2023秋微积分A1期中考试试题参考解答　　Nov 18, 2023

一. 填空题

1. 极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=$ __________.

答: 所求极限为 $\frac{1}{2}$.

解:

$$\sqrt{x^2+x}-x=\frac{\big(\sqrt{x^2+x}-x\big)\big(\sqrt{x^2+x}+x\big)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\to\frac{1}{2}.$$

2. 函数 $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ 在点 $x=0$ 处的 2023 阶导数值为 $f^{(2023)}(0)=$ __________.

答: $f^{(2023)}(0)=2023!$.

解法一: 函数 $f(x)$ 可写作

$$f(x)=\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1}{2(1+x)}.$$

由此可得函数 $f(x)$ 的 n 阶导数为

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{2(1-x)^{n+1}}-\frac{n!(-1)^n}{2(1+x)^{n+1}}.$$

取 $n=2023$ 且 $x=0$ 得 $f^{(2023)}(0)=2023!$.

解法二: 对函数 $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ 在 $x=0$ 处作如下 Taylor 展开

$$\frac{x}{1-x^2}=x\Big(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+o(x^{2n})\Big)=x+x^3+x^5+\cdots+x^{2n+1}+o(x^{2n+1}).$$

取 $n=1011$ 得

$$\frac{x}{1-x^2}=x+x^3+x^5+\cdots+x^{2023}+o(x^{2023}).$$

由此可见 $f^{(2023)}(0)=2023!$.

3. 设 $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=(\sqrt{2})^{a_n}$, $\forall n\ge 1$, 则数列 $\{a_n\}$ __________ (填"收敛"或"发散").

答: 收敛.

解: 先证 $\{a_n\}$ 严格单调上升. $a_2=(\sqrt{2})^{a_1}=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}>\sqrt{2}=a_1$. 假设 $a_n>a_{n-1}$, 则 $a_{n+1}=(\sqrt{2})^{a_n}>(\sqrt{2})^{a_{n-1}}=a_n$. 由归纳法知 $\{a_n\}$ 严格单调上升. 再证数列 $\{a_n\}$ 有上界 2. $a_1=\sqrt{2}<2$. 假设 $a_n<2$, 则 $a_{n+1}=(\sqrt{2})^{a_n}<(\sqrt{2})^2=2$. 由归纳法知 $\{a_n\}$ 有上界. 因此数列 $\{a_n\}$ 收敛.

4. 极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{(\sin x)^2}-\frac{1}{\sin(x^2)}\right)=$ __________.

答: 所求极限为 $\frac{1}{3}$.

解: 由 Taylor 展式得

$$\frac{1}{(\sin x)^2}-\frac{1}{\sin(x^2)}=\frac{\sin(x^2)-(\sin x)^2}{(\sin x)^2\sin(x^2)}=\frac{x^2-\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^2+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}$$

$$=\frac{x^2-x^2+\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}\to\frac{1}{3}.$$

5. 极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

答: 所求极限为 1.

解: 记

$$a_n=\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}},$$

则

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}}\le a_n\le\frac{n}{n+\sqrt{1}}.$$

由于上述不等式左端和右端均有极限, 且极限均为 1. 故根据三明治定理(即挤夹原理)知极限 $\lim_{n\to+\infty}a_n=1$.

6. 假设当 $x \to 0$ 时, 函数 $\sqrt{1+x}-1$ 与函数 $\frac{k\ln(1+x)}{1+x}$ 是等价无穷小, 则 $k=$ __________.

答: $k=\frac{1}{2}$.
解: 由于
$$\sqrt{1+x}-1=\frac{1}{2}x+o(x), \quad \frac{k\ln(1+x)}{1+x}=kx+o(x),$$
且这两个函数是等价无穷小, 故 $k=\frac{1}{2}$.

7. 假设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\frac{x}{4})}{x}=\frac{3}{4}$, 则 $f'(0)=$ __________.

