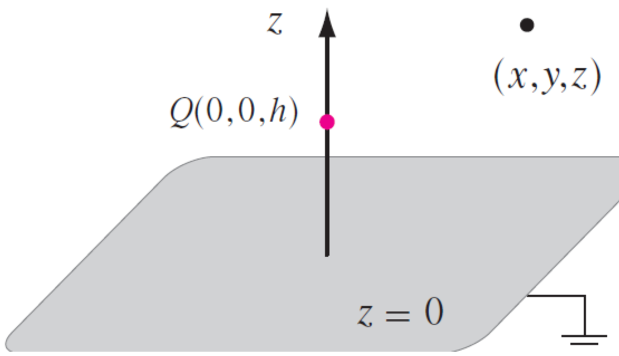
쌍극자의 대칭성을 이용하는 영상법



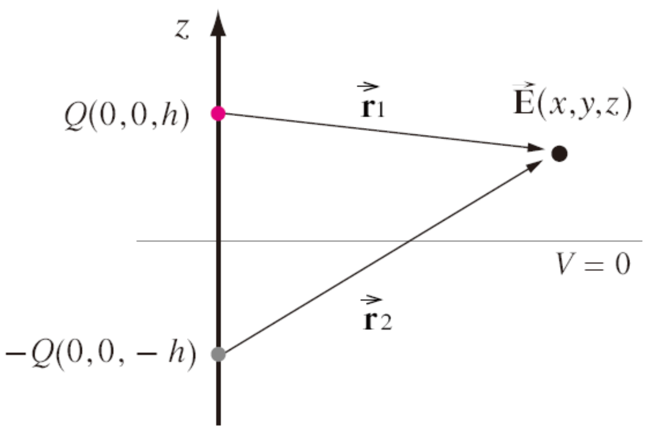
- 전하와 대칭인 위치에 극성이 반대인 영상전하를 놓아 접지된 도체와 동일한 전기적 환경을 구성
- 등가 환경으로부터 접지된 도체 위의 전기장 세기를 구할 수 있음
- 점전하 외에 선전하, 체적전하에도 영상법을 적용할 수 있음

예제 5-5

영상법을 이용하여 접지된 평면도체 위의($z = h$) 점전하 Q에 의한 전계강도 $\vec{E}(x,y,z)$를 구하라.



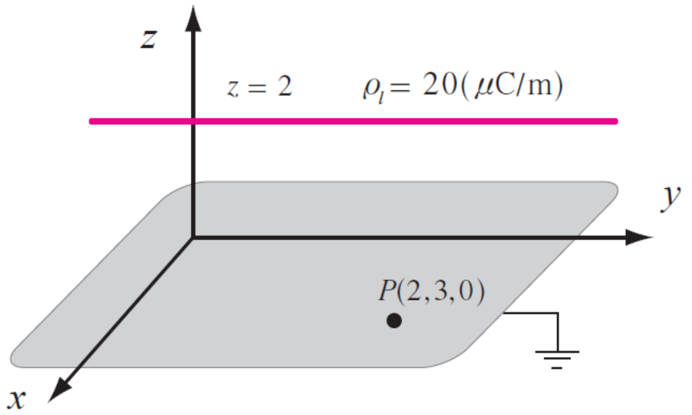
$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{Q\vec{r}_2}{r_2^3}\right)$$

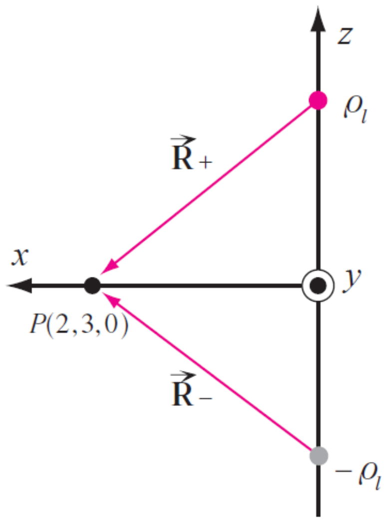


$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x\hat{x} + y\hat{y} + (z-h)\hat{z}}{\left[x^2+y^2+(z-h)^2\right]^{3/2}} - \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + (z+h)\hat{z}}{\left[x^2+y^2+(z+h)^2\right]^{3/2}}\right)$$

예제 5-6

접지된 평면도체가 $x-y$ 평면 위에 있다. 이 도체 위쪽 공간 $x=0, z=2$로 정의되는 선상에 $\rho_l = 20\,(\mu C/m)$인 무한히 긴 선전하가 있을 때 $P(2,3,0)$에서 $\vec{E}$를 구하라.





$$\vec{R}_+ = 2\hat{x} - 2\hat{z} \qquad \vec{R}_- = 2\hat{x} + 2\hat{z}$$

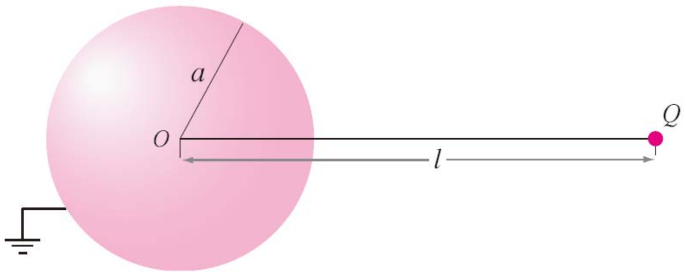
$$\vec{E}_+ = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 R_+}\hat{R}_+ = \frac{20\times10^{-6}}{2\pi\varepsilon_0(2\sqrt{2})}\frac{(2\hat{x}-2\hat{z})}{2\sqrt{2}}$$

$$\vec{E}_- = \frac{-\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 R_-}\hat{R}_- = \frac{-20\times10^{-6}}{2\pi\varepsilon_0(2\sqrt{2})}\frac{(2\hat{x}+2\hat{z})}{2\sqrt{2}}$$

$$\vec{E} = \frac{-80\times10^{-6}}{2\pi\varepsilon_0(8)}\hat{z} = -1.8\times10^{5}\hat{z}\ \ (V/m)$$

예제 5-7

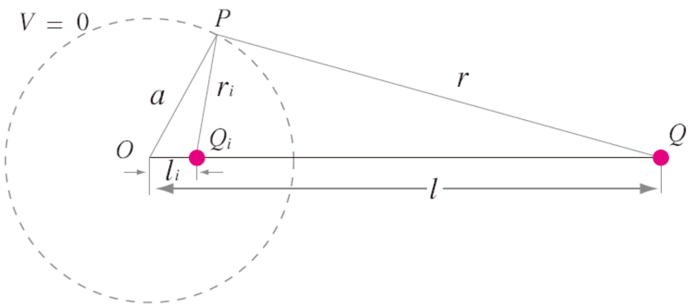
중심이 원점에 위치하며 반지름이 a인 구형 도체가 접지되어 있다. 등가 전하분포를 만들기 위한 영상전하의 전하량과 위치를 구하라.



