韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2014.53.3.313
2014. 08. 제 53권, 제 3호, 313-327.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
August. 2014, Vol. 53, No. 3, 313-327.

벡터를 활용한 이차곡선과 사이클로이드의 접선에 대한 연구

이동원(창신고등학교)
정영우(경성대학교)
김부윤(부산대학교)†

Ⅰ. 서론

'접선(tangent)'은 중등수학 특히, 미적분학의 내용을 다루는데 있어 가장 중요한 개념들 중 하나이다. 중학교 '수학 1'[1]에서 기하학적 관점으로 처음 소개되는 접선은 고등학교 '수학'[2]에서 판별식이나 직선과 원의 중심까지의 거리를 이용하여 원의 접선의 방정식을 다루며, '기하와 벡터'[3]의 '이차곡선' 단원에서는 판별식을 이용하여 포물선, 타원 그리고 쌍곡선에 대한 접선의 방정식들을 다루고 있다. 그리고 '수학Ⅱ' 또는 '미적분과 통계기본'에서 미분계수의 기하학적 의미가 접선의 기울기라는 것과 그러한 접선의 존재성으로 평균값 정리(Mean Value Theorem)를 배우게 된다. 또한 곡면을 조작하기 위한 접평면의 구성요소로도 접선이 다루어진다.

이처럼 중등수학 전반에 걸쳐 접선이 다루어짐에도 불구하고, 접선이 가지는 중요성이나 가치에 대한 본질적인 설명은 강조되지 않고 있다. 따라서 중등교육과정에서 접선과 관련한 개별 주제들 사이에 맥락을 부여하고, 이 관계 속에서 다양한 지도가 이루어져야 한다. 이러한 관점은 정영우, 이목화, 김부윤(2012)에 잘 나타나 있는데, 그들은 접선이 현대수학의 중요한 사고 중 하나인 '근사(approximation)' 개념의 수단임을 강조하고, 이런 관점에서 관련지식들 사이의 관계를 밝히고 있다. 또한, 조영미(1999)는 고대 그리스 시대와 17세기 초반 수학자들이 접선에 접근했던 다양한 방법을 소개함으로써 이 수학적 개념의 역동성을 보였다.

본 연구는 접선의 개념에 접근하는 다양한 방법들 중 프랑스의 수학자인 로베르발이 1634년 'Traite des indivisible'에서 제안했던 곡선 위를 움직이는 한 점에 작용하는 두 속도벡터의 합이 그 점에서의 접선벡터 – 즉, 운동방향이고 이 방향이 바로 그 점에서 주어진 곡선의 접선의 기울기 – 임을 이차곡선들과 사이클로이드(cycloid) 곡선들에 대해 동적기하프로그램을 이용하여 구현하여 보고 이것이 접선임을 연역적인 방법으로 확인한다.

로베르발의 개념은 이미 오래 전에 주장되었으며 중등수학에서 이를 다룰 수 있는 벡터개념을 지도하고 있음에도 그의 개념은 중등수학에서 다루어지지 않고 있다. 아마도 그것은 사이클로이드를 예로 하였다는 점과 이후의 논문이나 서적에서도 그의 개념과 결과만을 간단히 언급하고 있기 때문일 것이다. 따라서 본 연구에서는 그의 개념을 중등수학에서 다루는 이차곡선에 적용하고, 로베르발의 예인 사이클로이드에 대해서도 그 정당성을 확인한다. 즉, 동적기하프로그램을 활용하여 직관적, 시각적으로 그의 개념을 구현하고, 그 직선이 접선임을 연역적으로 증명한다.

이러한 내용은 교사에게 새로운 수업 소재를 제공하고 교과지식에 대한 전문성을 신장하는데 도움이 되며, '기하와 벡터'를 배운 학생들에게 벡터를 이용하여 접선을 이해하는 또 다른 시각을 제시할 것이고, 더 나아가 이전까지 배워왔던 곡선과 직선의 교점의 수나 판별식을 이용한 정적인 접선이 아닌 벡터를 이용한 동적인 접선을 경험하게 되는 계기가 될 것이다. 또한 벡터의 합을

---

* 접수일(2014년 03월 28일), 수정일(2014년 05월 22일), 게재확정일(2014년 08월 12일)
* ZDM분류 : G49
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 접선, 벡터, 포물선, 타원, 원
* 이 논문은 부산대학교 자유과제 학술연구비(2년)에 의하여 연구되었음.
† 교신저자
[1] 우정호 외 (2009).
[2] 황선욱 외 (2009).
[3] 황선욱 외 (2010).

이용하여 곡선에서의 접선을 작도하는 이 방법은 운동학적인 관점에서 접선을 다루어 봄으로써 교육과학기술부가 2011년부터 중점추진과제로 설정하여 학교교육현장에 적용하고 있는 융합인재교육(STEAM)의 목적에도 부합하는 지도교재라고 할 수 있다.

이와 같이 본 연구는 수학사에 대한 이론적 고찰을 통해 중등수학에 활용할 수 있는 소재를 찾고, 이것을 실제적으로 구현할 수 있는 방안을 모색하여 모델화함으로써 교사들의 교수학적 활동을 지원하는데 목적이 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

접선에 대한 기록은 고대 그리스 시대의 유클리드 '원론(Elements)'[4]에 처음 등장하는데, 제 Ⅲ권 정의 2에서 그는 "직선이 원과 만나며 길게 늘여서 이 원을 자르지 않을 때 이 직선을 원에 접한다."라고 정의하고 있다. 유클리드는 도형과 도형 사이의 관계에서 아름다움을 찾았는데, 직선과 원이 서로에게 전혀 영향을 주지 않다가 처음으로 관계를 맺게 되는, 접하는 상태에 많은 관심을 가졌던 것으로 보인다. 이후 일반적인 곡선에 대한 접선을 구하는 문제는 미적분학의 출현을 가져온 문제들 중 하나로써 17세기에 많이 연구되었다. 조영미(1999)는 이를 다시 미적분학 출현 이전과 이후로 나누고, 미적분학의 출현 이전에 수학자들이 접선을 구하기 위해 고안한 방법으로 곡선 위를 움직이는 한 점의 운동방향을 벡터의 합을 이용하여 찾는 로베르발(Roberval)의 벡터 방법, 곡선의 방정식과 원의 방정식을 이용하여 접선을 작도하는 데카르트의 방법, 그리고 17세기 이후에 본격적으로 발달하는 '무한소'의 개념을 암암리에 사용한 페르마와 배로(Barrow)의 암묵적 무한소 방법을 소개하고 있다.

곡선에 접선을 그리는 문제와 함수의 극대·극솟값을 구하는 과정에서 미분법이 유래되었는데, 이 미분법에 대한 최초의 아이디어는 1629년의 페르마의 착상으로 알려져 있다. 또한, 뉴턴과 라이프니츠가 만든 미적분학의 출현 이후의 접선을 구하는 방법으로 무한소 방법과 극한 방법을 들 수 있는데, 무한소 방법은 모든 무한소량이 결과에서 무시되는 단순하고 직관적인 라이프니츠의 전통적 무한소 방법(우정호, 2007), 그리고 이 방법의 논리적 결함을 극복하기 위해 무한소 e를 수로 인정하고 실수체 $\mathbb{R}$에 첨가하여 $\mathbb{R}^*$를 만든 로빈슨(Robinson)의 현대적인 무한소 방법이 있다(김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤, 2011). 19세기 이후 일차원 그래프에 대한 접선의 개념은 고차원 공간의 그래프에 대한 접평면 개념으로 확대되며, 현대수학에서 접선의 개념은 비선형 문제에 대한 선형 근사의 의미까지 확대된다(김영록, 이영이, 한종민, 2009). 정영우 외(2012)의 연구에서도 접선은 현대수학의 중요한 사고 중 하나인 '근사(approximation)' 개념의 유용한 수단, 즉 접선은 국소적인 범위에서 곡선을 직선으로 근사시킬 수 있는 최적의 직선임을 강조하였다.

