- 关于概率发展史：概率论是数学的一个重要分支，它的起源和发展对许多领域产生了深远的影响。例如，从最初的赌博问题到如今的统计学、金融学、物理学等领域，概率理论已成为科学与技术中不可或缺的工具。通过对其历史的学习，可以更好地理解概率在解决实际问题中的作用与局限性。
- 关于Bertrand悖论：这是一个著名的概率悖论，最早由法国数学家Joseph Bertrand提出。它探讨了在不同的假设下，如何通过随机选择的方法得到不同的结果。这种悖论揭示了在概率论中的一些直观反直觉的现象，尤其是在与几何概率相关的情境下，对其的理解不仅涉及数学技巧，也涉及到哲学上的思考。

Q3 若不终止，则有

甲甲 甲乙 乙甲 乙乙 四种

其中 3/4 都是甲赢。

那么应给甲 150元 给乙 50元。

Q4 $P\cdot 25+(1-P)\cdot 0 \geq 20$

$\Rightarrow P \geq 0.8$

Q5 $P(A)=0.5 \quad P(B)=0.3 \quad P(C)=0.2$

Q6 人手习惯有误差？

Q7. (a) $AB+AB^c = A(B+B^c) = A$

(b) $A+B$ 是 AB 至少发生1个

$A-B$ 是 A 发生 B 不发生。

那么 $(A+B)-(A-B)$ 是 AB 至少发生1个 并且有 "A不发生 B不发生" 不发生。

而这包含了 "A发生B发生" 与 "A不发生 B发生" 的情况。

即 $(A+B)-(A-B) = AB+A^cB = B$.

(c) $B-A$ 是 B发生A不发生.

$\Rightarrow A+(B-A)$ 是. B发生A不发生 和 A发生 至少发生1个.

也即 $\underbrace{\text{A B 至少发生1个.}}_{A+B}$

又 $A(B-A) = ABA^c = \phi$

(d) $(A-B)+(B-A)$ 是 A、B两事件中发生了一个.

AB 是 A、B 两事件 同时发生.

$\Rightarrow (A-B)+(B-A)+AB$ 是. A、B两事件 至少发生了一个.

即 $A+B$

$A-B$ 与 $B-A$ 显然不能同时发生

$A-B$ 时B不发生 AB 时B发生. 即互斥.

$B-A$ 同理.

(PS. 设 $\forall x \in (A+B)$ 或用 Venn 图也容易看出以上几点.)

Q8.

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n}\left(A_k - \sum_{i=1}^{k-1} A_i\right)$$

Proof: 先证互斥. 有.

不妨设 $m>n$ $\quad \left(A_m - \sum_{i=1}^{m-1} A_i\right)\cdot\left(A_n - \sum_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

$$= A_m\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right)^c \cdot A_n \cdot \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)^c$$

$$= A_m A_n \cdot \bigcap_{i=1}^{m-1} A_i^c$$

$$= \phi$$

再论相等.

$n=1$ 时显然.

设 $n=p$ 时成立. 即 $\sum_{k=1}^{p} A_k = \sum_{k=1}^{p} \left(A_k - \sum_{i=1}^{k-1} A_i\right)$

则 $n=p+1$ 时.

$$\bigcup_{k=1}^{p+1}\left(A_k - \sum_{i=1}^{k-1} A_i\right) = \left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) \cup \left(A_{p+1} - \bigcup_{i=1}^{p} A_i\right)$$

$$= \left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) \cup \left(A_{p+1}\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right)^c\right)$$

$$= \left(\bigcup_{k=1}^{p+1} A_k\right) \cap (\Omega)$$

$$= \bigcup_{k=1}^{p+1} A_k \qquad \text{R.}$$

Q9 已完成.

另外 Q7. 用集合语言描述如下.

(a) $AB + AB^c = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)$

$= A\cap(B\cup B^c) = A$

(b) $(A+B)-(A-B)$

$= (A\cup B)\cap(A-B)^c$

$= (A\cup B)\cap(A\cap B^c)^c$

$= (A\cup B)\cap(A^c\cup B)$

$= B\cup(A\cap A^c)$

$= B$

(c) $A+(B-A) = A\cup(B\cap A^c)$

$= (A\cup B)\cap(A\cup A^c)$

$= A\cup B$

$= A+B$

且. $A\cap(B-A) = A\cap B\cap A^c$

$= \phi$

(d) $(A-B)+(B-A)+AB$

$=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\cup(A\cap B)$

$= A\cap(B\cup B^c)\cup(B\cap A^c)$

$= A\cup(B\cap A^c)$

$=(A\cup B)\cap(A\cup A^c)$

$= A\cup B$

$= A+B.$

其中 $(A-B)\cap(B-A)$

$=(A\cap B^c)\cap(B\cap A^c)$

$=\phi$

$(A-B)\cap AB$

$= A\cap B^c\cap A\cap B$

$=\phi$

$(B-A)\cap AB$

$= B\cap A^c\cap A\cap B$

$=\phi.$