$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{Q_i}{r_i}\right) = 0$$

위 식이 성립하기 위해서는,

$$\frac{Q}{r} + \frac{Q_i}{r_i} = 0 \longrightarrow \frac{r_i}{r} = -\frac{Q_i}{Q}$$



삼각형 OQP와 OPQ_i는 닮은 꼴 삼각형이다. 따라서,

$$\frac{l_i}{a} = \frac{a}{l} = \frac{r_i}{r}$$

$$\rightarrow \quad Q_i = -\frac{a}{l}Q \text{ (C)}, \quad l_i = \frac{a^2}{l} \text{ (m)}.$$

5-4. 부도체 또는 유전체(Insulator or Dielectric Material)

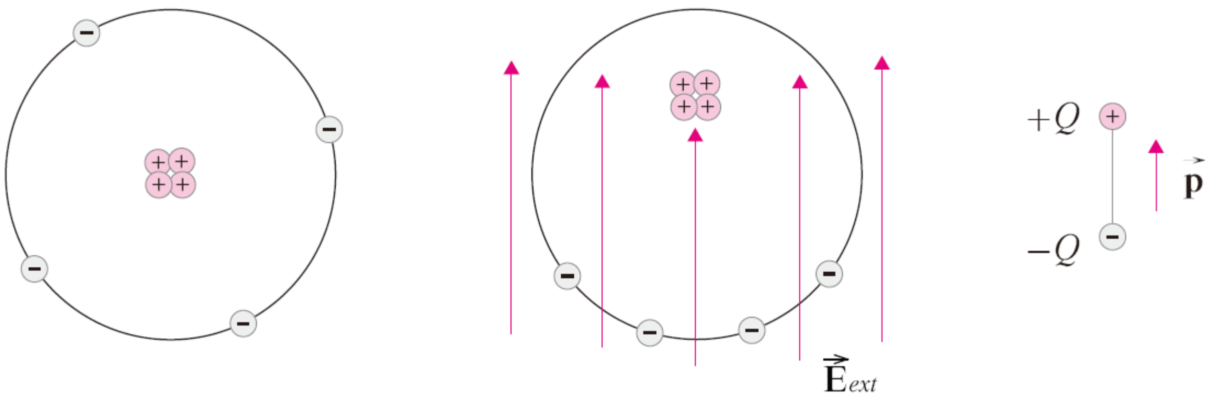
5-4-1. 부도체(유전체)의 전기적 물성

부도체의 편극화

전기장에 의해서 부도체 원자의 전기적 중심점이 분리

→ 편극화(polarization)

→ 편극화된 원자는 쌍극자 모멘트를 형성

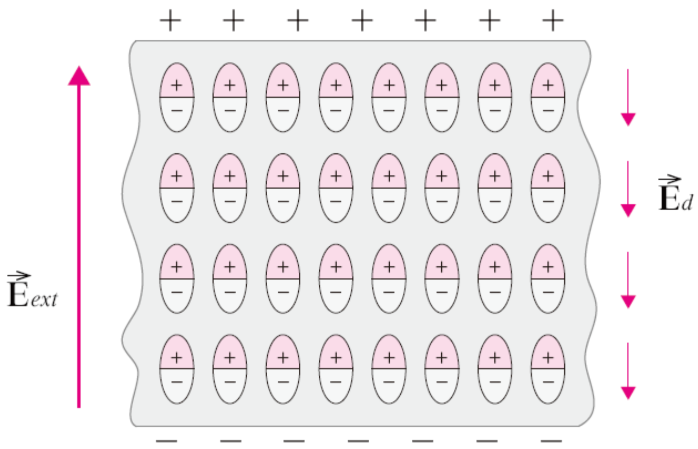


편극장의 형성

편극화된 원자들은 부도체의 양쪽 표면에 서로 다른 극성의 표면전하밀도를 형성

→ 내부 전기장(편극장) 형성

→ 부도체 내부의 전기장 세기는 외부전기장보다 작아짐



$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_d < \vec{E}_{ext}$$

유전체(Dielectric Material)

외부 전기장보다 작은 내부 전기장을 형성하는 물질 $\vec{\mathbf{E}} < \vec{\mathbf{E}}_{ext}$

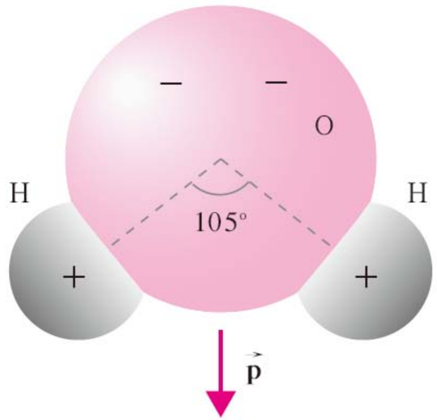
- 부도체(nonconducting material): 도체의 상대적인 개념
- 절연체(insulator): 전류가 흐르지 않게 하는 용도를 강조
- 유전체(dielectric material): 전기장에 의한 편극현상을 강조

↓

동일한 물질

극성 물질(Polar Material)

외부 전기장이 없어도 영구적인 쌍극자의 분자구조를 가지는 물질



물분자

물분자의 영구적 쌍극자 모멘트를 이용 → 전자레인지(microwave oven)

5-4-2. 유전체 내부의 전속변화

편극화에 의한 전하량 변화

- 부도체 내부에 편극장 형성 → 전하의 생성? → No!
- 전하량 보존의 법칙에 따르면 전하는 새롭게 생성될 수 없음
- 알짜 전하량의 변화는 없지만 쌍극자 생성에 의한 전하의 재분배에 의해서 일정한 체적 내부의 전하량 변화가 발생한 것

편극강도(Intensity of Polarization)의 정의

편극장: 쌍극자의 정렬에 의해서 전하가 새롭게 배치되어 발생한 것

→ 쌍극자에 의해서 유전체의 전기적 특성이 결정됨

$$\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}}) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{p}}_i \quad (\mathrm{C/m^2})$$

