

第9次作业（提交截止时间：4月24日上午9:50）

1. 尝试以简要框架形式给出概率部分知识的总结，并指出自己掌握起来相对困难的知识点.
2. 给出一个抽样调查实例，试指出你认为的其可能的不当之处.
3. （简单随机抽样）设总体的大小为  $N$ ，总体均值和方差分别为  $\mu, \sigma^2$ ， $X_i$

（ $i=1, \dots, n$ ）为无放回抽取的简单随机样本.

(1) \*证明:  $E(X_i) = \mu$ ,  $Var(X_i) = \sigma^2$ .

(2) \*证明:  $E(\bar{X}) = \mu$ ,  $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \left( \frac{N-n}{N-1} \right)$ .

4. 设随机样本  $X_i$ （ $i=1, \dots, n$ ）来自二项总体  $B(k, p)$ .

(1) 给出参数  $k$  和  $p$  的矩估计.

(2) 尝试讨论上述估计的不足之处.

5. 设随机样本  $X_i$ （ $i=1, \dots, n$ ）来自均匀分布  $U(\theta, 2\theta)$ ，求  $\theta$  的矩估计和极大似然估计.

6. 设总体概率密度函数  $f(x; a, \sigma) = (\sqrt{2\pi}\sigma^3)^{-1}(x-a)^2 \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2\right)$ ,

$x \in R$ ，其中  $a \in R$ ， $\sigma > 0$  为参数.

(1) 验证  $f(x; a, \sigma)$  作为  $x$  的函数满足概率密度的归一化要求.

(2) 设随机样本  $X_i$ （ $i=1, \dots, n$ ）来自此总体，求  $a$  和  $\sigma^2$  的矩估计.

(3) 列出  $a, \sigma^2$  的极大似然估计所满足的方程，并指出一种迭代求解的方法.

7. 设随机样本  $X_i$ （ $i=1, \dots, n$ ）来自 Bernoulli 总体  $B(p)$ ，请给出参数  $p$  的矩

估计和极大似然估计.

8. 设总体是总数为  $n$ ，单元概率分别为  $p_1, \dots, p_m$ （这里  $p_1 + \dots + p_m = 1$ ）的多项分布， $X_i$ （ $i=1, \dots, m$ ）分别为  $m$  个单元的观测频数（ $X_1 + \dots + X_m = n$ ）。求参数  $p_i$ （ $i=1, \dots, m$ ）的极大似然估计。

9. 设总体  $X$  满足以下分布表：

$X$	1	2	3
$P$	$\theta^2$	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中  $0 < \theta < 1$  是未知参数。假设已取得了样本值  $x_1 = 1$ ， $x_2 = 2$ ， $x_3 = 1$ ，

请据此求  $\theta$  的矩估计值和极大似然估计值。

10. 设随机样本  $X_1, \dots, X_n$  来自具有概率密度函数为  $f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

的分布，其中  $\theta > 0$  是未知参数。

（1）求  $\theta$  的矩估计  $\hat{\theta}$ 。

（2）求  $\theta$  的极大似然估计  $\theta^*$ 。

11. （计算机实验）考虑第 4 题，分别尝试  $k=10$ ， $p=0.01$ ， $p=0.5$ ， $n=10$ ， $n=1000$ ，生成服从  $B(k, p)$  容量为  $n$  的随机样本，利用样本给出  $k, p$  的矩估计值。多尝试几次，观察你的实验结果，当中是否有明显不合理的？