第五次习题课题目 含参积分

1. 求解下列各题：

(1) 求极限 $I=\lim\limits_{y\to 0^+}\int_0^1 \dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}dx.$

(2) 设 $f(x)=\int_0^x\left[\int_t^x e^{-s^2}ds\right]dt$，求 $f'(x)$ 与 $f(x)$.

(3) 求 $f'(x)$，其中 $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-y^2}}dy$.

2. 试求 a，b 之值，使积分 $\int_1^3 (a+bx-x^2)^2dx$ 达到最小值。

3. 计算下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-ax^2}-e^{-x^2}}{x}dx\ (a>0)$.

(2) $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin xdx\quad (a>0,b>0).$

(3) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan(bx)-\arctan(ax)}{x}\mathrm{d}x$，其中 $b>a>0$.

4. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上一阶偏导数存在。若 $f_y'(x,y),\ f_{yx}''(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$，证明：

$$f_{xy}''(x,y)=f_{yx}''(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

5. 设 $f(t)=\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2$，$g(t)=\int_0^1\dfrac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}dx$，证明：$f(t)+g(t)=\dfrac{\pi}{4},\ t\geq 0$. 由此求概率-泊松积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx.$

6. 设 $f(t)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+t^2}dx.$

（1） 若 $0\leq t\leq 1$，求 $f_+'(0)$.

（2） 若 $-1\leq t\leq 1$，问：$f'(0)$ 是否存在？并说明理由。

7. 计算积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\dfrac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\dfrac{dx}{\cos x},\quad (|a|<1)$.

8. 计算积分 $I(a)=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$.

9. 计算 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2\beta xdx.$ （注：$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.）

======

以下供学有余力的同学选做。

10. 已知 $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta=1\ (0<r<1).$

求 $I(r)=\int_0^{2\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta,\quad (0<r\neq 1).$

11. 求定积分 $I=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$

12. 计算两个 Laplace 积分：

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx,\quad J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx,\quad \alpha>0,\ \beta>0.$$