편극강도: 단위체적 내부 쌍극자 모멘트의 합

→ 편극장에 의해서 발생한 전속밀도

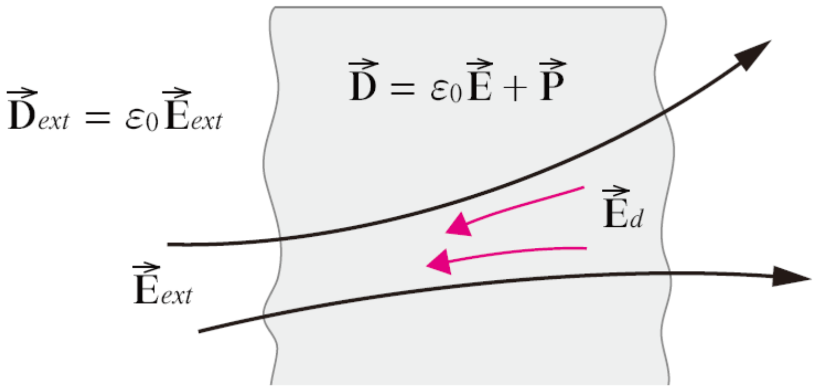
단위: $(\mathrm{C/m^2})$

유전체 내부의 전속밀도

진공의 전속밀도 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}\ (\mathrm{C/m^2})$

유전체 내부의 전속밀도 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\ (\mathrm{C/m^2})$

가우스 법칙 적용 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = Q \longrightarrow \varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q + Q_P$



$Q_P = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$: 편극화에 의해서 형성된 편극전하량

↓

진공과는 다른 전기장 세기

전기감수율(Electric Susceptibility)

- 전기장 인가 → 편극장 형성
- 편극강도는 전기장 세기에 비례

$$\vec{\mathrm{P}} = \chi(\vec{\mathrm{E}})\vec{\mathrm{E}} \simeq \varepsilon_0 \chi_e \vec{\mathrm{E}}$$

χ_e : 전기감수율(electric susceptibility)

등방성(isotropic) 또는 선형(linear) 유전체

(비등방성(anisotropic) 유전체: 전기장과 편극의 방향이 다른 유전체)

비유전율(Relative Permittivity)과 절대유전율(Permittivity)

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon\vec{\mathbf{E}}$$

$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$: 비유전율(relative permittivity)

$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$: 절대유전율(permittivity)

5-2 몇가지 유전체의 비유전율

유전체	비유전율 ε_r
진공	1
공기	1.0006
기름	2.1
종이	2 ~ 4
폴리에틸렌	2.3
고무	2.3 ~ 4
흙	3 ~ 4
유리	4 ~ 10
운모(mica)	5.4 ~ 6
실리콘(Si)	12
바다물	72

유전체 내부의 전기장 세기

i) 외부 전기장에 의해서 유전체 내부에 편극장(쌍극자 모멘트)이 형성된다.

ii) 각 유전체의 편극화 정도는 비유전율 ε_r으로 표시한다.

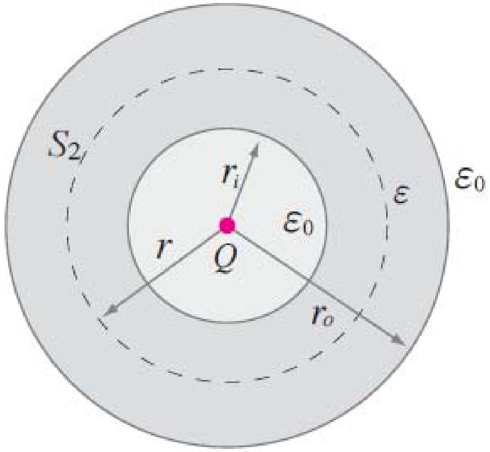
iii) 편극장의 영향으로 유전체 내부의 전기장 세기는 진공에 비하여 작다.

iv) 가우스 법칙으로 $\vec{\mathrm{D}}$를 구하고 식 (5-26)에 대입하여 유전체 내부의 전기장 세기 $\vec{\mathrm{E}}$를 구할 수 있다.

$$\vec{\mathrm{D}} = \varepsilon_0(1 + \chi_e)\vec{\mathrm{E}} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{\mathrm{E}} = \varepsilon\vec{\mathrm{E}} \tag{5-26}$$

예제 5-8

그림은 가운데가 구 형태로 비어있는 유전체($\varepsilon_r = 2$) 구이다. 그 중심에 양전하 Q가 있을 때, 각 위치에서 전기장 세기를 구하라.



i) $0 < r < r_i$

$$\oint_{S_1} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \varepsilon_0 E(4\pi r^2) = Q \longrightarrow \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \ \ (\mathrm{V/m})$$

ii) $r_i < r < r_o$

$$\oint_{S_2} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \varepsilon E(4\pi r^2) = Q \longrightarrow \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \ \ (\mathrm{V/m})$$

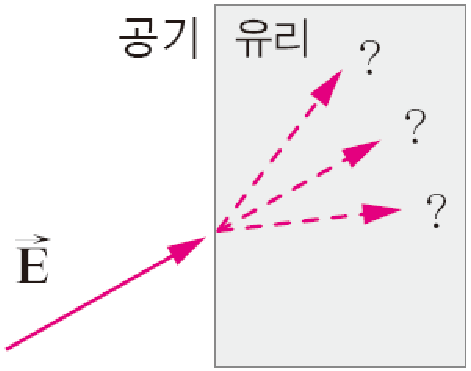
iii) $r > r_o$

i)의 경우와 동일하게,

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \ \ (\mathrm{V/m})$$

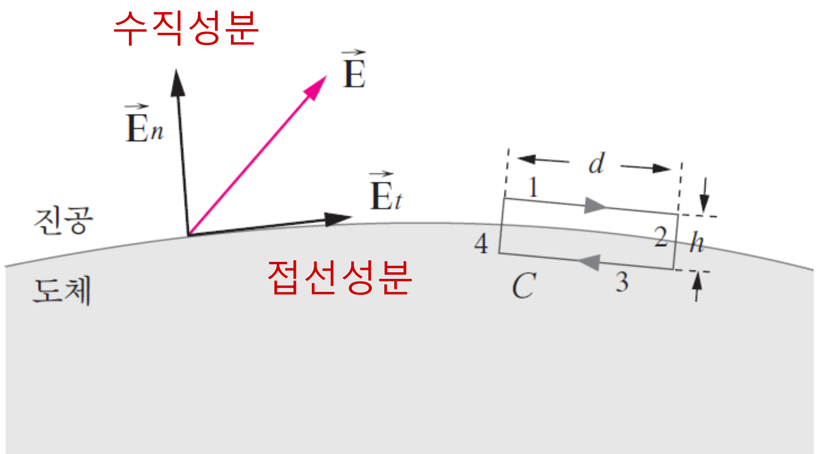
5-5. 전기장 경계조건(Electric Field Boundary Condition)

◆ 복합매질의 경계면에서 전기장의 변화는?



