第一章作业 优秀作业选编

鉴于第一章的题量较大，每道题就只选一位同学展示。

基础题

1.1

(1) 任何两个男生不相邻，则m个男生在n个女生的（n+1）个空之间插空，共有 $n!*m!*C(n+1,m)=\frac{(n+1)!n!}{(n+1-m)!}$

(2) 将所有女生视为一个整体，共有$m!*C(m+1,1)*n!=n!(m+1)!$种排列

(3) 将男生A和女生B视为一个整体，同时考虑男生在左和女生在左的情况，共有$2*(m+n-1)!$中组合

1.2

1.2 记 $m=6, n=5$

(1) 先让男生围成一圈(不落座)，共 $\frac{1}{m}\cdot m!=(m-1)!$ 种方案，因为女生不可相邻，即只有男生间的空隙共m个位置可选，即 $P(m,n)$ 种方案，共 $(m-1)!\cdot P(m,n)$ 种方案，

$(m-1)!\cdot P(m,n)=5!\cdot P(6,5)=86400$ 种方案

(2) 所有女生先看作一个整体，即 $m+1$ 个元素圆排列，$\frac{1}{m+1}\cdot(m+1)!=m!$ 种方案，然后让女生内部排序，共 $n!$ 种方案，根据乘法原理，共 $n!\cdot m!=5!\cdot 6!=86400$ 种方案

(3) 先选出2个男生位于A两侧，$P(m,2)$ 种方案，再将三人组看作一个整体，即 $m+n-2$ 个元素圆排列，$(m+n-3)!$ 种方案，共 $P(m,2)\cdot(m+n-3)!=P(6,2)\cdot 8!=1209600$ 种方案

1.3

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1)!-k! = (n+1)!-1$$

1.4

$10^{40}=2^{40}\cdot 5^{40}$ $20^{30}=2^{60}\cdot 5^{30}$ $\therefore$ 公因数为 $2^{\le 40}5^{\le 30}$

数量为 $41\cdot 31=1271$

1.5

第i位为0时，1~i-1位随意，i+1~6位不能全0

1000000 特判

$$故=\left(\sum_{i=1}^{6}10^{i-1}(10^{6-i}-1)\right)+6$$

$$=6\times10^{5}-(1+10+100+1000+10000+100000)+6$$

$$=488895$$

1.6, 1.7

1.6

假设每个盒子中有一个球，则剩下$n-r$个球，放入r个不同盒子中。转化为可重复组合问题，共有$C(n-1,r-1)=\frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}$

1.7

假设每个盒子中已经有k个球，则剩下$n-rk$个球，放入r个不同的盒子中，共有$C(n-rk+r-1,r-1)$

1.8

1.8 ①最少有3个空盒时：

3个空盒不相邻 $C(8-3+1,3)=C(6,3)=20$

5个不同小球全排列：$5!=120$

共有 $20\times120=2400$ 种

②有4个空盒时： $C(8-4+1,4)=C(5,4)=5$

5个不同小球放入4个相同盒子：$C(5,2)\times4!=240$

不可能有5个及以上空盒

因此共有 $2400+5\times240=3600$ 个

1.9

（1）

分别考虑下面的边的长度，以及左面的边的长度。对于下面的边，可以按照左顶点的x值来分类，一共有$\sum_{i=1}^{9}=45$种，对于左面的边，可以按照下顶点的x值来分类，一共有$\sum_{i=1}^{5}=15$种。因此长方形一共有$15\times45=675$种

（2）

设正方形的边长为l，则$1\le l\le5$。正方形下侧的边的位置可取的数量为$9-(l-1)$种，左面的边的可取数量为$5-(l-1)$种，因此一共有$\sum_{l=1}^{5}(10-l)(6-l)=115$种

1.10

(1)
$$\bar{C}(2n,n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n.$$

(2)
$$\bar{C}(3n+1,n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{n-k}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{2n+1}{n-k}+\binom{2n+1}{n+k+1}\right]=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}=\frac{1}{2}2^{2n+1}=2^{2n}$$

（这里我们不推荐像上面这样，使用 $\bar{C}$ 这种可能有其他含义的符号表示答案，不过这不会对批阅结果产生任何影响。如果确有需要用变量表示小问答案的话，可以考虑 N_1,N_2,N_3 这种普适性的符号）

