第八次习题课参考解答　曲线积分、Green 公式的应用

1. 计算第二型曲线积分 $\int_{L}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 是

(1) $(x-2)^2+4(y-1)^2=1$，顺时针定向．

(2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$，顺时针定向．

(3) 从 $A(2,0)$ 到 $B(4,4)$ 的有向线段．

解：记 $P=\frac{x-y}{x^2+y^2}$， $Q=\frac{x+y}{x^2+y^2}$，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故曲线积分与积分路径无关。

（1）　设 L 是椭圆 $(x-2)^2+4(y-1)^2=1$，顺时针为正方向．由于 P,Q 在椭圆盘 $(x-2)^2+4(y-1)^2\le 1$ 上连续可微，根据 Green 公式得

$$\oint_{L}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}=\oint_{L}Pdx+Qdy=-\iint_{(x-2)^2+4(y-1)^2\le 1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\ .$$

（2）　设 L 是闭曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$，顺时针定向．我们取正数 δ 充分小，使得圆周 $L_\delta: x^2+y^2=\delta^2$ 包含在 L 所围的区域之内，　并规定逆时针为正向．计算 L_δ 上的积分：

$$\oint_{L_\delta}\frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\delta(\cos\theta+\sin\theta)\delta\cos\theta+\delta(\cos\theta-\sin\theta)\delta(-\sin\theta)}{\delta^2}\mathrm{d}\theta=2\pi\,.$$

而由格林公式可知 $\oint_{L}\frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=-\oint_{L_\delta}\frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=-2\pi$ ．

（3）因为曲线积分 $\int_{L}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$ 在右半平面上与积分路径无关，因此可取积分路径 L 为两个直线段：点 $(2,0)$ 到点 $(4,0)$ 的直线段，以及点 $(4,0)$ 到点 $(4,4)$ 的直线段。于是所求积分为

$$\int_{L}\frac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{(2,0)}^{(4,0)}\frac{xdx}{x^2}+\int_{(4,0)}^{(4,4)}\frac{(4+y)dy}{4^2+y^2}=\ln 2+\int_0^4\frac{4dy}{4^2+y^2}+\int_0^4\frac{ydy}{4^2+y^2}$$

$$=\ln 2+\arctan 1+\tfrac{1}{2}(\ln(4^2+4^2)-\ln 4^2)=\tfrac{3}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}\,.$$

2. 设 $f(x,y)$ 在 $\{(x,y)|\,x^2+y^2<1\}$ 内二阶偏导连续，且满足方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{2}f(x,y)$．进一步假设 $f(0,0)=1$．求极限 $\lim_{t\to 0}\frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}l$，　这里 $\vec{n}$ 为圆周 ∂D_t 的单位外法向量，$D_t=\{(x,y)|\,x^2+y^2<t^2,\ t>0\}$．

解：注意方向导数 $\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}$ 可写作 $\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}=\nabla f\cdot\vec{n}$．于是利用格林公式得

$$\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}dl=\oint_{\partial D_t}\nabla f\cdot\vec{n}dl=\iint_{D_t}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_{D_t}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

对上式最后的二重积分应用积分中值定理得

$\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=\frac{1}{2}\iint_{D_t}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}f(\xi_t,\eta_t)\pi t^2$，其中点 $(\xi_t,\eta_t)\in D_t$. 于是

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0}\frac{f(\xi_t,\eta_t)t^2}{1-\cos t}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0}f(\xi_t,\eta_t)\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1-\cos t}=\frac{\pi}{2}f(0,0)2=\pi.$$

3. 设函数 $f(x,y)$ 在上半平面 $D=\{(x,y)|y>0\}$ 内具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$，对任意点 $(x,y)\in D$，都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$（此即 $f(x,y)$ 是 -2 次齐次函数）。证明对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$.

解：在等式 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边关于 t 求导得

$xf_x'(tx,ty)+yf_y'(tx,ty)=-2t^3f(x,y)$，$\forall(x,y)\in D$，$\forall t>0$.