이처럼 접선 개념은 고대 그리스의 유클리드가 정의한 원의 접선에서부터 시작하여 오랜 세월동안 많은 수학자들에 의해서 그 접근방법이 연구되고 발전되어 왔으며, 그 개념이 변화해 왔다. 또한 이것이 현행 수학과 교육과정 전반에 걸쳐 반영되어 있는데, 안병국, 김병학, 박윤근(2010)의 연구에 의하면 접선은 수학과 교육과정에서 각 단계별로 학생들의 이해 수준에 맞게 교수학적으로 변환되어 있고 단계가 올라갈수록 그 정의가 확장되는 개념들 중 하나이다. 하지만 김은주(2008)는 현행 교육과정에 등장하는 다양한 접선 개념이 서로 연결되어 통합된 하나의 개념으로 제시되지 않고 각각 분절된 결과로 다루어지고 있으며, 접선이 되는 조건, 접선의 성질 등 지엽적인 것에 치중하여 접선의 정의를 소홀히 하고 있음을 지적하였다. 이로 인해 학생들은 접선에 대한 많은 오개념을 가지게 되었고, 이것은 수학을 전공하지 않는 대학교 1학년 학생들을 대상으로 한 톨(Tall, 1987)의 실험에 의해 입증된 바 있다. 그는 미적분학 강좌에서 접선에 대한 질문지를 제시하고, 그 결과를 분석하여 학생들의 접선에 대한 개념 이미지가 매우 고착화 되어 있음을 보였다. 이에 임재훈, 박교식(2004)은 '반례를 통한 기존 지식의 수정'이라는 라카토스(Lakatos)의 수리철학을 바탕으로 교육과정에 나오는 접선의 개념을 5가지로 구분하고, 이 개념의 단계별 수정·개선을 통하여 학생들의 인지적 재구성을 불러일으키는 7단계의 교수방안을 모색하였다. 이 외에도 수학적 모델링 활동을 통해 학생들이 미분계수를 재발명하는 과정을 분석한 강향임

[4] 유클리드 (이무현 역) (1998).

(2012)의 연구 등 접선 개념의 지도를 위한 다양한 연구들이 있으며, 본 연구 역시 접선의 개념을 바라보는 또 다른 관점을 제시하고자 한다.

고다이라 쿠니히코(小平邦彦, 1999)는 수학은 자연 속에서 수학적 현상을 연구하는 학문이라고 했는데, 그 방법으로서 수학을 전개하는 근본 공리를 선정하여 체계를 만들어 나간다고 했다. 따라서 선정된 공리를 바탕으로 나타나는 정의들은 게임에서의 규칙에 해당하는 것이므로 접선을 정의하는 방법 역시 자연스럽고 정확해야 하며 기존 정의들과의 통일성이 중요시 되어야 할 것이다.

Ⅲ. 연구방법

고등학교 '기하와 벡터'의 '이차곡선' 단원에서는 고등학교 '수학'에서 학습한 이차함수의 그래프, 원의 방정식 그리고 유리함수의 그래프에 대한 개념의 확장으로써 포물선, 타원 그리고 쌍곡선을 학습한다. 먼저, 각각의 개념과 성질을 학습한 후, 학생들은 이 곡선들과 직선의 위치관계를 판별식을 이용하여 다룬다. 이 때, 이차곡선의 방정식과 주어진 직선의 방정식을 연립하여 유도된 이차방정식이 중근을 가진다는 사실 − 즉, 판별식 $D=b^2-4ac=0$ − 로부터 이차곡선의 접선의 방정식을 유도한다. 하지만 판별식을 이용하는 이 방법은 주어진 곡선의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 유도된 식이 이차방정식인 경우에만 적용할 수 있는 제한된 방법이다. 물론 이차곡선 단원에서는 이 유도된 식이 항상 이차방정식이지만, 삼차 이상의 다항함수를 비롯한 여러 가지 함수의 그래프를 배우는 고등학생들에게는 판별식을 이용하여 접선을 구하는 방법 이외에도 접선을 구하는 다양한 방법을 지도함으로써 창의적이고 다양한 관점의 문제해결을 경험하게 할 필요가 있다.

본 연구는 접선을 구하는 다양한 방법들 중 벡터의 합을 이용하여 접선을 작도하는 방법을 소개한다.

이 방법을 제안한 로베르발은 나선의 접선을 찾는 아르키메데스의 방법과 유사하게 운동의 합성을 이용하여 사이클로이드의 접선을 찾았다. 그는 곡선을 움직이는 점의 자취로 생각하였고, 이 점에서의 운동을 두 개의 단순성분으로 분해하여 접선을 구하는 일반적인 방법을 발견하였는데, 그는 다음과 같이 말했다.

곡선의 속성을 잘 살펴본다. 그리고 당신이 접선을 그리려고 하는 위치에서 곡선을 만들어내는 점이 가지고 있는 여러 가지 운동들을 잘 살펴본다. 이러한 모든 운동들을 하나로 합성한다. 그리고 이렇게 합성한 운동의 방향선을 긋는다. 그러면 당신은 그 곡선에 대한 접선을 구하게 될 것이다(로베르발, 조영미(1999) 재인용).

로베르발은 사이클로이드를 예로 그의 방법을 설명하고 있으나 본 연구에서는 중등교육과정에서 다루고 있는 이차곡선에 대해서 먼저 생각해 보고, 이 논의를 사이클로이드까지 이어가기로 한다. 또한 로베르발의 설명을 동적기하프로그램을 이용하여[5] 시각적으로 확인하고, 과연 이 직선이 이차곡선과 한 점에서 만나는 접선인지를 연역적인 방법으로 확인한다. 실제로 어떤 곡선의 접선은 그 곡선과 접점 이외의 점에서 만날 수 있지만, 이차곡선의 경우는 접선과의 접점이 유일한 교점이다.

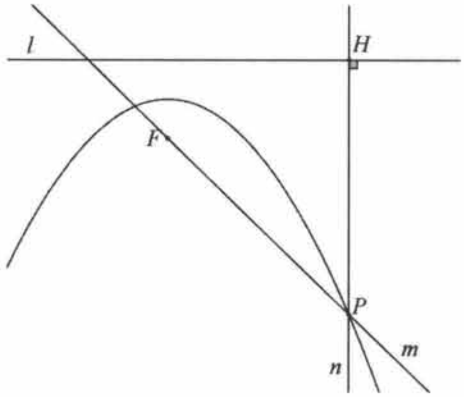
본 연구는 이와 같이 수학사의 내용을 소재로 하되, 결과론적인 접근이 아닌 발생적 접근을 통하여 학생들에게 '수학하는 경험'을 줄 수 있는 수학화 구성을 위하여 먼저 접선에 관한 수학사적 고찰과 교수학적 고찰을 하였으며, 그 중 로베르발의 개념을 중등수학에서 다루고 있는 이차곡선에 적용하는 직관적·경험적 과정과 이를 학문적으로 확인하는 연역적 과정을 구성하고, 다음으로 수학사적 소재인 사이클로이드에 대하여 직관적 확인을 하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

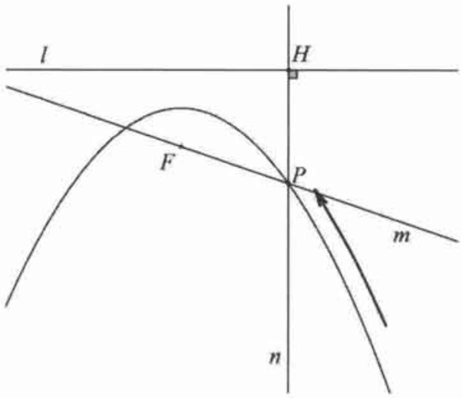
1. 포물선의 접선

동적기하프로그램을 이용하여 초점이 F, 준선이 l인 포물선을 그리고, 포물선 위를 움직이는 점을 P라고 하자. 초점 F와 점 P를 연결한 직선을 m, 점 P를 지나고 준선 l에 수직인 직선 n을 긋자. 그리고 점 P를 움직여 보자([그림 1], [그림 2]).

5) 여기서는 <GSP 5>를 사용하여 구현하였다.

