Homework 12

抹茶奶绿

May 20, 2025

Exercise 1.
假设总体服从参数为 λ 的指数分布，$X_1,\dots,X_n$ 为其独立随机样本. 构造 λ 的假设检验.

Solution.
由 CLT，在 $H_0:\lambda=\lambda_0$ 下

$$Z=\frac{\bar{X}-\dfrac{1}{\lambda_0}}{1/(\sqrt{n}\,\lambda_0)}\approx N(0,1)$$

- 双边检验 $H_1:\lambda\neq\lambda_0$:

$$|Z|\geq z_{\alpha/2}\quad\Longleftrightarrow\quad \bar{X}\leq\frac{1}{\lambda_0}-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}\,\lambda_0}\quad\text{或}\quad\bar{X}\geq\frac{1}{\lambda_0}+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}\,\lambda_0}$$

- 单边检验 $H_1:\lambda\leq\lambda_0$:

$$Z\geq z_\alpha\quad\Longleftrightarrow\quad\bar{X}\geq\frac{1}{\lambda_0}+\frac{z_\alpha}{\sqrt{n}\,\lambda_0}$$

Exercise 2.
假设总体服从 $U(0,\theta)$，$X_1,\dots,X_n$ 为独立样本. 给定 $\theta_0>0$，考察检验 $H_0:\theta=\theta_0\quad\text{vs.}\quad H_1:\theta>\theta_0$，显著性水平为 α.
(1) 基于矩估计量构造检验并给出功效函数；(2) 基于极大似然估计量构造检验并给出功效函数.

Solution.
(1) 矩估计 $\hat{\theta}_{\text{MOM}}=2\bar{X}$. 当 $\theta\geq\theta_0$ 时 $\bar{X}$ 增大，故拒绝域可设为 $\bar{X}\geq c=\frac{\theta_0}{2}+z_\alpha\frac{\theta_0}{\sqrt{12n}}$，于是

$$\beta(\theta)=P_\theta\big(\bar{X}\geq c\big)=1-\Phi\Big(\frac{c-\theta/2}{\theta/\sqrt{12n}}\Big)$$

(2) 极大似然估计 $\hat{\theta}_{\text{MLE}}=\max_i X_i$. 拒绝域 $\max_i X_i\geq c'$，又

$$P_{\theta_0}(\max X<c')=\Big(\frac{c'}{\theta_0}\Big)^n=1-\alpha\implies c'=\theta_0(1-\alpha)^{1/n}$$

于是

$$\beta(\theta)=1-P_\theta(\max X<c')=1-\Big(\frac{c'}{\theta}\Big)^n=1-\Big(\frac{\theta_0}{\theta}(1-\alpha)^{1/n}\Big)^n$$

Exercise 3.
已知全国年人均病假天数 $\mu_0=5.1$ 天，且病假天数服从正态分布. 某公司对 $n=49$ 名员工调查，样本平均 $\bar{x}=7$ 天，样本标准差 $s=2.5$ 天. 检验该公司员工是否比常人更易生病.

Solution.
检验统计量

$$T=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{7-5.1}{2.5/\sqrt{49}}\approx 5.32$$

自由度 $\nu=48$，临界值 $t_{0.95,48}\approx 1.677<T$，故在 $\alpha=0.05$ 水平下拒绝 H_0，即更易生病.

Exercise 4. 从一批灯泡中随机抽取 $n=5$ 只，寿命（小时）分别为

1050, 1100, 1120, 1250, 1280.

假设寿命服从正态分布，合格标准为平均寿命 $\mu \geq 1180$ 小时.
(1) 检验这批灯泡是否合格;
(2) 互换原、备择假设时结论如何？说明原因;
(3) 当显著性水平 $\alpha \to 1$ 时，检验结果如何？

Solution.
计算样本统计量：$\bar{X} = 1160, s \approx 99.75$.
(1) $\bar{X} \geq \mu_0 + \dfrac{t_\alpha s}{\sqrt{n}} = 1275.1$，故不拒绝 H_0，说明不合格.
(2) $\bar{X} \leq \mu_0 - \dfrac{t_\alpha s}{\sqrt{n}} = 1084.9$，故不拒绝 H_0，说明合格.
(3) 当 $\alpha \to 1$ 时，总拒绝 H_0，即 (1) 中总认为合格，(2) 中总认为不合格.

