第六章作业 优秀作业选编

基础题

6.1

6.1

(1) 等式左边 $\binom{n-m}{n-k}=\binom{n-m}{k-m}$ 表示从n个不同的球中选出k个球，其中m个球已内定的方案数. 设 A_i 为从n个不同的球中选出k个球，其中包含球 m_i 的方案集合，那么有

$$\binom{n-m}{k-m}=|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|$$

由容斥原理，$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|$

$$=|U|-\sum_i|\bar{A}_i|+\sum_{i<j}|\bar{A}_i\cap\bar{A}_j|-\sum_{i<j<k}|\bar{A}_i\cap\bar{A}_j\cap\bar{A}_k|+\cdots$$

$$=\binom{n}{k}-\binom{m}{1}\binom{n-1}{k}+\binom{m}{2}\binom{n-2}{k}-\cdots+(-1)^m\binom{m}{m}\binom{n-m}{k}$$

$$=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}\binom{n-j}{k}$$

(2) 等式左边 $\binom{n-1}{m-1}$ 表示把n个无区别的球放入m个不同的盒子中，没有空盒的方案数. 设 A_i 为把n个无区别的球放入m个不同的盒子中，第i个盒子不为空的方案集合，那么有

$$\binom{n-1}{m-1}=|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|$$

已知 $\binom{n+m-1}{n}$ 表示把n个无区别的球放入m个不同的盒子中，允许有空盒的方案数，由容斥原理，

$$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|$$
$$=|U|-\sum_{i}|\bar{A}_i|+\sum_{i<j}|\bar{A}_i\cap\bar{A}_j|-\sum_{i<j<k}|\bar{A}_i\cap\bar{A}_j\cap\bar{A}_k|+\cdots$$
$$=\binom{n+m-1}{n}-\binom{m}{1}\binom{n+m-1-1}{n}+\binom{m}{2}\binom{n+m-2-1}{n}-\cdots$$
$$=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}\binom{n+m-j-1}{n}$$

(3) 等式左边 $\binom{n+m-1}{n-1}$ 表示从n+m个不同的球中选出n个球，其中1个球已内定的方案数，

已知 $\binom{n+m-1}{n+i-1}$ 表示从n+m个不同的球中选出n+i个球，其中1个球已内定的方案数，有

$$\binom{n+m-1}{n+i-1}=\binom{n+m}{n+i}-\binom{n+m-1}{n+i},$$ 因此有

$$\binom{n+m-1}{n-1}=\binom{n+m}{n}-\binom{n+m-1}{n}$$
$$=\binom{n+m}{n}-\binom{n+m-1}{n+1-1}$$
$$=\binom{n+m}{n}-\left[\binom{n+m}{n+1}-\binom{n+m-1}{n+1}\right]$$
$$=\binom{n+m}{n}-\binom{n+m}{n+1}+\binom{n+m-1}{n+1}$$
$$=\cdots$$
$$=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{n+m}{n+j}$$

6.1

(1). 设有 n 个不同元素，从中取出 k 个，k 个中需含有给定的 m 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_m$。求方案数

1° 相当于先拿 m 个元素，再从剩下 $(n-m)$ 个中取 $(k-m)$ 个，共有 $\binom{n-m}{k-m} = \binom{n-m}{n-k}$ 种。

2° 设 A_i 为取 k 个，不含 a_i 的方案数

$\Rightarrow |A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_m|$

容斥定理 $= |A_1| + \cdots + |A_m|$ $\Rightarrow \binom{m}{1}\binom{n-1}{k}$

$- |A_1 \cap A_2| - \cdots - |A_{m-1} \cap A_m|$ $\Rightarrow \binom{m}{2}\binom{n-2}{k}$

$\vdots$

$\pm |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$ $\Rightarrow \binom{m}{m}\binom{n-m}{k}$

所求为：$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m|$

$= \binom{m}{k} - \binom{m}{1}\binom{n-1}{k} + \binom{m}{2}\binom{n-2}{k} - \cdots + (-1)^m \binom{m}{m}\binom{n-m}{k}$

$= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j}\binom{n-j}{k}$ 种。故题目得证。