答: $f'(0)=1$.
解: 由假设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 故
$$\frac{f(x)-f(\frac{x}{4})}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x}-\frac{f(\frac{x}{4})-f(0)}{4\cdot\frac{x}{4}}\to f'(0)-\frac{1}{4}f'(0)=\frac{3}{4}f'(0).$$
由另一假设 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\frac{x}{4})}{x}=\frac{3}{4}$ 知 $\frac{3}{4}=\frac{3}{4}f'(0)$. 因此 $f'(0)=1$.

8. 设 $x=g(y)$ 是函数 $y=x\tan(x-2)$ 在点 $x=2$ 附近的反函数, 则 $g(y)$ 在点 $y=0$ 处的微分为 $dg\big|_{y=0}=$ __________.

答: $dg\big|_{y=0}=\frac{1}{2}dy$.
解: 对函数 $f(x)=x\tan(x-2)$ 求导得
$$f'(x)=\tan(x-2)+\frac{x}{\cos^2(x-2)}.$$
因此 $f'(2)=2$. 根据反函数导数定理得反函数 $x=g(y)$ 在点 $y=0$ 处的导数为
$$g'(0)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{2}.$$
故所求微分为 $dg\big|_{y=0}=g'(0)dy=\frac{1}{2}dy$.

9. 设 $y=f(x)$ 是由参数方程 $x=t+t^3$, $y=t+t^2$ 所确定的可微函数, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,y)=(2,2)$ 处切线的斜率为 __________.

答: 所求切线的斜率为 $\frac{3}{4}$.

解: 曲线 $y = f(x)$ 在任意点 $\big(x(t), y(t)\big) = (t + t^3, t + t^2)$ 处的斜率为

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1 + 2t}{1 + 3t^2}.$$

曲线 $y = f(x)$ 上的 $(x, y) = (2, 2)$ 所对应的参数为 $t = 1$. 因此曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, y) = (2, 2)$ 处切线的斜率为 $f'(2) = \frac{3}{4}$.

10. 函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 2}$ 在点 $x = 1$ 处带 Peano 余项 $o\big((x-1)^3\big)$ 的 Taylor 展式为 $f(x) =$ __________.

答: 所求 Taylor 展式为 $f(x) = 1 + (x-1) - (x-1)^2 - (x-1)^3 + o\big((x-1)^3\big)$.

解:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x^2 - 2x + 2} = \frac{(x-1) + 1}{1 + (x-1)^2} = \frac{x-1}{1 + (x-1)^2} + \frac{1}{1 + (x-1)^2} \\ &= (x-1)\Big[1 - (x-1)^2\Big] + \Big[1 - (x-1)^2\Big] + o\big((x-1)^3\big) \\ &= 1 + (x-1) - (x-1)^2 - (x-1)^3 + o\big((x-1)^3\big). \end{aligned}$$

二. 解答题

11. 假设当 $x \to 0$ 时, 函数 $f(x) = e^x + A + B\sin x$ 是二阶无穷小量, 求常数 A 和 B, 并计算极限 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

解: 对函数 $f(x) = e^x + A + B\sin x$ 求导得 $f'(x) = e^x + B\cos x$. 由假设当 $x \to 0$ 时, $f(x)$ 是二阶无穷小量, 故 $f(0) = 0$ 且 $f'(0) = 0$. 于是

$$f(0) = 1 + A = 0, \quad f'(0) = 1 + B = 0.$$

由此得 $A = -1$, $B = -1$. 故 $f(x) = e^x - 1 - \sin x$. 此时 $f(x)$ 带 Peano 余项 $o(x^2)$ 的 Maclaurin 展开为

$$f(x) = e^x - 1 - \sin x = x + \frac{1}{2}x^2 - x + o(x^2) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

由此得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

解答完毕.

12. 试确定常数 a 和 b, 使得函数

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\geq 0,\\ \frac{x^2+ax+b}{1+x}, & x<0,\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处可导.

