应用随机过程

蒋达权 2019

1、 设$X=\{X_n:n\geq 0\}$为一离散参数的时齐马氏链，取值空间$S=\{1,2,3,4\}$，其一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

(1) 设初始分布为$P(X_0=1)=P(X_0=2)=\frac{1}{2}, P(X_0=3)=P(X_0=4)=0$，求$P(X_1=3,X_2=4,X_3=2)$.

(2) 求X的不变分布.

(3) 对任意初始分布μ,求$\lim\limits_{n\to\infty}\mu\mathbf{P}^n$.

(4) 设f为连续可微函数，且$f(1)=2.1, f(2)=1.4, f(3)=0.7, f(4)=4.2$，求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(X_k)$$

.

2、 设$\{\xi_n:n\geq 1\}$为独立同分布的随机变量序列，共同服从分布$P(\xi_1=1)=p, P(\xi_1=-1)=1-p$；设$X_n=\sum_{k=1}^n\xi_k, X_0=0, X=\{X_n:n\geq 0\}$；

(1) 证明X为时齐马氏链；

(2) 证明X常返当且仅当$p=1/2$。此时，X是否正常返？请说明理由。

3、 设$X=\{X_t:t\geq 0\}$为连续时间参数的时齐马氏链，取值空间为$S=\{0,1\}$。设$\tau=\inf\{t:X_t\neq X_0\}$，且$P(\tau>t|X_0=0)=e^{-\lambda t}, P(\tau>t|X_0=1)=e^{-\mu t}$。

(1) 求X的转移速率矩阵$\mathbf{Q}$，并写出$p_{00}(t), p_{11}(t)$满足的$Kolmogorov$前进方程；

(2) $\forall t > 0, i, j \in S$，求$p_{ij}(t)$.

4、 设$N = \{N_t : t \geq 0\}$为参数为λ的泊松过程，$Y = \{Y_t : t \geq 0\}$为与N独立的离散时间参数的时齐马氏链，取值于整数集$\mathbf{Z}$，转移概率矩阵为$\hat{\mathbf{P}} = (\hat{p}_{ij})_{i,j\in\mathbf{Z}}$.设$X = \{X_t : t \geq 0\}, X_t = Y_{N_t}$.

(1) $\forall 0 < s < t, i \leq j$求$P(N_s = i | N_t = j)$.

(2) 证明X为时齐马氏链，并求其转移速率矩阵$\mathbf{Q}$和转移概率矩阵$\mathbf{P}$.

(3) 设$\hat{\pi} = (\hat{\pi}_i)_{i\in\mathbf{Z}}$为$Y$的不变分布，证明它也是$X$的不变分布。

5、 设$B = \{B_t : t \geq 0\}$为一维零初值标准布朗运动，$f(t)$为连续可微函数，$X_t = \int_0^t f(s)dB_s$，$Y_t = \int_0^t f(s)B_s dB_s$.（$It\hat{o}$积分）

(1) 设$0 < s < t$，求$B_s + B_t$服从的概率分布；

(2) 设$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t, \lambda = \min_{0\leq k\leq n-1}(t_{k+1} - t_k)$，证明

$$\lim_{\lambda\to 0} E|\sum_{k=0}^{n-1}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - t|^2 = 0.$$

(3) 求X的概率分布；

(4) 证明

$$Y_t = \frac{1}{2}(f(t)B_t^2 - \int_0^t (f'(s)dB_s^2 + f(s)ds)).$$