실험 6-1. 역학적 에너지 보존

1. 목적

비스듬한 면과 원으로 된 경로를 따라 구르는 구형 구슬의 운동에너지와 회전운동 에너지에 초점을 두어 역학적 에너지 보존 및 에너지 손실을 검토한다.

2. 이론

비스듬한 면을 따라 구르는 구형 구슬의 운동에너지는 병진운동에너지 $1/2mv^2$와 회전운동에너지 $1/2I\omega^2$의 합이다. 여기에서 m과 I은 구슬의 질량과 회전 관성 모멘트고, v와 ω는 구슬의 선속력와 각속력이다. 만일 마찰력이 무시할 정도로 작다면 위치에너지와 운동에너지의 합인 역학적 에너지는 보존된다.

즉, 임의의 높이 y에 대해서도

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \text{constant} \tag{1}$$

이 성립한다. 여기에서 y는 어떤 기준점으로부터 높이이다.

경사면 바닥 $y=0$의 위치와 정지해 있는 구슬이 막 구르기 시작하는 $y=h$의 위치를 비교하면 식 (1)로부터 $1/2mv^2 + 1/2I\omega^2 = mgh$이 된다. 반경이 r인 구슬의 관성모멘트는 $I=2/5mr^2$ 이고, 미끄러지지 않고 구르기만 하는 경우 $v=r\omega$ 이므로 (I와 v를 대입하여 수식을 정리하면)

$$v=\sqrt{\frac{10}{7}gh} \tag{2}$$

이 된다.

(주의: 실제로 $v=r\omega$에서는 r은 궤도 상단의 표면과 구슬의 회전 중심축 사이의 거리이며, 구슬이 두 레일의 궤도로 안내되므로 구슬의 반경보다 조금 작다.)

높이 $y=h$에서 정지상태로부터 구르기 시작하여 [그림 2]와 같은 원형 궤도의 꼭대기의 점 T를 통과하여 겨우 궤도를 이탈하지 않게 되었다고 하자. 꼭대기 점 T에서 역학적 에너지 E_t 및 가장 낮은 점 B에서 구슬의 속력 v_b는 원형궤도의 반경 R 및 h와 다음과 같은 관계를 갖는다.

1) 원형궤도 꼭대기 점에서 역학적 에너지 E_t

꼭대기 점 T에서의 역학적 에너지는

$$E_t = \frac{1}{2}mv_t^2 + \frac{1}{2}I\omega_t^2 + 2mgR \tag{3}$$

이다. 여기에서 v_t와 ω_t는 점 T에서 구의 선속력과 각속도이며 이들은 $v_t=r\omega_t$의 관계를 갖는다. R은 원형 궤도의 반경이다.

구슬이 점 T를 통과하여 겨우 궤도를 이탈하지 않는 경우를 생각하면 구심력이 중력과 같다.

$$\frac{mv_t^2}{R} = mg \tag{4}$$

식 (4)와 $I=2/5mr^2$와 $v_t=r\omega_t$의 관계를 식 (3)에 대입하면

$$E_t = \frac{27}{10}mgR \tag{5}$$

이 된다. 출발점 h와 점 T에서의 역학적 에너지가 보존법칙에 따라 같아야 하므로

$$mgh = \frac{27}{10}mgR\,,\;\; h = \frac{27}{10}R \tag{6}$$

가 성립된다.

2) 점 B에서의 속력 v_b

출발점 $y=h$ 와 점 B에서 역학적 에너지의 비교로부터

$$mgh = \frac{1}{2}mv_b^2 + \frac{1}{2}I\omega_b^2 \tag{7}$$

가 성립된다. 여기에서 v_b는 점 B에서 구슬의 선속력이고 ω_b는 각속력이다.

식 (7)에 $I=2/5mr^2$와 $\omega_b=v_b/r$ 을 대입하여

$$v_b = \sqrt{\frac{10}{7}gh} \tag{8}$$

을 얻을 수 있고 꼭대기 점 T에서 궤도를 겨우 이탈하지 않는 경우 식 (6)이 만족되어야 하므로 식 (8)에 (6)을 대입하면

$$v_b = \sqrt{\frac{27}{7}gR} \tag{9}$$

이 된다.

