第八次习题课讨论题　曲线积分、Green 公式的应用

1. 计算第二型曲线积分 $\int\limits_{L}\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 是

(1) $(x-2)^2+4(y-1)^2=1$，顺时针定向．

(2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$，顺时针定向．

(3) 从 $A(2,0)$ 到 $B(4,4)$ 的有向线段．

2. 设 $f(x,y)$ 在 $\{(x,y)|\,x^2+y^2<1\}$ 内二阶偏导连续，且满足方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{2}f(x,y)$．进一步假设 $f(0,0)=1$．求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l$，　这里 $\vec{n}$ 为圆周 ∂D_t 的单位外法向量，$D_t=\{(x,y)|\,x^2+y^2<t^2,\ t>0\}$．

3. 设函数 $f(x,y)$ 在上半平面 $D=\{(x,y)|y>0\}$ 内具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$，对任意点 $(x,y)\in D$，都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$（此即 $f(x,y)$ 是 -2 次齐次函数）。证明对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$．

4.　解答下列各题:

(1)　设 C 为闭曲线: $|x|+|y|=2$，逆时针为正向。

　计算 $\oint_C\frac{axdy-bydx}{|x|+|y|}$．

(2)　计算曲线积分 $I=\oint\limits_{L^+}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L^+ 为 $|x|+|y|=1$，逆时针为正向。

5.　证明下列各题:

(1)　设 L 是平面上光滑的简单封闭曲线，$\vec{n}$ 为 L 的外单位法向量，证明: $\oint\limits_{L}\cos\langle\vec{n},\vec{j}\rangle dl=0,$

　其中 $\langle\vec{n},\vec{j}\rangle$ 是 $\vec{n}$ 与 y 轴正向所成的角。

(2)　设 $f(x)$ 是实轴上处处为正的连续函数，D 为圆心在原点的单位开圆盘。证明:

(i) $\int\limits_{\partial D^+}xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\int\limits_{\partial D^+}-yf(x)dx+\frac{x}{f(y)}dy$；

(ii) $\int\limits_{\partial D^+}xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\ge 2\pi$．

6. 解答下列各题:

(1) 已知函数 $f(x)\in C^2(\mathbb{R})$ 满足 $f'(0)=0$，且使得微分式

$$[f(x)+y(x-f(x))]dx+f'(x)dy$$

是某个函数的全微分，求 $f(x)$ 使得 $\int_L [f(x)+y(x-f(x))]dx+f'(x)dy=\frac{\pi^2}{8}$, 其中 L 是由 $A(0,0)$ 到 $B(\frac{\pi}{2},\pi)$ 的逐段光滑曲线。

(2) 确定常数 α，使得积分 $\int_A^B (x^4+4xy^\alpha)dx+(6x^{\alpha-1}y^2-5y^4)dy$ 与路径无关，并求原函数 $\varphi(x,y)$，使得 $d\varphi=(x^4+4xy^\alpha)dx+(6x^{\alpha-1}y^2-5y^4)dy$.

(3) 证明曲线积分 $\int_\Gamma \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$，在右（或左）半平面（$x>0$ 或 $x<0$）上与积分路径无关。(注意右半平面或左半平面均为单连通区域)。并计算 $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$.

(4) 求二元函数 $Q(x,y)\in C^1(\mathbb{R}^2)$ 使得曲线积分 $\int_{L^+} 2xydx+Q(x,y)dy$ 与积分路径 L 无关，且

对 $\forall t\in\mathbb{R}$, 均有 $\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+Q(x,y)dy$.

7. 计算下列各题:

(1) 设 L 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=2x+4 \end{cases}$ 在第一卦限的部分，方向是从点 $(0,1,4)$ 到点 $(1,0,6)$，计算曲线积分 $I=\int_L ydx-(x^2+y^2+z^2)dz.$

(2) 设有向光滑曲线 L 的长度为 l， $P(x,y),\ Q(x,y)$ 在 L 上连续。

记 $M=\max\left\{\sqrt{P(x,y)^2+Q(x,y)^2}\ \middle|\ (x,y)\in L\right\}$. 求证: $\left|\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|\le Ml.$

(3) 设 $I_R=\oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}$. 证明 $\lim_{R\to+\infty} I_R=0$.

(4) 计算 $\oint_{L^+} \frac{xdy-ydx}{(ax+by)^2+(cx+ey)^2}$, $\delta=ae-bc\neq 0$. 其中 L^+ 是椭圆

$(ax+by)^2+(cx+ey)^2=1$ 的逆时针方向。

8. 设函数$P(x,y),\ Q(x,y)\in C^1(\mathbb{R}^2)$，在以任意点$(x_0,y_0)$为中心，任意正数$r$为半径的上半圆周$L$上，总有$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$. 求证：在$\mathbb{R}^2$上有

$$P(x,y)\equiv 0,\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\equiv 0.$$

9. 设$D\subseteq R^2$为有界开区域，它的边界∂D是逐段光滑闭曲线，$\vec{n}$是∂D的外单位法向量，设函数 $f(x,y)\in C^2(\overline{D})$，且 $f(x,y)$ 在 D 内为调和函数，即 $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$. 求证：

(i) $\oint\limits_{\partial D}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}dl=0$;

(ii) $\oint\limits_{\partial D} f\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}dl=\iint\limits_D\|\nabla f\|^2dxdy$;

(iii) 若在边界∂D上，$f(x,y)\equiv 0$，求证 $f(x,y)\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$.

10. 设$u(x,y)$为开区域$D\subset\mathbb{R}^2$上的调和函数，其边界∂D是光滑的封闭曲线。证明：

(1) $u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2\pi}\oint_{\partial D}(u\dfrac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}}-\ln r\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}})dl$，其中$(x_0,y_0)\in D$任意，$\mathbf{r}$为$(x_0,y_0)$到$\partial D$上的点的向量，$r=\|\mathbf{r}\|$，$\mathbf{n}$为$\partial D$的外单位法向量;

(2) $u(x_0,y_0)=\dfrac{1}{2\pi R}\oint_L u(x,y)dl$，其中$L$是以$(x_0,y_0)$为中心，$R$为半径位于$D$中的任意一个圆周。

11. 证明：若$u(x,y)$是光滑闭曲线L所围成闭区域D上的调和函数（不是常数），则$u(x,y)$必在曲线L上取到最大（小）值。

======

以下供学有余力的同学选做。

1. (利用 Green 公式证明平面面积变换公式) 回忆平面面积变换定理:

设D_0和D_1是平面上的两个有界闭区域，且$\varphi:\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$是$D_0\to D_1$的二阶连续可微双射. 则区域$D_1$的面积$S(D_1)=\iint\limits_{D_0}\left|\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$. 试利用 Green 公式来证明上述面积变换公式。