$$I = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2} \right) dx$$

가 수렴하기 위한 C의 값을 구하고, 정적분의 값을 구하여라.

sol)

$$I = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2}\, dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\overset{\ln\left(\frac{x}{2}+\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\right)}{\overset{\shortparallel}{\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)}} - C\ln(x+2) \right]_0^t$$

$$= \underbrace{\lim_{t\to\infty} \left(\ln\left(\frac{t}{2} + \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\right) - C\ln(t+2) \right)}_{A} + C\ln 2$$

I가 수렴하기 위해선 A가 수렴해야 함

$$A = \lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{\frac{t}{2} + \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}}{(t+2)^C} \right) = \lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{t^2}}}{(t+2)^C \times \frac{1}{t}} \right)$$

$C < 1$, A 발산(∞)

$C = 1$, $A = 0$

$C > 1$, A 발산($-\infty$)

(A를 구하는 과정에서 로피탈 정리가 필요없었다면 더 좋았을 것..)

따라서 $C=1$, $I = A + C\ln 2 = \ln 2$

출제 의도

- 주어진 식의 정적분을 구할 수 있다
- 위끝 or 아래끝이 발산하는 정적분의 수렴/발산을 판정할 수 있다.