

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«МИФИ»

---

ИНСТИТУТ ЛАЗЕРНЫХ И ПЛАЗМЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
КАФЕДРА №31 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ОТЧЕТ

по научно-исследовательской работе за весенний семестр 2024 года  
на тему: Численное исследование уравнения Капицы

ТЕМА НИР

# Содержание

1	Введение	5
2	Выбор метода интегрирования	6
3	Проверка метода с помощью тестовой задачи	7
4	Интегрирование уравнения Капицы	8
5	Заключение	12

## Аннотация

В данной работе проводилось численное исследование уравнения Капицы, включающее построение графиков зависимости фазы маятника Капицы от времени, и фазовых диаграмм. Также в работе была проведена проверка метода получения данных для графиков путем подбора задачи, похожей на исходную, но с известным решением.

# 1 Введение

В данной работе рассматривается модель маятника Капицы, который представляет из себя комбинацию математического маятника и гармонического осциллятора (один из вариантов конструкции маятника представлен на рисунке 1).

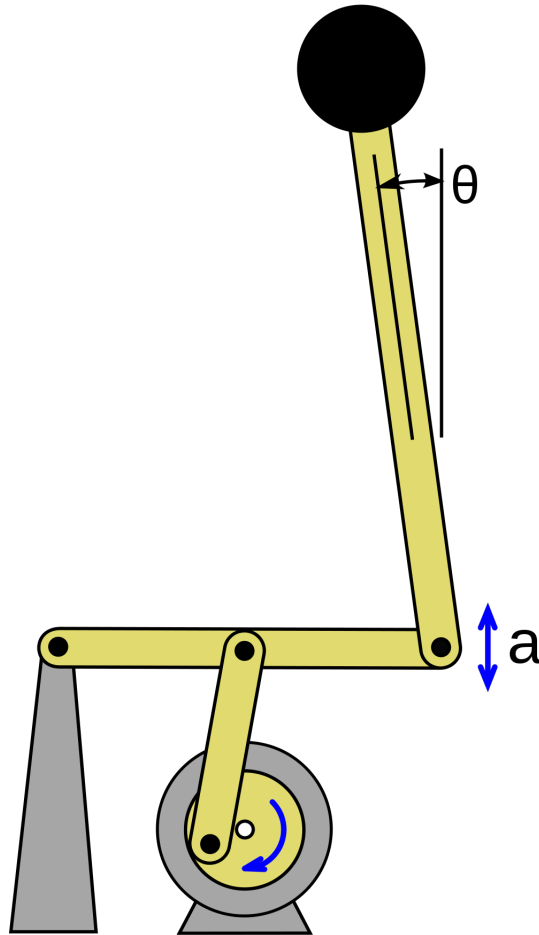


Рис. 1: Пример конструкции маятника Капицы

Данный маятник имеет два механизма, приводящие его в движение, что делает рисунок движения достаточно хаотичным. Существует дифференциальное уравнение, описывающее движение данного маятника. Выглядит оно следующим образом:

$$L\phi'' + (g - A\omega^2 \sin \omega t) \sin \phi = 0. \quad (1)$$

В следующих разделах с целью исследования поведения маятника при разных условиях будет рассматриваться именно это уравнение.

## 2 Выбор метода интегрирования

Первым вопросом, который необходимо было решить, стал выбор метода интегрирования. С помощью данного метода будут построены необходимые графики, и получены необходимые данные о поведении функции при различных начальных условиях.

Для проведения процесса интегрирования был выбран метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Это достаточно популярный метод решения подобных задач. Четвертый порядок метода позволяет получить достаточно высокую точность измерения данных, чтобы проводить исследования при экстремальных условиях работы установки, в нашем случае это высокая амплитуда, частота маятника. При этом данный порядок не достаточно высок, чтобы приводить к существенному усложнению вычислений и запредельному времени работы программы в целом. Также, как будет проверено в дальнейшем, данный метод успешно справляется с тестовой задачей, и действительно показывает четвертый порядок точности при ее решении.

Суть данного метода заключается в вычислении каждой следующей фазы положения через предыдущую. При этом в процессе происходит вычисление четырех вспомогательных коэффициентов.

