

第 11 次作业（提交截止时间：5 月 15 日上午 9:50）

1. 从一批次产品随机地取 100 个样品进行检测，发现 40 个不合格，求这批产品合格率 p 的 95% 置信的区间估计.

2. 设随机样本 X_1, \dots, X_n 来自具有概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 的

分布，其中 $\theta > 0$ 是未知参数， θ^* 为 θ 的极大似然估计量.

- (1) 当 $n = 4$ 时，一组样本观测值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}$ ，利用 Fisher 信息量和这

组观测值给出 θ^* 的标准误差的估计.

- (2) 利用 θ^* 和 (1) 中样本观测值给出 θ 的满足 95% 置信要求的一个具体置信区间.

3. *假设总体服从 $N(\mu, \sigma^2)$ ，参数 μ 已知， σ^2 未知， X_1, \dots, X_n 为其随机样本，常数 $0 < \alpha < 1$.

- (1) 求 σ 的极大似然估计 σ^* .

- (2) 利用 Fisher 信息量给出 σ^* 的标准误差的估计.

- (3) 利用 σ^* 给出 $\log \sigma$ 的 $1 - \alpha$ 置信的区间估计.

4. 为提高某一化学生产过程的得率，试图采用一种新的催化剂. 为慎重起见，先进行试验. 采用原催化剂 20 次试验的得率均值为 91.73，样本方差为 3.89；采用新催化剂 30 次试验的得率均值为 93.75，样本方差为 4.02. 假设两总体都服从正态分布，且两样本独立. 不假设两总体方差相等，求两总体均值差的 95% 置信的区间估计。（与作业 10-9 作对比）

5. 李雷和韩梅梅开始约会，但是韩梅梅在任何约会中都可能迟到，迟到时间服从区间 $[0, \theta]$ 上的均匀分布，参数 θ 的先验分布是 0 到 1 小时之间的均匀分布，假设韩梅梅在第一次约会中迟到了 x 小时，那么李雷如何利用这个信息去更新 θ 的分布？

6. 考虑课上硬币的例子，计算硬币正面朝上的概率 θ 的后验众数估计（也称最大后验估计），并给出其当 $n = 20$ ， $x = 13$ 时的具体值，所得结果在直观上是否

与极大似然的思想相符合？

7. *假设总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，参数 σ^2 已知， X_1, \dots, X_n 为其随机样本，

μ 的先验分布为 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ ， μ_0, σ_0^2 为已知常数.

(1) 求 μ 的最大后验（后验众数）估计.

(2) 求 μ 的后验均值估计.

8. 设随机变量 X 的分布列为 $P(X = k | \theta) = \theta(1 - \theta)^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)，参数 θ 的

先验分布是 $(0, 1)$ 上的均匀分布. 对 X 作三次独立观测，得到观测值分别为

$x_1 = 2$ ， $x_2 = 3$ ， $x_3 = 5$.

(1) 求 θ 的后验分布概率密度函数.

(2) 求 θ 的后验均值估计.

9. * (Bayes 区间估计) 假设总体服从 $N(\mu, \sigma^2)$ ，参数 σ^2 已知， X_1, \dots, X_n 为其随机样本， $0 < \alpha < 1$ 为常数.

(1) 假设 μ 的先验分布为 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ ， μ_0, σ_0^2 为已知常数. 求 a, b 使得在

μ 的后验分布下 $P(a < \mu < b) \geq 1 - \alpha$ ，并选取 a, b 使得区间长度最小（最大后验区间）.

(2) 令 $\sigma_0 \rightarrow \infty$ ，给出 (1) 中估计区间 (a, b) 的极限情况，将其与经典方法所求置信区间相比较，并尝试给予直观解释.

(3) 如果假设 μ 的先验分布 $f(\mu) \propto 1$ (Bayes 假设)，求 μ 的后验分布及 μ 的最大后验区间和等尾可信区间（可信度 $\geq 1 - \alpha$ ）. 将其与经典方法所求置信区间相比较，并尝试给予直观解释.

10. (计算机实验) 作业 10-11 续.

(1) 利用作业 10-11 的结果给出 $\theta = e^\mu$ 的 95% 置信的区间估计.

(2) 注意到 \bar{X} 是 μ 的极大似然估计，你还能据此给出其他建立置信区间的

方法吗？对于方法的合理性尝试进行简要说明.