3) 점 B에서 속력 v_b와 점 C에서 속력 v_c의 관계

점 B와 점 C에서 역학적 에너지 보존법칙은

$$\frac{1}{2}mv_b^2 + \frac{1}{2}I\omega_b^2 = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega_c^2 + mgH \tag{10}$$

이다. 여기에서 ω_c는 점 C에서 구슬의 각 속력이며, H는 기준점 ($y=0$)에서 트랙의 끝점 C까지의 높이이다.

식 (10)을 정리하면

$$v_b^2 = v_c^2 + \frac{10}{7}gH \tag{11}$$

가 된다.

4) 포물선 운동

트랙의 끝점 C를 떠난 구슬은 중력에 의해 포물선 운동을 한다. 점 C를 지나는 수직선의 지면과 만나는 점을 원점 (0)으로 하고 지면과 평행한 방향을 x축, 수직한 방향을 y축으로 하면 점 C를 떠난 구슬의 궤도는 다음과 같다. ([그림 1] 참조)

$$y = y_0 + (\tan\theta_0)x - (\frac{g}{2v_c^2\cos^2\theta_0})x^2 \tag{12}$$

이다. 여기서 g는 중력가속도, y_0는 구슬의 초기위치의 y좌표, θ_0는 초기 각도이다. 이 구슬이 지면에 떨어진 좌표를(x_f , 0) 로 표시하면 식 (12)로부터

$$y_0 + (\tan\theta_0)x_f - (\frac{g}{2v_c^2\cos^2\theta_0})x_f^2 = 0 \tag{13}$$

이 되며 이 식으로부터 v_c^2에 대해 정리하면

$$v_c^2 = \frac{gx_f^2}{2(y_0 + x_f\tan\theta_0)\cos^2\theta_0} \tag{14}$$

가 된다.

3. 기구와 장치

기구와 장치	Equipment	수량	비고
공간운동장치	Roller coaster	1	
쇠구슬	Solid steel ball	1	
1m 자	1m ruler	1	
버니어 캘리퍼스	Vernier calipers	1	
각도기	Protractor	1	
A4용지	A4 paper	1	
먹지	Carbon paper	1	
전자 저울	Balance		공용 기구