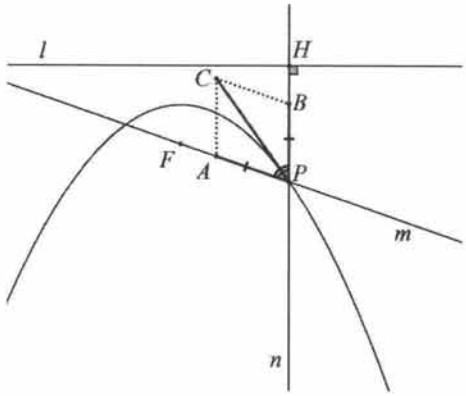


[그림1] 포물선의 접선 탐색 과정 1
[Fig. 1] Process exploring tangent line of parabola 1



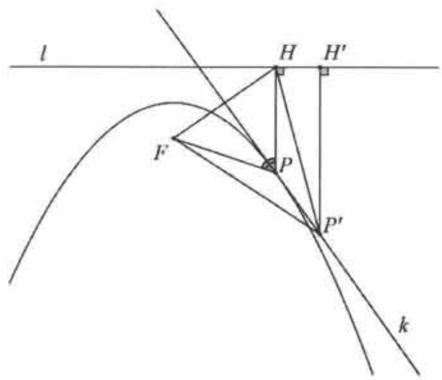
[그림 2] 포물선의 접선 탐색 과정 2
[Fig. 2] Process exploring tangent line of parabola 2

점 P는 포물선 위를 곡선운동하고 있지만, 직선 m 위에서 점 P의 움직임을 살펴보면 이 점은 초점 F를 향하여 직선운동을 하고 있음을 관찰할 수 있다[6]. 동일하게 생각하면 준선 l에 수직인 직선 n 위의 점 P는 수선의 발 H를 향하여 직선운동을 하고 있다. 즉, 점 P의 운동을 두 가지 운동으로 분할할 수 있음을 알 수 있다. 포물선의 정의에 따라 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이므로 [그림 1]에서 [그림 2]로 점 P가 이동하는 동안 $\overline{PF}$가 줄어든 길이와 $\overline{PH}$가 줄어든 길이는 같다. 즉, 동일한 시간에 점 P가 직선 m 위에서 초점 F를 향해 움직인 거리와 직선 n 위에서 수선의 발 H를 향해 움직인 거리는 같다.



[그림 3] 포물선의 접선 탐색 과정 3
[Fig. 3] Process exploring tangent line of parabola 3

따라서 [그림 3]과 같이 두 속도벡터 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PB}$의 크기는 같으며, 이 때 이 두 벡터의 합벡터 $\overrightarrow{PC}$의 방향이 바로 포물선 위를 움직이는 점 P의 운동방향이다. 여기서 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|$ 이므로 평행사변형 $PACB$는 마름모이고, 따라서 점 P와 C를 지나는 직선은 $\angle FPH$의 이등분선이다. 이제 이 각의 이등분선을 k라 하고, 이 직선이 주어진 포물선의 접선임을 보이자.



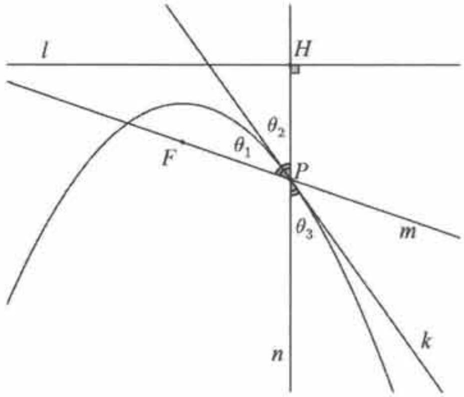
[그림 4] 포물선의 접선 탐색 과정 4
[Fig. 4] Process exploring tangent line of parabola 4

6) 동적기하프로그램에서는 점 P를 움직이면서 이러한 사실을 관찰시킬 수 있다.

포물선의 정의에 따라 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이므로 $\triangle FPH$는 이등변삼각형이고 $\angle FPH$의 이등분선 k는 $\overline{FH}$의 수직이등분선이다. 점 P가 주어진 포물선과 직선 k의 유일한 교점임을 보이기 위해 [그림 4]와 같이 k 위에 P가 아닌 임의의 점 P'를 잡자. 이 점 P'에서 준선 l에 내린 수선의 발을 H'라 하면

$$\overline{P'H'}<\overline{P'H}=\overline{P'F}$$

이므로 P'는 포물선 위의 점이 아니다. 따라서 점 P는 주어진 포물선과 직선 k의 유일한 교점이고, k는 주어진 포물선의 접선이다.

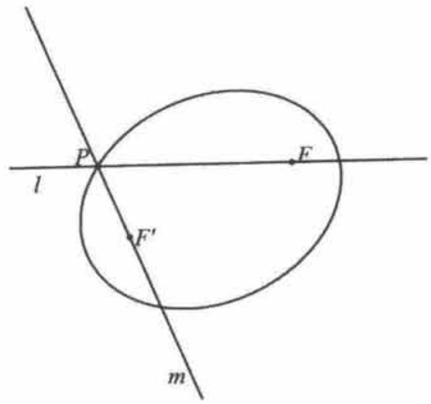


[그림 5] 포물선의 성질
[Fig. 5] Property of parabola

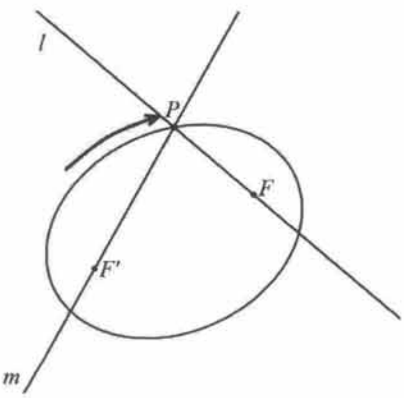
덧붙여 $\angle FPH$의 이등분선 k가 주어진 포물선의 접선이라는 사실을 이용하면, 준선에 수직 방향으로 들어온 빛이 초점을 지나는 포물선의 반사성질을 쉽게 확인할 수 있다. [그림 5]와 같이 준선 l에 수직으로 들어온 빛이 포물선 위의 점 P에서 반사된다고 하자. 그러면 접선 k는 $\angle FPH$의 이등분선이므로 $\theta_1=\theta_2$이고, θ_2와 θ_3은 서로 맞꼭지각이다. 따라서 $\theta_1=\theta_3$이고, 빛이 반사되는 지점의 접선에 대한 입사각 $\frac{\pi}{2}-\theta_3$과 반사각 $\frac{\pi}{2}-\theta_1$은 서로 같다.

2. 타원의 접선

동적기하프로그램을 이용하여 두 초점이 F, F'인 타원을 작도하고, 타원 위를 움직이는 점을 P라 하자. 두 초점 F, F'와 점 P를 이은 두 직선 l, m을 작도하고 점 P를 움직여 보자([그림 6], [그림 7]).



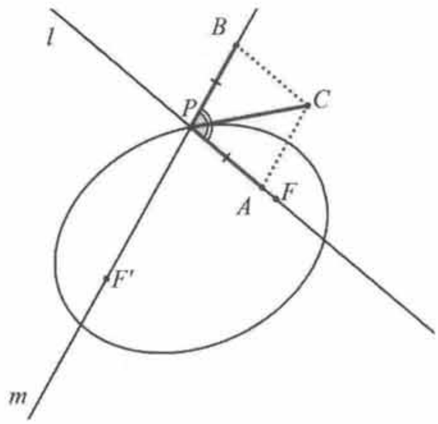
[그림 6] 타원의 접선 탐색 과정 1
[Fig. 6] Process exploring tangent line of ellipse 1



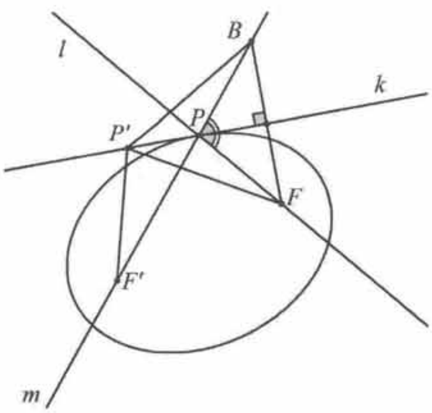
[그림 7] 타원의 접선 탐색 과정 2
[Fig. 7] Process exploring tangent line of ellipse 2

점 P는 타원 위를 곡선운동을 하고 있지만, 직선 l 위에서 점 P의 움직임을 살펴보면 이 점은 초점 F를 향하여 직선운동을 하고 있음을 관찰할 수 있다. 동일하게 생각하면, 직선 m 위의 점 P는 초점 F'의 반대 방향으로 직선운동을 하고 있다. 마찬가지로 점 P의 운동을 두 가지 운동으로 분할할 수 있음을 알 수 있다. 타원의 정의에 따라 $\overline{PF}$와 $\overline{PF'}$의 합이 일정하기 때

문에, [그림 6]에서 [그림 7]로 점 P가 이동하는 동안 $\overline{PF}$가 줄어든 길이와 $\overline{PF'}$가 늘어난 길이는 같다. 즉, 동일한 시간에 점 P가 직선 l 위에서 초점 F를 향해 움직인 거리와 직선 m 위에서 초점 F'의 반대 방향으로 움직인 거리는 같다.