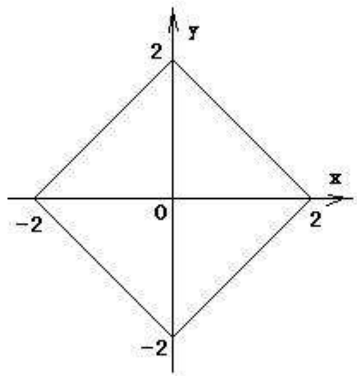
令 $t=1$ 得 $xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)=-2f(x,y)$ （此即齐次函数的 Euler 公式）。

这个等式意味着 $\frac{\partial(-xf)}{\partial x}-\frac{\partial(yf)}{\partial y}=-f-xf_x'-f-yf_y'=0$，故曲线积分与积分路径无关，只与起点与终点有关，再注意区域 D 为单连通的，因此向量值函数 $(yf,-xf)$ 在区域 D 中的任何闭路径积分为零，即 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$.

4. 解答下列各题：

(1) 设 C 为闭曲线：$|x|+|y|=2$，逆时针为正向。

计算 $\oint_C\frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}$.



解： 利用 $|x|+|y|=2$，$\oint_C\frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}=\frac{1}{2}\oint_C axdy-bydx$，

再将曲线分成 4 段直线段 $C=C_1+C_2+C_3+C_4$，

$C_1: x+y=2$，$x:2\to 0$；

$C_2: y-x=2$，$x:0\to -2$；

$C_3: x+y=-2$，$x:-2\to 0$；

$C_4: x-y=2$，$x:0\to 2$.

$$\int_{C_1}axdy-bydx=-\int_0^2[ax(-1)-b(2-x)]dx=\int_0^2[(a-b)x+2b]dx=2(a+b),$$

$$\int_{C_2}axdy-bydx=-\int_{-2}^0[ax-b(2+x)]dx=\int_{-2}^0[(b-a)x+2b]dx=2(a+b),$$

$$\int_{C_3}axdy-bydx=\int_{-2}^0[ax(-1)-b(-2-x)]dx=\int_{-2}^0[(b-a)x+2b]dx=2(a+b),$$

$$\int_{C_4}axdy-bydx=\int_0^2[ax-b(x-2)]dx=\int_0^2[(a-b)x+2b]dx=2(a+b),$$

综上，$\oint_C\frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}$

$$=\frac{1}{2}[\int_{C_1}axdy-bydx+\int_{C_2}axdy-bydx+\int_{C_3}axdy-bydx+\int_{C_4}axdy-bydx]=4(a+b).$$

解法二、利用 Green 公式，记$|x|+|y|=2$围成的区域为D，则由 Green 公式，

$$\oint_C \frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}=\frac{1}{2}\oint_C axdy-bydx=\frac{1}{2}\iint_D (a+b)dxdy$$
$$=\frac{1}{2}(a+b)\sigma(D)=\frac{1}{2}(a+b)8=4(a+b).$$

(2) 计算曲线积分$I=\oint\limits_{L^+}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中$L^+$为$|x|+|y|=1$，逆时针为正向。

解：记$P(x,y)=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$. 不难验证$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-4x^2}{4x^2+y^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. 因此曲线积分与积分路径无关。记$L_\varepsilon^+ : 4x^2+y^2=\varepsilon^2$，逆时针为正向。在由正方形$L^+$和椭圆$L_\varepsilon^+$所围成的有界闭区域上，应用 Green 公式得

$\oint\limits_{L^+}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint\limits_{L_\varepsilon^+}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\oint\limits_{L_\varepsilon}xdy-ydx$. 对曲线积分$\oint\limits_{L_\varepsilon}xdy-ydx$再应用 Green 公式

得$I=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\oint\limits_{L_\varepsilon}xdy-ydx=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{4x^2+y^2\le\varepsilon^2}2dxdy=\pi$.