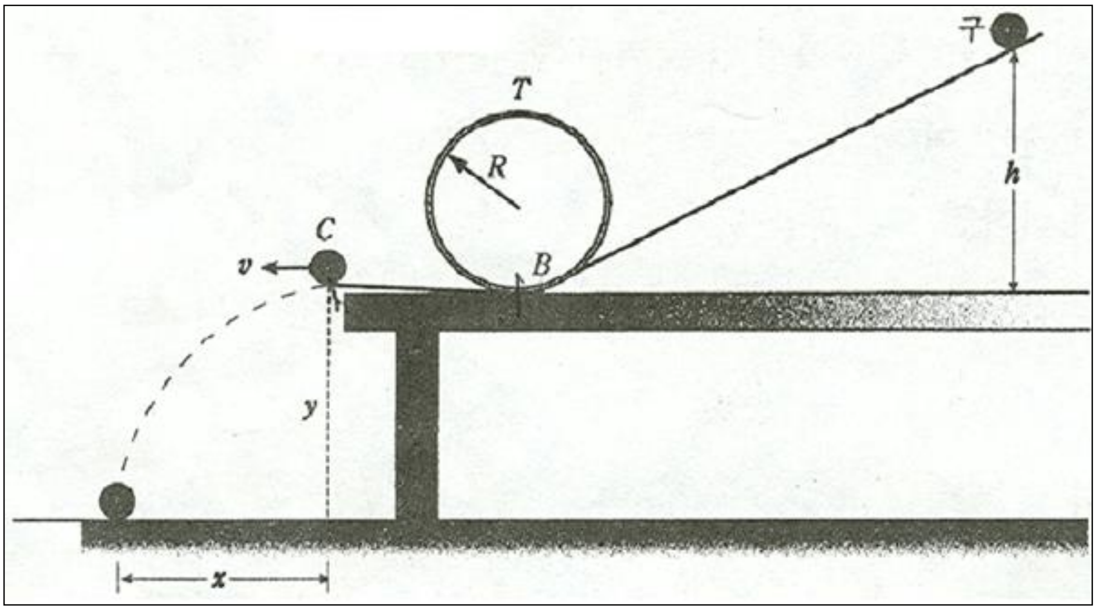


그림 1 구술의 공간운동장치

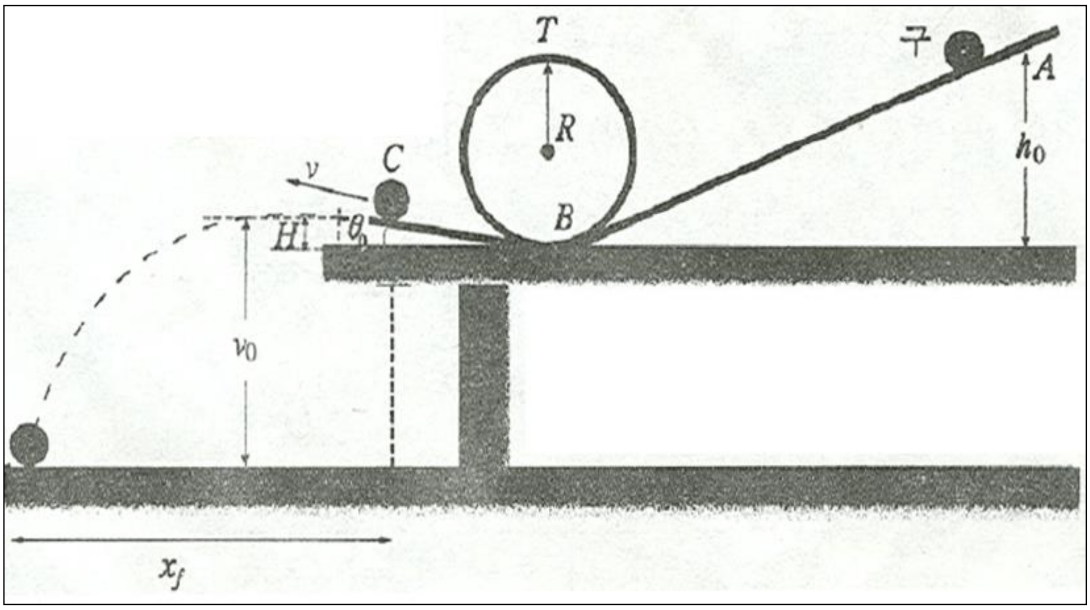


그림 2 구슬의 공간운동장치

4. 실험방법

(1) 이 실험과 관련된 기구와 장치를 확인한다.

(2) 구슬의 공간운동장치를 [그림 1]과 같이 끝점 C가 수평을 유지하도록 실험대에 장치하고 트랙으로부터 지면까지의 거리 y를 측정한다.

(3) 구의 출발점의 높이를 변화시키면서 구가 원형트랙의 꼭대기 점 T를 간신히 접촉하며 트랙을 이탈하지 않고 지나갈 경우의 출발점의 높이 h를 측정한다.

(4) 구가 낙하되리라고 추정되는 위치와 먹지와 갱지를 깔고 (3)에서 정한 높이 h에서 구슬을 굴러 내려서 수평거리 x를 5회 측정한다.

(5) 점 C에서 구의 속력 $v=v_c=v_b$(실험)를 x와 y를 사용하여 계산한다.

(6) 식 (2)에 h값을 대입하여 구해 구의 속력 v(이론)과 비교한다.

(7) v(실험)과 v(이론)이 같지 않다면 이유를 생각해 복 역학적 에너지의 손실 ΔE를 계산하라.

(8) 구슬의 공간운동장치를 [그림 2]와 같이 끝부분이 수평면과 각 θ_0를 이루도록 설치하고 과정 (2)와 같은 실험을 높이 h_0를 측정하고, 점 C와 지면의 수직거리 y_0및 원형트랙의 반경 R을 재어 기록한다.

(9) (8)에서 측정한 h_0가 식 (6)을 만족시키는지를 검토하라.

(10) 구가 낙하되리라고 추정되는 위치에 먹지와 갱지를 깔고 과정 (8)에서 정한 높이 h_0에서 굴러 내려 수평거리 x_f를 5회 측정한다.

(11) (8)과 (10)에서 측정한 y_0, θ_0 및 x_f의 값을 식 (14)에 대입하여 v_c(실험)를 계산하고 이것을 식 (11)에 대입하여 v_b(실험)를 구한다.

(12) 식 (9)에서 v_b(이론)를 계산하고 (11)에서 구한 v_b(실험)와 비교하여 같지 않다면 이유를 생각하고 과정 (6)에서 구한 역학적 에너지 손실 ΔE를 고려하여 v_b(이론)을 계산한 후 v_b(실험)과 다시 비교하여 검토하라.

역학적 에너지 보존 실험 DATA SHEET

(1) 수평거리 측정

측정횟수(㎝)	1 회	2 회	3 회	4 회	5 회	평균
수평거리 x						
수평거리 x_f						

(2) 높이 및 각도 측정

트랙 끝점의 높이, y(㎝)	
출발점의 높이, h(㎝)	
트랙 끝점의 높이, y_0(㎝)	
트랙 끝점과 실험대의 거리, H(㎝)	
트랙의 경사각, θ_0	
출발점의 높이, h_o(㎝)	
원형 트랙의 반경, R(㎝)	
질량, m(g)	

(3) 실험값 계산

A. 점 C에서 구의 속력 실험값

B. 점 C에서 구의 속력 이론 값 (식(2) 이용)

C. v_c(실험)과 v_c(이론)의 오차율

D. 에너지 손실 ΔE

E. 측정값 R과 h_0의 비를 구하고 식 (6)과 비교

F. 식 (14)과 (11)을 이용해서 v_b(실험)을 계산

G. 식 (9)를 이용해서 v_b(이론)을 계산

H. v_b(실험)과 v_b(이론)의 오차율

실험 6-2 충돌과 회전운동에너지(sweet spot)

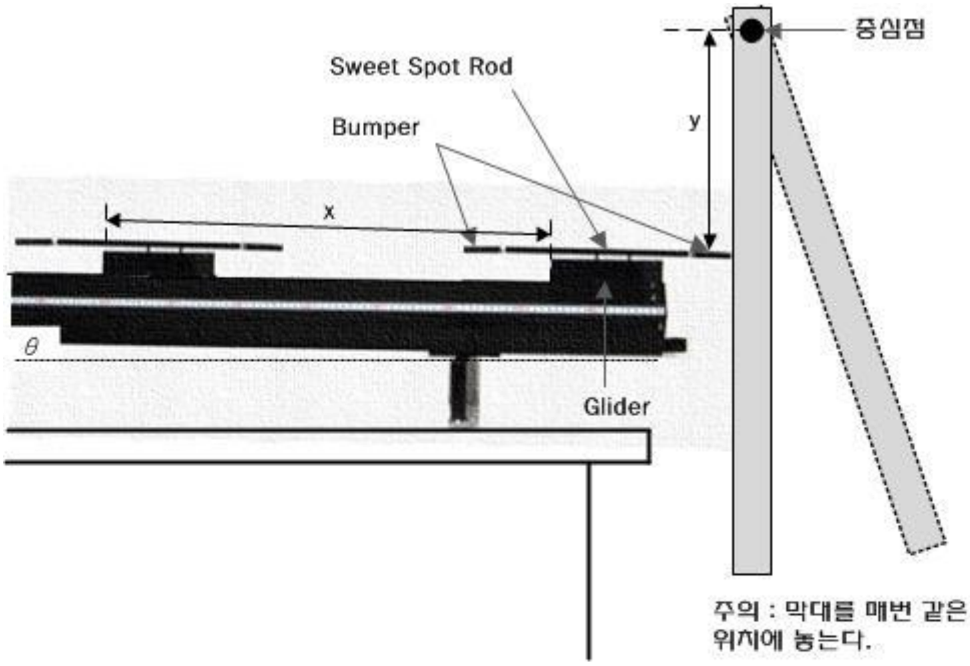
1. 목적

막대자와 글라이더를 이용하여, 막대의 완전탄성충돌에 의한 회전운동에너지가 막대의 위치에 따라 어떻게 바뀌는지 알아본다.

