第 10 次习题课 数项级数 参考解答

1．求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}$ 的和，其中 m 是正整数．

解：因为级数的前 N 项和为

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{N}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m})$$

$$=\frac{1}{m}(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{N})-\frac{1}{m}(\frac{1}{1+m}+\frac{1}{2+m}+\cdots\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{N+m})$$

$$=\frac{1}{m}(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{m}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+1}-\cdots-\frac{1}{N+m}),$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m)}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}-\cdots-\frac{1}{N+m}\right)$$

$$=\frac{1}{m}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}).$$

2．证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是：$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛．

证：必要性：因为 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$ 存在，所以

$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0$，且 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_n$．

充分性：因为 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}a_k$ 存在，且 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=\lim_{n\to\infty}S_{2n}+\lim_{n\to\infty}u_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n},$$

从而 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在．证毕

3．设 $\lim_{n\to\infty}a_n=l$．证明：若 $l<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}=+\infty$；若 $l>1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$ 收敛；若 $l=1$，举例说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$ 可能收敛也可能发散．

证：(1) 因为 $\lim_{n\to\infty}a_n=l<1$，所以存在 $N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，

$$a_n<q_1=\frac{1+l}{2}<1.$$

这时 $\frac{1}{n^{a_n}}>\frac{1}{n^{q_1}}$，且 $\sum_{n=N_1+1}^{\infty}\frac{1}{n^{q_1}}=+\infty$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}=+\infty$．

(2) 因为 $\lim_{n\to\infty}a_n=l>1$，所以存在 $N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，

$$a_n > q_2 = \frac{1+l}{2} > 1 \ .$$

这时 $0 < \frac{1}{n^{a_n}} < \frac{1}{n^{q_2}}$，且 $\sum_{n=N_2+1}^{\infty}\frac{1}{n^{q_2}}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$ 收敛．

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 发散．因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^{1+\frac{1}{n}}}=1$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散;

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}}$ 收敛．因为 $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}}=\frac{1}{n\cdot n^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}}=\frac{1}{n\mathrm{e}^{\sqrt{\ln n}}}$，且无穷积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\mathrm{e}^{\sqrt{\ln x}}}\mathrm{d}x=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{\ln 2}}^{+\infty}\frac{2x}{\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x \text{ 收敛 .}$$

注：当 $l=1$ 时，也可考虑级数 $\sum\frac{1}{n(\ln n)^q}=\sum\frac{1}{n^{1+\frac{q\ln\ln n}{\ln n}}}$，其敛散性依赖于 q，但

$$1+\frac{q\ln\ln n}{\ln n}\to 1 \ (n\to\infty) \ .$$

4. 证明：若 $\sum_{k=1}^{\infty}(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})$ 收敛，其中 $n_0=0,\ 1\le n_1<\cdots<n_k<\cdots$，且每个括号内各项的符号相同，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

证明：设 $\tilde{S}_k=\sum_{m=1}^{k}(u_{n_{m-1}+1}+\cdots+u_{n_m})$ 且 $\lim_{k\to\infty}\tilde{S}_k=A$. 令 $S_k=\sum_{m=1}^{k}u_m$，则 $S_{n_{k-1}}=\tilde{S}_{k-1},\ S_{n_k}=\tilde{S}_k$，对 $\forall m\ge 1,\ \exists k\ge 1$ 使得 $n_{k-1}<m<n_k$，若每个括号内所有项的符号相同（或正或负），则当 m 从 n_{k-1} 变化到 n_k 时，部分和 S_m 单调增加或单调减小，即 $\tilde{S}_{k-1}<S_m\le\tilde{S}_k$ 或 $\tilde{S}_{k-1}>S_m\ge\tilde{S}_k$．当 $m\to\infty$ 时，有 $k\to\infty$，所以 $\lim_{m\to\infty}S_m=\lim_{k\to\infty}\tilde{S}_k=A$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且其和也是 A. 证毕

5．判断下列正项级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{\pi}{2n^2+1})$；

解：收敛．因为 $\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\sin(\frac{\pi}{2n^2+1})=\frac{\pi}{2}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛．

（2）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^p}{\ln n}$；

解：由比阶判别法知，当 $p<-1$ 时，收敛；当 $p\geqslant -1$ 时，发散．

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{p}\ln(1+\frac{2n}{n^{2}+1})$；

