

2023 级微积分 A2 期末考试

mathsdream 整理版

2024.06.20

说明

题目解析见后。

点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：

<https://github.com/mathsdream/THU-math-source>。

一、填空题（每个空 3 分，共 30 分）

1. 设 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, 则 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy =$ _____.
2. 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} dx \int_x^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin y}{y} dy =$ _____.
3. 记 $\xi = (x, y, z)^T$ 为三维列向量, A 为三阶实数矩阵, 其特征值为 $2, 0, -3$, 则三维线性向量场 $A\xi$ 的散度为 $\operatorname{div} A\xi =$ _____.
4. 设曲线 C 的参数表示为 $x = 2t, y = t, z = 2 - 2t, 0 \leq t \leq 1$, 则空间第一型线积分 $\int_C xy dl =$ _____.
5. 设平面定向曲线 C^+ 为函数曲线 $y = x^3$, 起点为 $(0, 0)$, 终点为 $(1, 1)$, 则第二型线积分 $\int_{C^+} e^y dx + xe^y dy =$ _____.
6. 关于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1 + n^2}$ 的收敛性, 下述正确的结论是 _____.
A: 绝对收敛; B: 条件收敛; C: 发散.
7. 圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 被上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4 (z \geq 0)$ 和平面 $z = 0$ 所截部分的面积为 _____.
8. 幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \ln n}$ 的收敛半径为 _____.
9. 函数 $\ln(3 + x)$ 在 $x = 0$ 处展开的幂级数为 _____。(不必写出收敛区间)
10. 曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 2)$ 的面积为 _____.

二、解答题

1. (10 分) 设平面定向曲线 C^+ 为正弦曲线段 $y = \sin x$, $-\pi \leq x \leq \pi$, 起点为 $(-\pi, 0)$, 终点为 $(\pi, 0)$ 。求第二型线积分

$$J = \int_{C^+} (e^{-x^2} \sin^3 x + \sin y) dx + (x \cos y - y^3) dy.$$

2. (10 分) 计算线积分

$$\oint_{C^+} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz,$$

其中定向曲线 C^+ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $x + z = 1$ 的交线, 且从 x 轴正向朝原点方向看去, C^+ 的正向是逆时针的。

3. (10 分) 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^n$ 的 (i) 收敛半径, (ii) 收敛域, 以及 (iii) 和函数。

4. (12 分) 计算三重积分

$$J = \iiint_{\Omega} z dx dy dz,$$

其中 Ω 为两个球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 所围的有界闭区域。

5. (10 分) 设空间向量场 $\vec{F} = (x^3 - x, y^3 - y, z^3 - z)$ 。试确定一个空间有界光滑的封闭曲面 S^+ , 其外法向为正, 使得第二型面积分

$$J = \iint_{S^+} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

的值最小, 并求出这个最小值。

6. (10 分) 设 $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$ 。

(i) 求函数 $f(x)$ 以 2 为周期的 Fourier 级数;

(ii) 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和。

7. (8 分) 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n} \sin n$$

是否收敛, 并说明理由。

三、附加题 (本题完全正确才有分, 且分数不计入总分, 仅用于评判 A+)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 即级数一般项 $a_n > 0$, 再记 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 。证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 收敛。

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

一、填空题解析

1. 设 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, 则 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi}{8}$.

解析: 转换为极坐标:

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 dr d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

2. 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} dx \int_x^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{1}{2}$.

解析: 交换积分顺序后, 积分区域为 $y \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $x \in [0, y]$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin y dy = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

3. 记 $\xi = (x, y, z)^T$ 为三维列向量, A 为三阶实数矩阵, 其特征值为 $2, 0, -3$, 则三维线性向量场 $A\xi$ 的散度为 $\operatorname{div} A\xi = -1$.

解析: 设 $A = \{a_{ij}\}_{3 \times 3}$, $(P, Q, R)^T = A\xi$, 则 $P = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$, $\frac{\partial P}{\partial x} = a_{11}$, 同理有 $\frac{\partial Q}{\partial y} = a_{22}$, $\frac{\partial R}{\partial z} = a_{33}$, 所以 $\operatorname{div} A\xi = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \operatorname{tr}(A) = 2 + 0 - 3 = -1$.

4. 设曲线 C 的参数表示为 $x = 2t, y = t, z = 2 - 2t, 0 \leq t \leq 1$, 则空间第一型线积分 $\int_C xy dl =$.

解析:

$$\int_C xy dl = \int_0^1 2t \cdot t \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} dt = 6 \int_0^1 t^2 dt = 2$$

5. 设平面定向曲线 C^+ 为函数曲线 $y = x^3$, 起点为 $(0, 0)$, 终点为 $(1, 1)$, 则第二型线积分 $\int_{C^+} e^y dx + xe^y dy = e$.

解析: $e^y dx + xe^y dy$ 是一个全微分, 其等于 $dx e^y$, 所以积分等于 $xe^y \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = e$.

注: 题目强调了曲线的起点和终点, 很有可能这个积分是一个只与起点和终点有关的积分, 所以可以考虑是否是一个全微分. 硬算也是能算的:

$$\begin{aligned} \int_{C^+} e^y dx + xe^y dy &= \int_0^1 e^{x^3} dx + \int_0^1 3x^3 e^{x^3} dx \\ &= xe^{x^3} \Big|_0^1 - \int_0^1 3x^3 e^{x^3} dx + \int_0^1 3x^3 e^{x^3} dx \\ &= e \end{aligned}$$

6. 关于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1+n^2}$ 的收敛性, 下述正确的结论是 B: 条件收敛.

解析: $|a_n| = \frac{n}{1+n^2} \sim \frac{1}{n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ 发散.

由莱布尼茨判别法, $\frac{n}{1+n^2}$ 单调趋于 0, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛.

综上, 该级数条件收敛.

7. 圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 被上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ($z \geq 0$) 和平面 $z = 0$ 所截部分的面积为 8.

解析: 所求柱面的面积:

$$\int_L \sqrt{4 - x^2 - y^2} dl$$

其中: $L: x^2 + y^2 = 2x$, 其参数方程为:

$$\begin{cases} x = 1 + \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi]$$

故:

$$\begin{aligned} \int_L \sqrt{4 - x^2 - y^2} dl &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 - (1 + \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos \theta} d\theta \\ &= 8 \end{aligned}$$

注: 柱面的面积通常可转化为曲线积分来求。参见《高等微积分教程(下)》P. 180, 例 4.3.2 及其前面的公式。

8. 幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \ln n}$ 的收敛半径为 3.

解析:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n \ln n}} = \frac{1}{3}$$

所以收敛半径为 3.

9. 函数 $\ln(3+x)$ 在 $x=0$ 处展开的幂级数为 $\ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{3}\right)^n$. (不必写出收敛区间)

解析:

$$\ln(3+x) = \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{x}{3}\right) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

10. 曲面 $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 2$) 的面积为 $\frac{13}{3}\pi$.

解析: 曲面的面积:

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy$$

其中, $D: x^2 + y^2 \leq 2$, 做极坐标换元:

$$\iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} r dr = \frac{13}{3}\pi$$

二、解答题解析

1. (10 分) 设平面定向曲线 C^+ 为正弦曲线段 $y = \sin x$, $-\pi \leq x \leq \pi$, 起点为 $(-\pi, 0)$, 终点为 $(\pi, 0)$. 求第二型线积分

$$J = \int_{C^+} (e^{-x^2} \sin^3 x + \sin y) dx + (x \cos y - y^3) dy.$$

解析 (对称性): 被积函数关于原点为奇函数, 曲线关于原点对称, 由对称性, 得到积分为 0。

注: 如何判断一个积分是否具有对称性, 关键看的是是否能找到一对点, 它们附近的积分微元相等或相反。对于二型曲面积分来说, 积分微元为 $(e^{-x^2} \sin^3 x + \sin y) dx + (x \cos y - y^3) dy = (e^{-x^2} \sin^3 x + \sin y, x \cos y - y^3) \cdot (dx, dy)$, 对于曲线上的两点 (x, y) 和 $(-x, -y)$, 两点处的 $(e^{-x^2} \sin^3 x + \sin y, x \cos y - y^3)$ 相反, (dx, dy) (代表曲线在这点沿曲线方向的切线方向) 相同, 所以两点处的积分微元抵消, 总积分为 0。

此外, 注意到此题又是一个给曲线起点终点的题目, 更常规的做法是看看这个微分是不是全微分。

解析 (常规): $\frac{\partial}{\partial x}(x \cos y - y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(e^{-x^2} \sin^3 x + \sin y) = 0$, 所以被积函数是一个全微分, 积分与路径无关, 所以可以转而去计算 $(-\pi, 0)$ 到 $(\pi, 0)$ 的直线上的积分, 即:

$$\int_{(-\pi, 0) \rightarrow (\pi, 0)} (e^{-x^2} \sin^3 x + \sin y) dx + (x \cos y - y^3) dy = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x^2} \sin^3 x dx = 0$$

2. (10 分) 计算线积分

$$\oint_{C^+} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz,$$

其中定向曲线 C^+ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $x + z = 1$ 的交线, 且从 x 轴正向朝原点方向看去, C^+ 的正向是逆时针的。

解析 (Stokes 公式): 由 Stokes 公式:

$$\begin{aligned} \oint_{C^+} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz &= \iint_{S^+} -2dy \wedge dz - 2dz \wedge dx - 2dx \wedge dy \\ &= \iint_{S^+} (2\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} - 2) dx \wedge dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} -4 dx dy \\ &= -4\pi \end{aligned}$$

其中 S^+ 为 $x + z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$ 的上侧。

注: 有些被积函数形式, 是很明显的可能用 Green、Gauss、Stokes 公式的, 比如这题。这类不多, 平时注意一下积累即可。

Stokes 公式个人记不太熟, 怕出错, 所以也可以选择直接计算, 其实也很简单。

解析 (直接计算): 由题意, C^+ 是 $x^2 + y^2 = 1$ 与 $x + z = 1$ 的交线, 所以 C^+ 的参数方程为:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1 - \cos t \end{cases}$$

方向为 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$, 所以:

$$\begin{aligned} &\oint_{C^+} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin t - (1 - \cos t))(-\sin t) + (1 - \cos t - \cos t) \cos t + (\cos t - \sin t) \sin t dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t - 2) dt = -4\pi \end{aligned}$$

注：此事在《高等微积分教程（下）》P.190 例 4.4.2 中亦有记载。当然这题的曲线参数方程要比书上的简单易得。

3. (10 分) 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^n$ 的 (i) 收敛半径, (ii) 收敛域, 以及 (iii) 和函数。

解析:

(i) 由根值判别法: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n-1} = 1$, 所以收敛半径为 1。

(ii) 在 $x = \pm 1$ 处, 级数项不趋于 0, 级数发散。所以收敛域是 $(-1, 1)$ 。

(iii) 令 $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^n$, 当 $x \neq 0$ 时, 有:

$$\begin{aligned} \frac{S(x)}{x^2} &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\ \int_0^x \frac{S(t)}{t^2} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} \\ \frac{S(x)}{x^2} &= \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \\ S(x) &= \frac{x^2}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

而 $S(0) = 0$, 符合此式, 所以 $S(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}$ 。

4. (12 分) 计算三重积分

$$J = \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz,$$

其中 Ω 为两个球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 所围的有界闭区域。

解析: $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ 是一个球心为 $(0, 0, 2)$, 半径为 2 的球面, $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 是一个球心为 $(0, 0, 1)$, 半径为 1 的球面。所以后者在前者围成的球内, 本题的 Ω 即为两球面之间的部分, 即 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z\}$ 。使用球坐标换元:

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz, \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r \cos\theta \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= 20\pi \end{aligned}$$

5. (10 分) 设空间向量场 $\vec{F} = (x^3 - x, y^3 - y, z^3 - z)$ 。试确定一个空间有界光滑的封闭曲面 S^+ , 其外法向为正, 使得第二型面积分

$$J = \iint_{S^+} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

的值最小, 并求出这个最小值。

解析: 封闭曲面, 准备上 Gauss 公式。设 S^+ 围成的空间区域为 Ω , 则:

$$\iint_{S^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3) \, dx \, dy \, dz$$

如果需要该三重积分尽可能小, 则 Ω 应尽可能多包含 $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3$ 为负的区域, 即取 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, S^+ 为其外表面时, 积分值最小。此时计算可得, 最小值为:

$$\iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3) \, dx \, dy \, dz = -\frac{8}{5}\pi$$

6. (10 分) 设 $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$ 。

(i) 求函数 $f(x)$ 以 2 为周期的 Fourier 级数;

(ii) 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和。

解析:

(i) $f(x)$ 为偶函数, $b_n = 0$ 。

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \\ a_n &= \int_{-1}^1 x^2 \cos n\pi x dx \\ &= (-1)^n \frac{4}{(n\pi)^2}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

所以函数 $f(x)$ 以 2 为周期的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x$$

(i) 注:《高等微积分教程(下)》P.302 例 7.1.5。注意不能随意将 \sim 改成 $=$ 。

(ii) 取 $x = 0$, 得:

$$0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\text{解得 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

7. (8 分) 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n} \sin n$$

是否收敛, 并说明理由。

解析: 看到 $\sin n$, 联想到 $\sin n$ 的部分和有界(《高等微积分教程(下)》P.252 例 5.3.3), 考虑使用迪利克雷判别法, 只需要证明 $a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n}$ 单调递减趋于 0。

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \frac{\frac{1}{n+1}}{n+1} \\ &= -\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \left(-\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \frac{n}{n+1}\right) < 0 \end{aligned}$$

所以 a_n 单调递减。又由 Stolz 公式:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$$

所以 a_n 单调递减趋于 0。由迪利克雷判别法, 题目级数收敛。

三、附加题解析

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 即级数一般项 $a_n > 0$, 再记 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 。证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 收敛。

解析:

“ \Rightarrow ”:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \frac{a_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 收敛到一非零有限值。由比较判敛法, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 也收敛。
“ \Leftarrow ”:

假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ 。所以对 $\forall n > 0, \exists p > 0$, 使得 $S_{n+p} > 2S_n$ 。则:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_n} \geq \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_n} > \frac{1}{2}$$

由柯西收敛准则, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散, 与题目条件矛盾, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛。