1. 唯一性证明

eg: 唯一正根（单调性 + 零点定理）

2. 数列极根

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

① 不等式

② 个+上界，递+下界

③ 求导

④ 递推公式 → 求和 → 夹逼 → 分子分母速度不同
积分定义 → 都变化

求积 → 平方差
三角函数

3. 公式

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^3)$ → 推导

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

↳ 推导

$a^3+b^3 = a^3+a^2b-a^2b+ab^2-ab^2+b^3$

$= a^2(a+b) - ab(a-b) + b^2(a-b)$

$= (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-a^2b+a^2b-ab^2+ab^2-b^3$

$= a^2(a-b)+ab(a-b)+b^2(a-b)$

$= (a-b)(a^2+ab+b^3)$

① 对于 $\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}=\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}$

$\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5}\cdots\frac{k-3}{k-1},\frac{n-2}{n},\frac{n-1}{n+1}=\frac{2}{n(n+1)}$

② $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$ → 借助 $2\sin\frac{x}{2^n}$

③ $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$

同乘 $(1-x)$ 可得 出 公比为2

$$\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{(1-x)}$$

积分公式

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} xf(\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

点火公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rightarrow \begin{cases} \text{奇} & \frac{2}{3}\times 1 \\ \text{偶} & \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = \frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx = \frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \rightarrow \begin{cases} \text{奇} & 0 \\ \text{偶} & ②\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \rightarrow \begin{cases} \text{奇} & 0 \\ \text{偶} & ④\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

题目

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = 2\ln 2 - 1$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx \rightarrow \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx$$