

## 组合数学 2018 年秋期末考试

请在试卷和答题纸上写上姓名，学号以及 email 和手机号码  
请详细写出解答过程，复杂数值不需要计算出来，列出计算式子即可

院系： 姓名： 学号： 手机：

**1、绝地求生。**一局绝地求生游戏中有 100 位玩家，共分为 25 组，每组 4 人进行游戏。当一位玩家阵亡后，他的其他队友还可以继续战斗，当一队四位玩家全部阵亡之后这支队伍就遭到了淘汰。个人排序和队伍排序均按照遭到淘汰的顺序逆序产生。存活到最后的队伍获胜，会在屏幕上显示“组合数学，期末满分！”，获胜队伍仍存活玩家的个人排序随机产生。

- (1) 将 100 位玩家随机分成 25 组的分组方式有多少种？25 组之间不排序。(5 分)
- (2) 一局比赛完成后得到一个队伍排序，请问符合条件的可能的个人排序有多少种？(5 分)
- (3) 如果按照每组 4 人共消灭的玩家人数计分，请证明必然存在有三组分数一样。(5 分)

**2、铺砖。**用  $1*1$  的方砖， $2*2$  的方砖，两个直角边都为 2 的直角三角形砖，给  $3*n$  的路铺路面。

- (1) 求所有铺路的方案数。(16 分)
- (2) 求  $2*2$  的方砖为偶数的方案数。(12 分)

### 3、千人考试

(1) 1000 个学生参加考试，考试有 A、B 和 C 共 3 道题，考试结果如下：120 个学生 3 道题都做对了，201 个学生做对 A 和 B，160 个学生做对 A 和 C，208 个学生做对 B 和 C，做对 A 的有 248 个学生，做对 B 的有 356 个学生，有 16 个学生一道也没有做对。试求做对了 C 的学生有多少个？请算出具体数值。(8 分)

(2) 如果把所有学生放在正 1000 边形的 1000 个顶点，1000 个顶点之间的构造完全图，巡考教师按 Hamilton 回路进行巡考，请证明任意的一条 Hamilton 回路都存在两条平行的边。(解释：Hamilton 回路是经过所有顶点且每个顶点只经过一次的闭合回路。)(8 分)

**4、平面展开。**一个正  $N$  面体的平面展开图由如下条件定义：

- (i) 平面展开图由相连的  $N$  个面构成，面的形状与多面体相同
- (ii) 每个面都与其他的面通过边相连接
- (iii) 能够在空间中恰好拼接成正  $N$  面体，平面图的上侧面为多面体的外侧面

注：经过旋转完全重合的平面展开图等价，但镜像后平面图上下侧面翻转，不再等价。

- (1) 请找出正四面体的全部三种平面展开图。(5 分)
- (2) 请以棱为对象写出正四面体的转动群。(4 分)
- (3) 请通过 Polya 定理验证正四面体的平面展开图确实只有三种。(6 分)
- (4) 请通过 Ploya 定理计算正六面体的平面展开图的数量。(8 分)

**5、请用单纯形法求解以下线性规划。(18 分)**

$$\text{Min} \quad z = 2x_1 + x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_2 + 3x_3 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 1 \end{cases}$$