5-5-1. 도체 경계조건(Boundary Condition of Conductors)

진공/도체 경계면의 $E_t = 0$

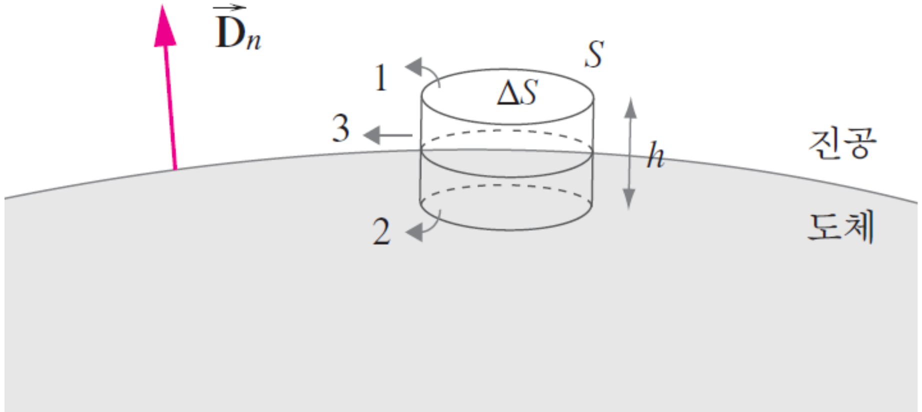


전기장 세기를 접선성분과 수직성분의 조합으로 표현 → $\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_n$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{E}_t\cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{E}_n\cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{E}_t\cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{E}_n\cdot d\vec{l}$$
$$= E_t d - E_n\frac{h}{2} + 0 + E_n\frac{h}{2} = E_t d$$

→ $E_t = 0$

도체 표면에서 접선방향 전기장은 존재하지 않는다.



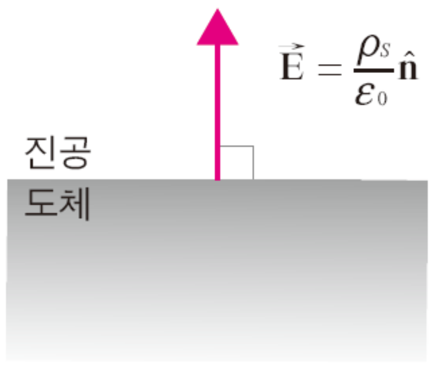
$$\oint \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_{S_1} \vec{\mathbf{D}}_n \cdot d\vec{\mathbf{S}} + \int_{S_2} \vec{\mathbf{D}}_n \cdot d\vec{\mathbf{S}} \longrightarrow E_n = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{\rho_S}{\varepsilon_0} \longrightarrow \boxed{\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho_S}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}} \ \ (\mathrm{V/m})}$$

$$= \varepsilon_0 E_n S$$

$$= Q$$

도체 표면의 전기장은 도체/진공 경계면에 수직

진공/도체 경계면의 전기장

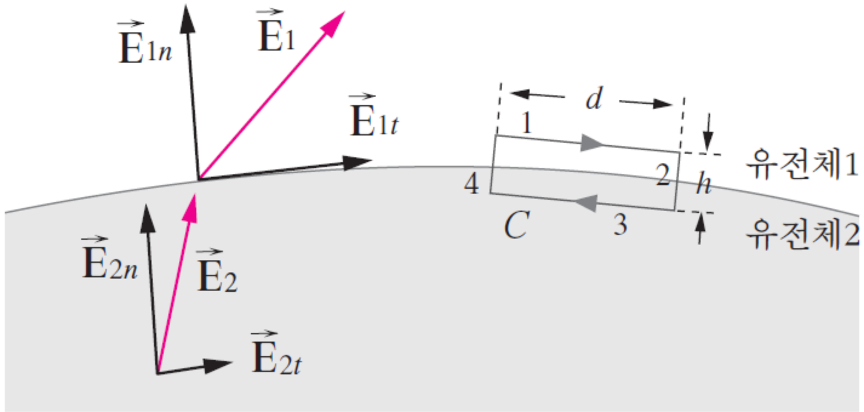


① 도체의 내부에는 전기장이 존재하지 않는다.

② 진공에서는 경계면에 수직한 전기장만 존재한다.

5-5-2. 유전체 경계조건(Boundary Condition of Dielectric Material)

유전체 경계에서 $E_{1t} = E_{2t}$



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{E}_{1t} \cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{E}_n \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{E}_{2t} \cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{E}_n \cdot d\vec{l}$$

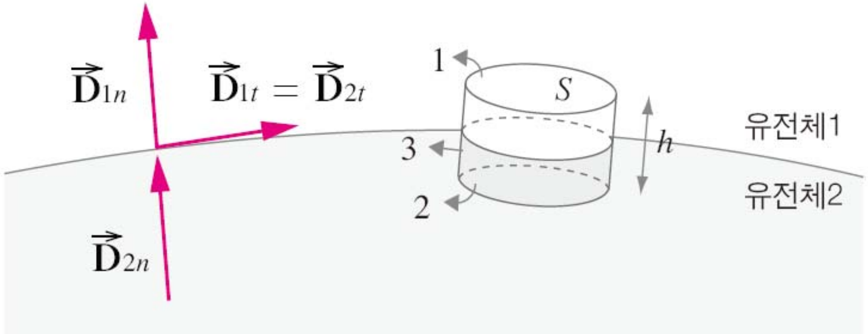
$$= E_{1t}d - (E_{1n} + E_{2n})\frac{h}{2} - E_{2t}d + (E_{1n} + E_{2n})\frac{h}{2}$$

$$= (E_{1t} - E_{2t})d = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{E_{1t} = E_{2t}}$$