解：因为 $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{p}\ln(1+\frac{2n}{n^{2}+1})=\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^{p}}\ln(1+\frac{2n}{n^{2}+1})\sim\frac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}}\ (n\to\infty)$，

所以，当 $p>0$ 时，收敛；当 $p\leqslant 0$ 时，发散．

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}nr^{n}$，其中 $r>0$ ．

解法 1：因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^{n}}=r$，所以，当 $r<1$ 时，收敛；当 $r>1$ 时，发散；当 $r=1$ 时，通项不趋向于零，发散．

解法 2：当 $r\geqslant 1$ 时，通项不趋向于零，发散；当 $0<r<1$ 时，因为

$$\lim_{n\to\infty}n^{2}\cdot nr^{n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3}}{r^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^{2}}{-r^{-x}\ln r}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{-r^{-x}\ln^{3}r}=0,$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}nr^{n}$ 收敛．

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^{n}}$；

解：因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln^{2}n}{n}}}{\ln n}=0,$$

所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^{n}}$ 收敛．

(6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；

解：因为 $\lim_{n\to\infty}\ln n=+\infty$，所以 n 充分大时 $\ln n>\mathrm{e}^{2}$，$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}<\frac{1}{(\mathrm{e}^{2})^{\ln n}}=\frac{1}{n^{2}}$ ．

所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛．

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}\ (a>0)$；

解：$\frac{1}{a^{\ln n}}=\frac{1}{(\mathrm{e}^{\ln a})^{\ln n}}=\frac{1}{(\mathrm{e}^{\ln n})^{\ln a}}=\frac{1}{n^{\ln a}}$，所以当 $\ln a>1$ 时，即 $a>\mathrm{e}$ 时级数收敛，其他情形发散．

(8) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$ ．

解：发散．因为 $\frac{1}{\ln(n!)}>\frac{1}{n\ln n}$，且 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散．

(9) $1+a+ab+a^{2}b+a^{2}b^{2}+a^{3}b^{2}+\cdots+a^{n}b^{n}+a^{n+1}b^{n}+\cdots$，$a>0,b>0$ ．

解：对原级数加括号得到级数

$$(1+a)+(ab+a^2b)+(a^2b^2+a^3b^2)+\cdots+(a^nb^n+a^{n+1}b^n)+\cdots$$

$$=(1+a)+ab(1+a)+a^2b^2(1+a)+\cdots+a^nb^n(1+a)+\cdots,$$

这是一个几何级数，公比为ab，所以当$ab<1$时收敛，其他情形发散．

因为正项级数收敛当且仅当它以某种方式加括号后收敛，所以原级数当$ab<1$时收敛，其他情形发散．

6． 判断下列级数的敛散性，并说明是否绝对收敛.

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^p}$；

解：由于$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)^p}\cdot\frac{n^p}{a^n}\right|=|a|$，所以

当$|a|>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^p}$发散；当$|a|<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^p}$绝对收敛；

当$a=1$时，$p>1$收敛，$p\leqslant 1$发散；

当$a=-1$时，$p\leqslant 0$发散，$0<p\leqslant 1$条件收敛，$p>1$绝对收敛．

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$；

解：因为$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}\right|=0$，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$绝对收敛．

（3）已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$的敛散性．

解：由均值不等式可知 $\left|\frac{a_n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{2}(\frac{1}{n^2}+{a_n}^2)$，又$\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$均收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$绝对收敛．

7．设$a_n>0$，$\{a_n\}$单调，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$收敛，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛．

证：若$\{a_n\}$单调增加，则$0<a_n=\sqrt{a_n^2}\leqslant\sqrt{a_na_{n+1}}$，所以$\sqrt{a_na_{n+1}}\geqslant a_1>0$，这与级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$收敛矛盾．所以$\{a_n\}$单调减小．从而$0<a_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}^2}\leqslant\sqrt{a_na_{n+1}}$ ． 因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛. 证毕

8．设n为正整数，x_n为方程$x^n+nx-1=0$的正根．试确定α的范围，使得级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$收敛．

解：设$f(x)=x^n+nx-1$，则$f(0)\cdot f(\frac{1}{n})<0$，所以方程$x^n+nx-1=0$在区间$(0,\frac{1}{n})$内有实根．

又$f'(x)=nx^{n-1}+n>0\ \ (x>0)$，所以方程$x^n+nx-1=0$的正实根唯一．

因此$0<x_n<\dfrac{1}{n}$.