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка, и алгоритм получения значения  $(x_{n+1}, t_{n+1})$  через значение  $(x_n, t_n)$ , где  $x_n$  — переменная, для которой происходит поиск значений,  $t_n$  — переменная, по которой произведено дифференцирование. Задача Коши:

$$\begin{cases} x' = f(x, t); \\ x(t_0) = a. \end{cases} \quad (2)$$

Первым шагом при переходе к новым значениям становится вычисление вспомогательных коэффициентов по следующим формулам:

$$k_1 = f(x_n, t_n)\tau, \quad (3)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{1}{2}\tau)\tau, \quad (4)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}k_2, t_n + \frac{1}{2}\tau)\tau, \quad (5)$$

$$k_4 = f(x_n + k_3, t_n + \tau)\tau. \quad (6)$$

Далее происходит вычисление непосредственно самих новых значений переменных. Для этого используется формула:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (7)$$

Таким образом получается рабочий метод Рунге-Кутты четвертого порядка, с помощью которого в дальнейшем будут получены необходимые данные для исследования уравнения Капицы и построения необходимых графиков.

### 3 Проверка метода с помощью тестовой задачи

Для того, чтобы убедиться в правильности выбора метода исследования данного уравнения, необходимо было проверить его на тестовой задаче, которая была бы похожа на исходную, но при этом имела бы точное решение, позволяющее сравнить вычисленные значения с эталонными. Данной задачей стало решение следующего уравнения (колебания гармонического маятника):

$$x'' + \omega_0^2 x = 0. \quad (8)$$

Данная задача имеет точное решение в виде:

$$x = A \cos(\omega_0 t). \quad (9)$$

В результате применения метода было получено, что метод действительно успешно справляется с поставленной задачей, а сравнение значений, полученных с помощью численного интегрирования, с точными значениями, полученными через точное решение действительно дало четвертый порядок метода (см. рисунок 2, на рисунке представлены необходимые графики самой задачи, логарифмической зависимости погрешности от шага измерений, в консоли можно увидеть результаты операции линейной регрессии логарифмической зависимости).

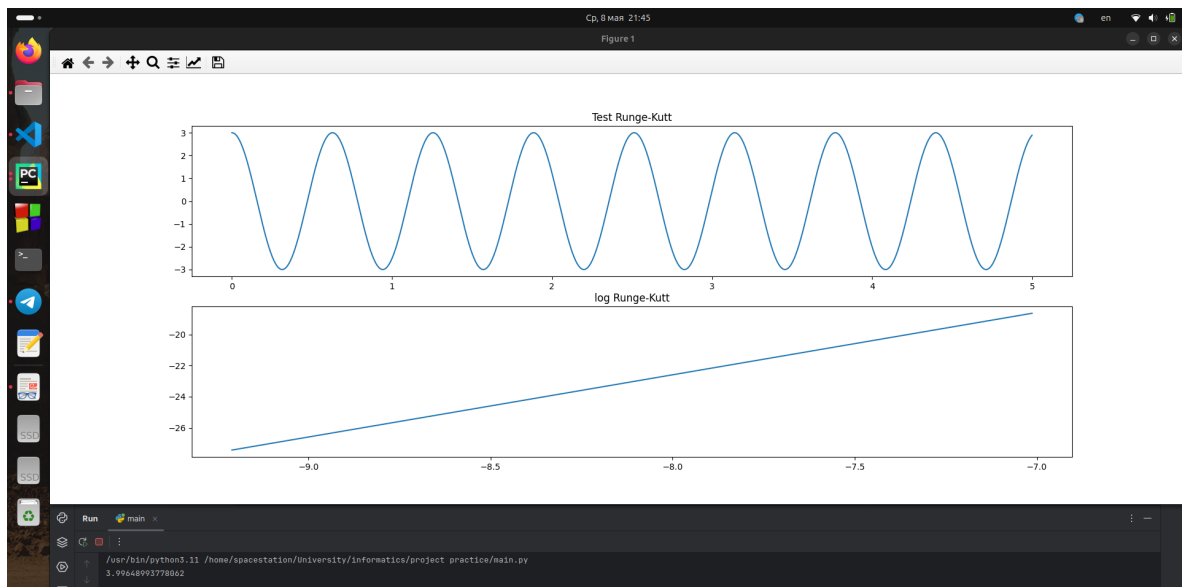


Рис. 2: Тестовая задача

## 4 Интегрирование уравнения Капицы

На данном этапе работы было произведено вычисление необходимых коэффициентов и подготовлена соответствующая программа для исследования уравнения Капицы при различных начальных данных. В условии задачи было предложено несколько наборов входных данных, для каждого из которых были получены соответствующие зависимости положения маятника от времени, а также фазовые диаграммы. Они представлены ниже.

