토론과제 2 20211778 이상훈

1. For given $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

(1) find $f_x(0,0)$ and $f_y(0,0)$, using the definition of partial derivative,

(2) show that $f_x(0,0)$ and $f_y(0,0)$ are not continuous at $(0,0)$,

(3) find $D_{\vec{u}}f(0,0)$ for any unit vector $\vec{u}=(a,b)$, using the definition of directional derivative.

1-(1) $f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{0}{h}=0$

$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{0}{h}=0$

1-(2) $(x,y)\neq(0,0)$; $f_x(x,y)=\dfrac{2yx(x^2+y^2)-x^2y(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

$f_y(x,y)=\dfrac{x^2(x^2+y^2)-x^2y(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$(x,y)=(0,0)$; $f_x(x,y)=0$, $f_y(x,y)=0$

i) $y=mx$; $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{x\to0}\dfrac{2m^3x^4}{(x^2+m^2x^2)^2}=\dfrac{m^3}{1+2m^2+m^4}$

ii) $y=mx$; $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_y(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{x\to0}\dfrac{x^2(x^2-m^2x^2)}{(x^2+m^2x^2)^2}=\dfrac{1-m^2}{1+2m^2+m^4}$

$\therefore$ 경로를 특정하였을 때 m의 값에 따라 0이 아닌 값이 나타나므로 f_x, f_y는 $(0,0)$에서 불연속이다.

1-(3) $D_{\vec{u}} f\big|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0+ha,0+hb)-f(0,0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h^3a^2b}{h^2(a^2+b^2)} - 0\right)$$

$$= \frac{a^2b}{a^2+b^2}$$, 이때 단위벡터의 크기 $|\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$

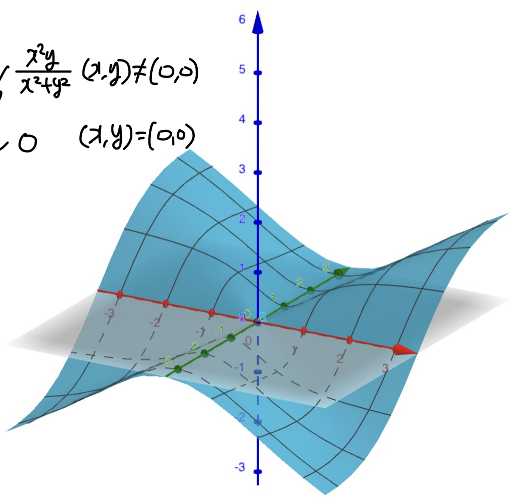
이므로 $D_{\vec{u}} f\big|_{(0,0)} = a^2b$

2. 이변수 함수 $z = f(x,y)$가 (a,b)에서 미분가능하려면 어떤 조건을 만족해야하는지 알아보고, 그 이유와 기하학적 의미를 예를 통해 정리해보기.

* $z = f(x,y)$가 (a,b)에서 미분가능하려면 (a,b) 근처에서 f_x, f_y가 존재하고, (a,b)에서 연속이어야 한다.

앞서 문제 1.의 함수가 $(0,0)$에서 f_x, f_y가 존재함에도 $(0,0)$에서 불연속이었기에 위 조건에 따라 $(0,0)$에서 미분 불가능한데,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$



Geogebra로 곡면의 개형을 나타내면 $(0,0)$에서 접평면이 생기지 않는, 즉 미분 불가능함을 확인할 수 있다.

3. 이변수 함수 $z=f(x,y)$가 (a,b)에서 미분가능하면 (a,b)에서 연속임을 보이기.

$z=f(x,y)$가 (a,b)에서 미분가능하려면 (a,b) 근처에서 f_x, f_y가 존재해야 한다. 이때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=f_x(a,b)$, $\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}=f_y(a,b)$

둘 다 정의되므로,

i) $\lim_{h\to 0}[f(a+h,b)-f(a,b)]=\lim_{h\to 0}h\times\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$

$=0\times f_x(a,b)=0$ $\therefore \lim_{h\to 0}f(a+h,b)=f(a,b)\cdots ①^*$

ii) $\lim_{h\to 0}[f(a,b+h)-f(a,b)]=\lim_{h\to 0}h\times\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$

$=0\times f_y(a,b)=0$ $\therefore \lim_{h\to 0}f(a,b+h)=f(a,b)\cdots ②^*$

$\therefore$ $z=f(x,y)$가 (a,b)에서 미분가능하면 (a,b)에서 연속이다.

* 질문: $\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=f(a,b)$를 만족할 때 f는 (a,b)에서 연속이다.

이때 위의 ①, ② 만으로 위 정의를 만족한다고 할 수 있는가? 다른 경로에서 접근한다면?

4. 강의중 연습문제,

이변수 함수 $z=f(x,y)$가 임의의 $(x,y)\in R^2$에서 미분가능하고 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 일 때 $f_{xx}+f_{yy}=f_{rr}+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}+\frac{1}{r}f_r$ 임을 보이시오.

i) $f_{rr}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right]+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}(\sin\theta)$

$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\cos\theta+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\sin\theta$

$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta+2\frac{\partial z}{\partial x\partial y}\cos\theta\sin\theta$

ii) $\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)\right]=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)\right]$

$=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta)\right)+\frac{\partial z}{\partial x}(-r\cos\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}(-r\sin\theta)\right]$

$=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta)\right)(-r\sin\theta)\right.$

$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta)\right)(r\cos\theta)\right]-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)$

$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\theta-2\frac{\partial z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)$

iii) $\frac{1}{r}f_r=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)$

$\therefore f_{rr}+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}+\frac{1}{r}f_r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{xx}+f_{yy}\Rightarrow f_{xx}+f_{yy}=f_{rr}+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}+\frac{1}{r}f_r$