[그림 8] 타원의 접선 탐색 과정 3
[Fig. 8] Process exploring tangent line of ellipse 3



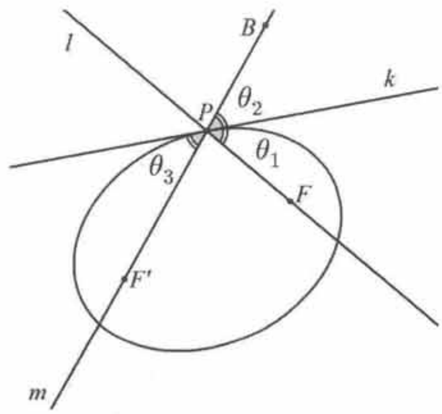
[그림 9] 타원의 접선 탐색 과정 4
[Fig. 9] Process exploring tangent line of ellipse 4

따라서 [그림 8]과 같이 두 속도벡터 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PB}$의 크기가 같으며, 이 두 벡터의 합벡터 $\overrightarrow{PC}$의 방향이 바로 타원 위를 움직이는 점 P의 운동방향이다. 여기서 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|$이므로 평행사변형 $PACB$는 마름모이고, 따라서 점 P와 C를 지나는 직선은 $\angle FPB$의 이등분선이다. 이제 이 각의 이등분선을 k라 하고, 이 직선이 주어진 타원의 접선임을 보이자.

[그림 9]와 같이 $\overline{F'P}$의 P 방향으로의 연장선 위에 $\overline{FP}=\overline{PB}$인 점 B를 잡으면 $\triangle FPB$는 이등변삼각형이 된다. 따라서 $\angle FPB$의 이등분선 k는 $\overline{FB}$의 수직이등분선이다. 점 P가 주어진 타원과 직선 k의 유일한 교점임을 보이기 위해 직선 k 위에 P가 아닌 임의의 점 P'를 잡으면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\overline{P'F'}+\overline{P'F}&=\overline{P'F'}+\overline{P'B}>\overline{F'B}\\&=\overline{F'P}+\overline{PB}=\overline{F'P}+\overline{PF}\end{aligned}$$

따라서 점 P'는 타원 위의 점이 아니므로 P는 주어진 타원과 직선 k의 유일한 교점이며, k는 주어진 타원의 접선이다.

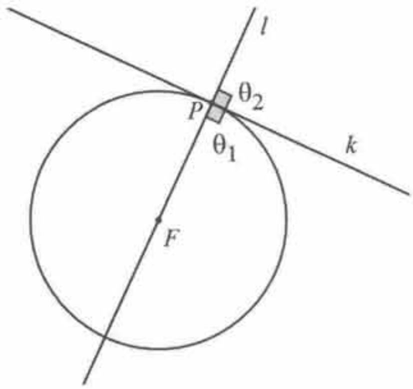


[그림 10] 타원의 성질
[Fig. 10] Property of ellipse

덧붙여 $\angle FPB$의 이등분선 k가 주어진 타원의 접선이라는 사실을 이용하면, [그림 10]과 같이 타원의 한 초점 F에서 출발하는 빛이 다른 초점 F'를 지나는 타원의 반사성질을 쉽게 확인할 수 있다. 왜냐하면 접선 k는 $\angle FPB$의 이등분선이므로 $\theta_1=\theta_2$이고, θ_2와 θ_3은 서로 맞꼭지각이다. 따라서 $\theta_1=\theta_3$이고, 빛이 반사되는 지점의 접선에 대한 입사각 $\frac{\pi}{2}-\theta_1$과 반사각 $\frac{\pi}{2}-\theta_3$은 서로 같다.

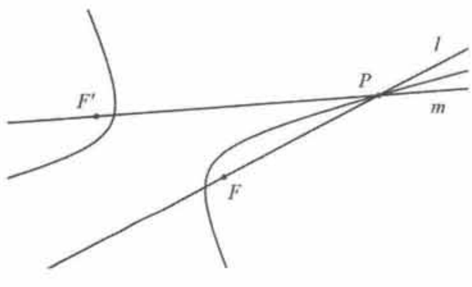
3. 원의 접선

만일 타원의 두 초점 F와 F'가 일치한다면, 주어진 타원은 점 F를 중심으로 하는 원이 된다. 이 경우 두 직선 l과 m 역시 일치하게 되고, $\theta_1=\theta_2$이므로 원 위의 점 P를 지나는 접선 k는 [그림 11]과 같이 주어진 원의 반지름 $\overline{PF}$에 수직인 직선이 된다.



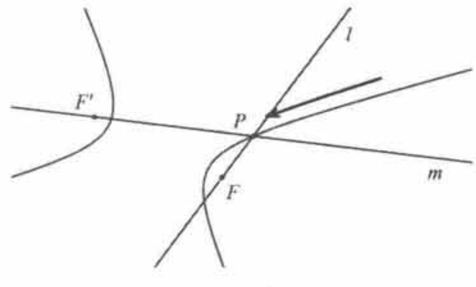
[그림 11] 원의 접선
[Fig. 11] tangent line of cycle

4. 쌍곡선의 접선



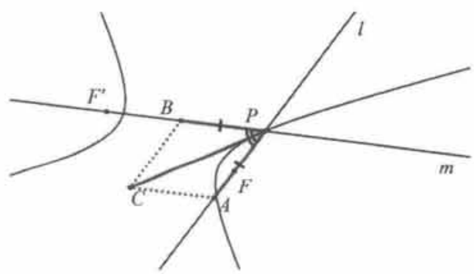
[그림 12] 쌍곡선의 접선 탐색 과정 1
[Fig. 12] Process exploring tangent line of hyperbola 1

동적기하프로그램을 이용하여 두 초점이 F, F'인 쌍곡선을 작도하고, 쌍곡선 위를 움직이는 점을 P라 하자. 두 초점 F, F'와 점 P를 이은 두 직선 l, m을 작도하고 점 P를 움직여 보자([그림 12], [그림 13]).



[그림 13] 쌍곡선의 접선 탐색 과정 2
[Fig. 13] Process exploring tangent line of hyperbola 2

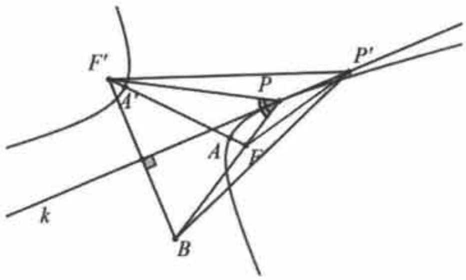
점 P는 쌍곡선 위를 곡선운동하고 있지만, 직선 l 위에서 점 P의 움직임을 살펴보면 이 점은 초점 F를 향하여 직선운동을 하고 있음을 관찰할 수 있다. 동일하게 생각하면 직선 m 위의 점 P는 초점 F'를 향하여 직선운동을 하고 있다. 따라서 점 P의 운동을 두 가지 운동으로 분할할 수 있음을 알 수 있다. 쌍곡선의 정의에 따라 $\overline{PF}$와 $\overline{PF'}$의 차가 일정하기 때문에, [그림 12]에서 [그림 13]으로 점 P가 이동하는 동안 $\overline{PF}$가 줄어든 길이와 $\overline{PF'}$가 줄어든 길이는 같다. 즉, 동일한 시간에 점 P가 직선 l 위에서 초점 F를 향해 움직인 거리와 직선 m 위에서 초점 F'를 향해 움직인 거리는 같다.



[그림 14] 쌍곡선의 접선 탐색 과정 3
[Fig. 14] Process exploring tangent line of hyperbola 3

따라서 [그림 14]와 같이 두 속도벡터 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PB}$의 크기는 같으며, 이 두 벡터의 합벡터 $\overrightarrow{PC}$의 방향이 바로 쌍곡선 위를 움직이는 점 P의 운동방향이다. 여기서 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|$이므로 평행사변형 $PACB$는 마름모이고,

따라서 점 P와 C를 지나는 직선은 $\angle FPB$의 이등분선이다. 이제 이 각의 이등분선을 k라 하고, 이 직선이 주어진 쌍곡선의 접선임을 보이자.

