§1.1 实数

所有有尽小数/无尽循环小数均可表示为分数.

例: $3.\dot{1}4285\dot{7} = 3+\alpha$

$\alpha = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

$10^6\alpha = 142857+\alpha$

$\alpha = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$

$\therefore 3.\dot{1}4285\dot{7} = \frac{22}{7}$

无穷递降法（常用于初等数论）

例: 证明: 若 $n\in N^*$, n 不为完全平方数, 则 $\sqrt{n}$ 为无理数

反证: 假设 $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, $p,q\in N^*$. $p>q$

$\because n$ 不为完全平方数.

$\therefore \exists m\in N^*$. s.t. $m<p/q<m+1$

即 $0<p-mq<q$.

在 $p^2=nq^2$ 两边减去 mpq.

$p^2-mpq = nq^2-mpq$

$p(p-mq) = q(nq-mp)$

$\frac{p}{q} = \frac{nq-mp}{p-mq}\begin{matrix}\to p_1\\ \to q_1\end{matrix} \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$

$\because q>q_1 \Rightarrow p>p_1$

$\Downarrow$

$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \cdots \frac{p_n}{q_n}$

$\Downarrow$

$p>p_1>p_2\cdots p_n \quad q>q_1>q_2 - q_n$

不可能无休止递减.

$\therefore \sqrt{n}$ 不为有理数.

§1.2 数列 & 收敛数列

收敛数列定义:

$\{a_n\}$为一个数列. a为一个实数, 对 $\forall \varepsilon>0$. $\exists N\in N^*$, s.t. 当$n>N$时有 $|a_n-a|<\varepsilon$, 即$\{a_n\}$当n趋向无穷大时以a为极限, 记成

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 简记为 $a_n\to a\ (n\to\infty)$

例1: 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}=\frac{3}{2}$

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{\frac{5}{2}}{2\sqrt{n}-1}\right|=\left|\frac{5}{4\sqrt{n}-2}\right|=\frac{5}{2\sqrt{n}+2(\sqrt{n}-1)}<\frac{5}{2\sqrt{n}}<\frac{3}{\sqrt{n}}$$

$\frac{3}{\sqrt{n}}=\varepsilon$

$n=\frac{9}{\varepsilon^2}$

当 $N=[\frac{9}{\varepsilon^2}]$, 当 $n>N$时

$<\varepsilon$. 证毕

例2: 证明: 对 $\forall\alpha>0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$

1° $\alpha\geq1$

$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}\leq\frac{1}{n}$

取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$, $n>N$时

$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|\leq\frac{1}{n}<\varepsilon$. √

2° $0<\alpha<1$

$\exists m\in N^*$, s.t. $m\alpha>1$, 由1°可知 $\frac{1}{n^{m\alpha}}\to0$

对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$n>N$时, 有$\frac{1}{n^{m\alpha}}<\varepsilon^m$

等价于 $\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon$. 证毕

§1.3 收敛数列的性质

收敛数列极限唯一, 有界, 子列收敛

$\{a_n\}$收敛 $\Longleftrightarrow$ $\{a_{2n}\}$与$\{a_{2n-1}\}$收敛

数列极限满足加/减/除运算

例：证明：$\{\sin n\}$为一个发散数列

反证法：设 $\lim_{n\to\infty}\sin n = a$.

则 $\sin(n+1)-\sin(n-1)=2\sin 1\cos n$

两取极限，$n\to\infty$，得

$$0=2\sin 1\lim_{n\to\infty}\cos n$$

即 $\lim_{n\to\infty}\cos n=0$

又∵ $\sin^2 n+\cos^2 n=1$

$0=1$，矛盾。

§1.4 数列极限概念的推广

无穷大数列

性质：(1) $\{a_n\}$无穷大 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$无界

(2) $\exists\{a_n\}$的子列 $\{a_{k_n}\}$无穷大

(3) $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$，$\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$，则 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty$，$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=+\infty$.

(4) $\{a_n\}$无穷大 $\Leftrightarrow$ $\{\frac{1}{a_n}\}$无穷小

§1.5 单调数列

定义：$\{a_n\}$，$a_n\le a_{n+1}$，则递增数列，

$a_n<a_{n+1}$，则严格递增

定理：单调有界的数列一定有极限.

例：求$\{a^n/n!\}$极限$(a\in R)$

解：令 $x_n=\frac{|a|^n}{n!}$，当$n\ge|a|$时

$$x_{n+1}=x_n\frac{|a|}{n+1}\le x_n$$

∴$\{x_n\}$从某项开始为单减数列，有下界0，

$\because \lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，$x_{n+1} = x_n \frac{|a|}{n+1}$，$n\to\infty$ 时

$$x = x\cdot 0 = 0$$

$\therefore \{x_n\}$ 无穷小，$\{a^n/n!\}$ 无穷小

例：求证 $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ 发散.

证：显然单调递增

$$a_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \cdots (\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k})$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{2^k} \cdots \frac{1}{2^k}) = 1 + \frac{k}{2}$$

显然无界 $\Rightarrow$ 发散.

闭区间套定理.

$I_n = [a_n, b_n]$　　$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_{n-1} \supset I_n \supset \cdots$

若满足 $|I_n| = b_n - a_n \to 0$，则交集 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ 含有唯一一点

§1.6 自然对数的底 e

考察如下两个数列：$e_n = (1+\frac{1}{n})^n$，$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}$

$$e_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

二项式定理

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \cdots$$

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b \cdots$

$C_n^k a^{n-k} b^k + C_n^n b^n$

$\therefore e_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{n!} = S_n$

$$S_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

$\binom{n}{k} = C_n^k$

$\therefore e_n \leq 3$ 且 e_n 严格递增

$\therefore \exists \lim_{n\to\infty} e_n$　　$e \leq s$

另一方面 $n \geq m$ 时

$e_n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) \cdots$　固定 $m \in N^*$，$n\to\infty$ 时

$$e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdots \frac{1}{m!}$$

$\therefore e = s$

计算 $e = s \approx 2.7128$

§1.7 基本列与 Cauchy 收敛定理

基本列 / Cauchy 列定义：$\{a_n\}$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N^*$，s.t. $m, n \in N^*$

且 $m, n > N$ 时，$|a_m - a_n| < \varepsilon$.

可推广为 $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

例：$\alpha \leq 1$，$a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$，求证：$\{a_n\}$ 不是基本列

$$a_{n+p} - a_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^\alpha}$$

$$\geq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \cdots \frac{1}{n+p} \geq \frac{p}{n+p}$$

$\therefore a_{2n} - a_n \geq \frac{p}{p+n} = \frac{1}{2}$，不是基本列

列紧性定理：任意有界数列中必可选出一个收敛子列.

数列为基本列 $\Leftrightarrow$ 收敛

§1.8 上/下确界

略

§1.9 有限覆盖定理

开覆盖定义略

有限开覆盖定理：$[a, b] \subset \{I_\lambda\}$，可选出 $\{I_\lambda\}$ 中有限个成员覆盖 $[a, b]$

§1.10 上极限与下极限

定义：数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{k_n}\}$ 的极限称为一个极限点，

E为所有极限点的集合. $a^* = \sup E = \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$　$a_* = \inf E = \lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$

因此节暂时不重要，暂略后续定理例题

§1.11 Stolz定理

$\{b_n\}\uparrow$ 且 $\to +\infty$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = A$

例. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，证：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 \cdots x_n}{n} = a$.

设 $a_n = x_1 + x_2 \cdots x_n$　$b_n = n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1} = a$$

由Stolz定理可得结论.