2022 级微积分 A2 期末考试

mathsdream 整理版

2023.06.12

说明

题目解析见后。

点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：

`https://github.com/mathsdream/THU-math-source`。

一、填空题（每个空 3 分，共 24 分）

1. 设 D 为由曲线 $y^2 = 2x$ 和直线 $x + y = 4$，$x + y = 12$ 围成的平面有界区域，则 $\iint_D 3\,dxdy =$ __________。

2. 设 Ω 是由 $x = 0$，$x = 1$，$x = \dfrac{y^2}{3^2} + \pi^2 z^2$ 围成的三维有界区域，则 $I = \iiint_\Omega (x+y)\,dxdydz =$ __________。

3. 累次积分 $\int_0^{\ln 3} dx \int_x^{\ln 3} \dfrac{e^y}{y}\,dy =$ __________。

4. 设 $u(x,y)$ 为 $e^x[e^y(x-y+2)+y]dx + e^x[e^y(x-y)+1]dy = 0$ 的原函数，且满足 $u(1,1) = e^2+e+5$，则 $u(0,0) =$ __________。

5. L^+ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2 = 1$ 上的一条 C^1 曲线。以 $S(0,0,-1)$ 为起点，以 $N(0,0,1)$ 为终点。则
$$\int_{L^+} [2y + \sin(y^2+z^2)]dx + 2[x + \ln(1+z^2+x^2)]dy - 3(x^2+y^2-1)dz = \underline{\qquad\qquad}$$

6. 设曲线 $\gamma : x = 2t,\ y = t,\ z = 2-2t\ (0 \le t \le 1)$，则 $\int_\gamma (2x+4y+z^2-4)\,dl =$ __________。

7. 设曲面 Σ 是 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint_\Sigma (y-z)\,dy\wedge dz + (z-x)\,dz\wedge dx + (x-y)\,dx\wedge dy =$ __________。

8. 设 $\lambda > 0$，记 L_λ^+ 为圆周 $x^2+y^2 = \lambda^2$，逆时针为正向，则
$$\lim_{\lambda\to 0^+} \frac{1}{\pi\lambda^2}\left[\int_{L_\lambda^+} (\sin x + y + e^y)dx + (3x + xe^y)dy\right] = \underline{\qquad\qquad}$$

二、选择题（每题 3 分，共 21 分）

1. 设函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，交换累次积分的顺序 $\int_{-2}^{1}dx\int_{x^2}^{2-x}f(x,y)dy=$ ＿＿＿＿＿＿。

   A) $\int_{1}^{4}dy\int_{2-y}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$

   B) $\int_{0}^{1}dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)dx+\int_{1}^{4}dy\int_{2-y}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$

   C) $\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_{1}^{4}dy\int_{-\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)dx$

   D) $\int_{1}^{4}dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)dx$

2. 向量场 $\mathbf{V}=(x+y+z)\mathbf{i}+(x^2+y^2+z^2)\mathbf{j}+(x^3+y^3+z^3)\mathbf{k}$ 在 $(0,0,0)$ 处的旋度为 ＿＿＿＿＿＿。

   A) $\mathbf{j}+\mathbf{k}$

   B) $\mathbf{i}+\mathbf{k}$

   C) $\mathbf{j}-\mathbf{k}$

   D) $\mathbf{i}-\mathbf{k}$

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^p}}-1\right)$ 收敛当且仅当参数 p 满足 ＿＿＿＿＿＿。

   A) $p>\frac{1}{2}$

   B) $p\geq 2$

   C) $p\geq 1$

   D) $p>1$

4. 已知 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$＿＿＿＿＿＿。

   A) 不能确定

   B) 绝对收敛

   C) 条件收敛

   D) 发散

5. 比较三个积分 $J_i=\iint_{D_i}(x-y)^{1/3}\,dxdy\ (i=1,2,3)$ 的大小，其中

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$$
$$D_2=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq \sqrt{x}\}$$
$$D_3=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ x^2\leq y\leq 1\}$$

   则＿＿＿＿＿＿。

   A) $J_2<J_1<J_3$

   B) $J_1<J_2<J_3$

C) $J_3 < J_1 < J_2$

D) $J_2 < J_3 < J_1$

6. 以下四个选项中，正确的选项是__________。

A) 存在可微向量场 $\mathbf{V}(x,y,z)$ 使得 $rot\,\mathbf{V} = (x, z^2, \sin y)$

B) 存在可微函数 f 使得 $grad\, f(x,y,z) = (y, -x-2z, 2y)$

C) 对 $\mathbb{R}^3$ 中的每个线性向量场 $\mathbf{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，都存在可微函数 f 以及可微向量场 $\mathbf{W}$ 使得 $\mathbf{V} = grad\, f + rot\, \mathbf{W}$

D) 这四个选项中，其他三个选项都不对

7. 关于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$，以下陈述中正确的是__________。

A) 对任意 $0 < \delta < 1$，该幂级数在任何区间 $[-1, 1-\delta]$ 上一致收敛

B) 对任意 $0 < \delta < 1$，该幂级数在任何区间 $[-1+\delta, 1-\delta]$ 上一致收敛，但在区间 $[1-\delta, 1)$ 和 $(-1, -1+\delta)$ 上都不是一致收敛

C) 该幂级数在区间 $[-1, 1]$ 上一致收敛

D) 对任意 $0 < \delta < 1$，该幂级数在任何区间 $[-1+\delta, 1)$ 上一致收敛，但在区间 $(-1, -1+\delta]$ 上不是一致收敛的

三、解答题（每题 11 分）

1. 设 D 为不等式组 $x > 0,\ 1 \le xy \le 3,\ x \le 2y \le 2x$ 确定的平面区域。求 $\iint_D x^2\, dxdy$。

2. 记 Σ_1 为圆柱面 $x^2+y^2 = 2x$ 被上半球面 $x^2+y^2+z^2 = 4\ (z \ge 0)$ 和平面 $z = 0$ 所截得的部分，记 Σ_2 为上半球面 $x^2+y^2+z^2 = 4\ (z \ge 0)$ 位于区域 $x^2+y^2 \le 2x$ 内部的部分。求 Σ_1, Σ_2 的面积。

3. 设 S^+ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$，$a, b, c > 0$，正向朝外。计算第二型曲面积分

$$\iint_{S^+} xy^2\, dy \wedge dz + yz^2\, dz \wedge dx + xz^2\, dx \wedge dy.$$

4. (1) 求微分方程 $\begin{cases} (1-x^2)S'' = xS' \\ S(0) = 0,\ S'(0) = 1 \end{cases}$ 的幂级数解 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，并求这个幂级数的收敛半径；

(2) 求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 的值。

5. 已知 2π 周期函数 f 在区间 $(-\pi, \pi]$ 上的表达式为 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi; \\ -1, & -\pi < x < 0. \end{cases}$

(1) 求 f 的傅里叶级数；

(2) 利用 Parseval 等式和 (1) 中的级数，证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8};$$

(3) 求积分

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} \, dx$$

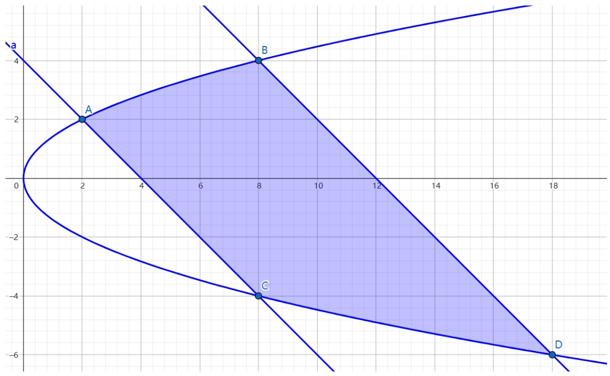
的值。

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

一、填空题解析

1. 设 D 为由曲线 $y^2=2x$ 和直线 $x+y=4$，$x+y=12$ 围成的平面有界区域，则 $\iint_D 3\,dxdy=196$。

   解析：D 如下图所示：



   由图像得：

$$\iint_D 3\,dxdy=\int_2^8\int_{4-x}^{\sqrt{2x}}3\,dydx+\int_8^{18}\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x}3\,dydx=196$$

