第三章基础题

3.1

1. 定义 $G(x)$ 为

$$G(x)=0^3x^0+1^3x+2^3x^2+3^3x^3+\cdots+n^3x^n+\cdots=x+2^3x^2+3^3x^3+\cdots+n^3x^n+\cdots \tag{1}$$

我们知道

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n \tag{2}$$

等式左右两边同时求导

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots \tag{3}$$

左右同乘 x，再次求导

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}=1+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}+\cdots \tag{4}$$

重复以上过程

$$\frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}=1+2^3x+3^3x^2+\cdots+n^3x^{n-1}\cdots \tag{5}$$

最后左右同乘 x，得

$$G(x)=\frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}=x+2^3x^2+\cdots+n^3x^n+\cdots \tag{6}$$

3.2

2. 令

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!}x^n \tag{7}$$

注意到 $(n+3)(n+2)(n+1)$ 正好是 x^{n+3} 三次求导的形式，于是考虑两边做三次积分

$$C(x)=\iiint G(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}(x^3+x^4+\cdots+x^{n+3}+\cdots) \tag{8}$$

由 $1/(1-x)$ 的泰勒展开，得到

$$C(x)=\frac{x^3}{6(1-x)} \tag{9}$$

因此

$$G(x)=(C(x))'''=\frac{1}{(1-x)^4} \tag{10}$$

3.3

Solution 3.3 由于 $a_n = \sum_{k=1}^{n+1} k^3$，则：

$$A(x) = 1^3 + \left(1^3 + 2^3\right) x + \left(1^3 + 2^3 + 3^3\right) x^2 + \cdots$$
$$xA(x) = 1^3 x + \left(1^3 + 2^3\right) x^2 + \left(1^3 + 2^3 + 3^3\right) x^3 + \cdots$$

两边分别相减，得：

$$(1-x)\, A(x) = 1^3 + 2^3 x + 3^3 x^2 + \cdots$$

所以：

$$x(1-x)A(x) = 1^3 x + 2^3 x^2 + 3^3 x^3 + \cdots = \frac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^4}$$

得：

$$A(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(1-x)^5}$$

3.4

4. 定义 $B(x)$ 为

$$B(x) = a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + \cdots + (a_{n+1} - a_n)x^{n+1} + \cdots \tag{15}$$

$$B(x) + xA(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A(x) \tag{16}$$

因此

$$B(x) = (1-x)A(x) = \frac{4-3x}{1+x-x^3} \tag{17}$$