第一次习题课题目（多元函数极限、连续、偏导数及可微性）

1. 讨论下列函数在$(0,0)$点的累次极限与二重极限是否存在，若存在求其值，若不存在，说明理由。

(1) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$，$(x,y)\in\{(x,y)\,|\,x+y\neq 0\}$.

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$，$(x,y)\neq(0,0)$.

(3) $f(x,y)=\dfrac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{x^2+y^2}$，其中$\alpha,\beta\geq 0$，且$\alpha+\beta>2$.

2. 解答下列各题：

(1) 讨论$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$是否存在？

(2) 讨论$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$是否存在？

(3) 讨论$f(x,y)=e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$在$x\to+\infty$，$y\to-\infty$时的重极限与累次极限是否存在？

3. 计算下列函数极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$；　　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$.

4. 设$\mathbb{R}^2$上的连续函数$f(x,y)$满足$\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=-\infty$. 证明：对任意常数$C$，$f(x,y)=C$的解集合是有界闭集。

5. 若$f(x,y)$在$(0,0)$点的某个邻域内有定义，$f(0,0)=0$，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$$，其中a为常数。证明：

（1）$f(x,y)$在$(0,0)$点连续；

（2）若$a\neq-1$，则$f(x,y)$在$(0,0)$点连续，但不可微；

（3）若$a=-1$，则$f(x,y)$在$(0,0)$点可微。

6. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的连续性及可微性。

7. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内有定义，若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，证明：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微。

8. 设函数 $f(x,y)$ 的两个偏导函数存在，且这两个偏导函数在点 $(0,0)$ 处连续。已知 $f_x'(0,0)=3,\quad f_y'(0,0)=4.$ 求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,t)-f(0,0)}{t}.$

9. 求解下列问题：

(1) 设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\sin y+\dfrac{1}{1-xy}$，且 $f(1,y)=\sin y$，求 $f(x,y)$.

(2) 设函数 $f(x,y)$ 的全微分为 $df(x,y)=e^{xy}(y\sin x+\cos x)dx+xe^{xy}\sin xdy$，且 $f(0,0)=1$，求 $f(x,y)$.

10. 设函数 $f(x,y)$ 的两个偏导函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 U 内存在且有界，证明：$f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续。

11. 给定单位向量 $\vec{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$，设 l 是以 $P_0(x_0,y_0)$ 为顶点，$\vec{v}$ 为方向向量的射线，则称极限

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in l}} f(x,y)=\lim_{t\to 0^+} f(x_0+t\cos\theta,y_0+t\sin\theta)$$

为函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点沿着方向 $\vec{v}$ 的方向极限。讨论下列函数在 $(0,0)$ 点的方向极限及二重极限，并总结二者的关系。

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\quad (x,y)\neq(0,0);$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$

12.设 $f(x,y)$ 定义在 $I_1=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ 上，且在 $I_0=\{(x,0):\ 0\le x\le 1\}$ 上连续，证明：$\exists\delta>0$ 使得 $f(x,y)$ 在 $I_\delta=\{(x,y):\ 0\le x\le 1, 0\le y\le\delta\}$ 上有界。

====================

以下供学有余力的同学选做：

13. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的去心邻域内有定义，满足下列条件：

(1) 存在 x_0 的去心邻域 $\{x \mid 0<|x-x_0|<r\}$，使得对 $\forall x\in\{x \mid 0<|x-x_0|<r\}$，$\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=g(x)$ 存在；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=h(y)$ 在 y_0 的某个去心邻域 $\{y \mid 0<|y-y_0|<\eta\}$ 内一致，即对 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$ 使得对 $\forall x\in U_o(x_0,\delta)$，及对 $\forall y\in\{y \mid 0<|y-y_0|<\eta\}$，有 $|f(x,y)-h(y)|<\varepsilon.$

证明：$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{y\to y_0} h(y)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.