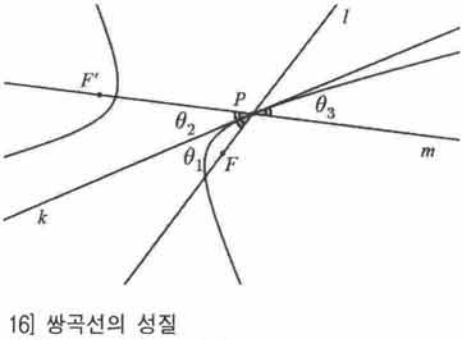


[그림 15] 쌍곡선의 접선 탐색 과정 4
[Fig. 15] Process exploring tangent line of hyperbola 4

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}$는 쌍곡선의 주축의 길이인 $\overline{AA'}$와 같으므로 [그림 15]와 같이 $\overline{PF}$의 F 방향으로의 연장선 위에 $\overline{FB}=\overline{AA'}$인 점 B를 잡으면 $\triangle F'PB$는 이등변삼각형이 된다. 따라서 $\angle F'PB$의 이등분선 k는 $\overline{F'B}$의 수직이등분선이다. 점 P가 주어진 쌍곡선과 직선 k의 유일한 교점임을 보이기 위해 직선 k 위에 P가 아닌 임의의 점 P'를 잡으면

$$\overline{P'F'}=\overline{P'B}<\overline{P'F}+\overline{FB}=\overline{P'F}+\overline{AA'}$$

이고, 따라서 $\overline{P'F'}-\overline{P'F}<\overline{AA'}$ 이므로 점 P'는 쌍곡선 위의 점이 아니다. 따라서 점 P는 주어진 쌍곡선과 직선 k의 유일한 교점이고, k는 주어진 쌍곡선의 접선이다.

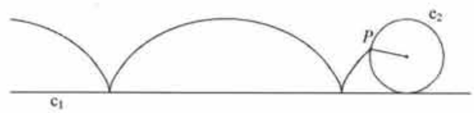


[그림 16] 쌍곡선의 성질
[Fig. 16] Property of hyperbola

덧붙여 $\angle FPF'$의 이등분선 k가 주어진 쌍곡선의 접선이라는 사실을 이용하면 [그림 16]의 직선 m을 따라 한 초점 F'를 향해 들어오는 빛이 다른 초점 F를 지나게 되는 쌍곡선의 반사성질을 쉽게 확인할 수 있다. 왜냐하면 접선 k는 $\angle FPF'$의 이등분선이므로 $\theta_1=\theta_2$이고, θ_2와 θ_3은 서로 맞꼭지각이다. 따라서 $\theta_1=\theta_3$이고, 빛이 반사되는 지점의 접선에 대한 입사각 $\frac{\pi}{2}-\theta_3$과 반사각 $\frac{\pi}{2}-\theta_1$은 서로 같다.

5. 벡터를 활용한 사이클로이드의 접선

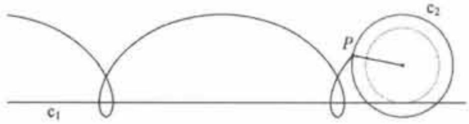
일정한 곡선 c_1에 접하면서 그 위를 다른 곡선 c_2가 미끄러지지 않고 굴러갈 때, c_2 위의 고정된 점 P의 자취를 룰렛(roulette)이라고 한다.[1] 이 때 c_1을 밑선, c_2를 전곡선(轉曲線), P를 극(極)이라 한다. 특히, c_1이 직선, c_2가 원 그리고 극 P가 c_2의 원주 위나 지름 또는 그 연장선 위에 있을 때, 이 룰렛을 트로코이드(trochoid)라 부른다. 여기서 원 c_2의 중심과 극 P 사이의 거리 즉, c_2의 반지름을 r이라 하고 이 c_2의 중심과 직선 c_1의 거리를 d라 할 때, 극 P의 자취는 다음 그림과 같다.



[그림 17] 트로코이드($r=d$)
[Fig. 17] Trochoid($r=d$)

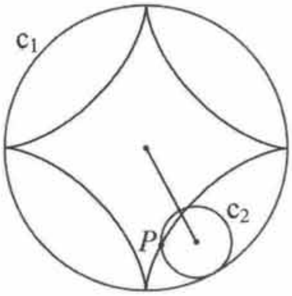
[그림 18] 트로코이드($r<d$)
[Fig. 18] Trochoid($r<d$)

1) http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=1089126&cid=200000000&categoryId=200002990

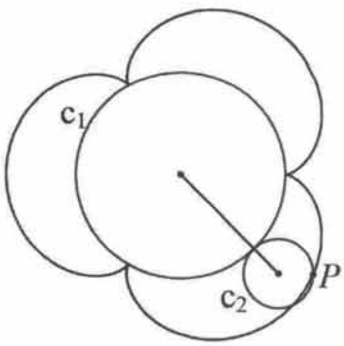


[그림 19] 트로코이드($r > d$)
[Fig. 19] Trochoid($r > d$)

특히, [그림 17]과 같이 $r = d$일 때, 이 트로코이드를 사이클로이드라 부른다. 덧붙여 밑선 c_1이 직선이 아니라 원일 경우, c_1과 c_2가 내접할 때 c_2의 원주 위의 점 P의 자취를 하이포 사이클로이드(hypocycloid), 반대로 c_1과 c_2가 외접할 때 c_2의 원주 위의 점 P의 자취를 에피사이클로이드(epicycloid)라 부른다.



[그림 20] 하이포사이클로이드
[Fig. 20] Hypocycloid

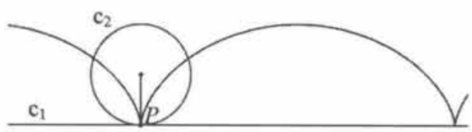


[그림 21] 에피사이클로이드
[Fig. 21] Epicycloid

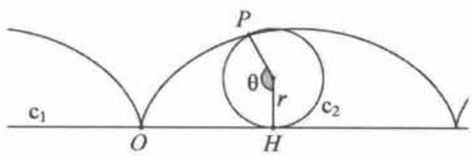
사이클로이드는 현재 정규교육과정에 포함되어 있지는 않지만 많은 대학의 정시모집 및 수시모집의 수리논술문제로 출제되는 등 교육적으로 충분히 다룰 수 있는 가치가 있다. 로베르발이 제안한 벡터의 합을 이용하여 곡선의 접선을 작도하는 방법은 앞서 언급한 이차곡선 이외의 일부 곡선에도 적용할 수 있는데, 사이클로이드 역시 이 방법을 이용하여 접선을 작도할 수 있다. 여러 대학에서 출제된 사이클로이드 관련 기출문제들을 살펴보면, 주로 사이클로이드의 개형을 그리고 곡선의 매개변수방정식을 구하는 문제나 적분을 이용한 호의 길이, 넓이 그리고 회전체의 부피를 구하는 문제들이다. 하지만 이 문제들은 학생들로 하여금 사이클로이드 학습을 오로지 공식의 적용과 계산에 대한 것으로 인식하게 할 가능성이 있다. 로베르발의 방법을 이용하여 사이클로이드의 접선을 작도하는 것은 물리적 현상으로써의 사이클로이드의 성질을 관찰하고, 벡터를 활용하여 이 성질을 응용하게 하는 좋은 소재이다.

이제 로베르발의 방법을 이용하여 사이클로이드, 하이포사이클로이드 그리고 에피사이클로이드의 접선을 작도하자.

(1) 사이클로이드의 접선



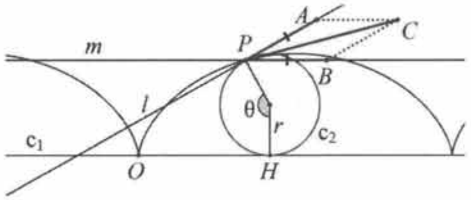
[그림 21] 사이클로이드의 접선 탐색 과정 1
[Fig. 21] Process exploring tangent line of cycloid 1



[그림 22] 사이클로이드의 접선 탐색 과정 2
[Fig. 22] Process exploring tangent line of cycloid 2

동적기하프로그램을 이용하여 원 c_2가 직선 c_1 위를 미끄러지지 않고 구르는 동안 일어난 운동을 살펴보자

([그림 21], [그림 22]). 여기서 찾을 수 있는 운동은 원 c_2 위의 점 P가 c_2의 둘레를 따라 움직이는 원운동과 원 c_2가 직선 c_1을 따라 수평방향으로 이동하는 직선운동이 있다. 우선 원 c_2 위의 점 P는 c_2가 점 O 에서 H로 이동하는 동안 c_2의 둘레를 따라 $\widehat{HP}$ 만큼 이동하였다. 여기서 $\widehat{HP}=r\theta=\overline{OH}$ 이므로 동일한 시간에 원 c_2 위의 점 P가 c_2의 둘레를 따라 이동한 거리와 원 c_2가 직선 c_1 위를 이동한 거리는 서로 같다.

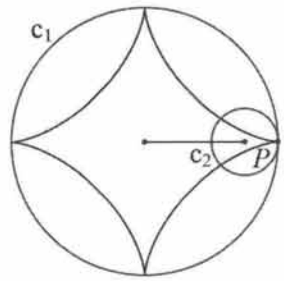


[그림 23] 사이클로이드의 접선 탐색 과정 3
[Fig. 23] Process exploring tangent line of cycloid 3

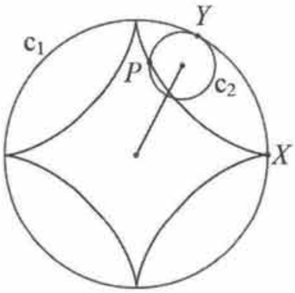
원의 둘레를 따라 움직이는 점의 운동방향은 그 점 위에서의 원의 접선방향이므로 원 c_2의 둘레를 따라 움직이는 점 P의 운동방향은 [그림 23]과 같이 점 P에서 c_2의 접선 l을 따라 작용하는 $\overrightarrow{PA}$와 같다. 또한 원 c_2의 운동방향은 직선 c_1과 평행한 직선 m을 따라 작용하는 $\overrightarrow{PB}$와 같다. 그러므로 직선 c_1 위를 미끄러지지 않고 굴러가는 원 c_2 위의 점 P의 운동방향은 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PB}$의 합인 $\overrightarrow{PC}$이며, 동일한 시간에 원 c_2 위의 점 P가 c_2의 둘레를 따라 이동한 거리와 원 c_2가 직선 c_1 위를 이동한 거리는 서로 같으므로 두 속도벡터 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PB}$의 크기는 서로 같다. 따라서 평행사변형 $PACB$는 마름모이고, $\angle APB$의 이등분선이 바로 점 P 위에서 주어진 사이클로이드의 접선이다.

$\angle APB$의 이등분선이 주어진 사이클로이드의 접선임을 확인하는 방법으로는 사이클로이드의 매개변수 방정식을 미분하여 접선의 방정식을 구하는 방법이 있는데, 이 방법은 동적기하소프트웨어를 활용하여 역동적인 접선의 모습을 관찰하는 본 논문의 목적에 부합되지 않는다. 또 다른 방법으로는 데카르트(Descartes)가 제안한 사이클로이드의 접선작도법이 있으며, 이 방법은 회전이동의 순간중심(Instantaneous center of rotation) 개념으로 발전한다.[7] 실제로 [그림 23]에서 점 H가 회전이동의 순간중심이며 동적기하프로그램의 각 측정기능을 이용하면 $\overline{HP}$와 $\overline{PC}$가 서로 수직임을 쉽게 확인할 수 있다. 그러나 회전이동의 순간중심을 이용한 증명은 중등교육과정을 벗어나므로 본 논문에서는 생략한다.

(2) 하이포사이클로이드의 접선



[그림 24] 하이포사이클로이드의 접선 탐색 과정 1
[Fig. 24] Process exploring tangent line of hypocycloid 1

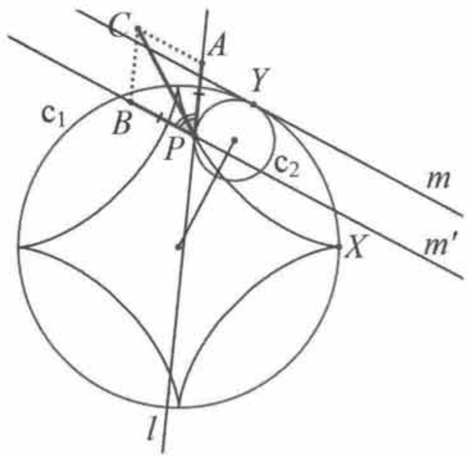


[그림 25] 하이포사이클로이드의 접선 탐색 과정 2
[Fig. 25] Process exploring tangent line of hypocycloid 2

동적기하프로그램을 이용하여 원 c_2가 원 c_1에 내접하여 미끄러지지 않고 구르는 동안 일어난 운동을 살펴보자([그림 24], [그림 25]). 여기서 찾을 수 있는 운동은 원 c_2 위의 점 P가 c_2의 둘레를 따라 움직이는 원운동과 원 c_2가 원 c_1의 둘레를 따라 내접하여 움직이는 원

7) 1638년 데카르트는 사이클로이드의 접선을 작도하는 방법을 제안하였고, 이후 이 방법은 1830년 미셸 샤슬레(Michel Chasles)에 의해 회전이동의 순간중심 개념으로 발전되었다.

운동이 있다. 우선 원 c_2 위의 점 P는 c_2가 c_1의 둘레를 따라 점 X에서 Y로 이동하는 동안, c_2의 둘레를 따라 긴 쪽의 호의 길이 $\widehat{YP}$만큼 이동하였다. 여기서 $\widehat{XY}=\widehat{YP}$ 이므로 동일한 시간에 원 c_2 위의 점 P가 c_2의 둘레를 따라 이동한 거리와 원 c_2가 원 c_1의 둘레를 따라 내접하여 이동한 거리는 서로 같다.

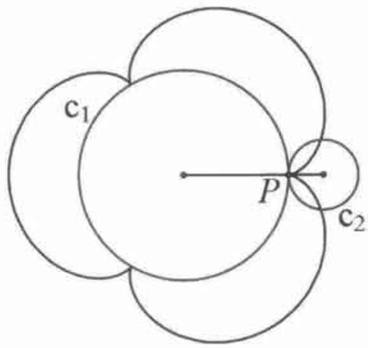


[그림 26] 하이포사이클로이드의 접선 탐색 과정 3
[Fig. 26] Process exploring tangent line of hypocycloid 3

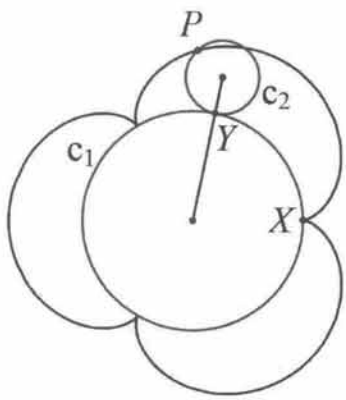
원의 둘레를 따라 움직이는 점의 운동방향은 그 점 위에서 원의 접선방향이므로 원 c_2의 둘레를 따라 움직이는 점 P의 운동방향은 [그림 26]과 같이 점 P에서 c_2의 접선 l을 따라 작용하는 $\overrightarrow{PA}$와 같다. 또한 원 c_2의 운동방향은 원 c_1 위의 점 Y에서의 접선 m과 평행한 직선 m'을 따라 작용하는 $\overrightarrow{PB}$와 같다. 그러므로 원 c_1 위를 미끄러지지 않고 내접하여 굴러가는 원 c_2 위의 점 P의 운동방향은 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PB}$의 합인 $\overrightarrow{PC}$이며, 동일한 시간에 원 c_2 위의 점 P가 c_2의 둘레를 따라 이동한 거리와 원 c_2가 원 c_1의 둘레를 따라 내접하여 이동한 거리는 서로 같으므로 두 속도벡터 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PB}$의 크기는 서로 같다. 따라서 평행사변형 $PACB$는 마름모이고, $\angle APB$의 이등분선이 바로 점 P 위에서 주어진 하이포사이클로이드의 접선이다.

$\angle APB$의 이등분선이 주어진 하이포사이클로이드의 접선임을 확인하는 방법 역시 하이포사이클로이드의 매개변수 방정식을 미분하여 접선의 방정식을 구하는 방법과 회전이동의 순간중심 개념을 이용한 방법이 있다. 실제로 [그림 26]에서 점 Y가 회전이동의 순간중심이 되며 동적기하프로그램의 각 측정기능을 이용하면 $\overline{YP}$와 $\overline{PC}$가 서로 수직임을 쉽게 확인할 수 있다. 그러나 회전이동의 순간중심을 이용한 증명은 중등교육과정을 벗어나므로 본 논문에서는 생략한다.