Exercise 5.
测得 $n = 16$ 件元件寿命（小时）:

$$159,\ 280,\ 101,\ 212,\ 224,\ 379,\ 179,\ 264,\ 222,\ 362,\ 168,\ 250,\ 149,\ 260,\ 485,\ 170.$$

检验是否有理由认为寿命 $\mu > 225$ 小时.

Solution.
样本均值 $\bar{X} \approx 241.5$, 样本标准差 $s \approx 98.73$.
又 $\bar{X} \geq \mu_0 + \dfrac{t_\alpha s}{\sqrt{n}} = 268.3$，即不拒绝 H_0，说明无理由认为 $\mu > 225$ 小时.

Exercise 6.
假设总体服从 Poisson(λ)，样本 $X_1, \ldots, X_n$ 独立同分布. 检验 $H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \lambda \neq \lambda_0$，基于大样本近似给出显著性水平为 α 的检验.

Solution.
由中心极限定理，

$$Z = \frac{\bar{X} - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}} \approx N(0,1)$$

双边检验拒绝域 $|Z| > z_{\alpha/2}$.

Exercise 7.
对 4000 个真原假设和 1000 个假原假设进行检验，统计结果如下:

决策	H_0 为真	H_0 为假
不拒绝H_0	3800	500
拒绝H_0	200	500
合计	4000	1000

(1) 在 H_0 为真时的第一类错误比例？
(2) 拒绝时的第一类错误比例？有何启示？
(3) 在 H_0 为假时的第二类错误比例？
(4) 该检验的功效？

Solution.
(1) 第一类错误率 $= 200/4000 = 0.05$.

(2) 在拒绝的 700 次中，有 200 次是第一类错误，比例 $200/700 \approx 0.286$，说明在所有拒绝中有近 29% 是假阳性，提示需控制假发现率.
(3) 第二类错误率 $= 500/1000 = 0.5$.
(4) 功效 $1 - 0.5 = 0.5$.

Exercise 8.
已知外科方法治愈率 $p_0 = 0.02$. 某医生用化学疗法治疗 200 名患者，6 人被治愈，$\hat{p} = 0.03$. 判断化学疗法是优于外科方法.
(1) 该判断方法是否科学？请设计科学的检验方法；(2) 按该方法给出结论.

Solution.
比较经验治愈率 $\hat{p}$ 与 p_0 而不做统计检验，无法评估观察到的差异是否因抽样波动引起，因此不够科学.
设计假设检验：

$$H_0 : p = p_0 = 0.02 \quad \text{vs.} \quad H_1 : p > 0.02$$

采用大样本正态近似：

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \approx N(0,1)$$

单侧检验拒绝域为

$$Z \geq z_\alpha$$

代入数据：

$$\hat{p} = \frac{6}{200} = 0.03, \quad \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.02 \times 0.98}{200}} \approx 0.0099$$

$$Z = \frac{0.03 - 0.02}{0.0099} \approx 1.01 < 1.645$$

故不拒绝 H_0，即无足够证据表明化学疗法优于外科方法.

Exercise 9.
对题 6 的检验，令 $\lambda_0 = 1$, $n = 20$, $\alpha = 0.05$. 随机模拟 $X_i \overset{iid}{\sim} \text{Poisson}(\lambda_0)$ 共 1000 次，记录拒绝原假设的次数，并估算第一类错误率与 0.05 的接近程度.

Solution.
代码如下：

```python
from scipy.stats import poisson, norm
import numpy as np
import math

def experiment(count: int, mu: float, alpha: float):
    rej = 0
    n = 20
    for i in range(0, count):
        sample = np.array(poisson.rvs(mu=mu, size=n))
        if abs(sample.mean() - mu) >= norm.ppf(1 - alpha / 2) * math.sqrt(mu / n):
            rej += 1
        print('Error of type I ',rej/count)

for i in range(10):
    experiment(1000, 1, 0.05)
```

运行结果为：0.043,0.055,0.052,0.048,0.045,0.053,0.047,0.049,0.051,0.054