(2). 同(1)，设有$(n+m-1)$不同元素从中取出n个，n个中需含有给定的m个元素$a_1, a_2, \cdots, a_m$。求方案数

1° 相当于先拿m个，再从剩下的$n-1$中拿$(n-m)$个，

共$\binom{n-1}{n-m} = \binom{n-1}{m-1}$种

2° 设A_i为取k个，不含a_i的方案数

$$\Rightarrow |A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_m|$$
$$= \binom{m}{1}\binom{n+m-1-1}{n} - \binom{m}{2}\binom{n+m-1-2}{n} + \cdots \pm \binom{m}{m}\binom{n+m-1-m}{n}$$

故所求为$|\bar{A_1} \cup \bar{A_2} \cup \cdots \cup \bar{A_m}|$

$$= |S| - |A_1 \cup \cdots \cup A_m|$$
$$= \binom{n+m-1}{n} - \binom{m}{1}\binom{n+m-2}{n} + \binom{m}{2}\binom{n+m-3}{n} + \cdots + (-1)^m\binom{m}{m}\binom{n-1}{n}$$
$$= \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}\binom{n+m-1-j}{n}$$ 种。故得证

(3). 设 A_i 为从 $n+m$ 个不同元素中取 $n+i$ 个，且含某元素 a 的方案。B_i 同 A_i，但不必要含 a。

$$\Rightarrow |B_i| = \binom{n+m}{n+i}, \quad |A_i| = \binom{n+m-1}{n+i-1}, \quad |\overline{A_i}| = \binom{n+m-1}{n+i}$$

$$\Rightarrow |\overline{A_i}| + |A_i| = |B_i|, \quad |\overline{A_i}| = |A_{i+1}| = |B_{i+1}| - |\overline{A_{i+1}}|$$

$$\Rightarrow \binom{n+m-1}{n-1} = |A_0| = |B_0| - |\overline{A_0}|$$

$$= |B_0| - |A_1|$$

$$= |B_0| - (|B_1| - |\overline{A_1}|)$$

$$= |B_0| - |B_1| + (|B_2| - |\overline{A_2}|)$$

$$= |B_0| - |B_1| + |B_2| - \cdots + (-1)^m |B_m|$$

$$= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{n+m}{n+j} \qquad \square$$

6.2

6.2 (1) 设出现 aaa, bbb, ccc 的排列的集合分别为 A, B, C

则有 $|A| = |B| = |C| = \frac{7!}{3!\cdot 3!} = 140$

$|A\cap B| = |B\cap C| = |A\cap C| = \frac{5!}{3!} = 20$

$|A\cap B\cap C| = 3! = 6$

全排列个数 $|S| = \frac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 3!} = 1680$

由容斥原理

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = |S| - (|A|+|B|+|C|) + |A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C| - |A\cap B\cap C|$$

$$= 1686 - 3\times 140 + 3\times 20 - 6$$

$$= 1314$$

即满足要求排列数量

(2) 设出现 aa, bb, cc 的排列的集合分别为 A, B, C

则有 $|A| = |B| = |C| = \frac{8!}{3!\cdot 3!} - \frac{7!}{3!\cdot 3!} = 1120 - 140 = 980$

$|A\cap B| = |A\cap C| = |B\cap C| = \frac{7!}{3!} - \frac{6!}{3!} - \frac{6!}{3!} + \frac{5!}{3!} = 620$

(考虑 aa, bb 的情况，在与 a, b 排列时，要考虑去重，内部再用一次容斥原理)

$|A\cap B\cap C| = 6! - 5!\times 3 + 4!\times 3 - 3! = 426$

(这里同样利用容斥原理 计算同时出现 aa, bb, cc 的集合个数)

全排列个数 $|S| = \frac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 3!} = 1680$ 由容斥原理

$$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = |S| - (|A|+|B|+|C|) + |A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C| - |A\cap B\cap C|$$

$$= 1680 - 3\times 980 + 3\times 620 - 426 = 174$$

即满足要求排列数目

6.2 考虑 $\{3\cdot a, 3\cdot b, 3\cdot c\}$ 的多重排列.

