第二次习题课题目(复合函数链式法则、高阶偏导数、方向导数)

1. 解答下列各题:

 (1) 设 f 可微，且 $z=x^3 f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

 (2) 设 $z=f(x^2y,\dfrac{y}{x})$, 其中 $f\in C^2$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

2. 设 $g(x)=f\left(x,\phi\left(x^2,x^2\right)\right)$，其中函数 f 和 ϕ 的二阶偏导数连续，求 $g''(x)$.

3. 设 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微，并且满足方程 $A\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，其中 A,B,C 都是非零常数。若令 $\begin{cases}u=x+\alpha y\\ v=x+\beta y,\end{cases}$ 试确定 α,β 为何值时原方程可转化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

4. 设 $u(x,y)\in C^2$，又 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$u(x,2x)=x$，$u'_x(x,2x)=x^2$，求 $u''_{xx}(x,2x)$，$u''_{xy}(x,2x)$，$u''_{yy}(x,2x)$.

5. 设 $z(x,y)$ 是定义在矩形区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le a,0\le y\le b\}$ 上的可微函数。证明:

 (1) $z(x,y)=f(y)\Leftrightarrow\forall(x,y)\in D,\dfrac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$;

 (2) $z(x,y)=f(y)+g(x)\Leftrightarrow\forall(x,y)\in D,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv 0$.

6. 计算下列各题:

 (1) 已知 $z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}$.

 (2) 设 $f(u,v)\in C^2$ 且 $z=f(e^{x+y},xy)$. 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

 (3) 设函数 f 二阶可导，函数 g 一阶可导。令

$z(x,y)=f(x+y)+f(x-y)+\int_{x-y}^{x+y} g(t)dt$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(4) 设 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$ 求 $f''_{xx}(0,0)$ 与 $f''_{xy}(0,0)$.

(5) 设 $f(x,y)=e^x\sin y$，求 $f^{(n+m)}_{x^n y^m}(0,0)$.

7. 证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点不连续，但在该点存在任意阶偏导数 $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0,0)$ 和 $\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(0,0)$.

8. 设 $u(x,y)$ 有二阶偏导数，无零点。证明：$u(x,y)$ 满足方程 $u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$ 当且仅当 $u(x,y)=f(x)g(y)$.

9. 设 $f(x,y)\in C^2(\mathbb{R}^2)$ 满足 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$

证明：$u(x,y)=f\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ 也满足 Laplace 方程.

10. 设 n 为整数，若对任意的 $t>0$，$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$，则称 f 是 n 次齐次函数。证明：可微函数 $f(x,y)$ 是零次齐次函数的充要条件是 $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0.$

11. 设 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微。已知 $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$，$\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}$，且 $\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\right|_{P_0}=2$，$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}\right|_{P_0}=1$，求 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的微分。

12. 设 $f(x,y)$ 为可微函数，$\vec{l}_1$，$\vec{l}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一组线性无关的向量。试证：$f(x,y)$ 在任一点 $P(x,y)$ 沿任意向量 $\vec{l}$ 的方向导数 $f'_{\vec{l}}(P)$ 必定能用 $f'_{\vec{l}_1}(P)$ 与 $f'_{\vec{l}_2}(P)$ 线性表示。

13. 设 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$，$P_0(1,1)$. 试求 $\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}$，并问：在怎样的方向 $\vec{l}$ 上，方向导数

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}$ 分别有最大值、最小值和零值。

14. 设 a, b 是实数，函数 $z = 2 + ax^2 + by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中，沿 $\boldsymbol{l} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ 的方向导数最大，最大值为 10，求 a, b.

15. 设 $f(x,y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ 满足 $f_x'(x,y) = f_y'(x,y)$，且 $f(x,0) > 0.$

试证明：对任意的 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$，有 $f(x,y) > 0.$

16. 设 $f(x,y)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上具有连续的偏导数，$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$（$a \le t \le b$）是 D 中的一段曲线，L 的端点为 A, B. 假设 x, $y \in C^1[a,b]$ 且 $x'(t)^2 + y'(t)^2 \ne 0$ $(\forall t \in [a,b])$.

证明：若 $f(A) = f(B)$, 则存在点 $P_0(x_0, y_0) \in L$ 使得 $f_{\vec{l}}'(P_0) = 0$，其中 $\vec{l}$ 是曲线 L 在 P_0 的单位切向量。

=============

以下供学有余力的同学选做。

17. 若 $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻域内存在，且在 $P_0(x_0, y_0)$ 点可微，则 $f_{xy}''(P_0) = f_{yx}''(P_0)$.

18. 设 $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻域内存在，且 f_{xy}'' 在 $P_0(x_0, y_0)$ 连续，则 $f_{yx}''(P_0)$ 存在且 $f_{xy}''(P_0) = f_{yx}''(P_0)$.