第 4 次作业（提交截止时间：3 月 20 日上午 9:50）

1. 掷 6 颗均匀骰子，求恰有两个一点出现的概率及其 Poisson 近似值（保留小数点后 4 位）.
2. 每天约有一百万人自主决定是否访问某学会网站，访问的概率为 $p=2\times10^{-6}$，求在某特定的一天中至少有 3 人访问该网站的概率及其 Poisson 近似（结果保留 4 位小数）.
3. *一只昆虫产卵概率服从参数为 λ 的 Poisson 分布，而虫卵能发育成虫的概率为 p（$0<p<1$），又设每个虫卵是否发育成虫是彼此独立的. 证明：后代的个数服从参数为 λp 的 Poisson 分布.
4. 若 X 的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases} a+bx^2, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

如果 $E(X)=\dfrac{2}{3}$，求 a,b.

5. 科技馆上午 9 点钟开馆，从 10 点开始每隔半小时有一次同样的科普实验展示，如果某个参观者到馆的时间服从 10 点至 11 点的均匀分布，求以下事件的概率：
   （1） 他等待科普实验展示的时间不超过 10 分钟；
   （2） 他等待科普实验展示的时间超过 20 分钟.
6. 某人被指控为一个新生儿的父亲. 此案鉴定人作证时指出：母亲的怀孕期（即从受孕到婴儿出生的时间）的天数近似地服从正态分布，其参数为 $\mu=270$，$\sigma^2=100$. 被告提供的证词表明，他在孩子出生前 290 天出国，而于出生前 240 天才回来.如果被告事实上是这个孩子的父亲，试问那位母亲确有与证词相符的过长或过短的怀孕期的概率是多少？
7. *某人计划要开始一个 1 万公里的自驾旅行，他的汽车已经跑了 1.5 万公里，假设该品牌汽车在电池报废之前跑的公里数服从均值为 3 万公里的指数分布，那么他不用更换电池就能跑完全程的概率是多大？如果该品牌汽车在电池报废之前跑的公里数不服从指数分布（但是知道其分布函数 F ）呢？
8. 涉及犯罪嫌疑人的证据可看成一个随机变量 X 的值，X 服从指数分布，其均

值为μ．若该人无罪，则$\mu = 1$，否则$\mu = 2$. 法官按以下方式判罪：当$X > c$时判其有罪，否则判其无罪.

（1） 法官希望以95%的把握不冤枉一个无罪的人，c应该取何值？

（2） 利用（1）中得到的c值，计算将一个确实有罪的被告判为有罪的概率.

9. （对数正态分布）设随机变量$Y > 0$，$\log Y$服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，求Y的概率密度函数.

10. 令随机变量X的累积分布函数为$F(x)$，$F(x)$连续且严格单调.

（1） 假设$g(x)$为严格单调可微函数，X具有概率密度函数为$f(x)$，求$g(X)$的概率密度函数.

（2） （概率积分变换）求$Y = F(X)$的分布.

（3） 证明：如果$Y \sim U(0,1)$，则$F^{-1}(Y)$的累积分布函数为$F(x)$，这里F^{-1}为F的反函数. 请以指数分布为例说明.

（4） **尝试给出（3）的结论的一个应用.

（5） **如果去掉$F(x)$严格单调的假设，（2）的结论是否正确？

11. 将区间$(0,1)$分成长度分别为$p_1, p_2, \cdots, p_n$的n部分（$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$），分别记为子区间$I_1, I_2, \cdots, I_n$，令$X \sim U$$(0,1)$，如果$X$落入子区间$I_i$那么定义随机变量$Y = i$.

（1） 求Y的分布.

（2） 可否利用上述方法构造一般的离散型随机变量？

12. *将线段$[0,1]$随机断开，求包含固定点$p_0 \in (0,1)$的那一段的长度的期望值.

13. *按如下方式生成随机变量X：首先抛一枚均匀的硬币，如果出现正面，令X服从$(0,1)$上的均匀分布；如果出现反面，令X服从$(3,4)$的均匀分布. 求X的期望和方差.

14. β 分布是取值在区间$[0,1]$的随机变量的一个常见分布.

（1） 请通过查参考资料给出参数为a,b的β分布（$\beta(a,b)$）并计算其期望和方差.

（2） 比较$\beta(1,1)$与$U(0,1)$.

15. （计算机实验） 从正态分布$N(100,100)$中随机产生 1000 个随机数.

（1）作出这 1000 个正态随机数的直方图；
（2）从这 1000 个随机数中随机有放回地抽取 1000 个，作出其直方图；
（3）比较它们的均值与方差.