(3) 에피사이클로이드의 접선



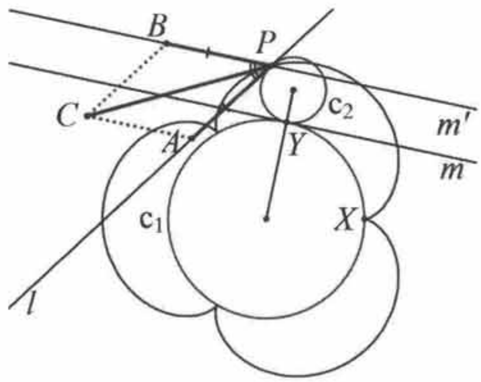
[그림 27] 에피사이클로이드의 접선 탐색 과정 1
[Fig. 27] Process exploring tangent line of epicycloid 1



[그림 28] 에피사이클로이드의 접선 탐색 과정 2
[Fig. 28] Process exploring tangent line of epicycloid 2

동적기하프로그램을 이용하여 원 c_2가 원 c_1에 외접하여 미끄러지지 않고 구르는 동안 일어난 운동을 살펴

보자([그림 27], [그림 28]). 여기서 찾을 수 있는 운동은 원 c_2 위의 점 P가 c_2의 둘레를 따라 움직이는 원운동과 원 c_2가 원 c_1의 둘레를 따라 외접하여 움직이는 원운동이 있다. 우선 원 c_2 위의 점 P는 c_2가 c_1의 둘레를 따라 점 X에서 Y로 이동하는 동안, c_2의 둘레를 따라 긴 쪽의 호의 길이 $\widehat{YP}$만큼 이동하였다. 여기서 $\widehat{XY}=\widehat{YP}$ 이므로 동일한 시간에 원 c_2 위의 점 P가 c_2의 둘레를 따라 이동한 거리와 원 c_2가 원 c_1의 둘레를 따라 외접하여 이동한 거리는 서로 같다.



[그림 29] 에피사이클로이드의 접선 탐색 과정 3
[Fig. 29] Process exploring tangent line of epicycloid 3

원의 둘레를 따라 움직이는 점의 운동방향은 그 점 위에서 원의 접선방향이므로 원 c_2의 둘레를 따라 움직이는 점 P의 운동방향은 [그림 29]와 같이 점 P에서 c_2의 접선 l을 따라 작용하는 $\overrightarrow{PA}$와 같다. 또한 원 c_2의 운동방향은 원 c_1 위의 점 Y에서의 접선 m과 평행한 직선 m'을 따라 작용하는 $\overrightarrow{PB}$와 같다. 그러므로 원 c_1 위를 미끄러지지 않고 외접하여 굴러가는 원 c_2 위의 점 P의 운동방향은 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PB}$의 합인 $\overrightarrow{PC}$이며, 동일한 시간에 원 c_2 위의 점 P가 c_2의 둘레를 따라 이동한 거리와 원 c_2가 원 c_1의 둘레를 따라 외접하여 이동한 거리는 서로 같으므로 두 속도벡터 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{PB}$의 크기는 서로 같다. 따라서 평행사변형 $PACB$는 마름모이고, $\angle APB$의 이등분선이 바로 점 P 위에서 주어진 에피사이클로이드의 접선이다.

$\angle APB$의 이등분선이 주어진 에피사이클로이드의 접선임을 확인하는 방법 역시 에피사이클로이드의 매개변수 방정식을 미분하여 접선의 방정식을 구하는 방법과 회전이동의 순간중심 개념을 이용한 방법이 있다. 실제로 [그림 29]에서 점 Y가 회전이동의 순간중심이 되며 동적기하프로그램의 각 측정기능을 이용하면 $\overline{YP}$와 $\overline{PC}$가 서로 수직임을 쉽게 확인할 수 있다. 그러나 회전이동의 순간중심을 이용한 증명은 중등교육과정을 벗어나므로 본 논문에서는 생략한다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 주어진 곡선의 접선을 구하는 다양한 방법들 중 로베르발이 제안한 벡터를 이용한 방법을 사용하여 고등학교 '기하와 벡터'에서 배우는 이차곡선의 접선을 구하였다. 그리고 이 벡터의 합으로 구한 직선이 주어진 곡선과 하나의 교점을 가진다는 것을 보임으로써 접선임을 증명하였다. 또한 고등학교 수학과 교육과정에는 포함되지 않지만 많은 대학의 구술면접 및 수리논술 문제로 출제되고 있는 주제인 사이클로이드, 하이포사이클로이드 그리고 에피사이클로이드에 대해서도 동일한 방법을 적용하여 이 곡선들의 접선을 구하였다. 이를 통해 학생들은 그동안 좌표평면에서 공식의 적용과 계산에 치우쳤던 이차곡선과 사이클로이드 곡선들의 물리적인 성질에 주목할 수 있으며, 다음과 같은 학습효과를 기대할 수 있다.

첫째, 벡터를 이용한 접선의 지도는 운동과 수학의 연계를 통하여 학생들에게 통합적인 안목을 길러주고, 현상에 대한 종합적인 이해와 사고력을 배양할 것이다. 현 고등학교 수학과 교육과정을 살펴보면 학생들은 이차곡선을 배운 후 벡터를 배우게 되는데, 수학에서 이차곡선을 배우기 전에 '물리Ⅱ'의 첫 단원인 '힘과 운동'에서 운동에 대한 학습을 통해 벡터의 합과 차 그리고 원운동에 관해 배우게 된다. 따라서 이들 내용을 교과 간에 통합적으로 다룬다면 학생들은 수학의 측면에서는 이차곡선의 정의를 활용하는 또 다른 경험을 하게 되고, 물리의 측면에서는 속도의 개념을 더 깊이 이해하는 경험을 하게 될 것이다.

사이클로이드의 접선 역시 학생들에게 사이클로이드

곡선 위를 움직이는 한 점의 운동방향으로 사이클로이드의 접선을 구하게 함으로써 그동안 지도되던 사이클로이드의 매개변수방정식을 구하는 학습, 굴러가는 원의 반지름과 이 원의 중심에서 밑선까지 거리의 관계를 통하여 그래프의 개형을 예측하는 학습, 그리고 호의 길이나 넓이 구하기 이외에도 학생들에게 사이클로이드의 동적인 성질을 탐구하는 새로운 도전과제를 제시할 수 있을 것이다.

둘째, 벡터를 이용한 접선의 지도는 고등학교에서 '벡터' 단원을 지도할 때 벡터의 활용에 대한 좋은 예가 되어 학생들은 벡터의 활용가치를 인식하게 될 것이다. 수학에서 벡터의 활용 범위는 매우 넓지만 고등학교 교육과정에서 벡터 활용의 예로 제시되는 것은 좌표공간에서의 직선의 방정식과 평면의 방정식 정도이다. 실제로 벡터는 대학생을 대상으로 한 '미분적분학'에서 많이 다루어지고 있는데, 고등학생들에게 지도하기 적합한 벡터 활용의 예를 찾고 교재로 구성하는 연구가 필요하다. 그런 의미에서 본 연구 내용은 활용가치가 있다.

셋째, 벡터를 이용한 접선의 지도는 접선의 개념에 대한 학생들의 폭넓은 이해를 도울 것이다. 교육과정에 제시된 판별식이나 미분을 이용한 방법과 함께 곡선 위를 움직이는 한 점의 운동방향으로 접선을 소개하는 것은 학생들이 접선의 정적인 모습과 동적인 모습을 함께 경험하는 것이 되며, 이것은 그들에게 접선에 대한 깊이 있는 이해를 가져다 줄 것이다. 실제로 곡선 위를 움직이는 한 점을 동적기하프로그램으로 구현한 후, 학생들의 수준에 따라 이 점의 운동방향을 찾고 이것이 주어진 곡선의 접선임을 증명하게 함으로써 이들에게 수학하는 과정을 경험하게 할 수 있다. 즉, 동적기하프로그램을 통해 직관적 경험을 하고, 증명활동을 통해 정당화를 하는 경험을 줄 수 있다.

그런데 로베르발의 방법으로 모든 곡선의 접선을 구할 수 있을까? 현재 중등학교 수학과 교육과정에서 다루어지는 곡선을 열거하면 다항함수의 그래프, 원의 그래프, 유리함수와 무리함수의 그래프, 삼각함수의 그래프, 지수함수와 로그함수의 그래프, 정규분포의 확률밀도함수의 그래프 그리고 이차곡선 등이 있다. 이들 중 이차곡선을 제외한 나머지 곡선들도 본 연구에서 제시한 벡터를 이용한 방법으로 접선을 구할 수 있다면, 학생들의 접선에 대한 학습에 큰 도움이 될 것이다. 그러나 벡터를 이용하여 접선을 구하는 이 방법에 대해 클라인(Kline)은 다음과 같이 말했다.

