

### 第3次作业（提交截止时间：3月13日上午9:50）

1. 给出5个不同的随机变量的例子，并指明随机变量的类型和相关的样本空间.
2. \*\*已知  $F(x) = P(X \leq x)$  是随机变量  $X$  的分布函数.

(1) 证明:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$

(2) 证明:  $F(x)$  右连续.

(3) 求  $P(a \leq X \leq b).$

3. 设样本空间  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ,  $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3)$ , 定义  $X, Y$  如下:

$$X(\omega_1) = 1, X(\omega_2) = 2, X(\omega_3) = 3, Y(\omega_1) = 2, Y(\omega_2) = 3, Y(\omega_3) = 1.$$

- (1) 试证明  $X, Y$  这两个随机变量分布相同.
  - (2) 求  $X + Y, Y - X$  的概率分布.
4. \*已知  $X$  为离散型随机变量, 证明:  $\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$ . 你中学学到的方差是否与课上的定义相一致? 请简要说说你的理解.
  5. 假设袋中有  $a$  个黑球,  $b$  个白球. 每次取出一个球, 取到白球则停止, 记  $X$  为此时已取出球的个数.
    - (1) 每次取球后不放回, 求  $X$  的分布;
    - (2) 每次取球后放回, 求  $X$  的分布和期望.
  6. 是否存在离散随机变量  $X, Y$ , 满足  $E(X) > 100E(Y)$ , 但  $Y$  以至少 0.99 的概率大于  $X$ ? (需说明理由)
  7. (几何分布) 假设一个 Bernoulli 试验成功的概率为  $p \in (0, 1)$ , 不断独立地重复该试验, 令  $X$  表示出现第一次试验成功所需要的试验次数.
    - (1) 求  $X$  的分布.
    - (2) 求  $X$  的期望和方差.
  8. 某项调查表明, 60%的消费者曾通过某电商平台购买商品. 假定随机抽取 25 名消费者, 并对他们的购买习惯进行调查.
    - (1) 至少 15 名消费者曾通过该电商平台购买商品的概率是多少?
    - (2) 大于 20 名消费者曾通过该电商平台购买商品的概率是多少?
    - (3) 不足 10 名消费者曾通过该电商平台购买商品的概率是多少?
  9. 利用定义计算二项分布  $B(n, p)$  的期望与方差.
  10. 假设湖中有  $N$  条鱼, 捕获  $M$  条做了记号后放回, 充分混合后再捕获  $n$  条上来, 记  $X$  为其中带有记号的鱼的数量.
    - (1) 求  $P(X = m).$

- (2) 若  $N$  的具体值未知, 而再捕获上来的当中有  $m$  条带有记号, 给出你对湖中鱼总数  $N$  的估计值.
  - (3) 求使得  $P(X = m)$  值最大的  $N$  的值 (固定  $M, n, m$  的值), 并将其与 (2) 中的估计值作比较.
  - (4) \*试谈谈你对这个例子所体现的 (极大似然) 估计思想的理解.
11. (计算机实验) 绘制第 8 题的二项分布图.
- (1)  $x$  为何值时有最大概率?
  - (2) 计算该分布的期望值 (记为  $\mu$ ), 并比较期望值和最大概率对应的  $x$  值的大小.
  - (3) 计算该分布的方差 (记为  $\sigma^2$ ).
  - (4) 通过该电商平台购买商品的消费者人数介于  $\mu \pm 2\sigma$  的概率有多大?