

第 6 次作业（提交截止时间：4 月 3 日上午 9:50）

1. 假设随机变量  $X_i \sim P(\lambda_i)$  ( $i=1, 2$ ) 相互独立, 请确定  $Y = X_1 + X_2$  的分布. 尝试给出结果的一个直观解释.
2. 假设随机变量  $X, Y$  相互独立, 且都服从标准正态分布.

(1) 求  $Z = \frac{Y}{X}$  ( $X \neq 0$ ) 的概率密度函数.

(2) 令  $X = R\cos\Theta$ ,  $Y = R\sin\Theta$ , 计算  $(R, \Theta)$  的概率密度函数, 并确定  $R, \Theta$  是否独立.

(3) 令  $U = X + Y$ ,  $V = X - Y$ , 求  $(U, V)$  的概率密度函数, 并确定  $U, V$  是否独立.

3. 设随机变量  $X_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 独立同分布, 其分布函数为  $F(x)$ , 令

$$Y = \max\{X_1, \dots, X_n\}, \quad Z = \min\{X_1, \dots, X_n\}$$

分别求  $Y, Z$  的分布函数.

4. 了解统计上(与正态分布相关)的三大分布: 卡方分布,  $t$  和  $F$  分布(参阅 John Rice 的数理统计与数据分析或其他资料), 给出其定义.
5. 假设有一场 3 匹马(分别记为 A, B, C)的比赛, 在下注结束时假设有 500 元下注在 A 马, 300 元下注在 B 马, 200 元下注在 C 马. 如果投注站想确保每下注的 100 元中可赚取 5 元.
  - (1) 投注站设定的每匹马的赔率应该是多少?
  - (2) 此时赔率所隐含的每匹马获胜概率是多少?(对比作业题 1-5)
  - (3) 比较 3 匹马的隐含获胜概率之和与 1 的大小, 你对此有什么看法?(对比作业题 2-14 (2))  
(注: A 马赔率若是 20:5 意味着若 A 马获胜则下注 A 马者每投注 5 元可获得 5 元+20 元, 额外收益为 20 元)
6. 判断下列结论对错并说明理由, 这里假设所涉及的期望和方差皆存在.

(1) 若  $X$  和  $Y$  独立, 则  $\text{Var}(XY) = \text{Var}(X)\text{Var}(Y)$ .

(2)  $X$  的中位数若存在则一定等于  $E(X)$ .

7. 证明: 对任何常数  $c$  有  $E((X - c)^2) \geq \text{Var}(X)$ , 且等号当且仅当  $c = E(X)$  时成立.

8. \*设  $X$  有概率密度函数  $f(x)$ , 其中位数为  $m$ . 证明: 对任何常数  $c$  都成立不等式  $E(|X - c|) \geq E(|X - m|)$ .

9. 计算对数正态分布的期望和方差 (对数正态分布定义可参见作业题 4-9).

10. \*设随机变量  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 独立同分布 (这样的序列也称为来自同一分布的随机样本), 其公共期望为  $\mu$ , 公共方差为  $\sigma^2$ ,  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  称为样本均值,

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  称为样本方差. 求  $\text{Var}(\bar{X})$  和  $E(S^2)$ .

11. 下列叙述是否等价? 请说明理由.

(1)  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ ;

(2)  $X$  与  $Y$  不相关;

(3)  $E(XY) = E(X)E(Y)$ ;

(4)  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

12. 验证: 若  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 则  $\rho = \text{Corr}(X, Y)$ .

13. \*设  $X$  为之前课上讨论的配对问题中拿到自己帽子的人数 (假设总共有  $n$  个人), 求  $E(X)$  和  $\text{Var}(X)$ .

14. (1) 证明:  $E^2(UV) \leq E(U^2)E(V^2)$ , 且等号成立当且仅当存在常数  $c$  使得

$P(V=cU)=1$ . (提示: 考虑  $E[(U-tV)^2] \geq 0, \forall t \in R$ )

(2) 利用 (1) 证明:  $|\text{Corr}(X,Y)| \leq 1$ , 且等号成立当且仅当存在常数  $a, b$

( $a \neq 0$ ) 使得  $P(Y=aX+b)=1$ .

15. 设随机变量  $X_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 独立同分布, 其公共期望为  $\mu$ , 公共方差为  $\sigma^2$ .

(1) 证明:  $\text{Cov}(X_i - \bar{X}, \bar{X}) = 0$ .

(2) \*\*判断  $X_i - \bar{X}$  与  $\bar{X}$  是否一定独立? 尝试给出理由.

16. (计算机实验) 利用 Q-Q 图验证正态性. 一个数据集的正态 Q-Q 图 (分位数-分位数图) 是一个散点图, 其中横坐标 (通常) 是数据值, 纵坐标 (通常) 是该数据值相应于标准正态分布的分位数. 具体对应关系为: 将数据值由小到大按顺序排列, 记为  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  (称为观测分位数),  $x_{(i)}$  为横坐标, 对

应的纵坐标为  $\Phi^{-1}(\frac{i-0.5}{n})$ , 这里  $\Phi^{-1}$  为标准正态累积分布函数的反函数,

“ $\frac{i-0.5}{n}$ ” 是作了所谓的连续性修正. 当数据集来自正态总体时, 该散点图

合理地接近为一条直线.

(1) 生成一组 (100 个) 标准正态随机数, 画出其正态 Q-Q 图, 看看是否近似为一条直线.

(2) 生成一组 (100 个) 服从指数分布 (参数  $\lambda=2$ ) 的随机数, 画出其正态 Q-Q 图, 看看是否近似为一条直线.

(3) 可否推广上述方法去验证给定的数据集是否服从假设的分布?

(4) 可否推广上述方法去验证给定的两个数据集是否来自同一未知总体?