> 접선에 대한 이 정의는 물리 개념에 기초하고 있기 때문에, 물리현상과 관련이 없는 다른 많은 곡선들에는 적용이 불가능하다(Kline, 조영미(1999) 재인용).

이처럼 벡터를 이용하여 접선을 구하는 로베르발의 방법은 비록 모든 곡선으로 일반화 되지는 않지만[8] 학생들에게 접선의 새로운 모습을 보여주므로 충분한 가치를 가진다고 할 수 있다. 접선의 정의는 각 단계별로 학생들의 이해 수준에 맞게 교수학적으로 변환되어 있으며, 단계가 올라갈수록 그 정의가 확장되는 쉽지 않은 개념이다. 따라서 수학교사는 접선이 가지는 여러 가지 의미와 그것을 구하는 다양한 방법들을 충분히 이해하고 장단점을 파악하여 적절하고 다양하게 학생들에게 보여줄 필요가 있다.

본 연구에서는 접선 개념의 이해를 돕기 위한 새로운 지도방안으로 동적기하프로그램을 이용하여 로베르발의 벡터를 활용한 접선 작도법을 소개하고 이 방법의 수학적 타당성을 면밀히 분석하였다. 향후 수행되어야 할 연구 과제로써 이러한 이론적인 고찰을 바탕으로 이 방법에 대한 교수학적 고찰이 이루어져야 할 것이다. 즉 학생들의 이해 수준을 고려하여 어느 수준의 학생들에게 지도하는 것이 좋은지, 어떤 교수 방법으로 지도하는 것이 효과적인지, 그리고 교육과정 속 어느 시점에서 지도하는 것이 좋을지에 대한 논의가 이루어져야 한다. 또한 학생들이 직접 동적기하프로그램을 이용하여 로베르발의 방법으로 접선을 작도하는 구체적인 수업설계가 이루어진다면 현대 수학에서 사용되지 않는 과거의 수학적 활동이 현재의 수학교육에서 유용하게 활용될 수 있는 사례가 될 것이다.

---

[8] 미셸 샤슬레의 회전이동의 순간중심을 이용한 방법은 이러한 한계를 극복하여 모든 곡선들에 적용되는 방법이다. 그러나 이 방법은 중등교육과정을 벗어나므로 본 연구에서는 다루지 않았다. 이에 관한 자세한 내용은 The Inter-IREM Commission(1997)의 제 6장을 참고하기 바란다.

참 고 문 헌

강향임 (2012). 수학적 모델링 과정에서 접선 개념의 재구성을 통한 미분계수의 재발명과 수학적 개념 변화, 학교수학 14(4), 409-429.

Kang, H. (2012). Students' reinvention of derivative concept through construction of tangent lines in the context of mathematical modeling, *School Mathematics 14*(4), 409-429.

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤 (2011). 수학교육과정과 교재연구, 서울: 경문사.

Kim, N., Na, G., Park, K., Lee, K., Chung, Y. & Hong, J. (2011). Research on Mathematics Curriculum and Teaching Materials, Seoul: Kyungmoonsa.

김영록, 이영이, 한종민 (2009). 선형 근사로서의 접선 개념의 교육학적 고찰, 수학교육 논문집 23(3), 625-642.

Kim, Y., Lee, Y. & Han, J. (2009). Pedagogical discussion on the concept of tangent as a linear approximation, *Communications of Mathematical Education 23*(3), 625-642.

김은주 (2008). 제 7차 교육과정 교과서에 제시된 접선 개념 분석. 석사학위논문, 경북대학교.

Kim, E. (2008). Analysis of tangent line presented in mathematics textbooks under the 7th Korean curriculum. Master's dissertation, Kyungpook National University.

안병국, 김병학, 박윤근 (2010). Lakatos 이론과 GSP를 활용한 접선지도연구, 수학교육 논문집 24(3), 627-658.

An, B., Kim, B. & Park, Y. (2010). On effective way of teaching concept of tangent line using Lakatos theory and GSP, *Communications of Mathematical Education 24*(3), 627-658.

우정호 (2007). 학교수학의 교육적 기초, 서울: 서울대학교 출판부.

Woo, J. (2007). Educational Foundation of School Mathematics, Seoul: Seoul National University Press.

우정호, 박교식, 박경미, 이경화, 김남희, 임재훈, 박인, 지은정, 신보미, 최인선 (2009). 중학교 수학 1, 서울: (주)두산동아.

Woo, J., Park, K., Park, K., Lee, K., Kim, N., Yim, J., Park, I., Ji, E., Shin, B., Choi, I. (2009), Middle School Mathematics 1, Seoul: Doo San Dong-A.

임재훈, 박교식 (2004). 학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구, 수학교육학연구 14(2), 171-185.

Yim, J., Park, K. (2004). Teaching and learning concepts of tangent in school mathematics, *The Journal of Educational Research in Mathematics 14*(2), 171-185.

정영우, 이목화, 김부윤 (2012). 근사개념 지도를 위한 관련 지식의 교수학적 고찰, 수학교육 논문집 26(1), 137-154.

Chung, Y., Lee, M. & Kim, B. (2012). A study in the pedagogical consideration of the related knowledge for teaching 'Approximation' conception, *Communications of Mathematical Education 26*(1), 137-154.

조영미 (1999). 접선 개념의 교육적 연구, 수학교육학연구 9(1), 229-237.

Cho, Y. (1999). On the educational study on tangents of curves, *The Journal of Educational Research in Mathematics 9*(1), 229-237.

황선욱, 강병개, 김수영 (2009). 고등학교 수학, 서울: (주)좋은책신사고.

Hwang, S., Kang, B., Kim, S. (2009), High School Mathematics, Seoul: Truebook Sinsago.

황선욱, 강병개, 허민, 최수창, 신동윤, 장경성, 김수영, 한용익, 황세호, 김창일, 정상일, 이문호, 박진호 (2010). 고등학교 기하와 벡터, 서울: (주)좋은책신사고.

Hwang, S., Kang, B., Her, M., Choi, S., Shin, D., Chang, K., Kim, S., Han, Y., Hwang, S., Kim, C., Chung, S., Lee, M., Park, J. (2010), High School Geometry and Vectors, Seoul: Truebook Sinsago.

Tall, D. (1987). Constructing the concept image of a tangent. *Proceedings of PME 11*, Montreal, 3, 69-75.

Euclid (1998). 기하학 원론(바) (이무현 역), 서울: 교우사.

Euclid (1998). Euclid's Elements, Seoul: Kyowoosa.

The Inter-IREM Commission (1997). *History of Mathematics Histories of Problems*, Paris: Ellipses.

小平邦彦 (1999). 수학이 살아야 나라가 산다 (김성숙, 김형보 역), 서울: 경문사. (원저 1986년 출판)

Kodaira Kunihiko (1986). *Symbol of mathematician lazy*, Tokyo: Iwanamishoten. (translated into Korean by Kim Sung Sook and Kim Hyung Bo at Seoul: Kyungmoonsa, 1999)

A study on tangent of quadratic curves and cycloid curves using vectors

Lee, Dong Won
Changshin High School, Changwon, Korea.
E-mail : tuna420@hanmail.net

Chung, Young Woo
Department of Mathematics, Kyungsung University, Busan, Korea.
E-mail : nahime02@ks.ac.kr

Kim, Boo Yoon†
Department of Mathematics Education, Pusan National University, Busan, Korea.
E-mail : kimby@pusan.ac.kr

'Tangent' is one of the most important concepts in the middle and high school mathematics, especially in dealing with calculus. The concept of tangent in the current textbook consists of the ways which make use of discriminant or differentiation. These ways, however, do not present dynamic view points, that is, the concept of variation. In this paper, after applying 'Roberval's way of finding tangent using vectors in terms of kinematics to parabola, ellipse, circle, hyperbola, cycloid, hypocycloid and epicycloid, we will identify that this is the tangent of those curves. This trial is the educational link of mathematics and physics, and it will also suggest the appropriate example of applying vector. We will also help students to understand the tangent by connecting this method to the existing ones.

* ZDM Classification : G49
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key words : tangent, vector, parabola, ellipse, circle hyperbola, cycloid
† Corresponding author