Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МИФИ»

ИНСТИТУТ ЛАЗЕРНЫХ И ПЛАЗМЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА №31 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ОТЧЕТ

по научно-исследовательской работе за весенний семестр 2024 года

на тему: Численное исследование уравнения Капицы

ТЕМА НИР

г. Москва 2024

Содержание

Аннотация

В данной работе проводилось численное исследование уравнения Капицы, включающее построение графиков зависимости фазы маятника Капицы от времени, и фазовых диаграмм. Также в работе была проведена проверка метода получения данных для графиков путем подбора задачи, похожей на исходную, но с изветсным решением.

1 Введение

В данной работе рассматривается модель маятника Капицы, который представляет из себя комбинацию математического маятника и гармонического осцилятора (один из вариантов конструкции маятника представлен на рисунке 1).

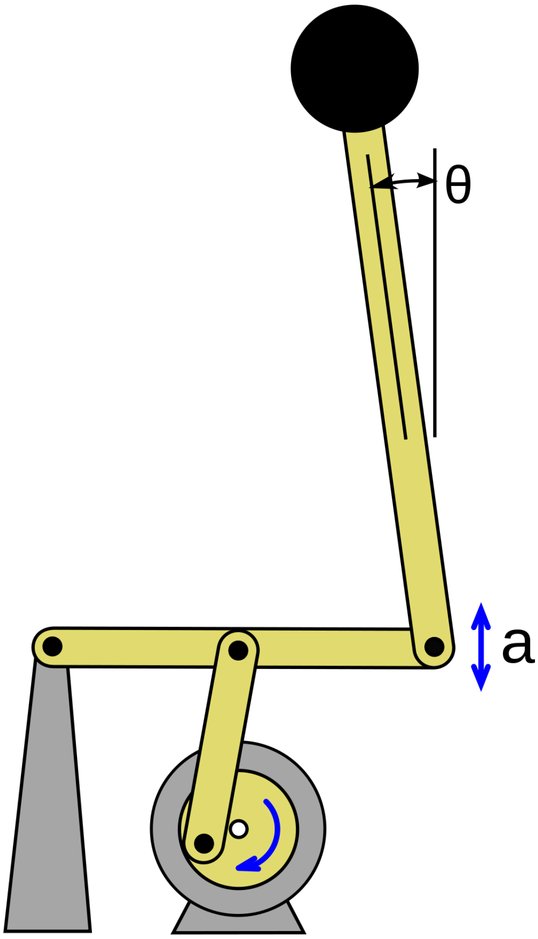

Рис. 1: Пример конструкции маятника Капицы

Данный маятник имеет два мехнизма, приводящие его в движение, что делает рисунок движения достаточно хаотичным. Существует дифференциальное уравнение, описывающее движение данного маятника. Выглядит оно следующим образом:

$$L\phi'' + (g - A\omega^2 \sin \omega t) \sin \phi = 0. \quad (1)$$

В следующих разделах с целью исследования поведения маятника при разных условиях будет рассматриваться именно это уравнение.

2 Выбор метода интегрирования

Первым вопросом, который необходимо было решить,стал выбор метода интегрирования. С помощью данного метода будут построены необходимые графики, и получены необходимые данные о поведении функции при различных начальных условиях.

Для проведения процесса интегрирования был выбран метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Это достаточно популярный метод решения подобных задач. Четвертый порядок метода позволяет получить достаточно высокую точность измерения данных, чтобы проводить исследования при экстремальных условиях работы установки, в нашем случае это высокая амплитуда, частота маятника. При этом данный порядок не достаточно высок, чтобы приводить к существенному усложнению вычислений и запредельному времени работы программы в целом. Также, как будет проверенно в дальнейшем, данный метод успешно справляется с тестовой задачей, и действительно показывает четвертый порядок точности при ее решении.

Суть данного метода заключается в вычислении каждой следующей фазы положения через предыдущую. При этом в процессе происходит вычисление четырех вспомогательных коэффициентов.