1. Условия (см. рисунок 3):

$$\begin{cases} A = 0.5; \\ \omega = 5.3; \\ \phi(0) = 3.1 \end{cases} \quad (10)$$

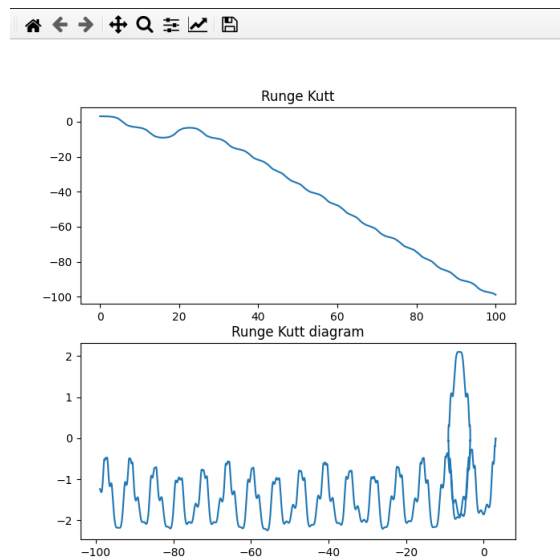


Рис. 3: Графики для первых условий

2. Условия (см. рисунок 4):

$$\begin{cases} A = 10; \\ \omega = 100; \\ \phi(0) = 3.1 \end{cases} \quad (11)$$

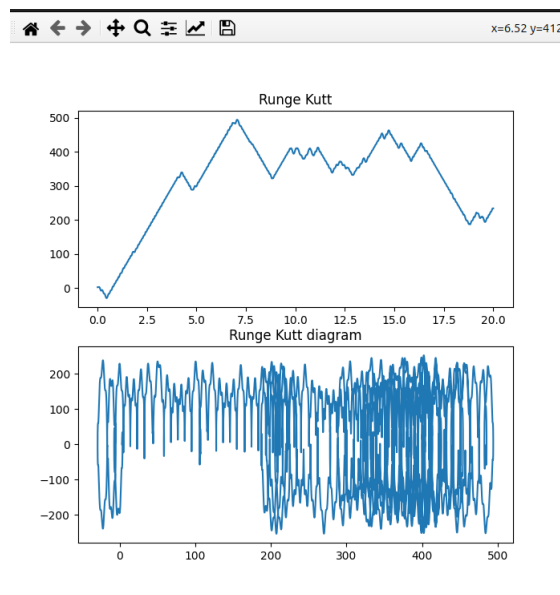


Рис. 4: Графики для вторых условий



3. Условия (см. рисунок 5):

$$\begin{cases} A = 10; \\ \omega = 100; \\ \phi(0) = 0.1 \end{cases} \quad (12)$$

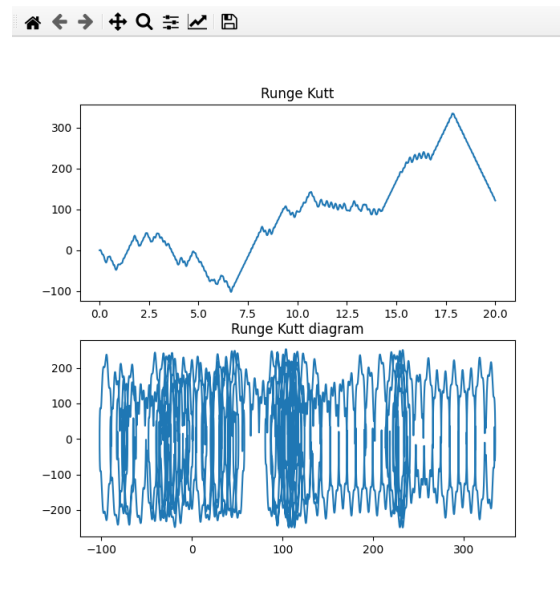


Рис. 5: Графики для третьих условий

4. Условия (см. рисунок 6):

$$\begin{cases} A = 2; \\ \omega = 100; \\ \phi(0) = 0.1 \end{cases} \quad (13)$$

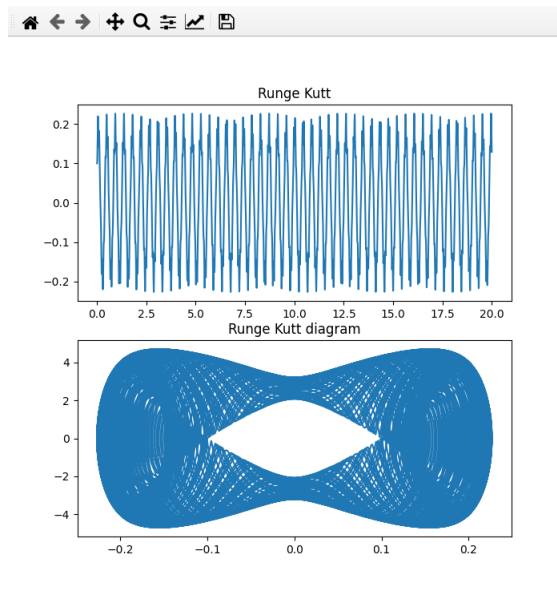


Рис. 6: Графики для четвертых условий

5. Условия (см. рисунок 7):

$$\begin{cases} A = 0.5; \\ \omega = 200; \\ \phi(0) = 0.05 \end{cases} \quad (14)$$

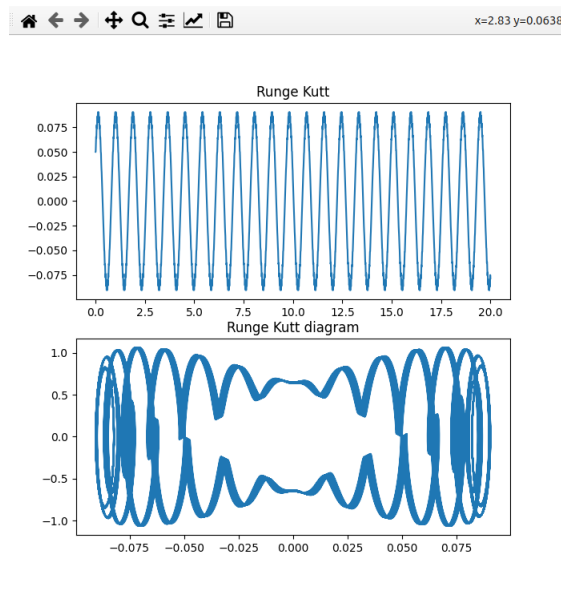


Рис. 7: Графики для пятых условий

## 5 Заключение

В результате работы над проектом было исследовано уравнение Капицы. При этом был выбран и описан подходящий метод интегрирования, проведена его проверка на тестовой задаче. Также были получены необходимые графики зависимости фазы маятника от времени, и фазовые диаграммы для всех наборов начальных условий. Также в начале работы был продемонстрирована одна из вариаций конструкции самого маятника Капицы.

В процессе работы над проектом выяснилось, что данная система имеет достаточно хаотичное движение, и при определенных наборах начальных условий предсказать поведение маятника будет непросто. При этом система способна находить устойчивые замкнутые траектории в достаточно неожиданные моменты, например в перевернутом состоянии.

## Список литературы

- [1] Рябенский В.С. “Введение в вычислительную математику”. - Москва. - 2008.
- [2] Федоренко Р.П. “Введение в вычислительную физику (2-е издание)”. - Москва. - 2008.
- [3] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г М “Численные методы”. - Москва. - 2020.
- [4] Калиткин Н.Н., Корякин П. В. “Численные методы”. - Москва. - 2013.
- [5] Петров И. Б. “Лекции по вычислительной математике. Учебное пособие.”. - Москва. - 2009.