2. 设 Ω 是由 $x=0$，$x=1$，$x=\dfrac{y^2}{3^2}+\pi^2z^2$ 围成的三维有界区域，则 $I=\iiint_\Omega(x+y)\,dxdydz=1$。

   解析：$\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1,\dfrac{y^2}{3^2}+\pi^2z^2\le x\}$。由其形式，作类柱坐标变换：

$$x=x,\quad y=3r\cos\theta,\quad z=\frac{r\sin\theta}{\pi}$$

   得 $\Omega=\{(x,r,\theta)\mid 0\le x\le 1,0\le r\le\sqrt{x},0\le\theta\le 2\pi\},dxdydz=\dfrac{3}{\pi}rdxdrd\theta$，所以：

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{x}}(x+3r\cos\theta)\frac{3}{\pi}rdrdxd\theta=1$$

3. 累次积分 $\int_0^{\ln 3}dx\int_x^{\ln 3}\dfrac{e^y}{y}\,dy=2$。

   解析：累次积分直接不可计算，大概率需要交换积分次序。先转化为二重积分，积分区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le\ln 3,x\le y\le\ln 3\}=\{(x,y)\mid 0\le x\le y\le\ln 3\}=\{(x,y)\mid 0\le x\le y,0\le y\le\ln 3\}$，则：

$$\int_0^{\ln 3}dx\int_x^{\ln 3}\frac{e^y}{y}\,dy=\int_0^{\ln 3}dy\int_0^y\frac{e^y}{y}\,dx=\int_0^{\ln 3}e^y\,dy=2$$

4. 设 $u(x,y)$ 为 $e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy$ 的原函数，且满足 $u(1,1)=e^2+e+5$，则 $u(0,0)=6$。

解析：常规做法就不提了。这里注意到全微分中多次出现 $x-y$，而 $(0,0),(1,1)$ 正好都位于 $y=x$ 上，所以令曲线 $L^+: y=x$，从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$，则：

$$\begin{aligned} u(1,1)-u(0,0) &= \int_{L^+} e^x[e^y(x-y+2)+y]dx + e^x[e^y(x-y)+1]dy \\ &= \int_0^1 e^x[2e^x+x]+e^x dx \\ &= e^2+e-1 \end{aligned}$$

所以 $u(0,0)=6$。

注：原函数 $u(x,y)=e^x(e^y(1+x-y)+y)+5$。

5. L^+ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的一条 C^1 曲线。以 $S(0,0,-1)$ 为起点，以 $N(0,0,1)$ 为终点。则

$$\int_{L^+} [2y+\sin(y^2+z^2)]dx + 2[x+\ln(1+z^2+x^2)]dy - 3(x^2+y^2-1)dz = 2$$

解析：本题并没有给出具体的路径，很可能积分与路径无关，但当前的被积函数并不是一个全微分。注意题目中给出了 L^+ 在单位球面上的条件，同时被积函数种存在大量的 x^2+z^2 形式的式子，所以原积分等于：

$$\int_{L^+} [2y+\sin(1-x^2)]dx + 2[x+\ln(2-y^2)]dy + 3z^2dz$$

这正好一个全微分式子，其积分与路径无关，所以可以取路径为线段 SN，即 $x=0, y=0, z: -1\to 1$，积分化为：

$$\int_{-1}^1 3z^2dz = 2$$

注：作为一个填空题，可以考虑直接取个特殊路径算，比如球面上的一个半圆弧。

6. 设曲线 $\gamma: x=2t,\ y=t,\ z=2-2t\ (0\le t\le 1)$，则 $\int_\gamma (2x+4y+z^2-4)\,dl = 4$。

解析：

$$\int_\gamma (2x+4y+z^2-4)\,dl = \int_0^1 (4t+4t+(2-2t)^2-4)\sqrt{4+1+4}dt = 4$$

7. 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint_\Sigma (y-z)\,dy\wedge dz + (z-x)\,dz\wedge dx + (x-y)\,dx\wedge dy = 0$。

解析：曲面 Σ 是半个球面，其单位法向量为 $(\frac{x}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2})$，将二类曲面积分化为一类曲面积分：

$$\begin{aligned} &\iint_\Sigma (y-z)\,dy\wedge dz + (z-x)\,dz\wedge dx + (x-y)\,dx\wedge dy \\ =&\iint_\Sigma (y-z, z-x, x-y)\cdot(\frac{x}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2})dS \\ =&\iint_\Sigma 0dS = 0 \end{aligned}$$

注：一类曲面积分和二类曲面积分的转化：

$$\iint_{\Sigma^+} Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy = \iint_\Sigma (P,Q,R)\cdot\mathbf{n}dS$$

其中 $\mathbf{n}$ 为曲面 Σ^+ 的单位法向量。

8. 设 $\lambda>0$，记 L_λ^+ 为圆周 $x^2+y^2=\lambda^2$，逆时针为正向，则

$$\lim_{\lambda\to0^+}\frac{1}{\pi\lambda^2}\left[\int_{L_\lambda^+}(\sin x+y+e^y)dx+(3x+xe^y)dy\right]=2$$

解析：由 Green 公式：

$$\int_{L_\lambda^+}(\sin x+y+e^y)dx+(3x+xe^y)dy=\iint_{D_\lambda}2dxdy=2\pi\lambda^2$$

所以极限值为 2。

二、选择题解析

1. 设函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，交换累次积分的顺序 $\displaystyle\int_{-2}^{1}dx\int_{x^2}^{2-x}f(x,y)dy=$C。

   A) $\displaystyle\int_1^4 dy\int_{2-y}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$

   B) $\displaystyle\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)dx+\int_1^4 dy\int_{2-y}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$

   C) $\displaystyle\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_1^4 dy\int_{-\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)dx$

   D) $\displaystyle\int_1^4 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)dx$

   解析：先得到二重积分的积分区域为：$D=\{(x,y)\mid -2\le x\le 1, x^2\le y\le 2-x\}$。为了交换次序，先考虑 y 的上下限的极端情况，得到 y 的范围：$0\le y\le 4$。计算 x 的范围：$-\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y}, x\le 2-y$，即 $-\sqrt{y}\le x\le\min\{2-y,\sqrt{y}\}$，考虑 $\min\{2-y,\sqrt{y}\}=\begin{cases}\sqrt{y}, & 0\le y\le 1\\ 2-y, & 1\le y\le 4\end{cases}$

   所以，交换次序后的积分为：$\displaystyle\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_1^4 dy\int_{-\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)dx$，选 C。

   注：这里展示一下代数法求累次积分，可以学一下，三维区域不好画。

2. 向量场 $\mathbf{V}=(x+y+z)\mathbf{i}+(x^2+y^2+z^2)\mathbf{j}+(x^3+y^3+z^3)\mathbf{k}$ 在 $(0,0,0)$ 处的旋度为 C。

   A) $\mathbf{j}+\mathbf{k}$

   B) $\mathbf{i}+\mathbf{k}$

   C) $\mathbf{j}-\mathbf{k}$

   D) $\mathbf{i}-\mathbf{k}$

   解析：由旋度公式计算得到选 C。

3. 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^p}}-1\right)$ 收敛当且仅当参数 p 满足 A。

   A) $p>\dfrac{1}{2}$

   B) $p\ge 2$

C) $p \geq 1$

D) $p > 1$

解析：

$$\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^p}}-1=\frac{(-1)^n}{2n^p}-\frac{1}{8n^{2p}}+o(\frac{1}{n^{2p}})$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^p}$ 在 $p>0$ 时发散。$\frac{1}{8n^{2p}}+o(\frac{1}{n^{2p}})\sim\frac{1}{8n^{2p}}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{8n^{2p}}+o(\frac{1}{n^{2p}})$ 收敛当且仅当 $p>\frac{1}{2}$。所以原级数在 $p>\frac{1}{2}$ 时收敛，选 A。