(1) 若任何连续3个元素不能相同, 求满足要求的排列数目.

(2) 若任何相邻2个元素不能相同, 求满足要求的排列数目.

(1) A表示相邻3个都是a, B表示相邻3个都是b, C表示相邻3个都是C

要求的为 $|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}| = |S|-(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|)$

$|A|=|B|=|C|=\frac{7!}{3!\cdot 3!}=140$

$|A\cap B|=|B\cap C|=|A\cap C|=\frac{5!}{3!}=20$

$|A\cap B\cap C|=6$

$|S|=\frac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 3!}=1680$

$|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=1680-140\times 3+20\times 3-6=1314$

(2) A表示至少存在相邻2个a, B表示至少存在相邻2个b, C表示至少存在相邻2个C

① $|A|=|B|=|C|=\frac{8!}{3!3!}-\frac{7!}{3!3!}=980$ (aa a 3.b 3.c, $a+aa=aa+a$ 去掉一组aaa)

② $|A\cap B|$: aa bb a b 3.c

转化为7个元素的可重排列, 但要排除掉一组3个a或3个b的情况, 因为 $aa+a=a+aa$

设M为相邻三个都是a, N为相邻三个都是b

$|M\cup N|=|M|+|N|-|M\cap N|$ 其中 $|M|=|N|=\frac{6!}{3!}$ $|M\cap N|=\frac{5!}{3!}$

$|A\cap B|=|A\cap C|=|B\cap C|=\frac{7!}{3!}-|M\cup N|=\frac{7!}{3!}-\frac{6!}{3!}-\frac{6!}{3!}+\frac{5!}{3!}=620$

③ $|A\cap B\cap C|$: aa bb cc a b c

转化为各不相同的6个元素的排列, 但要排除掉一组3个a或3个b或3个C的情况

设M为相邻三个都是a, N为相邻三个都是b, P为相邻三个都是C

$|M\cup N\cup P|=|M|+|N|+|P|-|M\cap N|-|M\cap P|-|N\cap P|+|M\cap N\cap P|$

$=3\times 5!-3\times 4!+3!$

$|A\cap B\cap C|=6!-|M\cup N\cup P|=6!-3\times 5!+3\times 4!-3!=426$

综上 $|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=S-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|$

$=1680-3\times 980+3\times 620-426=174$

以上嵌套使用容斥原理的做法是推荐做法。

下面的基于枚举（分类讨论）的解法同样正确，但是我们并不鼓励：若不是像这些同学一样细心，就有可能会漏掉几种情况。

6.2 (1). 先考虑没有任何限制的排列总数，但有三组各三个重复的元素，则排列数量为 $\frac{9!}{3!3!3!}$

其次，考虑至少有一组连续三个相同元素的3种情况。将某三个连续并相同的元素视为一个元素，则排列~~数列~~数量为 $3\times\frac{7!}{3!3!}$。再考虑至少有两组连续三个相同元素的3种情况，即有排列数量 $3\times\frac{5!}{3!}$。最后考虑三组均连续三个相同元素出现的情况，排列数量共 $3!$ 个。故根据容斥原理，共有 $\frac{9!}{3!\times3!\times3!}-3\times\frac{7!}{3!\times3!}+3\times\frac{5!}{3!}-3!$ $=1314$ 个排列数目。

(2) 题设要求任何相邻的两个元素都不能相同。下面将根据有几对相邻相同的元素进行分析：

⇒ 一对：重复的元素共三种可能，将重复元素视为一体，即8个元素，又有两组相同的元素，则排列共 $\binom{3}{1}\frac{8!}{3!3!}$ 个

⇒ 两对：第一种情况：连续三个相同的元素，共 a, b, c 3种可能，如上，排列共 $\binom{3}{1}\frac{7!}{3!3!}$ 个 （例：aaa）

第二种情况：选择两对不一样元素，连续两个相同元素。将重复元素视为一体，即7个元素，一组相同的元素，则排列共 $\binom{3}{2}\frac{7!}{3!}$ 个 （例：aabb）

⇒ 三对：第一种情况：从元素集的不同元素中选择三对连续的相同字母，即 $6!$ 个排列

第二种情况：连续三个相同的元素（两对重叠的元素）和一对由别的元素组成的连续相同的元素对（例：aaabb），排列共 $\binom{3}{1}\binom{2}{1}\frac{6!}{3!}$ 个

⇒ 四对：第一种情况：两组连续三个相同的元素（例：aaabbb），排列共 $\binom{3}{2}\frac{5!}{3!}$ 个

第二种情况：一组连续三个相同的元素和两对连续两个相同的元素（例：aaabbcc），排列共 $\binom{3}{1}5!$ 个

⇒ 五对：两组连续三个相同的元素和一对连续两个相同的元素（例：aaabbbcc），排列共 $\binom{3}{2}4!$

⇒ 六对：三组连续三个相同的元素，排列共 $3!$

故根据容斥原理，任何相邻两个元素不能相同的排列数目为：

$$\frac{9!}{3!3!3!}-\binom{3}{1}\frac{8!}{3!3!}+\left[\binom{3}{1}\frac{7!}{3!3!}+\binom{3}{2}\frac{7!}{3!}\right]-\left[6!+\binom{3}{1}\binom{2}{1}\frac{6!}{3!}\right]+\left[\binom{3}{2}\frac{5!}{3!}+\binom{3}{1}5!\right]-\binom{3}{2}4!+3!=174$$

6.2. 考虑 $\{3\cdot a, 3\cdot b, 3\cdot c\}$ 的多重排列

1. 若任何连续 3 个元素不能全相同，求满足要求的排列数目；

   解：设 A, B, C 分别为出现连续 3 个 a，连续 3 个 b，连续 3 个 c，所以满足要求的排列数目 $S = N - (|A|+|B|+|C|) + (|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|) - |A\cap B\cap C|$。

   其中多重全排列 $N = \frac{9!}{(3!)^3}, |A| = \frac{7!}{(3!)^2}$，$|A\cap B| = \frac{5!}{3!}$，$|A\cap B\cap C| = 3!$。

   所以 $S = \frac{9!}{(3!)^3} - 3*\frac{7!}{(3!)^2} + 3*\frac{5!}{3!} - 3! = 1314$

2. 若任何相邻 2 个元素不能相同，求满足要求的排列数目.

   解：这道题可以用容斥原理但是非常复杂，因为 abc 内部也要用容斥原理，所以是二阶的容斥原理。所以不如直接分类讨论。

   不妨假设第一位是 a，最后总方案数乘 3 就行。然后不妨假设第二位是 b，最后乘 2 就行。

   第三位有两种情况，a 或者 c：

   (a) 如果第三位是 a，假如第 4 位是 b，那后面只有两种方案，cacbc 或者 cbcac。假如第 4 位是 c，那么后面有 7 种方案，acbcb, abcbc, bacbc, bcabc, bcacb, bcbac, bcbca。

   (b) 如果第三位是 c，那不妨设第 4 位是 a，最后再乘 2。同样，不妨设第 5 位是 b，最后再乘 2。后面有 5 种方案，acbc, cabc, cacb, cbac, cbca。

   综上，总数 $S = 3*2*(2+7+2*2*5) = 174$

6.3

6.3. 求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 = 40 \qquad (6 \le x_1 \le 15,\ 5 \le x_2 \le 20,\ 10 \le x_3 \le 25)$$

的整数解数目.

问题等价于 $x_1+x_2+x_3=40-6-5-10=19$　$(0\le x_1\le 9,\ 0\le x_2\le 15,\ 0\le x_3\le 15)$ 的整数

没有约束情况下 $x_1+x_2+x_3=19$ 的非负整数解的个数为 $C(19+3-1, 3-1)=210$

设 A_1 为 $x_1\ge 10$ 的解，$y_1+10+x_2+x_3=19$，$|A_1| = C(19+3-1, 3-1) = 55$

设 A_2 为 $x_2\ge 16$ 的解，$x_1+y_2+16+x_3=19$，$|A_2| = C(3+3-1, 3-1) = 10$

设 A_3 为 $x_3\ge 16$ 的解，$x_1+x_2+y_3+16=19$，$|A_3| = C(3+3-1, 3-1) = 10$

$|A_1\cap A_2| = |A_1\cap A_3| = |A_2\cap A_3| = |A_1\cap A_2\cap A_3| = 0$.