5. 证明下列各题：

(1) 设L是平面上光滑的简单封闭曲线，$\vec{n}$为L的外单位法向量，证明：$\oint\limits_L \cos\langle\vec{n},\vec{j}\rangle dl=0,$

其中$\langle\vec{n},\vec{j}\rangle$是$\vec{n}$与$y$轴正向所成的角。

证明：设曲线L的正向单位切向量$\vec{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，则曲线$L$的外单位法向量$\vec{n}=(\cos\beta,-\cos\alpha)$，从而$\cos\langle\vec{n},\vec{j}\rangle=\vec{n}\cdot\vec{j}=(\cos\beta,-\cos\alpha)\cdot(0,1)=-\cos\alpha$，故

$$\oint\limits_L \cos\langle\vec{n},\vec{j}\rangle dl=\oint\limits_L\cos\alpha dl=-\oint\limits_L dx,$$

由格林公式，$\oint\limits_L dx=0$，因此$\oint\limits_L\cos\langle\vec{n},\vec{j}\rangle dl=0.$ 证毕

(2) 设$f(x)$是实轴上处处为正的连续函数，D为圆心在原点的单位开圆盘。

证明：(i) $\displaystyle\int\limits_{\partial D^+}xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\int\limits_{\partial D^+}-yf(x)dx+\frac{x}{f(y)}dy$；

(ii) $\displaystyle\int\limits_{\partial D^+}xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\ge 2\pi$.

证明：应用 Green 公式，

$$\int_{\partial D^+} xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx = \iint_{D}\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy,$$

$$\int_{\partial D^+} -yf(x)dx + \frac{x}{f(y)}dy = \iint_{D}\left[f(x)+\frac{1}{f(y)}\right]dxdy.$$

由于积分区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\right\}$ 具有轮换对称性，故上述两个二重积分相等。因此

$\int_{\partial D^+} xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx = \int_{\partial D^+} -yf(x)dx + \frac{x}{f(y)}dy$. 证毕

(ii) 类似，我们不难看出 $\iint_{D}\frac{dxdy}{f(x)}dxdy = \iint_{D}\frac{dxdy}{f(y)}$. 这表明，

$$\iint_{D}\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy = \iint_{D}\left[f(y)+\frac{1}{f(y)}\right]dxdy,$$

故

$$\int_{\partial D} xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx = \iint_{D}\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy = \iint_{D}\left[f(y)+\frac{1}{f(y)}\right]dxdy.$$

由于 $f(y)+\frac{1}{f(y)}\ge 2$，因此 $\int_{\partial D} xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx \ge \iint_{D} 2dxdy = 2\pi$. 证毕

6. 解答下列各题：

(1) 已知函数 $f(x)\in C^2(\mathbb{R})$ 满足 $f'(0)=0$，且使得微分式

$$[f(x)+y(x-f(x))]dx+f'(x)dy$$

是某个函数的全微分，求 $f(x)$ 使得 $\int_L [f(x)+y(x-f(x))]dx+f'(x)dy=\frac{\pi^2}{8}$, 其中 L 是由 $A(0,0)$ 到 $B(\frac{\pi}{2},\pi)$ 的逐段光滑曲线。

解：因为微分式 $[f(x)+y(x-f(x))]dx+f'(x)dy$ 是某个函数的全微分，因此 $f''(x)=x-f(x)$，即 $f''(x)+f(x)=x$. 这是关于未知函数 $f(x)$ 的二阶常系数线性常微分方程。可求得与其对应的齐次方程 $f''(x)+f(x)=0$ 的通解为 $c_1\cos x+c_2\sin x$. 另一方面，不难看出方程 $f''(x)+f(x)=x$ 有一个特解 x. 因此方程 $f''(x)+f(x)=x$ 的通解为 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x$. 下面确定常数 c_1，c_2. 对 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x$ 求导

得 $f'(x)=-c_1\sin x+c_2\cos x+1$，由条件 $f'(0)=0$，有 $f'(0)=c_2+1=0$，从而 $c_2=-1$.

