第七章基础题

7.1

7.1. 所有图象数为 $n!$. 转动群有:

1. 不动 1 个. 每个图象都是不动点.
2. 顺时针旋转 $k \cdot \frac{360}{n}$ 度 $(1 \le k \le n-1)$, 共 $n-1$ 个. 无不动点.

因此方案数为

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

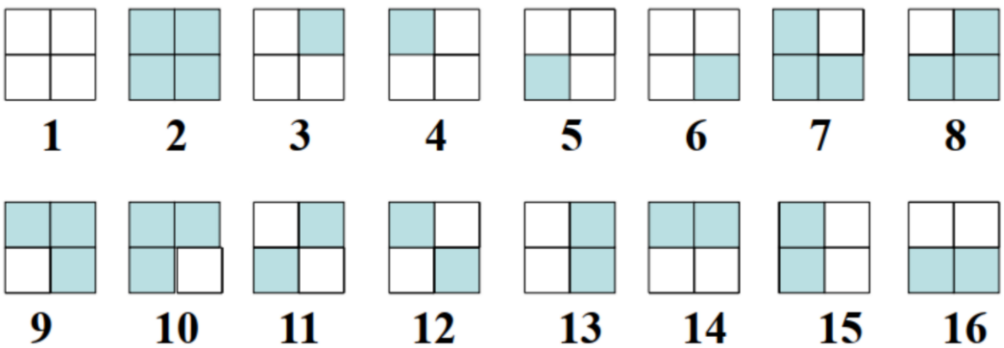
7.2

对于下图中的 16 种染色方案，每种置换的不动点如下

- 恒等置换：1、2、...、16，共 16 个
- 顺时针旋转 90 度：1、2，共 2 个
- 逆时针旋转 90 度：1、2，共 2 个
- 旋转 180 度：1、2、11、12，共 4 个
- 颜色反色：0 个
- 顺时针旋转 90 度再反色：11、12，共 2 个
- 逆时针旋转 90 度再反色：11、12，共 2 个
- 旋转 180 度再反色：13、14、15、16，共 4 个

因此不等价的染色方案数为

$$\frac{16+2+2+4+2+2+4}{8} = 4$$



7.3

设四个顶点为A.B.C.D. 用一个面的3个顶点来表示该面,置换群:

① 不动:(ABC)(ABD)(ACD)(BCD)　1个置换　$(1)^4$

② 以高为轴逆时针旋转 $\pm120°$:

(ABC)不动.(ABD)不动,(ACD)不动,(BCD)不动　8个置换

② 对边中点连线旋转$180°$:两两互换　3个置换　$(2)^2$

由Pólya定理, $l=\frac{1}{12}\times(1\times3^4+3\times3^2)=9$

7.4

7.4. 每个面贴肖像有 4 个方向. 正六面体的面转动群为:

1. 不动置换 $(1)^6$ 有 1 个. 有 4^6 个不动点.
2. 以对面面心为轴旋转 ±90 度, $(1)^2(4)$, 有 6 个置换. 转动时底面肖像会变动, 无不动点.
3. 以对面面心为轴旋转 180 度, $(1)^2(2)^2$, 有 3 个置换. 转动时底面肖像翻转, 无不动点.
4. 以对棱中点连线为轴旋转 180 度, $(2)^3$, 有 6 个置换. 有 4^3 个不动点.

5. 对角线为轴旋转 ±120 度, $(3)^2$, 有 8 个置换. 有 4^2 个不动点.

故方案数为

$$\frac{4^6+6\times4^3+8\times4^2}{24}=192.$$

7.5

足球每个顶点均参与构成2个正六边形和1个正五边形，每个顶点上的欠角均为$360°-2\times120°-108°=36°$，故足球的顶点数为$720°/36°=60$，正五边形面有$60/5=12$个，正六边形面有$60\times2/6=20$个，由欧拉公式得棱有90条，其置换群为：

① 不动　　1个置换　　$12!$个不动点，

② 以五边形面心连线为轴旋转　　24个置换　　0个不动点，

③ 以六边形面心连线为轴旋转　　20个置换　　0个不动点，

④ 以棱中连线为轴旋转　　15个置换　　0个不动点，

由Burnside引理，方案数$l=\frac{1}{60}\times12!=7983360$

7.6

7.6. 用 r, b 分别表示对顶点染红色和蓝色，Y, G 分别表示对面染黄色和绿色. 正八面体转动群为：

1. 不动 1 个置换. 顶点表示为 $(1)^6$，面表示为 $(1)^8$. 不动点表示为 $(r+b)^6(Y+G)^8$.
2. 相对顶点连线为轴转 ±90 度，有 6 个置换. 顶点表示为 $(1)^2(4)$，面表示为 $(4)^2$. 不动点表示为 $6(r+b)^2(r^4+b^4)(Y^4+G^4)^2$.
3. 相对顶点连线为轴转 180 度，有 3 个置换. 顶点表示为 $(1)^2(2)^2$，面表示为 $(2)^4$. 不动点表示为 $3(r+b)^2(r^2+b^2)^2(Y^2+G^2)^4$.
4. 对边中心连线为轴转 180 度，有 6 个置换. 顶点表示为 $(2)^3$，面表示为 $(2)^4$. 不动点表示为 $6(r^2+b^2)^3(Y^2+G^2)^4$.
5. 对面中心连线为轴转 ±120 度，有 8 个置换. 顶点表示为 $(3)^2$，面表示为 $(1)^2(3)^2$. 不动点表示为 $8(r^3+b^3)^2(Y+G)^2(Y^3+G^3)^2$.

由波利亚定理，$r^4b^2Y^4G^4$ 项的系数为

$$\left(\binom{6}{4}\binom{8}{4}+6\binom{2}{1}+3\left(\binom{2}{0}\binom{2}{1}+\binom{2}{2}\binom{2}{0}\right)\binom{4}{2}+6\binom{3}{2}\binom{4}{2}\right)/24=51.$$

因此恰有 4 个顶点染红色且恰有 4 个面染黄色的不等价方案数为 51 个.