第六周作业

1. 令随机变量X服从$[0,1]$上的均匀分布.

(1)求$Y = \dfrac{1}{X}$的分布.

(2)利用X构造一个服从参数为$\lambda > 0$的指数分布.

2. 袋中有 3 个红球，4 个白球，5 个黑球.

(1) 每次随机取出一个球记录颜色然后放回,那么 6 次取球出现红球 2 次，白球 3 次，黑球 1 次的概率是多少？

(2) 随机从中一次性取出 3 个球，令X,Y分别表示取出的红球数和白球数，请给出随机向量(X,Y)的分布列（或分布表）.

(3) 求$P(X = 1)$.

3. 设随机变量X, Y的联合分布函数为$F(x, y)$，证明：

$$\mathrm{P}(\mathrm{a} < \mathrm{X} \le \mathrm{b}, \mathrm{c} < \mathrm{Y} \le \mathrm{d}) = \mathrm{F}(\mathrm{b}, \mathrm{d}) - \mathrm{F}(\mathrm{a}, \mathrm{d}) - \mathrm{F}(\mathrm{b}, \mathrm{c}) + \mathrm{F}(\mathrm{a}, \mathrm{c}).$$

4. 随机从以原点为圆心的单位圆内取一点，假设该点在圆内服从均匀分布，令(X,Y)表示该点的坐标.

(1) 求(X,Y)的概率密度函数；

(2) 计算X和Y的边缘分布的概率密度函数；

(3) 记该点与圆心的距离为R，求$P(R \le r)$，这里$0 < r < 1$为常数；

(4) 计算期望$E(R)$.

5. 陈希孺书第二章习题 19,28（(b）中证明不用做）,30.

19. 设 Y 为只取正值的随机变量，且 $\log Y$ 服从正态分布 $N(a,\sigma^2)$. 求 Y 的密度函数(Y 的分布称为对数正态分布).

28. 设(X, Y)有密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{c}{1+x^2+y^2}, & \text{当 } x^2+y^2\leqslant 1\\ 0, & \text{当 } x^2+y^2>1\end{cases}$$

(a) 求出常数 c. (b)算出 X, Y 的边缘分布密度,并证明 X, Y 不独立.

30. 设 X, Y 独立,都服从标准正态分布 $N(0,1)$,以 $f(x,y)$记(X, Y)的联合密度函数.证明:函数

$$g(x,y)=\begin{cases}f(x,y)+xy/100, & \text{当 } x^2+y^2\leqslant 1\\ f(x,y), & \text{当 } x^2+y^2>1\end{cases}$$

是二维概率密度函数.若随机向量(U, V)有密度函数 $g(x,y)$,证明:U, V 都服从标准正态分布$N(0,1)$,但(U, V)不服从二维正态分布:

本例说明:由各分量为正态推不出联合分布为正态.