因此 $f(x)=c_1\cos x-\sin x+x$，从而 $f'(x)=-c_1\sin x-\cos x+1$. 所以

$$[f(x)+y(x-f(x))]dx+f'(x)dy=d[c_1\sin x+\cos x+\frac{1}{2}x^2+y(-c_1\sin x-\cos x+1)]\ ,$$

再由条件 $\int_L[f(x)+y(x-f(x))]dx+f'(x)dy=\dfrac{\pi^2}{8}$，其中 L 是从 $A(0,0)$ 到 $B(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 的逐段光滑曲线，有 $c_1(1-\pi)+\dfrac{\pi^2}{8}+\pi-1=\dfrac{\pi^2}{8}$，解得 $c_1=1$. 故 $f(x)=\cos x-\sin x+x$. 解答完毕

(2) 确定常数 α，使得积分 $\int_A^B(x^4+4xy^\alpha)dx+(6x^{\alpha-1}y^2-5y^4)dy$ 与路径无关， 并求原函数 $\varphi(x,y)$，使得 $d\varphi=(x^4+4xy^\alpha)dx+(6x^{\alpha-1}y^2-5y^4)dy$.

解：记 $P(x,y)=x^4+4xy^\alpha$， $Q(x,y)=6x^{\alpha-1}y^2-5y^4$. 令 $P'_y=Q'_x$， 得

$4\alpha xy^{\alpha-1}=6(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^2$. 故 $\alpha=3$. 对微分式 $(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$ 分项组合得

$$(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy=x^4dx-5y^4+(4xy^3dx+6x^2y^2dy)$$

$$=d(\frac{x^5}{5}-y^5+2x^2y^3)\ .$$

所以所求原函数 $\varphi(x,y)=\dfrac{x^5}{5}-y^5+2x^2y^3+c$. 解答完毕。

(3) 证明曲线积分 $\int\limits_\Gamma\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)dy$，在右（或左）半平面（$x>0$ 或 $x<0$）上与积分路径无关。(注意右半平面或左半平面均为单连通区域)。并计算 $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)dy$.

解法一：记 $P(x,y)=1-\dfrac{y^2}{x^2}\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$， $Q(x,y)=\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)+\dfrac{y}{x}\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

则不难验证 $P'_y=Q'_x$. 因此在任何单连通区域内，曲线积分 $\int\limits_\Gamma Pdx+Qdy$ 都与积分路径无关。下求微分式 $Pdx+Qdy$ 的原函数 $u(x,y)$，即求 $u(x,y)$ 使得 $du=Pdx+Qdy$.

利用凑微分方法，

$$\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$$
$$=dx+y\cos\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right)+\sin\frac{y}{x}dy$$
$$=dx+y\cos\frac{y}{x}d\left(\frac{y}{x}\right)+\sin\frac{y}{x}dy=dx+yd\left(\sin\frac{y}{x}\right)+\sin\frac{y}{x}dy$$
$$=d\left(x+y\sin\frac{y}{x}\right),$$

所以$u(x,y)=x+y\sin\dfrac{y}{x}+C$．因此

$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$$
$$=\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}du=u(x,y)\Big|_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}=(2+\pi+C)-(1+C)=1+\pi\ .$$

解法二：判断积分与路径无关后，选取$(1,\pi)$到$(2,\pi)$的直线段为积分路径，这时$y=\pi$，$dy=0$，$x:1\to2$．于是所求积分为

$$I=\int_1^2\left(1-\frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}\right)dx=\left(x+\pi\sin\frac{\pi}{x}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2}=1+\pi\ .$$

解答完毕

(4) 求二元函数$Q(x,y)\in C^1(\mathbb{R}^2)$使得曲线积分$\int_{L^+}2xydx+Q(x,y)dy$与积分路径$L$无关，且对$\forall t\in\mathbb{R}$，均有$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy$.

解： 因为曲线积分$\int_{L^+}2xydx+Q(x,y)dy$与积分路径L无关，因此$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x$，故

$Q(x,y)=x^2+f(y)$，其中$f(y)$是连续可导函数。又知，对$\forall t\in\mathbb{R}$，有

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy,$$

所以$\int_0^t(1+f(y))dy=\int_0^1(t^2+f(y))dy$，从而$f(t)=2t-1$，且$Q(x,y)=x^2+2y-1.$

7. 计算下列各题：

(1) 设L是曲线$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=2x+4\end{cases}$在第一卦限的部分，方向是从点$(0,1,4)$到点$(1,0,6)$，计算曲线积分$I=\int_L ydx-(x^2+y^2+z^2)dz.$

解：以 x 为参数，曲线 L 的参数方程：$\begin{cases} x=x \\ y=\sqrt{1-x^2} \\ z=2x+4 \end{cases}$，起点对应 $x=0$，终点对应 $x=1$，

所以 $I=\int\limits_L ydx-(x^2+y^2+z^2)dz=\int_0^1[\sqrt{1-x^2}-2(1+(2x+4)^2)]dx=\frac{\pi}{4}-\frac{158}{3}.$

(2) 设有向光滑曲线 L 的长度为 l，$P(x,y),\ Q(x,y)$ 在 L 上连续。

记 $M=\max\left\{\sqrt{P(x,y)^2+Q(x,y)^2}\ |\quad (x,y)\in L\right\}$．求证：$\left|\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|\le Ml.$

证明：设 $\vec{\tau}$ 是曲线 L 指定方向的单位切向量，则

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_L (P(x,y),Q(x,y))\cdot\vec{\tau}dl.$$

而 $\left|(P(x,y),Q(x,y))\cdot\vec{\tau}\right|\le\sqrt{P(x,y)^2+Q(x,y)^2}$，故

$$\left|\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|=\left|\int\limits_L (P(x,y),Q(x,y))\cdot\vec{\tau}dl\right|$$
$$\le\int\limits_L\left|(P(x,y),Q(x,y))\cdot\vec{\tau}\right|dl\le\int\limits_L\sqrt{P(x,y)^2+Q(x,y)^2}dl\le Ml.$$

(3) 设 $I_R=\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}$．证明 $\lim\limits_{R\to+\infty}I_R=0$．

证明：$\left|I_R\right|=\left|\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\left(\frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2},\frac{-x}{(x^2+xy+y^2)^2}\right)\cdot\tau dl\right|$，

由柯西-许瓦兹不等式，

$$\left|I_R\right|\le\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+xy)^4}}dl$$

$$=\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{R}{(R^2+xy)^2}dl\le\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{R}{(R^2-\frac{R^2}{2})^2}dl=\frac{8\pi}{R^2}\to 0,\quad R\to+\infty,$$

所以 $\lim\limits_{R\to+\infty}I_R=0$．证毕

(4) 计算 $\oint_{L^+}\frac{xdy-ydx}{(ax+by)^2+(cx+ey)^2}$，$\delta=ae-bc\ne 0$．其中 L^+ 是椭圆

$(ax+by)^2+(cx+ey)^2=1$ 的逆时针方向。

解：令 $u=ax+by,\ v=cx+ey$，则 $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\delta}(e\mathrm{d}u-b\mathrm{d}v),\quad \mathrm{d}y=\dfrac{1}{\delta}(a\mathrm{d}v-c\mathrm{d}u),$

且椭圆在新坐标系中化为圆 $C:u^2+v^2=1$. 于是

$$I=\frac{1}{\delta^2}\oint_C(eu-bv)(a\mathrm{d}v-c\mathrm{d}u)-(av-cu)((e\mathrm{d}u-b\mathrm{d}v)=\frac{1}{\delta}\oint_C u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u=\frac{2\pi}{|\delta|}.$$

这里，Oxy 坐标平面内的封闭曲线的正向通过可逆矩阵变换到新坐标系下的封闭曲线，曲线的方向与可逆矩阵的行列式的符号一致，即：可逆矩阵的行列式大于零，封闭曲线保持正向不变，若可逆矩阵的行列式小于零，封闭曲线变为负方向。

设封闭曲线 L 所围成的有界闭区域为 D，则 $\oint\limits_L xdy-ydx=2S_D>0$.