접선방향 전기장 세기가 연속

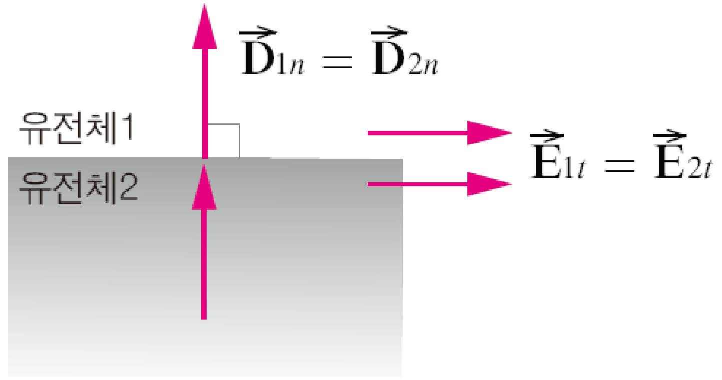
유전체 경계에서 전기장의 수직방향성분



$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_1 \vec{D}_{1n} \cdot d\vec{S} + \int_2 \vec{D}_{2n} \cdot d\vec{S} + \int_3 \vec{D}_t \cdot d\vec{S}$$
$$= (D_{1n} - D_{2n})S = Q$$

$$\longrightarrow \quad \Delta D_n = \frac{Q}{S} = \rho_S$$

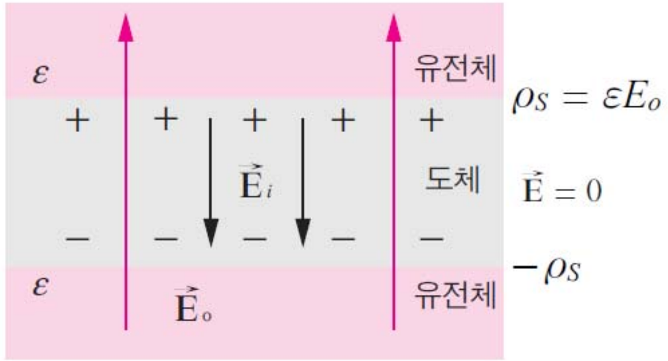
유전체 경계면의 전기장



① 경계면에서 전기장 세기의 접선성분이 연속이다. $E_{1t} = E_{2t}$

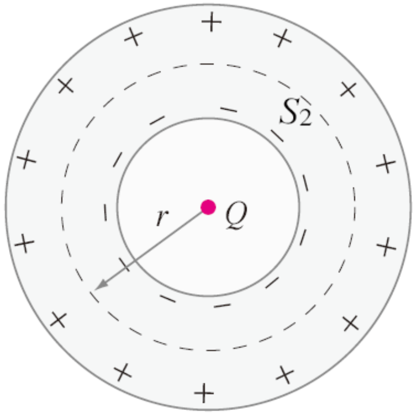
② 경계면 양쪽의 수직성분 전속밀도 차이는 경계면의 면전하밀도와 같다. $\Delta D_n = \rho_S$

유전체 경계면의 예



예제 5-10

예제 5-8과 같은 형태이지만 유전체가 아닌 도체일 때, 각 위치에서 전기장 세기를 구하라.



i) $0 < r < r_i$

$$\oint_{S_1} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \varepsilon_0 E(4\pi r^2) = Q \longrightarrow \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \ \ (\mathrm{V/m})$$

ii) $r_i < r < r_o$

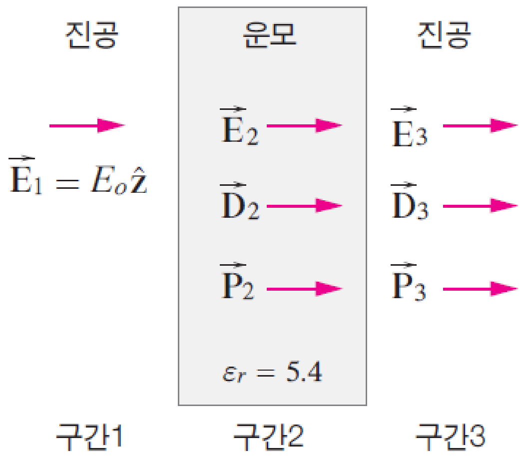
$$\oint_{S_2} \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \varepsilon E(4\pi r^2) = 0 \longrightarrow \vec{\mathbf{E}} = 0 \ (\mathrm{V/m})$$

iii) $r > r_o$

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \ \ (\mathrm{V/m})$$

예제 5-11

운모(mica)는 비유전율이 $\varepsilon_r = 5.4$인 유전체이다. 구간 1에 $\vec{\mathbf{E}}_1 = E_o \hat{\mathbf{z}}$를 가할 때, 각 구간별로 $\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{D}}, \vec{\mathbf{P}}$를 구하라.



$$D_{1n} = D_{2n} = D_{3n} = \varepsilon_0 E_{1n} = \varepsilon_0 E_0$$

$$E_{2n} = \frac{D_{2n}}{\varepsilon} = \frac{D_{1n}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_0 E_{1n}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{E_0}{5.4} = 0.185 E_0$$

$$E_{3n} = \frac{D_{3n}}{\varepsilon_0} = \frac{D_{1n}}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 E_{1n}}{\varepsilon_0} = E_0$$

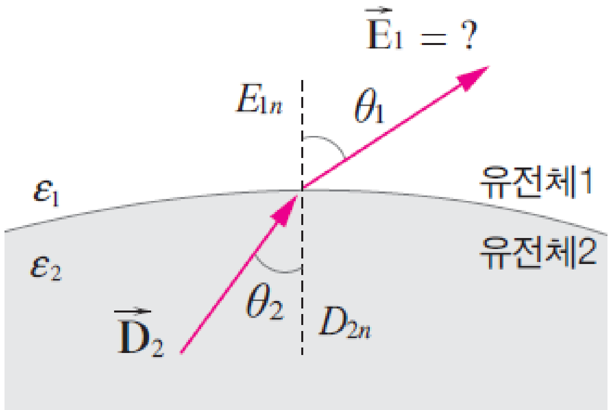
$$P_{1n} = D_{1n} - \varepsilon_0 E_{1n} = 0,$$

$$P_{2n} = D_{2n} - \varepsilon_0 E_{2n} = \varepsilon_0 E_0 - 0.185 \varepsilon_0 E_0 = 0.815 \varepsilon_0 E_0$$

$$P_{3n} = D_{3n} - \varepsilon_0 E_{3n} = 0.$$

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{E}}_1 = E_0 \hat{\mathbf{z}} \\ \vec{\mathbf{D}}_1 = \varepsilon_0 E_0 \hat{\mathbf{z}} \\ \vec{\mathbf{P}}_1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{\mathbf{E}}_2 = 0.185 E_0 \hat{\mathbf{z}} \\ \vec{\mathbf{D}}_2 = \varepsilon_0 E_0 \hat{\mathbf{z}} \\ \vec{\mathbf{P}}_2 = 0.815 \varepsilon_0 E_0 \hat{\mathbf{z}} \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{\mathbf{E}}_3 = E_0 \hat{\mathbf{z}} \\ \vec{\mathbf{D}}_3 = \varepsilon_0 E_0 \hat{\mathbf{z}} \\ \vec{\mathbf{P}}_3 = 0 \end{cases}$$

