미적분학 토론주제 2

20181114 권혁근

Q1. -1)

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^2 \times 0}{h^2} - 0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0 \times h}{h^2} - 0}{h} = 0$$

-2)

$$f_x(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\cancel{2x^3y} + 2xy^3 - \cancel{2x^3y}}{(\ )} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + x^2y^2 - 2x^2y^2}{(\ )} = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

f_x, f_y 둘다 (0,0)에서 정의되지 않기 때문에 불연속이다

-3)

$$D_{\vec{u}} f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+ah, 0+bh) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{a^2h^2 \cdot bh}{a^2h^2 + b^2h^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h^3}(a^2 \cdot b)}{\cancel{h^3}(a^2+b^2)}$$

if $\vec{u} = \langle 1, 0 \rangle$,

$D_{\vec{u}} f(0,0) = \langle 1, 0 \rangle$

Q2

1. Δz가

$$\Delta z = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

로 표현 가능하면 f는 (a,b)에서 미분가능하다.

$((\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ 일때 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to (0,0))$

2. (a,b)에서 f_x, f_y가 존재하고 f_x f_y가 (a,b)에서 연속이면, f는 (a,b)에서 미분가능하다.

⇒ 일변수함수와 달리 이변수 함수는 두개의 편도함수가 존재하더라도 이 두 편도함수가 연속적이지 않은 점이 있을 수 있기 때문이다.

예를 들어 $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 의 경우, f_x f_y가 $(0,0)$에서 연속이지 않고 $y=x$에 따라 $(0,0)$으로 근사했을 때 $f(x,y) = \frac{1}{2}$ 이기 때문이다. $(f(x,y) \neq 0)$

Q3.

미분가능 → $\Delta z = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$ 를 만족

연속 → $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \overset{(z)}{f(x,y)} = f(a,b)$ 를 만족.

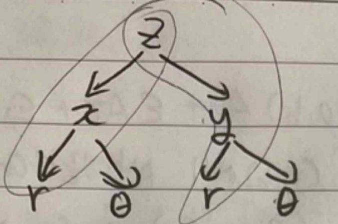
⇒ $f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$

$(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ 이면 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to (0,0)$

∴ $f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) = 0$ 이므로

연속이다.

Q4



$f_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ $\quad$ $f_y = \frac{\partial z}{\partial y}$

$f_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ $\quad$ $f_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$$f_r = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$
$$= \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{f_x}\cdot\cos\theta + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{f_y}\cdot\sin\theta$$

$$f_\theta = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot r\cos\theta$$

$$f_{rr} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(\cos\theta)\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)$$

$$f_{\theta\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\cdot r\cos\theta\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\sin\theta$$

($f_{\theta\theta}$도 a와 동일하게)

$$f_{rr} = f_{xx}\cos^2\theta + f_{yy}\cdot\sin^2\theta + (f_{xy} + f_{yx})\, s\cdot c$$

$$f_{\theta\theta} = r^2\left(f_{xx}\sin^2\theta + f_{yy}\cos^2\theta - (f_{xy} + f_{yx})\, s\cdot c\right) - f_x r\cos\theta - f_y r\cos\theta$$

$$\therefore\ f_{rr} + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} + \frac{1}{r} f_r = f_{xx} + f_{yy}$$