第九次习题课题目 曲面积分、Gauss 公式和 Stokes 公式的应用

1． 计算 $\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$ ．其中 S 是锥体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ 的边界．

2．求 $I=\iint\limits_S (x+y+z)^2\,dS$，其中 S 为球心在坐标原点的单位球面.

3 .计算第一型曲面积分 $I=\iint\limits_S |z|dS$，以及第二型曲面积分 $J=\iint\limits_{S^+}|z|dx\wedge dy$，其中曲面 S 为球面 $S:x^2+y^2+z^2=a^2$，定向曲面 S^+ 的正法向向外。

4． 记 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截的有限部分。规定曲面 S 的正向向下，所得的定向曲面记为 S^+．求下面两个积分的值。

(i) $\iint\limits_S z\,dS$． (ii) $\iint\limits_{S^+}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy\right)$.

5． 求积分 $I=\iint\limits_{\Sigma^+} f(x)dy\wedge dz+g(y)dz\wedge dx+h(z)dx\wedge dy$，其中 Σ^+ 为长方体 $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 的边界，正法向朝外，函数 $f(x)$, $g(y)$ 和 $h(z)$ 均为连续函数。

6． 设 S^+ 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 位于 $0\le z\le \mathrm{h}$ 的部分，正法向向下。设 $\mathbf{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 为流体运动的速度场。求流体在单位时间里通过定向曲面 S 由内向外的流量 Q，即求曲面积分 $Q=\iint\limits_{S^+}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}$.

7．记 S^+ 为圆柱面 $S:x^2+y^2=1$ 位于 $0\le z\le 2$ 的部分，外法向为正，计算曲面积分

$I=\iint_{S^+} x(y-z)dy\wedge dz+(x-y)dx\wedge dy.$

8. 设 Ω 为由圆锥面 $S:x^2+y^2=z^2$ 和平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 所围成的圆锥体。

证明：圆锥体的体积 $V=\dfrac{Sh}{3}$，其中 S 为圆锥的底面积，h 为圆锥的高。

9. 设一元函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可导，且对于任何位于半空间 $R_x^+=\{(x,y,z),\ \ x>0\}$ 中的光滑有向封闭曲面 $S\subset R_x^+$，有 $\oiint\limits_S xf(x)dy\wedge dz-xyf(x)dz\wedge dx-e^{2x}zdx\wedge dy=0$．进一步假设 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，求 $f(x)$.

10. 利用 Stokes 公式计算积分 $I=\oint\limits_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中 L^+ 为圆周

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ y=x\tan\alpha \quad \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

从 ox 轴的正向看去，正向为逆时针方向。

11. 设有向曲线 L^+ 是平面 $x+y+z=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线，从 z 轴正向看去为

逆时针方向。求第二型曲线积分 $I=\int_{L^+}\frac{(y+1)\,dx+(z+2)\,dy+(x+3)\,dz}{x^2+y^2+z^2}$.

12. 设 Σ^+ 是锥面的一部分： $z=\sqrt{x^2+y^2}$， $0\le z\le 1$，规定其正法线向下，求曲面积分

$I=\iint_{\Sigma^+} xdy\wedge dz+2ydz\wedge dx+3(z-1)dx\wedge dy$.

13 .计算高斯积分 $I=\oiint_S \frac{\cos\langle\vec{r},\vec{n}\rangle}{r^2}dS$，其中 S 为一个不经过原点的光滑封闭曲面，其中 $\vec{n}$ 为 S

上点 (x,y,z) 处的外单位法向量， $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$， $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

14. 设 Σ^+ 为曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧，求 $\iint_{\Sigma^+} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

15. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2z$，计算曲面积分 $I=\oiint_\Sigma (ax^2+by^2+cz^2)dS.$