第 10 次习题课题目 数项级数

1．求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}$的和，其中$m$是正整数．

2．证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是：$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，且$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛．

3．设$\lim_{n\to\infty}a_n=l$．证明：若$l<1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}=+\infty$；若$l>1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$收敛；若$l=1$，举例说明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$可能收敛也可能发散．

4. 证明：若$\sum_{k=1}^{\infty}(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})$收敛，其中$n_0=0,\ 1\le n_1<\cdots<n_k<\cdots$，且每个括号内各项的符号相同，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

5．判断下列正项级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{\pi}{2n^2+1})$；　（2）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^p}{\ln n}$；　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln(1+\frac{2n}{n^2+1})$；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}nr^n$，其中$r>0$；（5）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$；　（6）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；

（7）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}\ (a>0)$；　（8）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$；

（9）$1+a+ab+a^2b+a^2b^2+a^3b^2+\cdots+a^nb^n+a^{n+1}b^n+\cdots$，$a>0,b>0$．

6． 判断下列级数的敛散性，并说明是否绝对收敛.

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^p}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$；

（3）已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$的敛散性．

7．设$a_n>0$，$\{a_n\}$单调，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$收敛，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛．

8．设n为正整数，x_n为方程$x^n+nx-1=0$的正根．试确定α的范围，使得级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$收敛．

9． 证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ (u_n>0)$发散，$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n}$也发散.

10．证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ (u_n>0,\ n=1,2,\cdots)$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{\ln u_n}$收敛，其逆是否成立？

11. 证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛.