2020 级微积分 A1 期中考试

mathsdream 整理版

2020.11.13

说明

题目解析见后。

点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：

`https://github.com/mathsdream/THU-math-source`。

一、填空题（每个空 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}=$ __________。

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})=$ __________。

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)\ln(1+x)\right\}=$ __________。

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=$ __________。

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x^2), & x\le 0\\ a\sin x+2x, & x>0\end{cases}$ 可微，则 $a=$__________。

6. 设 $y=e^x\ln x$，则 $dy=$__________。

7. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，则函数 $f(x)$ 的间断点为 __________。

8. 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$，则 $f^{(4)}(0)=$ __________。

9. 曲线 $\begin{cases}x=e^t\sin 2t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 在 $t_0=0$ 对应的点处的切线方程为 __________。

10. 设 $f(x)=\left(\dfrac{(x+1)(2x+1)^2}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$，则 $f'(0)=$ __________。

二、解答题

11.（5 分）设函数 $f:(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\to\mathbb{R}$ 在 $x=1$ 点连续，而函数 $g(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}$ 在 $(\frac{1}{2},1)\cup(1,\frac{3}{2})$ 上有界，求 $f(1)$。

12.（7 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t+e^t \\ y=\sin t \end{cases}$ 确定, 求函数 $y=y(x)$ 在 $x=1$ 处的带有 Peano 余项 $o((x-1)^2)$ $(x\to 1)$ 的 Taylor 公式。

13.（8 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$。

14.（9 分）求函数 $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$, $x\in[-1,3]$ 的最大值和最小值。

15.（7 分）设参数 $a>0$，讨论曲线 $y=a^x$ 与直线 $y=x$ 的交点个数。

16.（20 分）设 $f(x)=4\arctan x-2x+1$, 讨论

(1) 函数 $f(x)$ 的单调性, 极值点与极值;

(2) 曲线 $y=f(x)$ 的凸性, 拐点, 渐近线, 并画出曲线 $y=f(x)$ 的草图。

17.（8 分）当 $0<x<1$ 时, 证明不等式 $\dfrac{\sqrt{x}\ln x}{x-1}<1$。

18.（6 分）设 $x_1<2$, $x_{n+1}=x_n+\ln(2-x_n)$, $n\geq 1$。讨论数列 $\{x_n\}$ 的收敛性。若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

三、附加题（5 分）

设两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A\in\mathbb{R}$。我们称 $\{a_n\}$ 比 $\{b_n\}$ 更快收敛, 如果当 $n\to+\infty$ 时, $a_n-A=o(b_n-A)$。

(1) 对于不同的参数 $\lambda\in\mathbb{R}$, 数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\lambda}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 e 的速度是否相同？当 λ 取什么数时收敛速度最快？

(2) 记 $a_n=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$，已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e$。比较两个数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\lambda}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}$ 收敛到 e 的速度。

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

一、填空题解析

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}=2$。
   解析：
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+o(x))(1+x+o(x))-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x+o(x))-1}{x}\\&=2\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})=0$。
   解析：
$$\begin{aligned}\left|\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n}\right|&=\left|2\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\right|\\&\le 2\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\\&=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0\end{aligned}$$
   由夹逼准则，可得原极限为 0。

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)\ln(1+x)\right\}=\dfrac{3}{2}$。
   解析：
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)\right\}&=\lim_{x\to 0}\frac{x-(1-x)\ln(1+x)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x-(1-x)(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$。
   解析：底数和指数都含有变量的式子，先取对数：
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$
   所以 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$。

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x^2), & x\le 0\\ a\sin x+2x, & x>0\end{cases}$ 可微, 则 $a=2$。

解析：由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微，所以要求 $f'(0^-)=f'(0^+)$。

$$f'(0^-)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=0$$
$$f'(0^+)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{a\sin x+2x}{x}=a+2$$

由可微性条件 $f'(0^-)=f'(0^+)$ 可得 $0=a+2$，即 $a=-2$。

6. 设 $y=e^x\ln x$, 则 $dy=e^x\ln x dx+e^x dx=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)dx$。

   解析：
   $$\frac{dy}{dx}=e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}$$
   所以 $dy=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)dx$。

7. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$, 则函数 $f(x)$ 的间断点为 $x=1$。

   解析：当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$，所以 $f(x)=1+x$；

   当 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$，所以 $f(x)=0$；

   当 $x=1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1}{1+1^{2n}}=1$。

   当 $x=-1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-1}{1+(-1)^{2n}}=0$。

   综上，可以发现 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，所以间断点为 $x=1$。

8. 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$, 则 $f^{(4)}(0)=0$。

   解析： $f(x)$ 是一个奇函数，奇函数的偶数阶导仍然是奇函数，所以 $f^{(4)}(0)=0$。

   注：奇函数求导变偶函数，偶函数求导变奇函数。

9. 曲线 $\begin{cases}x=e^t\sin 2t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 在 $t_0=0$ 对应的点处的切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+1$。

   解析：首先计算得到 $t_0=0$ 对应的点的坐标为 $(0,1)$。为求切线方程，还需要切线斜率，即 $\dfrac{dy}{dx}$。
   $$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t(-\sin t+\cos t)}{e^t(\sin 2t+2\cos 2t)}\\&=\frac{-\sin t+\cos t}{\sin 2t+2\cos 2t}\\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}&=\frac{-\sin 0+\cos 0}{\sin 0+2\cos 0}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$
   所以切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+1$。

10. 设 $f(x)=\left(\dfrac{(x+1)(2x+1)^2}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$, 则 $f'(0)=2$。

解析：使用对数求导法：

$$\begin{aligned}
\ln f(x) &= \frac{1}{3}\left(\ln(x+1)+2\ln(2x+1)-\ln(1-x)\right)\\
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{4}{2x+1}+\frac{1}{1-x}\right)\\
f'(x) &= f(x)\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{4}{2x+1}+\frac{1}{1-x}\right)\\
f'(0) &= f(0)\cdot\frac{1}{3}\left(1+4+1\right)=2
\end{aligned}$$

二、解答题解析

11.（5 分）设函数 $f:(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\to\mathbb{R}$ 在 $x=1$ 点连续，而函数 $g(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}$ 在 $(\frac{1}{2},1)\cup(1,\frac{3}{2})$ 上有界，求 $f(1)$。

解析：由题意，得到：

$$g(x)(x-1)=f(x)-2x-\frac{x-1}{\ln x}$$

由于 $g(x)$ 有界，所以 $\lim\limits_{x\to1}g(x)(x-1)=0$，因此对上式两边取极限：

$$\lim_{x\to1}g(x)(x-1)=\lim_{x\to1}\left(f(x)-2x-\frac{x-1}{\ln x}\right)$$

$$0=\lim_{x\to1}f(x)-2-1$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=3$$

由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，所以 $f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=3$。

12.（7 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+e^t\\y=\sin t\end{cases}$ 确定, 求函数 $y=y(x)$ 在 $x=1$ 处的带有 Peano 余项 $o((x-1)^2)$ $(x\to1)$ 的 Taylor 公式。

解析：由泰勒展开：

$$y(x)=y(1)+y'(1)(x-1)+\frac{y''(1)}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)$$

只需去求 $y(1)$, $y'(1)$ 和 $y''(1)$ 即可。

由参数方程 $x=t+e^t$，当 $x=1$ 时，$t=0$。所以

$$\begin{aligned}
y(1) &= \sin 0=0\\
y'(x) &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{1+e^t}\\
y'(1) &= \frac{1}{2}\\
y''(x) &= \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t-e^t\sin t-e^t\cos t}{(1+e^t)^3}\\
y''(1) &= \frac{-1}{8}
\end{aligned}$$

所以，$y=y(x)$ 在 $x=1$ 处的带有 Peano 余项 $o((x-1)^2)$ $(x\to1)$ 的 Taylor 公式为：

$$y(x)=\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{16}(x-1)^2+o((x-1)^2)$$

13.（8 分）求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$。

解析：（泰勒展开法）分母 $\sin^2 x$ 等价于 x^2，所以将分子两项都泰勒展开到二阶：

$$\begin{aligned}\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\ \sqrt{\cos x} &= \sqrt{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = 1-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\\ \sqrt[3]{\cos x} &= \sqrt[3]{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = 1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\end{aligned}$$

所以：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{x^2}{4}+o(x^2))-(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2))}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{12}+o(x^2)}{x^2}\\ &= -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

解析：（洛必达法）令 $u=\cos x$，则当 $x\to 0$ 时，$u\to 1$。因此原式变为：

$$\lim_{u\to 1}\frac{\sqrt{u}-\sqrt[3]{u}}{1-u^2}$$

使用洛必达法则：

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 1}\frac{\sqrt{u}-\sqrt[3]{u}}{1-u^2} &= \lim_{u\to 1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{u}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}}{-2u}\\ &= -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