$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}| = N - \sum_{i=1}^{3}|A_i| + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j| - |A_1\cap A_2\cap A_3| = 135$

6.3. $x_1+x_2+x_3=40$, $6\le x_1\le 15$, $5\le x_2\le 20$, $10\le x_3\le 25$.

令 $y_1=x_1-6$. $y_2=x_2-5$, $y_3=x_3-10$.

则 $y_1+y_2+y_3=x_1+x_2+x_3-21=40-21=19$. $0\le y_1\le 9$, $0\le y_2\le 15$, $0\le y_3\le 15$.

即求 $y_1+y_2+y_3=19$ ($0\le y_1\le 9$. $0\le y_2\le 15$, $0\le y_3\le 15$) 的整数解数目.

首先,不考虑上界,仅考虑非负整数解个数,则 $N=C_{19+3-1}^{3-1}=C_{21}^{2}=210$.

设 $y_1\ge 10$ 的解的情况为 A_1, 则 $y_1'+y_2+y_3=19-10=9$. ($y_1'=y_1-10\ge 0$). $|A_1|=C_{9+2}^{2}=C_{11}^{2}=55$.

设 $y_2\ge 16$ 的解的情况为 A_2, 则 $y_1+y_2'+y_3=19-16=3$. ($y_2'=y_2-16\ge 0$). $|A_2|=C_{3+2}^{2}=C_5^2=10$.

设 $y_3\ge 16$ 的解的情况为 A_3, 则 $y_1+y_2+y_3'=19-16=3$. ($y_3'=y_3-16\ge 0$). $|A_3|=C_{3+2}^{2}=C_5^2=10$.

$A_1\cap A_2$, 即 $y_1\ge 10$ 且 $y_2\ge 16$. 此时 $y_1+y_2+y_3\ge 26$, $\therefore y_1+y_2+y_3=19$ 无解. $\therefore |A_1\cap A_2|=0$.

$A_1\cap A_3$, 即 $y_1\ge 10$ 且 $y_3\ge 16$. 此时 $y_1+y_2+y_3\ge 26$, $\therefore y_1+y_2+y_3=19$ 无解. $\therefore |A_1\cap A_3|=0$.

$A_2\cap A_3$, 即 $y_2\ge 16$ 且 $y_3\ge 16$, 此时 $y_1+y_2+y_3\ge 32$. $\therefore y_1+y_2+y_3=19$ 无解, $\therefore |A_2\cap A_3|=0$.

$A_1\cap A_2\cap A_3$, 即 $y_1\ge 10$ 且 $y_2\ge 16$ 且 $y_3\ge 16$, 此时 $y_1+y_2+y_3\ge 42$. $\therefore y_1+y_2+y_3=19$ 无解.

$\therefore |A_1\cap A_2\cap A_3|=0$.

$$\therefore |\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=N-|A_1\cup A_2\cup A_3|$$

$$=N-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|.$$

$$=210-55-10-10+0-0=135.$$

进阶题

6.4

6.4. 在 $1, 2, \cdots, 10^6$ 这些正整数中，求十进制表示中各位数字之和为 39 的数的个数.

解. 由于 10^6 的各位数字之和不为 39，所以正整数取值范围实际为$1-999999$，不妨将其表示为 $(x_1x_2x_3x_4x_5x_6)$，不足 6 位的数字补充前导 0 至 6 位。

十进制表示中各位数字之和为 39 ，即要求 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=39, 0\le x_i\le 9(i=1,2,\cdots,6)$。

没有约束情况下，不定方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=39$ 的非负整数解个数为 $C(39+6-1,39)=C(44,5)$。

设 A_i $(i=1,2,\cdots,6)$ 为 $x_i\ge 10$ 的解，则有 $|A_i|=C(29+6-1,29)=C(34,5)$。

那么 $A_i\cap A_j$ $(i,j=1,2,\cdots,6$ 且 $i\ne j)$ 为同时满足 $x_i\ge 10$ 和 $x_j\ge 10$的解，则有 $|A_i\cap A_j|=C(19+6-1,19)=C(24,5)$。

同理 $A_i\cap A_j\cap A_k$ $(i,j,k=1,2,\cdots,6$ 且 i,j,k 不同$)$ 为同时满足 $x_i\ge 10$，$x_j\ge 10$ 和 $x_k\ge 10$ 的解，则有 $|A_i\cap A_j\cap A_k|=C(9+6-1,9)=C(14,5)$。

由于 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=39$，故而不可能存在有四个 x_i 满足 $x_i\ge 10$ 的非负整数解。

所以满足约束条件的非负整数解个数为 $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}\cap\overline{A_6}|=C(44,5)-C(6,1)\times C(34,5)+C(6,2)\times C(24,5)-C(6,3)\times C(14,5)=13992$。

综上所述，满足要求的正整数个数为 13992 个。

6.4 解：在 $1\sim10^6$ 正整数中，已知 10^6 不符合条件，故满足条件的数的十进制表示最多为6位数

可看作求方程组 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=39$ (要求 $0\le x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\le 9$) 的解的个数

若考虑 $A_1=\{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=39 \mid x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\in Z^*,\ x_1\ge 10\}$

$A_2=\{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=39 \mid x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\in Z^*,\ x_2\ge 10\}$

$A_3=\{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=39 \mid x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\in Z^*\ \ x_3\ge 10\}$

$A_4=\{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=39 \mid x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\in Z^*,\ x_4\ge 10\}$

$A_5=\{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=39 \mid x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\in Z^*,\ x_5\ge 10\}$

$A_6=\{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=39 \mid x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\in Z^*\ \ x_6\ge 10\}$

则方案数为 $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}\cap\overline{A_6}|$

① 对于 A_1 令 $y_1=x_1-10$ 则 $|A_1|$ 为 $\{y_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=29 \mid x\ge 0\}$ 的方案数

$\therefore |A_1|=C_{34}^5$

同理可得 $|A_i|=C_{34}^5$ $i=1,2,\dots,6$

② 考虑 $A_1\cap A_2=\{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=39 \mid x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\in Z^*,\ x_1,x_2\ge 10\}$

令 $y_1=x_1-10$ $y_2=x_2-10$，则方案数等于 $\{y_1+y_2+x_3+x_4+x_5+x_6=19 \mid y_1,y_2\ge 0\}$ 的方案数

则 $|A_1\cap A_2|=C_{24}^5$

同理可得 $|A_i\cap A_j|=C_{24}^5$ $(i,j\in[1,6]，且 i\ne j)$

③ 考虑 $A_1\cap A_2\cap A_3=\{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=39 \mid x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\in Z^*,\ x_1,x_2,x_3\ge 10\}$

令 $y_1=x_1-10$ $y_2=x_2-10$，$y_3=x_3-10$，考虑 $\{y_1+y_2+x_3+x_4+x_5+x_6=9 \mid y_1,y_2,y_3\ge 0\}$ 的方案数

则 $|A_1\cap A_2\cap A_3|=C_{14}^5$

同理可得 $|A_i\cap A_j\cap A_k|=C_{14}^5$ $(i,j,k\in[1,6]，且 i\ne j\ne k)$

④ 考虑 $A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4=\{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=39 \mid x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\in Z^*,\ x_1,x_2,x_3,x_4\ge 10\}$

显然无解，则 $|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=0$

同理可得 $|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_m|=0$ $(i,j,k,m\in[1,6]，且 i\ne j\ne k\ne m)$

则 A_i 中任意4个以上集合取交，元素数都为0，易知全集 $|S|=C_{44}^5$

由容斥原理 $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_5}\cap\overline{A_6}|=|S|-\sum_{i=1}^{6}|A_i|+\sum_{i=1}^{6}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|-\sum_{i=1}^{6}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i\cap A_j\cap A_k|$