解: (i) 函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左右极限分别为

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+ax+b}{1+x}=b,\quad f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\cos x=1.$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故 $f(0^-)=f(0)=f(0^+)$. 由此得 $b=1$.

(ii) 函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左右导数分别为

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^2+ax+1}{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x+a-1)}{x(1+x)}=a-1.$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{x}=0.$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 故 $f'_-(0)=f'_+(0)$. 由此得 $a-1=0$, 即 $a=1$. 故所求常数为 $a=1$, $b=1$. 解答完毕.

13. 设

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

问函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续, 并说明理由.

解: 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 理由如下. 依定义 $f(0)=0$. 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 当 $|x|<\delta$ 时, 无论 x 是有理数, 还是无理数,

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)|\leq|\sin x|\leq|x|<\delta=\varepsilon.$$

这说明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续. 解答完毕.

14. 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{4n}\right).$$

解: 回忆下述和式(调和级数部分和)

$$H_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

有一个渐近表达式 $H_n=\ln n+\gamma+\varepsilon_n$, 其中 $\gamma\simeq 0.577$ 称为 Euler 常数, 数列 $\{\varepsilon_n\}$ 是一个无穷小量, 即 $\varepsilon_n\to 0$. 记

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{4n},$$

则

$$a_n=H_{4n}-H_n=\Big(\ln(4n)+\gamma+\varepsilon_{4n}\Big)-\Big(\ln n+\gamma+\varepsilon_n\Big)=\ln 4+\varepsilon_{4n}-\varepsilon_n\to\ln 4.$$

故所求极限为 $\lim_{n\to+\infty}a_n=\ln 4$. 解答完毕.

15. 设 $0<x_1<1$, 定义 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$, $\forall n\geq 1$. (i) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $x_n\to 0$. (ii) 讨论数列 $\{nx_n\}$ 的收敛性, 并说明理由; 当 $\{nx_n\}$ 收敛时, 求极限 $\lim_{n\to+\infty}nx_n$.

解: (i) 先证 $x_n\in(0,1)$, $\forall n\geq 1$. 由假设 $x_1\in(0,1)$. 假设 $x_n\in(0,1)$, 则 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$ $\in(0,1)$. 因此 $x_n\in(0,1)$, $\forall n\geq 1$. 再证数列 $\{x_n\}$ 严格单调下降, 且有极限零. 这是因为 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)=x_n-x_n^2<x_n$, $\forall n\geq 1$, 且序列 $\{x_n\}$ 有下界零. 故数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $x_n\to x_*$. 于关系式 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$ 中, 令 $n\to+\infty$ 得 $x_*=x_*-x_*^2$. 故 $x_*=0$.
(ii) 数列 $\{nx_n\}$ 收敛. 我们用 Stolz 定理来求数列 $\{nx_n\}$ 的极限. 将一般项 nx_n 写作 $nx_n=\frac{n}{\frac{1}{x_n}}$. 考虑

$$\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\frac{1}{\frac{x_n-x_{n+1}}{x_{n+1}x_n}}=\frac{x_{n+1}x_n}{x_n-x_{n+1}}=\frac{x_{n+1}x_n}{x_n^2}=\frac{x_n^2(1-x_n)}{x_n^2}=1-x_n\to 1.$$

因此 $nx_n \to 1$, $n \to +\infty$. 解答完毕.

16. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可导. 如果存在一点 $c \in (a,b)$, 使得 $\big[f(c)-f(a)\big]\big[f(b)-f(c)\big] < 0$, 证明存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

证法一. 由条件 $\big[f(c)-f(a)\big]\big[f(b)-f(c)\big] < 0$ 可知 $f(c)-f(a)$ 与 $f(b)-f(c)$ 异号, 即 $f(a)-f(c)$ 与 $f(b)-f(c)$ 同号.