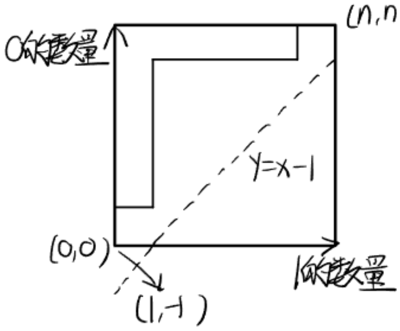
1.11

5不同盒　m不同球

∴结果为
$$\sum_{i=0}^{\lfloor m/2\rfloor}\underbrace{C_m^i}_{\text{第1盒}}\ \underbrace{C_{m-i}^i}_{\text{第2盒}}\cdot\underbrace{3^{m-2i}}_{\text{其它随意}}$$

1.12

1.12 等价于从 $(0,0)$ 走格点到 (n,n) 且不接触 $y=x-1$ 的方案数



作 $(0,0)$ 关于 $y=x-1$ 的对称即可求出接触 $y=x-1$ 的长度

总数因为 $C(2n,n)-C(2n,n-1)=C(2n,n-1)/n$

进阶 A

美观的卷面会让所有看到的人心情愉悦。为表示对这位同学的敬意，特全篇展示。

1.13

解：(1) 求凸 n 边形内 2 条对角线仅有一个顶点公共点的方案数

应先选取 1 个顶点作为公共点，有 n 种方案

再从余下不相邻的 $n-3$ 个顶点中选出 2 个作为端点，共有 $C_{n-3}^2=\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ 种方案

所以一共有 $\frac{1}{2}n(n-3)(n-4)$ 种方案

(2) 凸 n 边形一共有 (C_n^2-n) 条不同对角线，两条不同对角线共有 $C(C_n^2-n,2)$ 种方案

(1) 中已求出仅有顶点公共点的对角线共有 $\frac{1}{2}n(n-3)(n-4)$ 对

而凸 n 边形中仅有内部公共点的对角线对，其四个顶点组成了一个四边形

则仅有内部公共点的对角线对数，等于凸 n 边形顶点可组成的四边形数 C_n^4

无公共点的对角线对数则为 $C(C_n^2-n,2)-nC_{n-3}^2-C_n^4$

$$=\frac{1}{8}n(n-3)(n^2-3n-2)-\frac{1}{2}n(n-3)(n-4)-\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$=\frac{1}{24}n(n-3)\left[3(n^2-3n-2)-12(n-4)-(n^2-3n+2)\right]$$

$$=\frac{1}{12}n(n-3)(n-4)(n-5)\quad(n\geq 6)$$

P.S. $\frac{1}{12}n(n-3)(n-4)(n-5)=\frac{1}{2}nC_{n-3}^3$

1.14

解：(1) 将数列$\{a_i\}$中的第i项a_i表示为$a_i=2^{m_i}5^{n_i}$，$a_1=2^0 5^0$，$a_{60}=(2^2 5^1)^{20}=2^{40}5^{20}$

数列$\{a_i\}$中每一项都为后面一项的约数，当且仅当$\forall i<j$，$m_i\le m_j$，$n_i\le n_j$

由于$m_1=0$，$m_{60}=40$，且$\{m_i\}$为不减的整数数列，

令$b_i=m_{i+1}-m_i$，则有$b_1+b_2+\cdots+b_{59}=40$，$b_i\ge 0$

故b_i序列的选取共有$C(98,40)$种，也即$\{m_i\}$数列的方案数

同理可得，$\{n_i\}$数列的方案数为$C(78,20)$

由于m_i与n_i的选取彼此独立，故$\{a_i\}$方案数共有$C_{98}^{40}\cdot C_{78}^{20}$

(2) 数列$\{a_i\}$严格递增，即要求$\forall i<j$，$m_i\le m_j$，$n_i\le n_j$且不同时取等

即对于$b_i=m_{i+1}-m_i$和$c_i=n_{i+1}-n_i$，要求$b_i\ge 0$，$c_i\ge 0$，$b_i+c_i>0$

由于$b_1+b_2+\cdots+b_{59}=40$，$c_1+c_2+\cdots+c_{59}=20$，有$(b_1+c_1)+\cdots+(b_{59}+c_{59})=60$，$(b_i+c_i)>$