解析：（代数变形法）令 $t=\sqrt[6]{\cos x}$，则当 $x\to 0$ 时，$t\to 1$。因此原式变为：

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1}\frac{t^3-t^2}{1-t^{12}} &= \lim_{t\to 1}\frac{t^2(t-1)}{(1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{11})}\\ &= \lim_{t\to 1}\frac{t^2}{-(1+t+t^2+\cdots+t^{11})}\\ &= -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

14.（9 分）求函数 $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$, $x\in[-1,3]$ 的最大值和最小值。

解析：考虑到 $\sqrt[3]{x}$ 是单调递增函数，所以只需考虑 $(x^2-2x)^2$ 的最大值和最小值，进一步只需要考虑 x^2-2x 的值域，由二次函数知识可得，x^2-2x 在区间 $[-1,3]$ 上的值域为 $[-1,3]$，因此 $(x^2-2x)^2$ 的最大值为 9，最小值为 0，所以 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt[3]{9}$，最小值为 0。

注：如果直接对原函数求导做的话，需要注意到 $x=0,2$ 处虽然不可导，但由于其两边导数符号相反，其实也是极值点。

15.（7 分）设参数 $a>0$，讨论曲线 $y=a^x$ 与直线 $y=x$ 的交点个数。

解析：令 $f(x)=a^x-x$，则 $f'(x)=a^x\ln a-1$。

当 $0<a\le 1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 单调递减，且 $f(0)=1>0$，$f(1)=a-1<0$，因此有唯一交点。

当 $a>1$ 时，令 $f'(x_0)=0$，则有 $x_0=-\frac{\ln\ln a}{\ln a}$。而当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 x_0 处有唯一极小值点，也就是最小值点。而 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，因此 $f(x)$ 的零点数取决于 $f(x_0)$ 的符号。

$$f(x_0)=a^{x_0}-x_0=\frac{1+\ln\ln a}{\ln a}$$

当 $a>1$ 时，$\ln a>0$，所以 $f(x_0)$ 的符号取决于 $1+\ln\ln a$ 的符号。

- 当 $1+\ln\ln a>0$ 时，即 $\ln a>e^{\frac{1}{e}}$，则 $f(x_0)>0$，此时没有交点。
- 当 $1+\ln\ln a=0$ 时，即 $\ln a=e^{\frac{1}{e}}$，则 $f(x_0)=0$，此时有 1 个交点。
- 当 $1+\ln\ln a<0$ 时，即 $\ln a<e^{\frac{1}{e}}$，则 $f(x_0)<0$，此时有 2 个交点。

综上，曲线 $y=a^x$ 与直线 $y=x$ 的交点个数为：

- 当 $0<a\le 1$ 时，有 1 个交点。
- 当 $1<a<e^{\frac{1}{e}}$ 时，有 2 个交点。
- 当 $a=e^{\frac{1}{e}}$ 时，有 1 个交点。
- 当 $a>e^{\frac{1}{e}}$ 时，有 0 个交点。

16.（20 分）设 $f(x)=4\arctan x-2x+1$，讨论

(1) 函数 $f(x)$ 的单调性, 极值点与极值;

(2) 曲线 $y=f(x)$ 的凸性, 拐点, 渐近线, 并画出曲线 $y=f(x)$ 的草图。

解析：

(1) 计算导数：

$$f'(x)=\frac{4}{1+x^2}-2$$

令 $f'(x)=0$，得到 $x=1,-1$。当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$；当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$。因此，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减。所以，$x=-1$ 是极小值点，极小值为 $f(-1)=3-\pi$；$x=1$ 是极大值点，极大值为 $f(1)=\pi-1$。

(2) 计算二阶导数：

$$f''(x)=-\frac{8x}{(1+x^2)^2}$$

令 $f''(x)=0$，得到 $x=0$。当 $x<0$ 时，$f''(x)>0$；当 $x>0$ 时，$f''(x)<0$。因此，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为下凸，在 $(0,+\infty)$ 上为上凸。$(0,f(0))=(0,1)$ 是拐点。

计算渐近线，显然没有竖渐近线。计算渐近线斜率：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$$

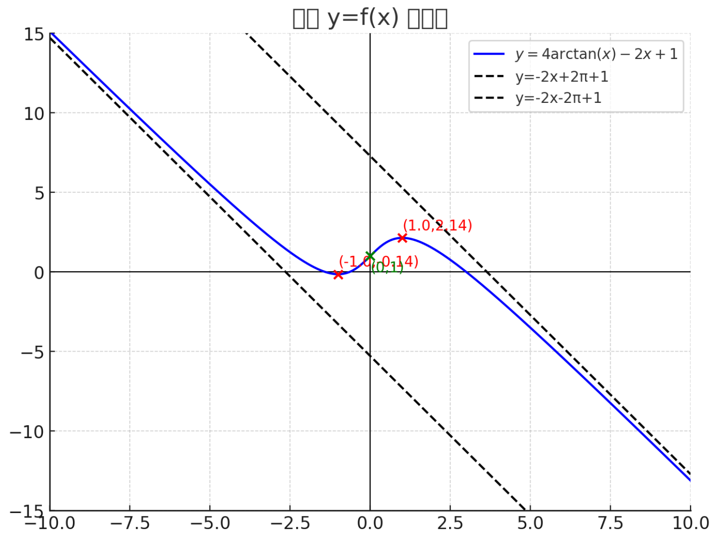
再计算渐近线截距：

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)+2x=2\pi+1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+2x=-2\pi+1$$

所以渐近线有：$y=-2x+2\pi+1$ 和 $y=-2x-2\pi+1$。

草图为：



(画出本题提到的特征即可)

17.（8 分）当 $0 < x < 1$ 时, 证明不等式 $\dfrac{\sqrt{x}\ln x}{x-1} < 1$。

解析：方便起见，我换个元（不换元也能做）：令 $t = \sqrt{x}$，则当 $0 < x < 1$ 时，$0 < t < 1$。因此原不等式变为：

$$\frac{t\ln t^2}{t^2 - 1} < 1$$

$$2t\ln t - t^2 + 1 > 0$$

令 $g(t) = 2t\ln t - t^2 + 1$，则 $g'(t) = 2\ln t + 2 - 2t = 2(\ln t - t + 1) \le 0$，所以 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，而 $g(1) = 0$，所以 $g(t) > 0$，即原不等式成立。

18.（6 分）设 $x_1 < 2$, $x_{n+1} = x_n + \ln(2 - x_n)$, $n \ge 1$。讨论数列 $\{x_n\}$ 的收敛性。若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

解析：递推数列，大概率准备证明单调有界。

首先证明数列有界。记 $f(x) = x + \ln(2 - x)$，则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{2-x}$，当 $x < 1$ 时，$f'(x) < 0$；当 $1 < x < 2$ 时，$f'(x) > 0$。因此，$f(x)$ 在 $x = 1$ 取得唯一极大值点 $f(1) = 1 + \ln 1 = 1$，所以 $x_{n+1} = f(x_n) \le f(1) = 1$，因此数列 $\{x_n\}$ 有上界。

其次证明数列单调递增。对 $n > 1$，有 $x_n \le 1$, $x_{n+1} = x_n + \ln(2 - x_n) \ge x_n$，所以数列 $\{x_n\}$ 从 $n = 2$ 开始单调递增。

综上所述，数列 $\{x_n\}$ 有界且单调递增，因此收敛。设其极限为 L，对递推关系两边取极限，得到：

$$L = L + \ln(2 - L) \Rightarrow \ln(2 - L) = 0 \Rightarrow L = 1.$$

三、附加题解析

设两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \in \mathbb{R}$。我们称 $\{a_n\}$ 比 $\{b_n\}$ 更快收敛, 如果当 $n \to +\infty$ 时, $a_n - A = o(b_n - A)$。

(1) 对于不同的参数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 数列 $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+\lambda}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 e 的速度是否相同？当 λ 取什么数时收敛速度最快？

(2) 记 $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$，已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$。比较两个数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\lambda}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}$ 收敛到 e 的速度。

解析：

(1)

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\lambda} - e &= e^{(n+\lambda)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - e \\
&= e\left(e^{(n+\lambda)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1} - 1\right) \\
&\sim e[(n+\lambda)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1] \\
&= e[(n+\lambda)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1] \\
&= e[\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{2}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)]
\end{aligned}$$

所以，当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\lambda} - e$ 和 $\frac{1}{n^2}$ 同阶，而当 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\lambda} - e$ 和 $\frac{1}{n}$ 同阶。因此，数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\lambda}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 e 的速度与参数 λ 有关，当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时收敛速度最快。

(2) 由 e^x 在 $x = 0$ 处的带拉格朗日余项的泰勒展开：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \xi \in (0, x)$$

取 $x = 1$，则有：

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}, \quad \xi \in (0, 1)$$

由此可得：

$$a_n - e = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}$$

而又有 $\frac{1}{(n+1)!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$，因此数列 $\{a_n\}$ 收敛到 e 的速度比数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\lambda}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 e 的速度快。