令 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$，其中 A 可逆，则 $\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}$，且可逆矩阵 A 把 Ouv 坐标平面内的封闭曲线 C 映射为 Oxy 坐标平面内的封闭曲线 L. 又

$$\begin{aligned}xdy-ydx&=(x\ \ y)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}=(u\ \ v)A^T\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}\\&=(\det A)(u\ \ v)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}=(\det A)(udv-vdu),\end{aligned}$$

从而 $0<\oint\limits_L xdy-ydx=\det A\oint\limits_C udv-vdu$，故当 $\det A>0$ 时，在 Ouv 新坐标系下的曲线 C 是正向，当 $\det A<0$ 时，在 Ouv 新坐标系下的曲线 C 是负向。

8. 设函数 $P(x,y),\ Q(x,y)\in C^1(\mathbb{R}^2)$，在以任意点 (x_0,y_0) 为中心，任意正数 r 为半径的上半圆周 L 上，总有 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$. 求证：在 $\mathbb{R}^2$ 上有

$$P(x,y)\equiv 0,\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\equiv 0.$$

解：给上半圆周补上一条直径 l，记围成的区域为 D，则由格林公式，有

$$\int_{\partial D}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\left.\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right|_{(\xi,\eta)}\cdot\frac{\pi r^2}{2},$$

其中 (ξ,η) 为 D 中一点，而

$$\int_{\partial D}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0+\int_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_0-r}^{x_0+r}P(x,y_0)dx=P(\zeta,y_0)2r,$$

其中 $\zeta\in(x_0-r,x_0+r)$，所以 $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big|_{(\xi,\eta)}\cdot\frac{\pi r}{2}=2P(\zeta,y_0)$，令 $r\to 0$，可得 $P(x_0,y_0)=0$，由 (x_0,y_0) 的任意性可知 $P(x,y)\equiv 0$，从而

$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big|_{(\xi,\eta)}=\frac{4P(\zeta,y_0)}{\pi r}=0$，再令 $r\to 0$ 可得 $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)(x_0,y_0)=0$，进而必有

$\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)=0$，又由 (x_0,y_0) 的任意性可得 $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\equiv 0$. 证毕

9. 设 $D\subseteq R^2$ 为有界开区域，它的边界 ∂D 是逐段光滑闭曲线，$\vec{n}$ 是 ∂D 的外单位法向量，设函数 $f(x,y)\in C^2(\overline{D})$，且 $f(x,y)$ 在 D 内为调和函数，即 $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$. 求证：

(i) $\oint\limits_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}dl=0$；

(ii) $\oint\limits_{\partial D}f\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}dl=\iint\limits_{D}\|\nabla f\|^2dxdy$；

(iii) 若在边界 ∂D 上，$f(x,y)\equiv 0$，求证 $f(x,y)\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$.

解：(i) 由于 $\Delta f=0$，因此 $\oint\limits_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}dl=\oint\limits_{\partial D}\nabla f\cdot\vec{n}dl=\iint\limits_{\overline{D}}\Delta f\,dxdy=0$.

(ii) $$\oint\limits_{\partial D}f\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}dl=\oint\limits_{\partial D}f\nabla f\cdot\vec{n}dl=\iint\limits_{\overline{D}}\left(\frac{\partial(ff_x')}{\partial x}+\frac{\partial(ff_y')}{\partial y}\right)dxdy$$
$$=\iint\limits_{\overline{D}}\left[f(f_{xx}''+f_{yy}'')+f_x'^2+f_y'^2\right]dxdy$$
$$=\iint\limits_{D}\|\nabla f\|^2dxdy.$$（这里用到了假设 $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\equiv 0$）

(iii) 由(ii)的结论可知，若 $f(x,y)\equiv 0$，$\forall(x,y)\in\partial D$，则 $\nabla f\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$.

