2021-2 Calculus 2 Midterm Examination

1. 평면 전체에서 정의된 함수 $f(x,y)$에 대해서 물음에 답하시오. **[5점]**

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{4x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(1) 함수 $f(x,y)$가 연속인 (x,y)를 구하시오.

(2) $f_x(0,0)$를 구하시오.

Solution

(1) $(0,0)$에서는 $x=my^2$ (or $y=m\sqrt{x}$)을 따른 경로를 생각하면 주어진 함수는 m값에 따라 극한값이 다르므로 극한값은 존재하지 않음. [2점]

$(0,0)$이 아닌 경우에는 주어진 함수는 유리함수이고, 원점을 제외하면 분모가 영이 되는 점이 없음. [0.5점]

$\therefore$ $(0,0)$을 제외한 모든 평면위의 점에서 연속. [1점]

(2) 정의를 사용, $f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{0}{h}=0$. [1.5점]

2. Vector $\vec{v}=<4,3>$ 방향으로 주어진 점 $(1,1)$에서 함수 $f(x,y)=x\tan^{-1}(\frac{y}{x})$의 directional derivative (방향도함수)를 구하시오. **[3점]**

Solution

$f_x=\tan^{-1}(\frac{y}{x})-\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $f_y=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ [1점]

(주어진 함수는 미분가능하므로)

$D_uf(1,2)=\nabla f(1,2)\circ\vec{u}=<\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},\frac{1}{2}>\circ<\frac{4}{5},\frac{3}{5}>=\frac{\pi}{5}-\frac{1}{10}$, [2점]

3. 함수 $z=f(x,y)$가 연속인 2계 편도함수를 가지고 $x=2rs, y=r^2+s^2$일 때 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$를 구하시오. **[4점]**

Solution

$\dfrac{\partial z}{\partial s}=2rf_x+2sf_y$ [1점]

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}=\dfrac{\partial}{\partial s}(\dfrac{\partial z}{\partial x}2r+\dfrac{\partial z}{\partial y}2s)=4r^2f_{xx}+8rsf_{xy}+4s^2f_{yy}+2f_y$ [3점]

4. paraboloid $z=x^2+y^2$와 ellipsoid $4x^2+y^2+z^2=9$가 만나는 곡선 C 위의 점 $(-1,1,2)$에서의 접선의 방정식을 매개변수로 나타내시오. **[4점]**

Solution

$f(x,y,z)=z-x^2-y^2,\ \ g(x,y,z)=4x^2+y^2+z^2-9$라 하면,

접선은 $(-1,1,2)$에서 ∇f와 ∇g에 모두 수직. [1점]

$\therefore$벡터 $v=\nabla f\times\nabla g$는 접선과 평행이다.

$\nabla f(x,y,z)=\langle -2x,\ -2y,\ 1\rangle \ \Rightarrow\ \nabla f(-1,1,2)=\langle 2,\ -2,\ 1\rangle$

$\nabla g(x,y,z)=\langle 8x,\ 2y,\ z\rangle \ \Rightarrow\ \nabla g(-1,1,2)=\langle -8,\ 2,\ 4\rangle$

$\therefore v=\nabla f\times\nabla g=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ -8 & 2 & 4\end{vmatrix}=-10i-16j-12k$ [1.5점]

$\therefore$접선의 매개변수 방정식은 $x=-1-10t,\ y=1-16t,\ z=2-12t,\ t\in R$. [1.5점]

5. 다음 적분을 계산하시오. **[6점]**

(1) $\displaystyle\int_0^1\int_{\tan^{-1}y}^{\pi/4}\cos^2 x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dxdy$ (2) $\displaystyle\int_0^1\int_{-y}^{y}(x+y)^2 e^{x-y}\,dxdy$

Solution

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,\sin x\,dx=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{6}}{4}\right)$ [식 1.5점, 계산 1.5점]

(2) $x+y=u,\ x-y=v$로 놓으면 $\displaystyle\int_0^2\int_{u-2}^{0}u^2e^v\,\frac{1}{2}dvdu=\frac{1}{3}+\frac{1}{e^2}$ [식 1.5점, 계산 1.5점]

(or Use formular for integration by parts.)

6. paraboloid $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$와 sphere $x^2+y^2+z^2=3$사이에 놓인 입체의 부피 V를 polar coordinate을 이용하여 구하시오. **[5점]**

Solution

$x^2+y^2=3-z^2=2z$이므로 $z=1\ \left(\because z=\dfrac{x^2+y^2}{2}>0\right)$, [1점]

따라서 $x^2+y^2=2$위에서의 double integral 이용하여 부피를 구하면,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3-r^2}-\frac{r^2}{2}\right)r\,dr\,d\theta \quad \text{식 [2점]}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\left(\sqrt{3-r^2}-\frac{r^2}{2}\right)dr$$

$$=2\pi\left(\sqrt{3}-\frac{5}{6}\right).$$

계산 [2점]

7. 함수 $f(x,y) = 1 - xy\cos\pi y$에 대하여 물음에 답하시오. **[4점]**

(1) 점 (1,1)에서 연속인지 결정하고, 그 이유를 간단히 쓰시오.
(2) 점 (1,1)에서의 Linearization $L(x,y)$를 구하시오.

Solution

(1) 다항함수도 cos함수도 (1,1)에서 연속이므로 연속함수끼리의 연속은 연속,
or (1,1)에서 미분가능한 함수하므로 연속등. [1점]

(2) $f_x(1,1) = f_y(1,1) = 1$ [1점]
$L(x,y) = f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) + 2 = x + y$ [2점]

8. 직육면체 상자의 대각선의 길이가 3일 때, 이 상자의 최대부피를 Lagrange Multiplier를 사용하여 구하시오. (대각선 : 한 꼭짓점에서 가장 먼 꼭짓점까지의 거리) **[4점]**

Solution

상자의 가로, 세로, 높이를 각각 x, y, z 라고 하면,
제약조건식 $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 3$, $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 3^2$에서
부피함수 $f(x,y,z) = xyz$ 의 최댓값을 구하는 문제. [1점]

$\nabla f = \lambda \nabla g \Leftrightarrow < yz, xz, xy > = \lambda < 2x, 2y, 2z >$ [1점]
이 관계식을 풀면 $x = y = z$ $(x,y,z > 0)$ 이고 $x^2+y^2+z^2 = 3^2$으로부터 $x = \sqrt{3}$, [1점]
따라서 최대 부피는 $3\sqrt{3}$. [1점]