情形一: $f(a)-f(c)$ 与 $f(b)-f(c)$ 都大于零, 此即 $f(a)$ 和 $f(b)$ 均大于 $f(c)$. 此时 $f(a)$ 和 $f(b)$ 均不可能是连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最小值. 因此 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最小值点 $\xi \in (a,b)$. 由 Fermat 定理知 $f'(\xi)=0$.

情形二: $f(a)-f(c)$ 与 $f(b)-f(c)$ 都小于零, 此即 $f(a)$ 和 $f(b)$ 均小于 $f(c)$. 此时 $f(a)$ 和 $f(b)$ 均不可能是连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值. 因此 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值点 $\xi \in (a,b)$. 由 Fermat 定理知 $f'(\eta)=0$. 命题得证.

证法二: 对函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上分别应用 Lagrange 中值定理得

$$f(c)-f(a)=f'(\xi_1)(c-a), \quad f(b)-f(c)=f'(\xi_2)(b-c),$$

其中 $\xi_1 \in (a,c)$, $\xi_2 \in (c,b)$. 由假设 $\big[f(c)-f(a)\big]\big[f(b)-f(c)\big] < 0$ 知

$$f'(\xi_1)(c-a)f'(\xi_2)(b-c) < 0, \quad \text{即} \quad f'(\xi_1)f'(\xi_2) < 0.$$

这说明 $f'(\xi_1)$ 和 $f'(\xi_2)$ 异号. 根据 Darboux 定理知存在 $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$. 证毕.

17. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续. 假设极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在(有限), 证明 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上或者有最大值, 或者有最小值.

证法一: 记 $A=\lim_{x\to+\infty} f(x)$. 如果 $f(x)$ 是常数函数, 则 $f(x)\equiv A$, 则 A 就是 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上的最大值(也是最小值). 命题得证. 假设 $f(x)$ 不是常数函数, 则存在点 $x_0 \in [a,+\infty)$, 使得 $f(x_0)\neq A$. 不妨设 $f(x_0)>A$. 我们来证 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上存

在最大值. 由假设 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$ 可知, 对于 $f(x_0)>A$, 存在充分大的 $L>a$ (可取 $L>x_0$), 使得对任意 $x>L$ 时, $f(x)<f(x_0)$. 根据连续函数最值性定理知, $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,L]$ 上存在最大值 M. 由于 $M\geq f(x_0)>f(x), \forall x>L$, 故 M 也是 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上的最大值. 证毕.

证法二: 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上是常数函数, 则结论显然成立. 以下设 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上不是常数函数. 作变换 $x=\tan t$, 记 $t_0=\arctan a$, 则变换 $x=\tan t$ 将区间 $[t_0,\frac{\pi}{2})$ 变换到区间 $[a,+\infty)$. 再记 $g(t)=f(\tan t)$, $t\in[t_0,\frac{\pi}{2})$, 则 $g(t)$ 在 $[t_0,\frac{\pi}{2})$ 上连续. 由假设极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在(有限), 记作 A, 故极限

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} g(t)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

定义 $g(\frac{\pi}{2})=A$, 则 $g(t)$ 就扩充为闭区间 $[t_0,\frac{\pi}{2}]$ 上的连续函数. 根据闭区间上连续函数的最值性定理知, 存在 $\xi,\eta\in[t_0,\frac{\pi}{2}]$, 使得

$$g(\xi)=\min\left\{g(t),t\in\left[t_0,\frac{\pi}{2}\right]\right\},\quad g(\eta)=\max\left\{g(t),t\in\left[t_0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

由于 $f(x)$ 不是常数函数, 故 $g(t)$ 也不是常数函数. 因此 $g(\eta)>g(\xi)$. 于是两个最值点 ξ 和 η 的其中之一, 比方说 $\xi\neq\frac{\pi}{2}$. 这样 $f(x)$ 就在 $x_0=\tan\xi$ 处取得最小值. 命题得证.