

# 史灵生 2025春 概率论与数理统计

---

考试分为I卷和II卷，各50分，I卷含8道填空，3道大题（难度和填空题差不多），以基础概念为主。下面是II卷，含4道大题。

一、设随机变量 $Y \sim U(0, 2)$ ,

$$X = \begin{cases} Y, & Y \geq 1 \\ 0, & Y < 1 \end{cases}$$

求 $X$ 的分布函数和期望。

二、设随机变量 $X, Y, Z \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, 1)$ ,  $V = X - Y + Z$ . 求 $(X, V)$ 的联合分布及 $\mathbb{E}(X|V)$ .

三、设随机变量 $(X, Y)$ 的联合密度函数 $p(x, y) = ce^{-x-y}$ ,  $0 < x < y$ .

1. 求 $c$ .
2. 设 $Z = Y - X$ , 求 $(X, Z)$ 的联合密度函数.
3.  $X$ 和 $Z$ 是否相互独立?

四、设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2)$

1. 求 $\sigma^2$ 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$ .
2. 讨论 $\hat{\sigma}^2$ 的相合性与无偏性.
3. 基于 $\hat{\sigma}^2$ 构造 $\sigma^2$ 的枢轴量, 并给出 $\sigma^2$ 置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间.