计算机与人工智能学院、阿里云大数据学院
2022~2023 学年第 1 学期
《概率论与数理统计》 期末考试试卷 A 卷

试卷适用专业：化工 211 等 考试形式：闭卷 所需时间：90 分钟

题号	一	二	三 1	三 2	三 3	三 4	三 5	三 6	成绩
得分									
签名									

一、填空题（共 5 题，每题 4 分，共 20 分）

1. 设A,B为两个随机事件，$P(A)=0.8$, $P(A-B)=0.5$，则$P(\overline{A}\cup\overline{B})=$ 0.7 .

2.设三次独立试验中，事件 A 发生的概率都相同. 若已知 A 至少发生一次的概率为 0.875，则 A 在一次试验中发生的概率为 0.5 .

3. 设$X\sim N(2,\sigma^2)$，若$P\{2\le X\le 4\}=0.2$, 则$P\{X\ge 0\}=$ 0.7 .

4. 已知X服从泊松分布 P(2)，则$E(X^2)=$ 6 .

5. 设$X_1,X_2,\cdots,X_7$是来自$N(3,25)$的样本，则统计量$\sum_{i=1}^{7}\frac{(X_i-3)^2}{25}$服从$\chi^2(7)$分布(要求写出分布的具体参数).

二、选择题（共 5 题，每题 4 分，共 20 分）

1. 设A,B是两个事件，若A,B相互独立, 则下列不正确的是(D).

(A) $P(\overline{B}|\overline{A})=P(\overline{B})$ (B) $P(B|\overline{A})=P(B)$

(C) $P(A|\overline{B})=P(A)$ (D) $P(AB)=0$

2. 设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}a+be^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, 则 (B).

(A)$a=-1,b=1$ (B) $a=1,b=-1$ (C) $a=1,b=1$ (D) $a=-1,b=-1$

3. 设随机变量X和Y相互独立，$X\sim N(-1,2)$, $Y\sim N(1,3)$, 则$X+2Y\sim$(C).

(A) $N(1,8)$ (B) $N(1,22)$ (C) $N(1,14)$ (D) $N(1,40)$

4. 设随机变量 X 的方差为 2, 则契比雪夫不等式有$P\{|X-EX|\ge 2\}$(C).

(A) >0.5 (B) <0.5 (C) ≤ 0.5 (D) ≥ 0.5

5. 设(X_1,X_2,X_3)是来自总体$X\sim N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，则下列统计量中，不是σ^2的无偏估计的是(D).

(A) $\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)^2$ (B)$\frac{1}{5}{X_1}^2+\frac{3}{10}{X_2}^2+\frac{1}{2}{X_3}^2$

(C) ${X_1}^2+X_1X_2$ (D) ${X_1}^2+{X_2}^2$

三、计算题(共 6 题，每题 10 分，共 60 分）

1. 一架飞机失踪了, 推测它等可能地坠落在甲、乙、丙三个区域，受各个区域地理和环境条件的影响，它落在甲、乙、丙区域被发现的概率分别为 1/2, 1/3, 1/4. 问该飞机被发现的概率是多少？

解：假设事件A_1,A_2,A_3分别表示失踪的飞机坠落在甲、乙、丙三个区域，

事件 B 表示失踪的飞机被发现，则由题意知，

$\mathrm{P}(A_1)=\mathrm{P}(A_2)=\mathrm{P}(A_3)=\frac{1}{3}$，

$\mathrm{P}(\mathrm{B}|A_1)=\frac{1}{2},\mathrm{P}(\mathrm{B}|A_2)=\frac{1}{3},\mathrm{P}(\mathrm{B}|A_3)=\frac{1}{4}$

由全概率公式得，

$\mathrm{P}(\mathrm{B})=\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(\mathrm{B}|A_1)+\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(\mathrm{B}|A_2)+\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(\mathrm{B}|A_3)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$

$=\frac{13}{36}$

2.设随机变量X的概率密度函数$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，求$Y=2X+1$的概率密度函数.

解：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+1\le y\}=P\{X\le\frac{y-1}{2}\}=F_X(\frac{y-1}{2})$

$f_Y(y)=F'_Y(y)=f(\frac{y-1}{2})(\frac{y-1}{2})'=\frac{1}{2}f(\frac{y-1}{2})=\begin{cases}\frac{3}{64}(y-1)^2, 1<y<5\\ 0, 其他\end{cases}$

姓名 学号 班级

3. 设(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}12xy(1-x), 0<x<1, 0<y<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，求(1) 关于 X 的边缘概率密度函数；(2) $E(XY)$.

解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$

$0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_0^1 12xy(1-x)\,dy$

$$=12x(1-x)\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_0^1=6x(1-x)$$

所以$f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

(2) $EXY=\int_0^1\int_0^1 xy\cdot 12xy(1-x)dxdy$

$$=\int_0^1 12x^2(1-x)dx\int_0^1 y^2dy$$

$$=\frac{1}{3}$$

4. 某发电站供应 10000 户居民独立用电. 假设用电高峰时, 每户用电的概率为 0.9. 请用中心极限定理计算同时用电户数在 8970 至 9030 之间的概率. (结果用$\Phi(x)$表示）

解:设X为 10000 户居民中同时用电的户数，则$X\sim B(10000,0.9)$，所以

$EX=9000$，$DX=900$

$$P\{8970<X<9030\}$$

$$=P\left\{-1<\frac{X-9000}{30}<1\right\}$$

$$\approx\Phi(1)-\Phi(-1)$$

$$=2\Phi(1)-1$$

5. 设总体 X 的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{3}{2\theta^3}(2\theta x-x^2), & 0<x<\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$，其中参数θ未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X$的简单随机样本，$\overline{X}$是样本均值．求参数θ的矩估计量.

解：$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

$$=\int_0^\theta\frac{3}{2\theta^3}(2\theta x-x^2)xdx \quad =\frac{5}{8}\theta$$

令$EX=\overline{X}$，即$\frac{5}{8}\theta=\overline{X}$

$\therefore\hat{\theta}=\frac{8}{5}\overline{X}$

6. 在正常情况下，某炼钢厂的铁水含碳量(%)X服从正态分布 N(4.55, 0.0016). 某日测得 9 炉铁水含碳量如下：

4.48, 4.51, 4.54, 4.50, 4.47, 4.46, 4.49, 4.53, 4.52.

在显著性水平$\alpha=0.05$ 下，试问该日铁水含碳量的均值是否有明显变化？

($\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.645)=0.95$).

解：假设$H_0:\mu=4.55$，$H_1:\mu\neq4.55$

$\alpha=0.05$，$\quad\therefore U_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$

$$\overline{x}=\frac{1}{9}(4.48+4.51+4.54+4.50+4.47+4.46+4.49+4.53+4.52)$$

$$=4.5$$

$$\because\left|\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{4.5-4.55}{0.04/\sqrt{9}}\right|=\frac{15}{4}=3.75>U_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$$

所以拒绝原假设H_0，即该日铁水含碳量的均值有明显变化.

该方框中为装订区域 请勿输入答案