即 $\frac{\partial f}{\partial x}\equiv 0$，$\frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$，所以 $f(x,y)\equiv const$，从而 $f(x,y)\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$. 证毕

本题表明：调和函数在D内的值由其边界曲线上的值唯一确定。

10. 设$u(x,y)$为开区域$D\subset\mathbb{R}^2$上的调和函数，其边界∂D是光滑的封闭曲线。证明：

(1) $u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2\pi}\oint_{\partial D}(u\dfrac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}-\ln r\dfrac{\partial u}{\partial\mathbf{n}})dl$，其中$(x_0,y_0)\in D$任意，$\mathbf{r}$为$(x_0,y_0)$到$\partial D$上的点的向量，$r=\|\mathbf{r}\|$，$\mathbf{n}$为$\partial D$的外单位法向量；

(2) $u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2\pi R}\oint_L u(x,y)dl$，其中$L$是以$(x_0,y_0)$为中心，$R$为半径位于$D$中的任意一个圆周。

证明：以任意的点$(x_0,y_0)\in D$为中心，以充分小的正数ρ为半径，作圆域D_ρ使得$D_\rho\subset D$，记$L_\rho=\partial D_\rho$为D_ρ的边界封闭曲线。对$\forall(x,y)\in\bar{D}-D_\rho$，令$\mathbf{r}=(x-x_0,y-y_0)$，且$r=\|\mathbf{r}\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，记

$$\varphi(x,y)=\ln r=\frac{1}{2}\ln((x-x_0)^2+(y-y_0)^2),$$

则$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{x-x_0}{r^2}$，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{y-y_0}{r^2}$，$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\dfrac{r^2-2(x-x_0)^2}{r^4}$，$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\dfrac{r^2-2(y-y_0)^2}{r^4}$. 故

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{2r^2-2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]}{r^4}=0,$$

又知$u(x,y)$为开区域$D\subset\mathbb{R}^2$上的调和函数，因此$\Delta u=0$，由课本习题 14.3 的第 8 题，有

$$0=\iint\limits_{D-D_\rho}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta\ln r\\ u & \ln r\end{vmatrix}dxdy=\oint\limits_{L^++L_\rho^-}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}} & \dfrac{\partial\ln r}{\partial\vec{n}}\\ u & \ln r\end{vmatrix}dl$$
$$=\oint\limits_{L^+}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}-u\frac{\partial\ln r}{\partial\vec{n}}\right)dl-\oint\limits_{L_\rho^+}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}-u\frac{\partial\ln r}{\partial\vec{n}}\right)dl,$$

即

$$\oint\limits_{L^+}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial\vec{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)dl=\oint\limits_{L_\rho^+}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial\vec{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)dl. \qquad (*)$$

在L_ρ上，$\ln r=\ln\rho$，$\dfrac{\partial\ln r}{\partial\vec{n}}=\dfrac{1}{r}$，因此

$$\oint\limits_{L_\rho^+}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial\vec{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)dl=\oint\limits_{L_\rho^+}u\frac{1}{r}dl-\ln\rho\oint\limits_{L_\rho^+}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}dl=\frac{1}{\rho}\oint\limits_{L_\rho^+}udl=2\pi u(\xi,\eta),$$

其中$(\xi,\eta)\in L_\rho$，上面式子的倒数第二个等式应用了$\oint\limits_{L_\rho^+}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}dl=0$，且最后一个等式应用了曲线积分的积分中值定理. 由(*)式，有

$$\oint\limits_{L^+}\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial\vec{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)dl=2\pi u(\xi,\eta),$$

令$\rho\to 0$，有$(\xi,\eta)\to(x_0,y_0)$，故$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial D}(u\frac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}})dl$.