4. 已知 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$B。

A) 不能确定

B) 绝对收敛

C) 条件收敛

D) 发散

解析： 幂级数只在收敛半径处可能条件收敛，所以 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛半径为 2。所以其在 $x=0$ 处绝对收敛，即 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，选 B。

5. 比较三个积分 $J_i=\iint_{D_i}(x-y)^{1/3}\,dxdy\ (i=1,2,3)$ 的大小，其中

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$$
$$D_2=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq \sqrt{x}\}$$
$$D_3=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ x^2\leq y\leq 1\}$$

则 C。

A) $J_2<J_1<J_3$

B) $J_1<J_2<J_3$

C) $J_3<J_1<J_2$

D) $J_2<J_3<J_1$

解析： 被积函数 $(x-y)^{1/3}$ 关于 $y=x$ 呈奇对称，且在 $y>x$ 时为负，$x>y$ 时为正。所以 D_1 上的积分为 0，画一下 D_2 和 D_3 的形状，可以发现 D_2 上的积分大于 0，D_3 上的积分小于 0，所以选 C。

6. 以下四个选项中，正确的选项是 C。

A) 存在可微向量场 $\mathbf{V}(x,y,z)$ 使得 $rot\,\mathbf{V}=(x,z^2,\sin y)$

B) 存在可微函数 f 使得 $grad\,f(x,y,z)=(y,-x-2z,2y)$

C) 对 $\mathbb{R}^3$ 中的每个线性向量场 $\mathbf{V}(x,y,z)=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，都存在可微函数 f 以及可微向量场 $\mathbf{W}$ 使得 $\mathbf{V}=grad\,f+rot\,\mathbf{W}$

D) 这四个选项中，其他三个选项都不对

解析：

选项 A：旋度的散度应为 0，但 $div(x, z^2, \sin y) = 1$，所以选项 A 错误。

选项 B：梯度的旋度应为 0 向量，但 $rot(y, -x-2z, 2y) = (4, 0, -2)$，所以选项 B 错误。

选项 C：假设存在，对 $\mathbf{V} = grad\, f + rot\, \mathbf{W}$ 两边取散度，得到 $a_{11}+a_{22}+a_{33} = div\, grad\, f$。尝试取 $grad\, f = (a_{11}x, a_{22}y, a_{33}z)$，即 $f = \frac{1}{2}a_{11}x^2 + \frac{1}{2}a_{22}y^2 + \frac{1}{2}a_{33}z^2$。那么 $rot\, W = V - grad\, f = (a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y)$，取 $W = (a_{21}xz - a_{31}xy, a_{32}xy - a_{12}yz, a_{13}yz - a_{23}xz)$ 即可满足。所以选项 C 正确。

注：此题的考点属实有点变态了，可能是疫情期间线上考试的原因，这张卷子变态的也不只一处。选项 C 的 f 和 W 不是唯一的，上面只是我第一次凑出来的一种。此题的一般结论请搜索 Helmholtz 分解。

7. 关于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$，以下陈述中正确的是 A。

   A) 对任意 $0 < \delta < 1$，该幂级数在任何区间 $[-1, 1-\delta]$ 上一致收敛

   B) 对任意 $0 < \delta < 1$，该幂级数在任何区间 $[-1+\delta, 1-\delta]$ 上一致收敛，但在区间 $[1-\delta, 1)$ 和 $(-1, -1+\delta)$ 上都不是一致收敛

   C) 该幂级数在区间 $[-1, 1]$ 上一致收敛

   D) 对任意 $0 < \delta < 1$，该幂级数在任何区间 $[-1+\delta, 1)$ 上一致收敛，但在区间 $(-1, -1+\delta]$ 上不是一致收敛的

解析：先求得，本题幂函数的收敛域为 $[-1, 1)$，所以选项 C 首先错误。由 Abel 定理，如果幂级数在某个闭区间上收敛，则其在该区间上一致收敛，所以选项 A 正确，选项 B、D 错误。选 A。

注：Abel 定理在《高等微积分教程（下）》定理 6.3.1 和定理 6.3.2。

三、解答题解析

1. 设 D 为不等式组 $x > 0,\ 1 \le xy \le 3,\ x \le 2y \le 2x$ 确定的平面区域。求 $\iint_D x^2\, dxdy$。