$(b_1+c_1-1)+\cdots+(b_{59}+c_{59}-1)=1$，$(b_i+c_i-1\ge 0)$，即只有一个$b_i+c_i$为2，其他$b_i+c_i$都为1

再分类计算：某个i使$b_i=2$，$c_i=0$的方案数 $C_{59}^{1}\cdot C_{58}^{20}=59\times C_{58}^{20}$

某个i使$b_i=1$，$c_i=1$的方案数 $C_{59}^{1}\cdot C_{58}^{19}=59\times C_{58}^{19}$

某个i使$b_i=0$，$c_i=2$的方案数 $C_{59}^{1}\cdot C_{58}^{18}=59\times C_{58}^{18}$

故$\{a_i\}$方案数共计为$C_{59}^{1}(C_{58}^{20}+C_{58}^{19}+C_{58}^{18})=59\times(C_{58}^{20}+C_{59}^{19})$

(由于$\{a_i\}$共有60项，59个大于1的递增整倍数，一共只有$40+20=60$个可选乘项)

1.15

解：由于每个箱子中至多放1个物体，23个物体将放入23个箱子中，导致2个箱子空着

求空箱不相邻的方案数，先从25个箱子中选出不相邻的2个为空，共有$C_{25}^{2}-24$种

之后再将23个不同物体放入23个不同箱子中，共有$P(23,23)=23!$种

则总的方案数共有$(C_{25}^{2}-24)\times 23!=276\times 23!$种

1.16

解：(1) 0条直线将圆分为1部分，1条直线将圆分为2部分

再加入1条直线时，为了将圆分成更多份，加入直线应与已有直线各有1圆内交点

加入第n条直线时，最多引入了$(n-1)$个新的圆内交点，n条新的分割线段，n个区域

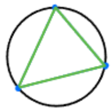
则n条直线至多可将圆分为$1+\sum_{i=1}^{n}i=1+\frac{1}{2}n(n+1)$个部分

(2) 任意三条线段不共点，所以这些线段的圆内交点与一对在圆内相交的线段一一对应

而一对在圆内相交的线段可认为是圆上四点构成的四边形对角线，与四边形一一对应

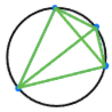
则圆内交点数与圆上任取四点构成四边形的方案数相等，为$C_n^4=\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$

(3) 3个顶点在圆上：n个点两两连线，则3边均在线段、3个顶点在圆上的三角形数量，



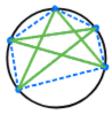
就等于圆上任取三点构成三角形的数量，为$C_n^3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$

2个顶点在圆上：4个圆上点对应4个3边均在线段、2个顶点在圆上的三角形，



则这样的三角形数量为$4C_n^4=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)(n-3)$

1个顶点在圆上：5个圆上点对应5个3边均在线段、1个顶点在圆上的三角形，



则这样的三角形数量为$5C_n^5=\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

0个顶点在圆上：6个圆上点对应1个3边均在线段、0个顶点在圆上的三角形，

则这样的三角形数量为$C_n^6=\frac{1}{720}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

(4) 圆平面图的顶点包含圆上n点与圆内交点，即$V=n+C_n^4$

圆平面图的边数包含圆上n段与圆内被交点分割的若干线段数量

圆内1条连线上每多1个交点，被分割线段就多1条

则圆内线段总数为连线数加2倍的交点数(1个交点分割2条线段)

即 $E=n+(C_n^2+2C_n^4)$

则根据欧拉公式，$F=E-V+1=(n+C_n^2+2C_n^4)-(n+C_n^4+1)=1+C_n^2+C_n^4$

1.17

解：首先，当$k=1$时，由于简单图不存在长度为2的简单回路，此时答案为0

然后，在$2\le k\le n$时，$K_{n,n}$是完全二分图，故其顶点可分为2个子集V_1,V_2，每个子集与其同子集的点互不相连，但与另一子集的每个点之间都由1条边相连