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка, и алгоритм получения значения (x_{n+1}, t_{n+1}) через значение (x_{n+1}, t_{n+1}), где x_n — переменная, для которой происходит поиск значений, t_n — переменная, по которой произведено дифференцирование. Задача Коши:

$$\begin{cases} x' = f(x,t); \\ x(t_0) = a. \end{cases} \tag{2}$$

Первым шагом при переходе к новым значением становится вычисление вспомогательных коэффициентов по следующим формулам:

$$k_1 = f(x_n, t_n)\tau, \tag{3}$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{1}{2}\tau)\tau, \tag{4}$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}k_2, t_n + \frac{1}{2}\tau)\tau, \tag{5}$$

$$k_4 = f(x_n + k_3, t_n + \tau)\tau. \tag{6}$$

Далее происходит вычисление непосредственно самих новых значений переменных. Для этого используется формула:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{7}$$

Таким образом получается рабочий метод Рунге-Кутты четвертого порядка, с помощью которого в дальнейшем будут полученны необходимые данные для исследования уравнения Капицы и построения необходимых графиков.

3 Проверка метода с помощью тестовой задачи

Для того, чтобы убедиться в правильности выбора метода исследования данного уравнения, необходимо было проверить его на тестовой задаче, которая была бы похожа на исходную, но при этом имела бы точное решение, позволяющее сравнить вычисленные значения с эталонными. Данной задачей стало решение следующего уравнения (колебания гармонического маятника):

$$x'' + \omega_0^2 x = 0. \tag{8}$$

Данная задача имеет точное решение в виде:

$$x = A\cos(\omega_0 t). \tag{9}$$

В результате применения метода было полученно, что метод действительно успешно справляется с поставленной задачей, а сравнение значений, полученных с помощью численного интегрирования, с точными значениями, полученными через точное решение действительно дало четвертый порядок метода (см. рисунок 2, на рисунке представлены необходимые графики самой задачи, логарифмической зависимости погрешности от шага измерений, в консоли можно увидеть результаты операции линейной регрессии логарифмической зависимости).

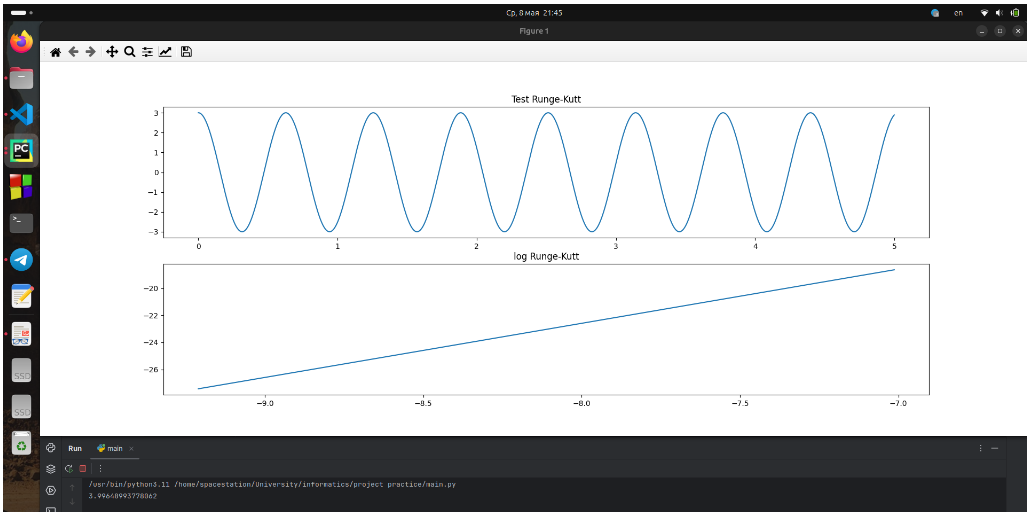

Рис. 2: Тестовая задача

Список литературы

[1] Боргояков Е. А., Кособрюхова О.В. "Современные подходы в профилактике неинфекционных заболеваний". - Ачинск. - 2016.