$+\cdots+(-1)^6|A_1\cap A_2\cdots\cap A_6|$

$=C_{44}^5-C_6^1\cdot C_{34}^5+C_6^2\cdot C_{24}^5-C_6^3\cdot C_{14}^5+C_6^4\cdot 0-C_6^5\cdot 0+0$

$=13992$

难度3/5　适合程度3/5

难度在于转化为方程组的解的个数

后续是容斥原理的典型用法，但计算量偏大

此题也有母函数做法。下面这位同学的答案直接使用了$(1-x)^{-6}$展开式的二级结论，这个结论对应于第三章习题 3.5 题。

相当于6个0~9之间的数和为39的方案数。母函数$A(x)$满足

$$A(x)=(1+x+\cdots+x^9)^6=\frac{(1-x^{10})^6}{(1-x)^6}=\frac{1-6x^{10}+15x^{20}-20x^{30}+15x^{40}-6x^{50}+x^{60}}{(1-x)^6}$$

考虑到$(1-x)^{-6}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+6-1}{6-1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}=\binom{n+5}{5}x^n$。因此有$x^{39}$对应系数$a_{39}$为

$$a_{39}=\binom{39+5}{5}-6\binom{29+5}{5}+15\binom{19+5}{5}-20\binom{9+5}{5}=13992$$

6.5

本题许多同学在列式时忘记了 n 个集合的交集为空。

另有少数同学在写和式时不写最后一项，只写到省略号就结束。这种式子一般一律认为是无穷求和（即使前面通过文字描述声明了要求和到哪一项为止），不过这次我们没有针对这一点扣分。

T6.5. 不考虑任何限制，一共有 $n!$

设 A_i 为 $i(i+1)$ 子串出现.（A_n 为 $n1$ 子串出现）

$|A_i|=(n-1)!$ $\quad |A_i\cap A_j|=(n-2)!$

$|A_i\cap A_j\cap A_k|=(n-3)!$ ……但 $|A_1\cap A_2\ldots\cap A_n|=0$

最终有 $n!+\sum_{i=1}^{n-1}C_n^i(n-i)!\cdot(-1)^i$

直接使用容斥原理即可.

题目 6.5. 在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的全排列中, 禁止出现子串 12、23、34、$\cdots$、$(n-1)n$、$n1$, 求满足要求的排列数目.

解. 令 U 表示 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的全排列集合, A 表示 U 中满足题目要求的排列集合, A_1 表示 U 中出现了子串 12 的排列集合, A_2 表示 U 中出现了子串 23 的排列集合, $\cdots$, A_n 表示 U 中出现了子串 $n1$ 的排列集合. 则 $A=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}$, $|A|$ 即为所求.

考虑集合 U, 有 $|U|=n!$.

考虑集合 A_1, 由于排列固定出现子串 12, 实际相当于将 12 看作一个整体、与其它 $n-2$ 个元素进行全排列, 有 $(n-1)!$ 种. 同理可知 $|A_j|=(n-1)!$, $j=1,2,\cdots,n$.

考虑集合 $A_{j_1}\cap A_{j_2}$ 中的元素. 若子串 $j_1(j_1+1)$ 与 $j_2(j_2+1)$ 有重复元素 (不妨 $j_1+1=j_2$), 则实际相当于将 $j_1(j_1+1)(j_1+2)$ 看作一个整体、与其它 $n-3$ 个元素进行全排列, 有 $(n-2)!$ 种. 若 $j_1(j_1+1)$ 与 $j_2(j_2+1)$ 无重复元素, 则实际相当于将 $j_1(j_1+1)$ 与 $j_2(j_2+1)$ 看作两个整体、与其它 $n-4$ 元素进行全排列, 同样有 $(n-2)!$ 种. 综上 $|A_{j_1}\cap A_{j_2}|=(n-2)!$, $j_1,j_2\in\{1,2,\cdots,n\}$, $j_1\neq j_2$.

