**第 10 次作业 （提交截止时间：5 月 8 日上午 9:50）**

1. （简单随机抽样）设总体的大小为$N$，总体均值和方差分别为$\mu,\sigma^2$， $X_i$（$i=1,\cdots,n$）为无放回抽取的简单随机样本，$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ .

（1） *证明：$E(\hat{\sigma}^2)=\sigma^2\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{N}{N-1}$.

（2） 给出$Var(\overline{X})$的一个无偏估计.

2. 设$X$来自 Poisson 总体$P(\lambda)$的一个样本.

（1） **证明：$g(\lambda)=e^{-2\lambda}$的唯一无偏估计为$\hat{\theta}(X)=\begin{cases}1, & 当X为偶数\\ -1, & 当X为奇数\end{cases}$.

（2） 上述估计是否合理？如不合理，请尝试给出一个合理的估计.

3. 设随机样本$X_i$（$i=1,\cdots,n$）来自总体$U(0,\theta)$.

（1） 证明：$\hat{\theta}_1=\max(X_1,\cdots,X_n)+\min(X_1,\cdots,X_n)$是$\theta$的无偏估计.

（2） 证明：可以适当选择常数$c_n$使得$\hat{\theta}_2=c_n\min(X_1,\cdots,X_n)$是$\theta$的无偏估计.

（3） **比较四个无偏估计$\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$，$\hat{\theta}_3=2\overline{X}$，$\hat{\theta}_4=\frac{n+1}{n}\max(X_1,\cdots,X_n)$的方差大小.

4. 设随机样本$X_i$（$i=1,\cdots,n$）来自某一个均值为$\theta$且方差有限的总体.

（1） 设$c_1,\cdots,c_n$为常数，证明：$\sum_{i=1}^{n}c_iX_i$是$\theta$的无偏估计当且仅当$\sum_{i=1}^{n}c_i=1$.

（2）　在上述形式的估计类中，只有在$c_1=\cdots=c_n$（$=\dfrac{1}{n}$）时方差达到最小.

5. **设随机样本$X_i$（$i=1,\cdots,n$）来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，$m_2$和$S^2$可以作为$\sigma^2$的估计，试比较两个估计的均方误差.

6. 设随机样本$X_i$（$i=1,\cdots,4$）来自正态总体$N(0,4)$，令$Y=a\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$，这里$a$为常数，已知$Y$服从$t$分布，求$a$的值以及$t$分布的自由度.

7. 有一大批糖果，现从中随机取 16 袋称得重量（克）为

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 506 | 508 | 499 | 503 | 504 | 510 | 497 | 512 |
| 514 | 505 | 493 | 496 | 506 | 502 | 509 | 496 |

假设袋装糖果重量服从正态分布，求总体均值的 95%置信的区间估计. 如果用这 16 袋样品的平均重量作为总体均值的估计，误差的范围为多少？这个范围是在什么意义下？

8. 从一大批灯泡中随机地取 5 只作寿命试验，测得寿命（单位：小时）为

1050　1100　1120　1250　1280

假设灯泡寿命服从正态分布，求这批灯泡寿命平均值 95%置信的单侧置信下限（即求$\hat{\mu}(X_1,\cdots,X_n)$使得$P(\mu>\hat{\mu})\ge 0.95$）.

9. *为提高某一化学生产过程的得率，试图采用一种新的催化剂. 为慎重起见，先进行试验. 采用原催化剂 20 次试验的得率均值为$91.73$，样本方差为$3.89$；采用新催化剂 30 次试验的得率均值为$93.75$，样本方差为$4.02$. 假设两总体都服从正态分布，方差相等，且两样本独立.
（1）　求两总体均值差的 95%置信的区间估计.
（2）　两种催化剂有显著差别吗？请尝试说明你的理由.

10. *设随机样本$X_i$（$i=1,\cdots,n$）来自总体$U(0,\theta)$. 证明：对于任意给定常数$0<\alpha<1$，可以找到常数$c_n$，使$(\max\{X_1,\cdots,X_n\}, c_n\max\{X_1,\cdots,X_n\})$为$\theta$的一个$(1-\alpha)$置信区间.

11. （计算机实验）（自助法 Bootstrap）设随机样本$X_i$（$i=1,\cdots,n$）来自正态

总体 $N(\mu,1)$，$\theta=e^{\mu}$，考虑 $\theta$ 的估计 $\hat{\theta}=T(X_1,\cdots,X_n)=\exp(\bar{X})$.

（1） 创建一个包含 $n$ 个观测的数据集，数据记为 $x_1,\cdots,x_n$（取 $\mu=5$，$n=100$）.（数据所确定的经验分布记为 $F_n(x)$）

（2） 从（1）中数据集中有放回地抽取 $n=100$ 个观测，记为 $x_1^*,\cdots,x_n^*$.（等同于从分布 $F_n(x)$ 中抽取容量依旧为 $n$ 的随机样本）

（3） 计算 $\hat{\theta}^*=T(x_1^*,\cdots,x_n^*)$.

（4） 重复步骤（2）和（3）$m$ 次，得到 $\hat{\theta}_1^*,\cdots,\hat{\theta}_m^*$.（取 $m=1000$）

（5） 画出 $\hat{\theta}_1^*,\cdots,\hat{\theta}_m^*$ 的直方图，并与 $\hat{\theta}$ 的分布相比较，你能得到什么结论？

（6） 令 $V_{boot}=\frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m}\left(\hat{\theta}_r^*-\frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m}\hat{\theta}_r^*\right)^2$，求 $V_{boot}$. 是否可以用 $V_{boot}$ 来近似 $Var(\hat{\theta})$？