5-5-3. 경계조건을 이용한 반대편 매질의 전기장 계산



매질 2에서 $\vec{D}_2$가 주어졌을 때

반대편 매질 1에서의 전기장 세기를 구하라.

경계조건으로부터,

$E_{1t} = E_{2t}$ → $E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$

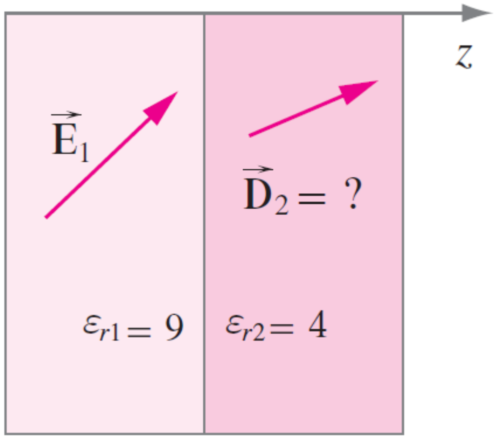
$D_{1n} = D_{2n}$ → $D_1 \cos\theta_1 = D_2 \cos\theta_2 \longrightarrow \varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2$

$$E_1 = E_2 \sqrt{\sin^2\theta_2 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 \cos^2\theta_2}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tan\theta_2\right)$$

예제 5-12

그림의 경계면에서 $\vec{E}_1 = 2\hat{x} + 3\hat{y} + 4\hat{z}$ (V/m)이다. 매질 2의 경계면에서 $\vec{D}_2$를 구하라.



$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} = 2\hat{x} + 3\hat{y}$$

$$\vec{D}_{1n} = \varepsilon_{r1}\varepsilon_0\vec{E}_{1n} = 9\varepsilon_0(4\hat{z}) = 36\varepsilon_0\hat{z} = \vec{D}_{2n}$$

$$\vec{E}_{2n} = \frac{\vec{D}_{2n}}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0} = \frac{36\varepsilon_0}{4\varepsilon_0}\hat{z} = 9\hat{z}$$

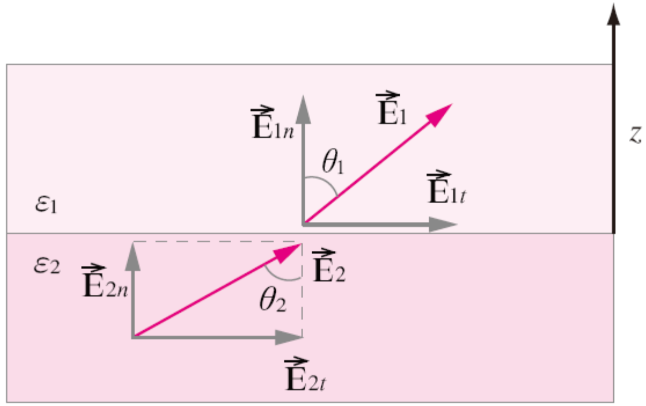
$$\vec{D}_2 = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0(\vec{E}_{2t} + \vec{E}_{2n}) = 4\varepsilon_0(2\hat{x} + 3\hat{y} + 9\hat{z}) \ (\mathrm{C/m^2})$$

예제 5-13

그림과 같이 $\vec{\mathbf{E}}_2 = E_{2x}\hat{\mathbf{x}} + E_{2y}\hat{\mathbf{y}} + E_{2z}\hat{\mathbf{z}}$는 경계면에 수직한 선과 θ_2의 각을 이룬다.

a) $\vec{\mathbf{E}}_1$을 구하라.

b) θ_1을 구하라.



a) $\vec{\mathbf{E}}_1 = E_{1x}\hat{\mathbf{x}} + E_{1y}\hat{\mathbf{y}} + E_{1z}\hat{\mathbf{z}}$ 라 하면 유전체/유전체 경계면의 경계조건에 따라,

$$E_{1t} = E_{2t} \longrightarrow E_{1x} = E_{2x},\ E_{1y} = E_{2y}$$

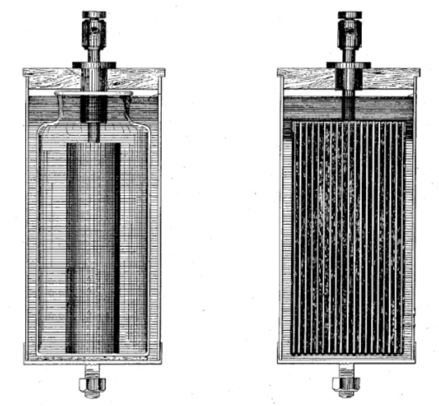
$$D_{1n} = D_{2n} \longrightarrow \varepsilon_1 E_{1z} = \varepsilon_2 E_{2z}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_1 = E_{2x}\hat{\mathbf{x}} + E_{2y}\hat{\mathbf{y}} + (\varepsilon_2/\varepsilon_1)E_{2z}\hat{\mathbf{z}} \ \ (\text{V/m}).$$

b) $\tan\theta_2 = \dfrac{E_{2t}}{E_{2n}} = \dfrac{\sqrt{E_{2x}^2 + E_{2y}^2}}{E_{2z}}$이므로 식 (5-39)에 대입하면,

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\tan\theta_2\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\sqrt{E_{2x}^2 + E_{2y}^2}}{E_{2z}}\right) \ \ (\text{rad}).$$

5-6. 정전용량(Capacitance)