2. 이론

야구 선수나 테니스 선수가 공을 때릴 때, 야구 방망이와 테니스 라켓의 회전 운동 에너지의 일부가 공으로 전달된다. 이를 매우 간단히 도식화하면, 야구 방망이나 라켓의 운동은 타자의 손목 근처에 위치한 회전점에 대한 단순한 회전으로 생각할 수 있다. 야구 방망이의 본래 회전 운동 에너지가 공으로 옮겨가는 비율은 회전점과 충격점 사이의 거리 y 에 달려 있다. 이 때의 최대 운동 에너지의 옮김에 대응하는 야구 방망이의 충격점을 “sweet spot"이라 하고, 이제부터는 그 점을 SS1 으로 나타내자. 결국 여기서 SS1은 ”최대 에너지 “sweet spot"을 뜻한다.

주의: 이 실험에서의 충돌은 완전 탄성 충돌이라고 가정하기로 하자.



[그림 1]

여러분이 야구 방망이로 공을 대릴 때, 여러분에게는 아무런 충격도 주지 않는 충격점(impulsive point)이 존재한다. 이 점의 위치는 일반적으로 SS1 의 위치와는 다르고, "percussion point" 라고 한다. 이제부터는 이 점을 SS2 로 나타내자. 여기서 SS2 는"zero-impulse sweet spot"을 뜻한다. 그리고, 야구 방망이에 대한 SS2 의 위치는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$y_{ss2} = \frac{I}{my_{cm}} \text{-----------------} (1)$$

여기서, I 는 회전점을 지나는 회전축에 대한 관성 모멘트이고, m 은 야구 방망이의 총질량이고 y_{cm} 은 회전점에서 질량 중심까지의 거리이다. 예를 들어 길이 L 인 균일한 막대의 회전점이 막대의 끝점이라고 하면, SS2 는 회전점에서 0.67L 위치에 존재한다.

SS1 과 SS2 의 위치는 이론적으로 또는 sweet spot computer program 을 사용하여 구할 수 있다. SS2 의 위치는 실제로 야구 방망이의 여러 위치로 공을 때릴 때, 여러분의 손목에 최소의 충격을 주는 점으로 실험적으로 구할 수 있다. 이 실험에서는 SS1 의 위치를 결정하는 방법을 알아보자.

막대자와 글라이더를 사용하여, ([그림 1]참조) 충격 후 글라이더가 약간의 경사를 가지는 에어트랙 상에서 얼마나 멀리가는 이동하는 가를 관찰하여 y 의 여러 값에 대하여 상대적인, 또는 심지어는 절대적인 에너지 전달을 측정할 수 있고, 이런 식으로 SS1 을 찾을 수 있다. 만약 에어트랙의 경사각도를 θ, 충격 후 글라이더의 이동거리를 x 라 하면 충격 순간의 수레의 운동 에너지는 다음 식으로 알 수 있다.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx\sin\theta \text{----------------} (2)$$

3. 기구와 장치

기구와 장치	Equipment	수량	비고
2m 트랙	2m Air Track	1	
에어블로어	Air Blower	1	
글라이더	Glider	1	
스팟막대	Sweet Spot Rod	1	
충돌용범퍼	Bumper	2	
추	Mass Set	several	
도르래	Pulley	1	
막대자	Ruler	1	
평면테이블	Table	1	

4. 실험방법

주 의 사 항	- 글라이더가 트랙에 직접 부딪치지 않도록 충돌면에 항상 범퍼를 장착한다 - 실험 중이 아닌 경우 에어블로어 전원을 꺼둔다. - 글라이더가 트랙을 이탈해서 떨어지지 않도록 조심해서 실험한다.

