姓名　学号　班级

计算机与人工智能学院、阿里云大数据学院、软件学院
2024~2025 学年第 1 学期
《概率论与数理统计》 期末考试试卷 A 卷

试卷适用专业： 化工 231，232 等 　考试形式： 闭卷 所需时间： 90 分钟

题号	一	二	三 1	三 2	三 3	三 4	三 5	三 6	成绩
得分									
签名									

一、填空题（共 5 题，每题 4 分，共 20 分）

1. 10 张奖券中含有 4 张中奖的奖券，每人购买 1 张，则第二人中奖的概率为 $\frac{2}{5}$.

2. 已知$P(A)=0.4, P(B)=0.3, P(B|\bar{A})=0.4$, 则$P(\bar{A}\cup B)=$ 0.66 .

3. 设$X\sim B(2,p)$, 已知$P(X\geq 1)=5/9$, 则 $p=$ $\frac{1}{3}$.

4. 已知X的密度函数$f(x)=ce^{-|x|}, -\infty<x<+\infty$, 则 c = $\frac{1}{2}$.

5. 设$X_1,X_2,\cdots,X_{16}$是来自$N(0,4)$的样本，S 是其样本标准差，则统计量$\frac{\sum_{i=1}^{16}X_i}{4S}$服从 t(15) 分布(要求写出分布的具体参数).

二、选择题（共 5 题，每题 4 分，共 20 分）

1. 设事件A,B相互独立, $C=\emptyset$, 则 A, B, C (A).

(A) 相互独立　(B) 两两独立，不相互独立

(C) 不一定两两独立　(D) 仅两两独立

2. 设函数$F_1(x)$和$F_2(x)$分别为随机变量X_1和X_2的分布函数，若$F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$是某随机变量的分布函数，则 (C).

(A) $a=-3/2, b=1/2$　(B) $a=3/2, b=-1/2$

(C) $a=2/3, b=-1/3$　(D) $a=2, b=-1$

3. 设随机变量X和Y相互独立，$X\sim U(1,7), Y\sim N(5,9)$, 则$D(3X-Y+2)=$(B).

(A) 18　(B) 36　(C) 38　(D) 20

4. 设$X\sim N(0,1), Y\sim N(1,1)$, X 和 Y 相互独立, 则(B).

(A) $P\{X+Y\leq 0\}=1/2$　(B) $P\{X+Y\leq 1\}=1/2$

(C) $P\{X-Y\leq 0\}=1/2$　(D) $P\{X-Y\leq 1\}=1/2$

5. 设(X_1,X_2,X_3)是来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，则下列μ的无偏估计中，**方差最小**的是(D).

(A) $\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$　(B) $\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2$

(C) $\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2$　(D) $\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$

三、计算题(共 6 题，每题 10 分，共 60 分）

1.一台机床工作状态良好时，产品的合格率是 99%，机床发生故障时的产品合格率是 50%. 假设每次新开机器时机床处于良好状态的概率是 95%，问新开机器后生产的第一件产品是合格品的概率是多少？

解. 设新开机器时机床处于良好状态记为事件A.
产品为合格品记为事件B.

$\therefore P(A)=95\%\quad P(\bar{A})=5\%\quad P(B|A)=99\%\quad P(B|\bar{A})=50\%$

$\therefore P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})\cdot P(B|\bar{A})$

$=96.55\%$

2.设随机变量X的概率密度函数$f(x)=\begin{cases}2x^2+\frac{1}{3}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，求 $Y=4X+5$的概率密度函数.

解. $F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{4X+5\leq y\}$

$=P\{X\leq \frac{y-5}{4}\}=F_X(\frac{y-5}{4})$

$\therefore f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{4}f_X(\frac{y-5}{4})$

$=\begin{cases}\frac{(y-5)^2}{32}+\frac{1}{12} & 5<y<9\\ 0 & 其他\end{cases}$

3. 设(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}x^2+xy/3, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$，求(1) 关于 Y 的边缘概率密度函数；(2) $E(Y^2)$.

解 (1) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

当$0\le y\le 2$时 $f_Y(y)=\int_0^1(x^2+\frac{xy}{3})dx$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y, & 0\le y\le 2\\ 0 & 其他\end{cases}$

(2) $EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_Y(y)dy$

$=\int_0^2(\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{6}y^3)dy=\frac{14}{9}$

4. 一位职工每天乘公交车上班，如果每天用于等车的时间服从数学期望和标准差均为 5min 的分布，试用中心极限定理估算他在 100 个工作日中用于上班的等车时间之和在 400min 到 600min 之间的概率. (结果用$\Phi(x)$表示)

解 设每天上班等车时间为X_i，100个工作日等车时间为X

$\therefore X=\sum_{i=1}^{100}X_i$

$EX=500$　　$DX=2500$

$\therefore P\{400<X<600\}=P\{-2<\frac{X-500}{\sqrt{2500}}<2\}$

$\approx \Phi(2)-\Phi(-2)$

$=2\Phi(2)-1$

5. 设总体 X 的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2\theta^2}{x^3}, & x\ge\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中参数$\theta(>0)$未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X$的简单随机样本，$\overline{X}$是样本均值. 求参数$\theta$的矩估计量.

解 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

$=\int_{\theta}^{+\infty}\frac{2\theta^2}{x^2}dx=2\theta$

令$EX=\overline{X}$，即 $2\theta=\overline{X}$

$\therefore \hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{2}$

6. 设正常情况下某种清漆的干燥时间(单位：小时)服从正态分布$N(6,0.5^2)$，随机抽取 9 个样品，测出其干燥时间分别为

5.9，6.2，6.3，6.5，6.6，6.3，6.4，6.6，5.9.

若方差不变，问在显著性水平$\alpha=0.05$的情况下，可否认为该清漆的平均干燥时间为 6 个小时？($\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.645)=0.95$)

解 假设$H_0: \mu=6$　$H_1: \mu\ne 6$

$\because \alpha=0.05$　$\therefore u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$

$\because \overline{x}=6.3$

$\therefore \left|\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{6.3-6}{0.5/3}\right|=1.8<1.96$

$\therefore$ 接受H_0. 即可以认为该清漆的平均干燥时间为6个小时

该方框中为装订区域　请勿输入答案