第 2 次作业（提交截止时间：3 月 6 日上午 9:50）

1. *证明：$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

   （提示：将事件 $A+B+C$ 表示成适当的互斥事件之和）.
2. 假设 $P(B)>0$，证明 $P(\cdot\,|\,B)$ 是概率函数.
3. 判断下列结论是否正确，并简要说明理由：

   （1）$P(A)\geq P(A\,|\,B)$.

   （2）不存在既互斥也相互独立的事件 A,B.

   （3）若 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，则 A,B,C 独立.
4. *假设 A_i 表示掷 2 骰子的点数之和为 i 的倍数（$i=2,3,5$），请分别判断 A_2 与 A_3 以及 A_2 与 A_5 的独立性并说明理由.
5. 举例说明条件独立不意味着独立，反之亦然.
6. 假设 A 是小概率事件，$P(A)=\varepsilon$（$0<\varepsilon<1$），不断独立地重复此试验，证明：事件 A 迟早要发生的概率为 1.
7. *假设有 3 张形状相同的卡片，其中一张两面都是黑色，一张两面都是红色，另一张是一面红一面黑，随机取出一张放在桌上，朝上的面为红色，那么另一面是黑色的概率是多少？
8. n 个人按任一顺序依次抓阄（其中只有一个为“中”），请评价以下两种抓阄方式是否公平并说明理由：

   （1）所有人都抓完阄后再同时打开；

   （2）每个人抓完阄后立即打开，当某个人抓到“中”时，整个抓阄过程结束（后面的人就不必抓了）.
9. *假设某医生考虑如下诊断方案：若有 80%的可能确定病人患此病就会建议病人手术；否则推荐做进一步的检查，该检查昂贵且痛苦. 现在该医生仅仅有 60%的把握认为小明患此病，因此推荐做了进一步的检查，该检查对于确有此病的患者给出阳性结果，而对健康人却不会给出阳性结果. 小明的检查结果呈阳性，正当要建议手术时，小明告诉医生他患有糖尿病. 这个消息带来了麻烦，尽管它并不影响医生一开始对小明患病的 60%的把握，但却影响了这个进一步检查项目的效果，该检查对于患有糖尿病却不患有这种疾病的人来说会有 30%的可能给出阳性结果. 问：此时医生是否应该仍旧建议手术？
10. *某人参与一个游戏，每次输赢 1 个游戏币，赢的概率为 $p>0$，且每次游戏之间相互独立，假设初始游戏币为 k 个，输光或者游戏币达到 n 个离场（$n>k$）.

    （1） 此人输光离场的概率为多少？

    （2） 如果 $p\leq 0.5$，当 $n\to\infty$ 时，求其输光离场概率的极限.
11. *有一个生物，1 分钟后有三种可能结果：死掉、保持原状或者分裂成两个，出现的概率

都相同，而此后活着的该种生物都将以这种方式相互独立地进行下去，那么这种生物最终灭亡的概率是多少？

12. *根据症状检查，某患者患有病症 A,B,C 中的一种，有 80%可能患有病症 A，患有病症 B,C 的可能都为 10%. 现在有甲乙两种药物治疗方案，治愈率如下表所示：

	A	B	C
甲	80%	5%	10%
乙	60%	90%	90%

对于该患者每种方案的治愈率是多少？你会给出哪种治疗方案建议？（需说明理由）尝试换个角度给出另外一种方案可以被建议的理由.

13. *假设有两个同样的袋子，分别标记为 U_1 和 U_2，袋子 U_1 中有 4 个黑球和 1 个白球，袋子 U_2 中有 2 个黑球和 3 个白球. 袋子标记不小心掉了，**随机选中一个袋子进行取球试验**（之后袋子不变），每次从中取出一个球，事件“第 k 次取出的是黑球”记为 B_k .

（1） 求第 1 次取出的是黑球的概率 $P(B_1)$；求 $P(U_1 | B_1)$ 并将其与 $P(U_1)$ 比较，尝试对所得的比较结果给出直观解释.

（2） 若取出第 1 个球但不看其颜色，请分别在将第 1 个球放回和不放回袋子两种情形下求 $P(B_2)$，比较 $P(B_2)$ 与 $P(B_1)$ 并尝试解释二者为什么会有这样的关系.

（3） 若取出的第 1 个球是黑球，将其放回袋子，求第 2 次取出的仍是黑球的概率，比较 $P(B_2 | B_1)$ 与 $P(B_2)$ 并尝试给出二者大小关系的直观解释.

（4） 若每次取球后都将球放回，已知前 n 次取出的都是黑球，求第 $n+1$ 次取出的是黑球的概率 $P(B_{n+1} | B_1B_2\cdots B_n)$，进一步令 $n\to\infty$，这个概率的极限是多少？怎么直观理解这个极限结果？

（5） 若每次取球后都将球放回，已知前 n 次取出的都是黑球，请问刚开始选的袋子是 1 号的概率为多少？进一步令 $n\to\infty$，这个概率的极限是多少？怎么直观理解这个极限结果？

14. **（选做题）A、B 两队将要进行一次冠亚军决赛，甲是 A 队的支持者，愿意以 20 元对 5 元与别人赌 A 队获胜，而乙是 B 队的支持者，但相对保守，愿意 15 元对 10 元与别人赌 B 队获胜.

（1） 假设你有 100 元，你会选择谁作为对手方参与这个打赌游戏？是否有必定获利的策略？

（2） 如果你与甲作为对手，在甲的心中你的获胜概率（i.e. 甲心目中 B 队获胜概率 $P_{甲}(B)$ ）是多少？类似地，乙心目中 A 队获胜概率 $P_{乙}(A)$ ）是多少？比较 $P_{甲}(B)$+$P_{乙}(A)$ 与 1 的大小，（联系（1））你对此有什么看法？

15. （计算机实验）假设一枚硬币正面朝上的概率为 $p=0.3$，抛掷 $n=1000$ 次，每次记录正面朝上的相对频率.

（1） 画出这些相对频率的散点图.

（2） 重复上述试验 100 次画出正面向上次数的直方图

（3） 计算上述 100 次试验正面朝上次数的平均值，并将其与 np 相比较.

（4） 尝试不同的 p 和 n 值.