(2) 对任意的$(x_0,y_0)\in D$，令$L=\{(x,y)\,|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R\}$. 任取$(x,y)\in D$，令$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. 由于$u(x,y)$为开区域$D\subset\mathbb{R}^2$上的调和函数，因此$\oint\limits_{L}\ln r\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}dl=\ln R\oint\limits_{L_\rho^+}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}dl=0$. 又知$\oint\limits_{L^+}u\frac{\partial\ln r}{\partial\vec{n}}dl=\frac{1}{R}\oint\limits_{L^+}u(x,y)dl$，由第一小问知,

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\oint_L(u\frac{\partial\ln r}{\partial\mathbf{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}})dl=\frac{1}{2\pi R}\oint_L u(x,y)dl.$$

证毕

11. 证明: 若$u(x,y)$是光滑闭曲线L所围成闭区域D上的调和函数 (不是常数), 则$u(x,y)$必在曲线L上取到最大（小）值。

证明: 假设调和函数$u(x,y)$在区域D的内部某一点$P(x_0,y_0)$处取到最大值. 以$P(x_0,y_0)$为心以充分小的ρ为半径作圆域D_ρ，其边界封闭曲线为L_ρ. 由本习题第 9 题第 2 小问,

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{L_\rho}u(x,y)dl.$$

另一方面, $u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{L_\rho}u(x_0,y_0)dl$, 两式相减, 有$\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{L_\rho}\big(u(x,y)-u(x_0,y_0)\big)dl=0$,

因为调和函数$u(x,y)$在闭区域D上不是常数，且对$\forall(x,y)\in L_\rho$，有$u(x_0,y_0)>u(x,y)$，所以$\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{L_\rho}\big(u(x_0,y_0)-u(x,y)\big)dl>0$, 矛盾. 故闭区域上的调和函数必在其边界上取到最值.

证毕

注: 以上第 9---第 11 题是有关调和函数的题目，由调和函数的定义，调和函数是拉普拉斯方程的一个解，在数学物理方程中，为讨论拉普拉斯方程的解，要用到上述调和函数的性质，也为以后学习数学物理方程作储备.

======

以下供学有余力的同学选做。

1. (利用 Green 公式证明平面面积变换公式) 回忆平面面积变换定理:

设 D_0 和 D_1 是平面上的两个有界闭区域，且 $\varphi:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 是 $D_0 \to D_1$ 的二阶连续可微双射. 则区域 D_1 的面积 $S(D_1) = \iint\limits_{D_0} \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$. 试利用 Green 公式来证明上述面积变换公式。

证明：设开区域 D_0 的边界 ∂D_0 的参数方程 $u = u(t)$，$v = v(t)$，$a \le t \le b$，并且 ∂D_0 的正向（逆时针）与参数 t 增加的方向一致，那么区域 D_1 的边界 ∂D_1 有相应的参数表示

$$x = x(t) = x(u(t), v(t)),\quad y = y(t) = y(u(t), v(t)),\quad a \le t \le b.$$

这是因为映射 φ 把内点映为内点，映边界点为边界点。因此 $\partial D_1 = \varphi(\partial D_0)$. 假设映射 φ 保持定向，即它的 Jacobi 矩阵行列式在其定义域上恒大于零，即 $\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} > 0$，$\forall (u,v) \in D_0$，则 ∂D_1 的正向与参数 t 增加的方向一致. 于是根据 Green 公式提供的面积公式得 D_1 的面积为

$$S(D_1) = \oint\limits_{\partial D_1} x dy = \int_a^b x(t) y'(t) dt = \int_a^b x(t)[y'_u u'(t) + y'_v v'(t)] dt = \oint\limits_{\partial D_0} x y'_u du + x y'_v dv.$$

对上式最后一个积分应用 Green 公式得

$$S(D_1) = \iint\limits_{D_0} \left(\frac{\partial(x y'_v)}{\partial u} - \frac{\partial(x y'_u)}{\partial v} \right) dudv = \iint\limits_{D_0} (x'_u y'_v - x'_v y'_u) dudv = \iint\limits_{D_0} \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv.$$

证毕.