注意到$x_n^n<x_n<\dfrac{1}{n}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=0$. 由方程$x^n+nx-1=0$知

$$nx_n=1-x_n{}^n,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$. 从而$\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha x_n^\alpha=1$.

故当$\alpha>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n{}^\alpha$收敛；当$\alpha\leqslant 1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^\alpha$发散 .

9． 证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\ \ (u_n>0)$发散，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{S_n}$也发散.

证明：因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\ \ (u_n>0)$发散，因此$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k\to+\infty\ \ (n\to\infty)$，从而对$\forall n$，$\exists p\in\mathbb{N}^+$

有$S_{n+p}\geq 2S_n$，故

$$\frac{u_{n+1}}{S_{n+1}}+\frac{u_{n+2}}{S_{n+2}}+\cdots+\frac{u_{n+p}}{S_{n+p}}>\frac{u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}}{S_{n+p}}=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}\geq\frac{1}{2},$$

从而由柯西收敛准则知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{S_n}$发散. 证毕

10．证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\ \ (u_n>0,\ n=1,2,\cdots)$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{\ln u_n}$收敛，其逆是否成立?

证明：因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\ \ (u_n>0,\ n=1,2,\cdots)$收敛，因此$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\ln u_n=-\infty$，故

$\exists N>0$，当$n>N$时，$\left|\dfrac{u_n}{\ln u_n}\right|<2u_n$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{\ln u_n}$绝对收敛。

其逆不成立，例如$u_n=\dfrac{1}{n\ln n}$. 则级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{-1}{n\ln n[\ln n+\ln(\ln n)]}$收敛. 事实上，

$\left|\dfrac{-1}{n\ln n[\ln n+\ln(\ln n)]}\right|\leq\dfrac{1}{n\ln^2 n}$，由于级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$收敛，因此以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{\ln u_n}$收敛. 但级数

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$发散. 证毕

11. 证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛.

证明：因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛，因此由柯西收敛准则知，对 $\forall \varepsilon > 0$ ，$\exists N_1 > 0,$ 当 $n > N_1$ 时，对 $\forall p \in \mathbb{N}^+$ ，有 $\left|a_{n+1} - a_{n+2}\right| + \cdots + \left|a_{n+p-1} - a_{n+p}\right| < \varepsilon$ ，故

$$\left|a_{n+1} - a_{n+p}\right| \le \left|a_{n+1} - a_{n+2}\right| + \cdots + \left|a_{n+p-1} - a_{n+p}\right| < \varepsilon,$$

即 $\left\{a_n\right\}$ 是柯西列. 令 $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ ，因为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，因此 $\{B_n\}$ 是柯西列，故存在 $M > 0$ 使得对 $\forall n \ge 1$ ，$\left|B_n\right| \le M$ 且 $\left|a_n\right| \le M$. 对上述给定的 $\varepsilon > 0$ ，也存在 $N_2 > 0$ ，当 $n > N_2$ 时，对 $\forall p \in \mathbb{N}^+$ ，有 $\left|B_{n+p} - B_n\right| < \varepsilon$ ，取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ ，则当 $n > N$ 时，对 $\forall p \in \mathbb{N}^+$ ，有

$$\begin{aligned}
&\left|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+p}b_{n+p}\right| \\
&= \left|a_{n+1}(B_{n+1} - B_n) + a_{n+2}(B_{n+2} - B_{n+1}) + \cdots + a_{n+p}(B_{n+p} - B_{n+p-1})\right| \\
&= \left|-B_n a_{n+1} + B_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + a_{n+p}B_{n+p}\right| \\
&= \left|B_n a_{n+p} - B_n a_{n+1} + B_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + a_{n+p}B_{n+p} - B_n a_{n+p}\right| \\
&= \left|B_n(a_{n+p} - a_{n+1}) + B_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + a_{n+p}(B_{n+p} - B_n)\right| \\
&\le \left|B_n\right| \cdot \left|a_{n+p} - a_{n+1}\right| + \left(\left|B_{n+1}\right| \cdot \left|a_{n+1} - a_{n+2}\right| + \cdots + \left|B_{n+p-1}\right| \cdot \left|a_{n+p-1} - a_{n+p}\right|\right) + \left|a_{n+p}\right| \cdot \left(\left|B_{n+p}\right| - \left|B_n\right|\right) \\
&\le M\varepsilon + M\varepsilon + M\varepsilon = 3M\varepsilon.
\end{aligned}$$

由柯西收敛准则知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. 证毕