姓名 学号 班级

计算机与人工智能学院、阿里云大数据学院、软件学院
2023~2024 学年第 1 学期
《概率论与数理统计》 期末考试试卷 A 卷

试卷适用专业： 化工 221 等 考试形式： 闭卷 所需时间： 90 分钟

题号	一	二	三 1	三 2	三 3	三 4	三 5	三 6	成绩
得分									
签名									

一、填空题（共 5 题，每题 4 分，共 20 分）

1. 甲乙两人独立向目标射击一次. 他们的命中率分别为 0.75 和 0.6, 则目标被命中的概率为 0.9 .

2. 设A,B为两个事件,$P(A)=P(B)=1/3,\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=1/6$, 则$P\left(A|\overline{B}\right)=$ 5/12 .

3. 设$\xi\sim N(5,\sigma^2)$，若$\eta\sim B(25,p)$，且$E\xi=E\eta,D\xi=D\eta$，则$\sigma=$ 2 .

4. 已知随机变量X的期望和方差均是 6，则由契比雪夫不等式可知$P\{0<X<12\}\geq$ 5/6 .

5. 设$X_1,X_2,\cdots,X_9$是来自$N(1,3)$的样本，则统计量$\sum_{i=1}^{9}\frac{(X_i-1)^2}{3}$服从 $\chi^2(9)$ 分布(要求写出分布的具体参数).

二、选择题（共 5 题，每题 4 分，共 20 分）

1. 设A,B是两个事件，若$\mathrm{P(A)=1-P(B)>0}$，$\mathrm{P(A\cup B)=1}$，则有(C).

(A) $\mathrm{A\cup B=\Omega}$ (B) $AB=\emptyset$ (C) $P(AB)=0$ (D) $P(A-B)=0$

2. 设随机变量$X\sim U[0,1]$，$Y\sim U[0,2]$，$f_1(x),f_2(x)$分别为X,Y的密度函数，则下列函数中**不是**密度函数的是(C).

(A) $\frac{2}{3}f_1(x)+\frac{1}{3}f_2(x)$ (B) $\frac{1}{3}f_1(x)+\frac{2}{3}f_2(x)$

(C) $f_1(x)-2f_2(x)$ (D) $2f_2(x)-f_1(x)$

3. 设X分布函数$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\leq x\leq 1\\ 1, & x>1\end{cases}$，则$EX=$(B).

(A) $\int_0^1 x^3dx$ (B) $\int_0^1 2x^2dx$ (C) $\int_0^1 x^2dx$ (D) $\int_0^{+\infty}2x^2dx$

4. 设随机变量X和Y相互独立，$X\sim N(-1,16)$，$Y\sim N(1,9)$，则$X-Y\sim$(C).

(A) $N(0,7)$ (B) $N(-2,7)$ (C) $N(-2,25)$ (D) $N(0,25)$

5. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体$X\sim P(\lambda)$的简单随机样本，则下列估计量中，**不是**λ的无偏估计的是(B).

(A) $X_1-X_2+X_3$ (B) $(X_1-X_2)^2$ (C) ${X_1}^2-X_1X_2$ (D) $\bar{X}$

三、计算题(共 6 题，每题 10 分，共 60 分）

1. 某员工为找新工作，请其领导写封推荐信. 他估计若得到强有力的推荐，则有80%的可能找到工作；若得到一般的推荐，则有40%的可能找到工作；若只得到比较弱的推荐，只有10%的可能找到工作. 而他估计得到强有力的推荐、一般推荐、较弱推荐的概率分别为0.7, 0.2, 0. 1, 问他找到工作的可能性是多少？

解：设该员工得到强有力推荐、一般推荐、较弱推荐分别为事件A_1,A_2,A_3，事件B为该员工找到工作，则

$$P(A_1)=0.7,P(A_2)=0.2,P(A_1)=0.1$$
$$P(B|A_1)=0.8,P(B|A_2)=0.4,P(B|A_3)=0.1,$$
$$\therefore P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$$
$$=0.7\times0.8+0.2\times0.4+0.1\times0.1$$
$$=0.65$$

2.设随机变量X的概率密度函数$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-x^2), & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，求$\mathrm{Y=3X+2}$的概率密度函数.

解: $F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{3X+2\leq y\}=P\{X\leq\frac{y-2}{3}\}=F_X(\frac{y-2}{3})$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=f(\frac{y-2}{3})(\frac{y-2}{3})'=\frac{1}{3}f(\frac{y-2}{3})$$
$$=\begin{cases}\frac{(5-y)(1+y)}{18}, 2<y<5\\ 0,其他\end{cases}$$

3. 设(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}x(1+3y^2), 0<x<2, 0<y<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$,

求(1) 关于 X 的边缘概率密度函数；(2) $E(XY)$.

解：(1) $0<x<2$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$

$$=\int_0^1\frac{1}{4}x(1+3y^2)\,dy$$

$$=\frac{1}{2}x$$

所以$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$

(2) $EXY=\int_0^1\int_0^2 xy\cdot\frac{1}{4}x(1+3y^2)dxdy$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2 x^2dx\int_0^1 (y+3y^3)dy$$

$$=\frac{5}{6}$$

4. 一个保险公司有 10000 个汽车投保人，每个投保人平均索赔 280 元，标准差为 800 元. 试用中心极限定理估计总索赔额超过 2700000 元的概率（结果用$\Phi(x)$表示）

解：设每个投保人索赔额为X_i，总索赔额为X,则

$$X=\sum_{i=1}^{10000}X_i$$

$$\therefore EX=2800000, DX=10000\times 800^2$$

$$\therefore P\{X>2700000\}=P\left\{\frac{X-2800000}{80000}>-\frac{5}{4}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{5}{4}\right)$$

5. 设总体 X 的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中参数θ未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X$的简单随机样本，$\bar{X}$是样本均值. 求参数θ的矩估计量.

解：$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

$$=\int_\theta^{2\theta}x\frac{2x}{3\theta^2}dx$$

$$=\frac{14}{9}\theta$$

令$EX=\overline{X}$，即$\frac{14}{9}\theta=\overline{X}$

$$\therefore \hat{\theta}=\frac{9}{14}\overline{X}$$

6. 据以往数据知某鱼塘中鱼的含汞量服从正态分布$N(1.07,0.3^2)$(单位: mg). 某日随机取 9 条鱼测得各条鱼的含汞量如下：

0.8, 0.9, 0.8, 1.2, 0.4, 0.7, 1.0, 1.2, 1.1.

若方差不变，在显著性水平$\alpha=0.05$下，试问该日鱼塘中鱼的含汞量的均值是否有明显变化？$(\Phi(1.96)=0.975, \Phi(1.645)=0.95)$

解：假设$H_0:\mu=1.07$，$H_1:\mu\neq 1.07$

$$\alpha=0.05,\quad \therefore U_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$$

$$\overline{x}=0.9$$

$$\because \left|\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{0.9-1.07}{0.3/\sqrt{9}}\right|=1.7<U_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$$

所以接受原假设H_0，即认为该日鱼塘中鱼的含汞量的均值无明显变化.

该方框中为装订区域 请勿输入答案