考虑集合 $A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_k}$ 中的元素. 不论子串 $j_1(j_1+1)$, $\cdots$, $j_k(j_k+1)$ 有无重复元素, $|A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_k}|=(n-k)!$, $j_1,\cdots,j_k\in\{1,2,\cdots,n\}$, $j_1,\cdots,j_k$ 两两不等 $(k=2,3,\cdots,n-1)$.

考虑集合 $A_1\cap\cdots\cap A_n$ 中的元素. 易知这样的全排列不存在, $|A_1\cap\cdots\cap A_n|=0$.

由容斥原理知

$$\begin{aligned}
|A|&=|U|-\sum_{j=1}^{n}|A_j|+\sum_{1\le j_1<j_2\le n}|A_{j_1}\cap A_{j_2}|-\sum_{1\le j_1<j_2<j_3\le n}|A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap A_{j_3}|\\
&\quad+\cdots+(-1)^{n-1}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_{n-1}\le n}|A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_{n-1}}|+(-1)^n|A_1\cap\cdots\cap A_n|\\
&=n!-\binom{n}{1}\times(n-1)!+\binom{n}{2}\times(n-2)!-\binom{n}{3}\times(n-3)!+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\times 1\\
&=n!-n!+\frac{n!}{2!}-\frac{n!}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n!}{(n-1)!}\\
&=n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)\\
&=n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned}$$

注: 上式对 $n=1,2$ 也成立. $n=1$ 时, 没有禁止子串, $|A|=1$. $n=2$ 时, 有禁止子串 12、21, $|A|=0$.

题目 6.5 的注记. 难度 ★★★★☆, 适合度 ★★★★☆.

相关数列: A000240. 参考文献: [1].

本题思路与课本例题 6.2.1、6.2.2 类似, 按照子串出现的数量分类讨论, 再使用容斥原理计算.

6.6

容斥原理

即至多2个数在自身位置上。

考虑每个数上是否在自身位置上，至少有k个数在自身位置上的元次 $P_k=\binom{n}{k}(n-k)!=\frac{n!}{k!}$。

刚好0个数在自身位置上方案数$Q_0=\sum_{i=0}^{6}(-1)^i\binom{i}{i}P_i=\sum_{i=0}^{6}(-1)^i\frac{6!}{i!}=265$

刚好1个数在自身位置上方案数$Q_1=\sum_{i=0}^{5}(-1)^i\binom{i+1}{i}P_{1+i}=\sum_{i=0}^{5}(-1)^i(i+1)\frac{6!}{(i+1)!}=264$

刚好2个数在自身位置上方案数$Q_2=\sum_{i=0}^{4}(-1)^i\binom{i+2}{i}P_{i+2}=135$

因此至多2个数在自身位置上方案数为$265+264+135=664$

容斥系数

假设方案数可以被表示为$\sum_{k=0}^{6}c_kP_k$，其中c_k为容斥系数，P_k为之前定义的元次。考虑每种排列需要被计算多少次，有

$$\begin{cases}c_0=1\\c_0+c_1=1\\c_0+2c_1+c_2=1\\c_0+3c_1+3c_2+c_3=0\\c_0+4c_1+6c_2+4c_3+c_4=0\\c_0+5c_1+10c_2+10c_3+5c_4+c_5=0\\c_0+6c_1+15c_2+20c_3+15c_4+6c_5+c_6=0\end{cases}$$

解方程有

$$c_0=1,c_1=0,c_2=0,c_3=-1,c_4=3,c_5=-6,c_6=10$$

因此方案数为$P_0-P_3+3P_4-6P_5+10P_6=664.$

6.6 解：记 A_i 为 i 不在其原本位置上的排列集合，$(1\le i\le 6)$，

故所求即为 $P_4=Q_4+Q_5+Q_6$

$Q_4=C(6,2)D_4$ $Q_5=C(6,1)D_5$，$Q_6=D_6$

有 $D_4=4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)=9$

$D_5=5D_4-1=44$

$D_6=6D_5+1=265$

$\therefore P_4=15\times 9+6\times 44+265=664$

错排问题，没什么难的，7分。

整体上我们鼓励手写，因为期末考试也要手写。

但是我们也鼓励很厉害的 LaTeX 排版，因为投稿论文的时候也要精心排版。