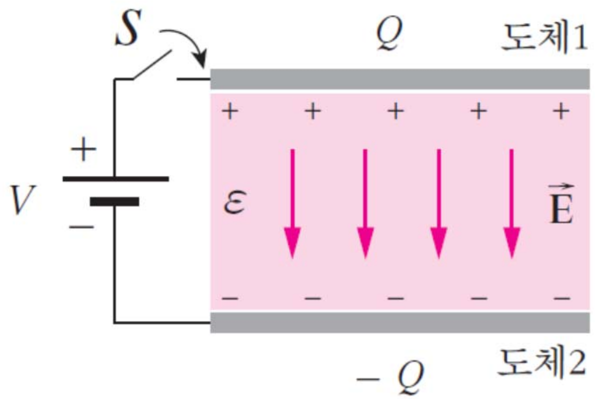


테슬라의 콘덴서

US Patent 567,818

콘덴서: 유전체의 절연특성을 이용하여 전기에너지를 저장하는 전기소자

콘덴서의 동작



i) 스위치 S를 닫아서 전위차 V를 인가하면 두 도체 사이에 전기장이 형성된다.

ii) 전위가 높은 도체 1에 끌려서 도체 2의 표면에 전자가 모인다. 전자는 전압원과 도체를 연결하는 도선에서 공급된다.

iii) 도체 내부에는 움직일 수 있는 양전하가 없다. 따라서 도체 1 표면의 '+'는 전자가 빠져나간 것을 표시한 것이다. 이해를 돕기 위해서 양전하가 모인 것이라고 생각해도 결과는 같다.

iv) 각 도체 표면의 전하끼리는 극성이 같아서 반발력을 형성한다. 이 힘이 전위차에 의한 전기력과 평형을 이루면 더 이상 도체 표면 전하량이 늘지 않는다.

v) 스위치를 열어 전위차를 제거하여도 축적된 전하는 양쪽 도체에 머무르면서 전기장을 형성한다.

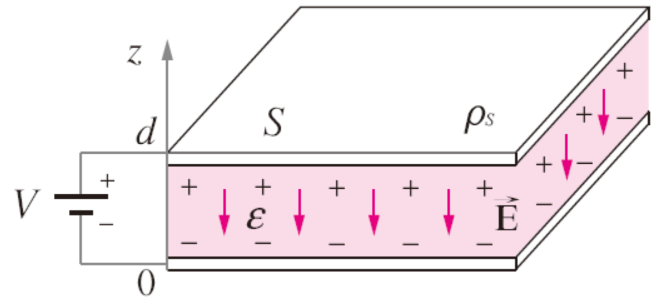
정전용량(Capacitance)의 정의

1 (V)의 전압을 가했을 때 콘덴서에 저장할 수 있는 전하량

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\int_S \varepsilon \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}}{-\int_{-}^{+} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}} \quad \text{(F)}$$

5-6-1. 다양한 콘덴서의 정전용량

평판콘덴서의 정전용량



i) 도체/유전체의 경계조건에 따라 유전체로 향하는 수직한 방향(이 경우에는 $-\hat{\mathbf{z}}$방향)의 전기장만 존재한다. 식 (5-30)의 ε_0를 ε으로 바꿔주면 $\vec{\mathrm{E}} = -\rho_s\hat{\mathbf{z}}/\varepsilon$이다.

ii) $\vec{\mathrm{E}}$를 식 (5-41)에 대입하여 전하량 Q를 구한다.

$$Q = \int_S \varepsilon\vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{\mathrm{S}} = \int_S \varepsilon\frac{\rho_s}{\varepsilon}(-\hat{\mathbf{z}}) \cdot dS(-\hat{\mathbf{z}}) = \rho_s S \ \ (\mathrm{C})$$

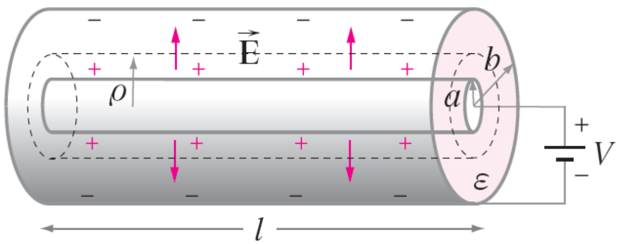
iii) 식 (5-40)의 분모식에 $\vec{\mathrm{E}}$를 대입하여 전위차 V를 구한다.

$$V = -\int_-^+ \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{l} = -\int_{z=0}^{d} \left(-\frac{\rho_s}{\varepsilon}\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot dz\,\hat{\mathbf{z}} = \frac{\rho_s}{\varepsilon}d \ \ (\mathrm{V})$$

iv) 식 (5-40)에 Q와 V를 대입하여 평판콘덴서의 정전용량을 구한다.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon S}{d} \ \ (\mathrm{F})$$

동축케이블의 정전용량



i) 유전체/내부도체의 경계조건에서, 경계면에 수직한 방향(이 경우에는 $\hat{\boldsymbol{\rho}}$방향)의 전기장만 존재한다.

ii) 유전체 공간의 전계강도는 반지름이 $\rho(a < \rho < b)$인 원통형 폐곡면을 설정한 후 가우스의 법칙을 적용하여 구한다.

$$\oint \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = D \oint dS = \varepsilon E(2\pi\rho l) = Q \quad \rightarrow \quad \vec{\mathbf{E}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\rho l}\hat{\boldsymbol{\rho}} \ \ (\mathrm{V/m})$$

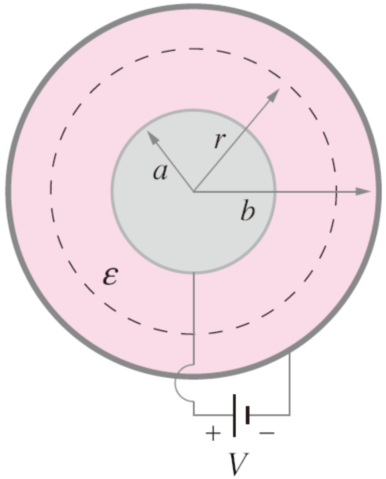
iii) 식 (5-40)의 분모식에 $\vec{\mathbf{E}}$를 대입하여 전위차 V를 구한다.

$$V = -\int_{-}^{+} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -\int_{\rho=b}^{a} \left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon\rho l}\hat{\boldsymbol{\rho}}\right) \cdot d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \ (\mathrm{V})$$

iv) 식 (5-40)에 V를 대입하여 동축케이블의 정전용량을 구한다.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(b/a)} \ (\mathrm{F})$$

구형축전기의 정전용량



i) 유전체/내부도체의 경계조건에서, 경계면에 수직한 방향(이 경우에는 $\hat{\mathbf{r}}$방향) 전기장만 존재한다.

ii) 유전체 내부 전기장 세기는 반지름이 $r(a < r < b)$인 구형 폐곡면을 설정한 후 가우스 법칙을 적용하여 구할 수 있다.

$$\oint \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = D\oint dS = \varepsilon E(4\pi r^2) = Q \longrightarrow \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \ \ (\mathrm{V/m})$$

iii) 식 (5-40)의 분모식에 $\vec{\mathbf{E}}$를 대입하여 전위차 V를 구한다.

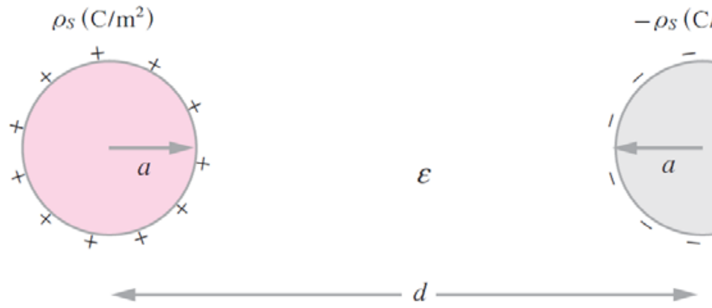
$$V = -\int_{-}^{+} \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -\int_{r=b}^{a}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\right) \cdot dr\hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \ (\mathrm{V})$$

iv) 식 (5-40)에 V를 대입하여 정전용량 C를 구한다.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon}{1/a - 1/b} = \frac{4\pi\varepsilon ab}{b - a} \ \ (\mathrm{F})$$

예제 5-14

그림과 같이 반지름이 a, 표면전하밀도가 각각 ρ_s, $-\rho_s$인 원통형 도체로 이루어진 이선 전송선(two-wire transmission line)의 단위길이당 정전용량을 구하라. $d/a \gg 1$이고 도체 표면의 전하분포는 균일하며 도체 사이 유전체의 유전율은 ε이라고 가정한다.



$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{a\rho_s}{\varepsilon\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} \ \text{(V/m)}$$

$$V_{ad} = -\int_{-}^{+} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -\int_{\rho=d}^{a} \frac{a\rho_s}{\varepsilon\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{a\rho_s}{\varepsilon}\ln\left(\frac{d}{a}\right) \ \text{(V)}.$$

$$V = \frac{2a\rho_s}{\varepsilon}\ln\left(\frac{d}{a}\right) \ \text{(V)}$$

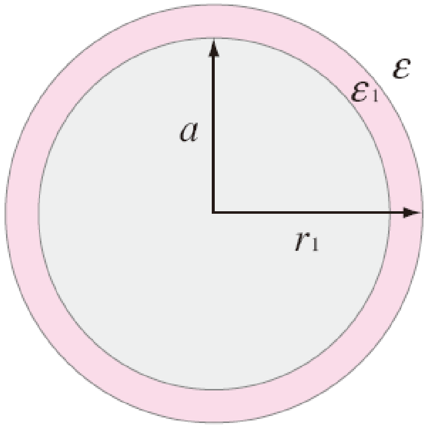
$$C' = \left(\frac{Q}{V}\right)/l = \frac{\rho_l}{V}$$

$$\rho_s = \rho_l / 2\pi a$$

$$C' = \frac{2\pi a\rho_s}{V} = \frac{2\pi a\rho_s}{2a\rho_s \ln(d/a)}\varepsilon = \frac{\pi\varepsilon}{\ln(d/a)} \ \text{(F/m)}$$

5-6-2. 적층콘덴서의 정전용량

직렬로 적층된 콘덴서



$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2} \quad (a < r < r_1)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > r_1)$$

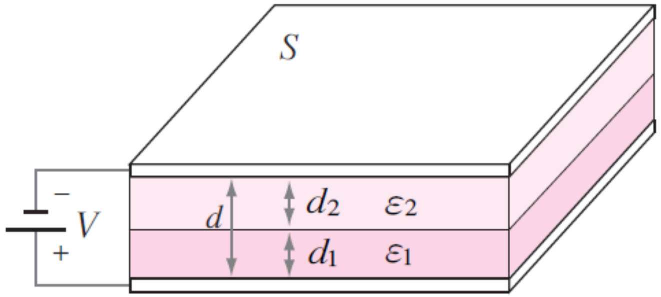
$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{\varepsilon_0 r_1}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \quad \text{(F)}$$

$$V_a = -\int_{r=\infty}^{r_1} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr - \int_{r_1}^{a} \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\frac{Q}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{\varepsilon_0 r_1}\right]$$

예제 5-15

그림과 같이 유전율이 ε_1, ε_2인 두 유전체로 구성된 평판콘덴서의 정전용량을 구하라.

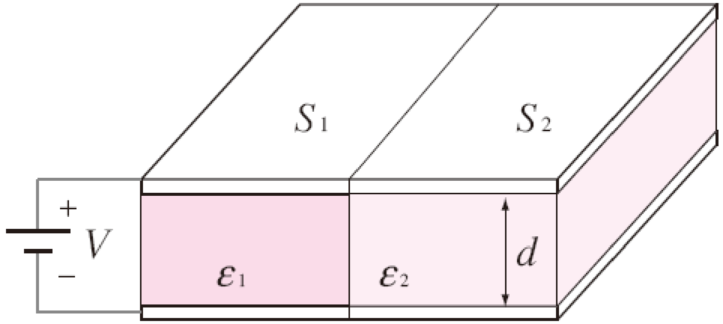


$$D_{1n} = D_{2n} \longrightarrow \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$$

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = E_1[d_1 + (\varepsilon_1/\varepsilon_2)d_2]$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_S S}{(\rho_S/\varepsilon_1)[d_1 + (\varepsilon_1/\varepsilon_2)d_2]} = \frac{1}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1 S} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2 S}} = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}} \text{ (F)}$$

병렬로 중첩된 콘덴서



$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_{S1} S_1 + \rho_{S2} S_2}{Ed} = \frac{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}{d} = C_1 + C_2 \ \mathrm{(F)}$$

콘덴서의 직병렬연결에 의한 정전용량의 계산은,

병렬, 직렬연결 저항계산법과 동일하다.