(1) [그림 1]에 보여진 대로 실험 도구를 설치한다. 글라이더에 스위트 스팟용 막대를 장착하고 양끝에 범퍼를 꼽는다. 범퍼가 테이블의 모서리에서 몇 센티미터 돌출되도록 놓는다.

(2) 회전점에 매달려 있는 막대자가 동일한 높이에서 글라이더 범퍼에 충돌할 수 있도록 설치한다.

(3) 에어블로어를 작동시키고, 막대자를 놓아 글라이더 범퍼에 충돌하도록 한다. 이 때 y 와 x 의 값을 [표 1]에 적는다.

(4) y 의 값을 10cm 에서 40 cm 까지 5cm 씩 변화시키면서 3 번의 과정을 네 번식 반복한다.

(5) y 값 각각에 대해 x 의 평균값을 계산한다.

(6) 내삽법을 이용하여 실험결과로부터 SS1 의 위치를 결정하고, [표 1] 아래에 기록한다.
(또는, 추세선을 2 차 함수로 그리고 그래프의 최고점을 찾는다.)

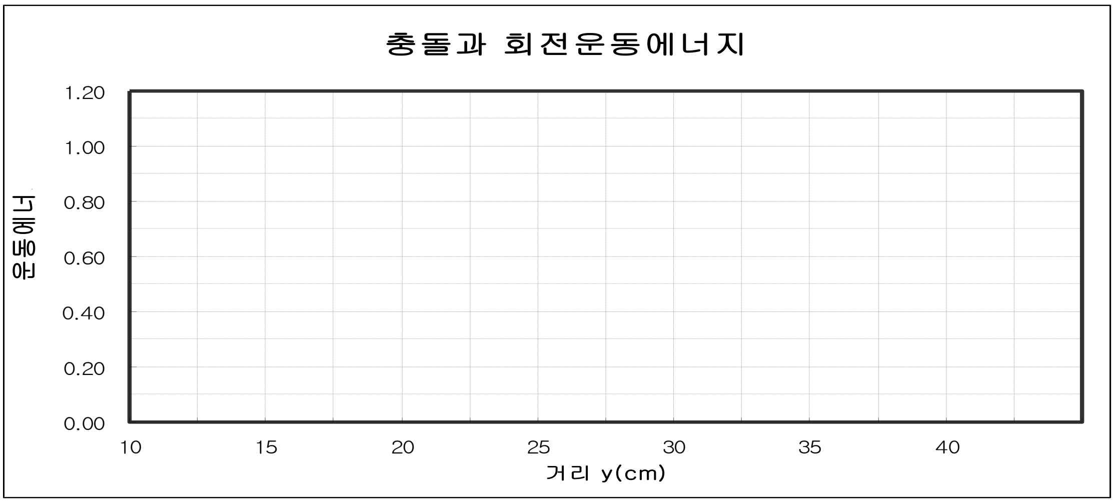
(7) 식(1)을 이용하여 SS2 의 위치를 계산하고, [표 1] 아래에 기록한다.

(8) 시간이 충분하면, 회전점의 위치를 바꾸거나, 막대자에 100g 정도의 물체를 매달고 실험을 수행하여 본다. (주의: 막대자의 무게를 정확히 측정한다.)

5. 실험결과

No.	거리	이동거리					운동에너지
	y(㎝)	x1(㎝)	x2(㎝)	x3(㎝)	x4(㎝)	x_{avg}(㎝)	mgxsinθ(J)
1	10						
2	15						
3	20						
4	25						
5	30						
6	35						
7	40						

[표 1]



- 막대자의 무게: ___________ g

- SS1 의 y 값 =___________ cm SS2 의 y 값=___________ cm

6. 질문

(1) SS1 과 SS2 의 위치가 일치하는 "super bat" 를 만드는 것이 가능한가? 만약 가능하다면, SS1 의 위치가 SS2 의 위치에 가까워지기 위해 균일한 막대기는 어떻게 변해야 되겠는가?

(2) 이 실험을 분석하는 데 어떠한 가정이 도입되었는가? 그러한 가정이 결과에 어떤 영향을 미쳤는가?

7. 일반물리학 관련 교과

(1) 11 장 회전
(2) 12 장 굴림, 토크 및 각운동량