   解析：做换元，令 $u = xy, v = \dfrac{y}{x}$，则 $D = \{(u, v) \mid 1 \le u \le 3, \dfrac{1}{2} \le v \le 1\}$，$\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \frac{1}{2v}$，所以：

$$\iint_D x^2\, dxdy = \int_1^3 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{2v}\, dvdu = 2$$

2. 记 Σ_1 为圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 被上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4\ (z \ge 0)$ 和平面 $z = 0$ 所截得的部分，记 Σ_2 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4\ (z \ge 0)$ 位于区域 $x^2 + y^2 \le 2x$ 内部的部分。求 Σ_1, Σ_2 的面积。

   解析：Σ_1 是一个柱面，适合使用一类曲线积分计算：

$$\begin{aligned} S_1 &= \int\limits_{x^2+y^2=2x} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dl \\ &= 8 \end{aligned}$$

Σ_2 可以写成 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}\,(x^2+y^2\le 2x)$，适合直接计算：

$$\begin{aligned}S_2&=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy\\&=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy\\&=4\pi-8\end{aligned}$$

3. 设 S^+ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$a,b,c>0$，正向朝外。计算第二型曲面积分

$$\iint\limits_{S^+}xy^2\,dy\wedge dz+yz^2\,dz\wedge dx+xz^2\,dx\wedge dy.$$

解析：由 Guass 公式：

$$\iint\limits_{S^+}xy^2\,dy\wedge dz+yz^2\,dz\wedge dx+xz^2\,dx\wedge dy=\iiint\limits_{\Omega}x^2+y^2+z^2\,dxdydz$$

其中 Ω 为椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$。做变量替换 $x=au,y=bv,z=cw$，则积分变为：

$$abc\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1}a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2\,dudvdw$$

由对称性可知：

$$\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1}u^2\,dudvdw=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1}v^2\,dudvdw=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1}w^2\,dudvdw=\frac{1}{3}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1}u^2+v^2+w^2\,dudvdw$$

对最后的积分做球坐标代换，得到

$$\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1}u^2+v^2+w^2\,dudvdw=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\,drd\theta d\varphi=\frac{4\pi}{5}$$

一层层往上代入，得到原始积分的结果为 $abc(a^2+b^2+c^2)\dfrac{4\pi}{15}$。

4. (1) 求微分方程 $\begin{cases}(1-x^2)S''=xS'\\S(0)=0,\ S'(0)=1\end{cases}$ 的幂级数解 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，并求这个幂级数的收敛半径；

(2) 求数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 的值。

解析：(1) $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{n+1}(n+1)x^n$，$S''(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$，代入微分方程和初值条件得到：

$$\begin{aligned}&a_0=0\\&a_1=1\\&2a_2=0\\&6a_3=a_1\\&(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n=na_n\quad n=2,3,\cdots\end{aligned}$$

解得 $a_n = \begin{cases} 0, & n\text{为偶数} \\ \dfrac{((n-2)!!)^2}{n!}, & n\text{为奇数} \end{cases}$。

所以 $S(x) = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{((2n-1)!!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$，利用比值判敛法，得到收敛半径为 $R=1$。

(2) 直接求解微分方程得到 $S(x) = \arcsin x$。所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = S(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{6}$。

5. 已知 2π 周期函数 f 在区间 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi; \\ -1, & -\pi < x < 0. \end{cases}$

(1) 求 f 的傅里叶级数；

(2) 利用 Parseval 等式和 (1) 中的级数，证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8};$$

(3) 求积分

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}\, dx$$

的值。

解析：(1)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

所以 f 的傅里叶级数为：

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$$

(2) 由 Parseval 等式：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

代入 a_n, b_n 的表达式，得到 $2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{2n-1}\right)^2$，整理得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$。

(3)

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}\, dx \\
=&\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n}}{2n+1}\, dx \\
=&\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{2x^{2n}}{2n+1}\, dx \\
=&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2} \\
=&\frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$