此时的$2k$长度的简单回路上的点，必为V_1与V_2中的点不重复地交替出现，直至头尾相连

所以先从V_1与V_2中各选k个点并排列，交替穿插，共有$2\cdot(P(n,k))^2$种方案

但对于回路而言，点序列实际为环排列，即不同起点/顺序反转会生成不同序列，对应的却是同一个简单回路，这样的一个回路对应$2k\cdot2$个点序列

所以实际的2k长度简单回路一共有$\begin{cases}\dfrac{2\cdot(P(n,k))^2}{2k\cdot2}=\dfrac{(P(n,k))^2}{2k}\text{条}(2\le k\le n\text{时})\\0\text{条}(k=1\text{时})\end{cases}$

1.18

解：假设该n位正整数表示为$a_n \cdots a_1$，$1 \le a_i \le 9$ 对 $\forall 1 \le i \le n$ 成立

且 $n \ge 2$ 时，$a_i \ge a_{i-1}$ 对 $\forall 2 \le i \le n$ 成立

则 $(a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_1$，其中 $a_i - a_{i-1} \ge 0$

那么对于已知的 $(a_n - a_1) \ge 0$，共有 $C(n-1+a_n-a_1-1, a_n-a_1)$ 个整数

接下来讨论不同的 (a_n, a_1) 对，以及对应的方案数

对于 $a_n - a_1 = 8$，有 $(9,1)$，方案数为 $C(n+6, 8)$

对于 $a_n - a_1 = 7$，有 $(8,1), (9,2)$，方案数为 $C(n+5, 7)$

对于 $a_n - a_1 = 6$，有 $(7,1), (8,2), (9,3)$，方案数为 $C(n+4, 6)$

…以此类推…

对于 $a_n - a_1 = 0$，有 $(1,1) \cdots (9,9)$，方案数为 $C(n-2, 0)$

则共有 $\sum_{i=0}^{8} (9-i) \cdot C(n+i-2, i)$

$= (C(n+6,8)+C(n+5,7)+\cdots+C(n-2,0)) + (C(n+5,7)+\cdots+C(n-2,0)) + \cdots + C(n-2,0)$

$= C(n+7,8) + C(n+6,7) + \cdots + C(n-2,0)$

$= \sum_{i=1}^{8} C(n+i-1, i) + C(n-2,0) = \sum_{i=1}^{8} C(n+i-1, i) + C(n-1,0)$

$= \sum_{i=0}^{8} C(n+i-1, i) = C(n+8, 8)$

发现该结果后，突然意识到有一个别的方法能直接得出这个简洁答案

即在头尾处分别添加9和1，问题变成了 $(9-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_1-1)=8$

则该n位整数共有 $C(n+1+8-1, 8) = C(n+8, 8)$

1.19

解：同类物品之间没有区别，则只需为两人分配甲/乙/丙的数量，无需选择

假设A人分得 x 件甲类物品，y 件乙类物品，z 件丙类物品

$x+y+z=3n$，$0 \le x, y, z \le 2n$

先从 x 切入，当 $n \le x \le 2n$ 时，$y+z = 3n-x \le 2n$，对于 $\forall x$，y 从0取到 $3n-x$

则此时的分法有 $(3n-x+1)$ 种（对于固定 x）

该情况总的分法有 $\sum_{n}^{2n}(3n-x+1) = \frac{1}{2}(3n+2)(n+1)$

当 $0 \le x < n$ 时，$y+z = 3n-x > 2n$，对于 $\forall x$，y 从 $n-x$ 取到 $2n$

则此时的分法有 $(n+x+1)$ 种（对于固定 x）

该情况总的分法有 $\sum_{0}^{n-1}(n+x+1) = \frac{1}{2}n(3n+1)$

所以总的分法一共有 $\frac{1}{2}(3n+2)(n+1) + \frac{1}{2}n(3n+1) = 3n^2+3n+1$ 种

1.20

解：由于$(k+1)D>n$，余下部分中不会再出现子串$c_1c_2\cdots c_D$

除去k个子串$c_1c_2\cdots c_D$后，余下$n-kD$个字符中，字符c_i出现次数为f_i-D

将余下的$(n-kD)$个字符与k个已排好的子串一起排列，共有$(n-kD+k)!$种

考虑到相同的c_i，需要除以$\prod_{i=1}^{D}(f_i-k)!$去除内部排序

考虑到相同的$c_1c_2\cdots c_D$子串有k个，需要除以$k!$去除内部排序

所以子串$c_1c_2\cdots c_D$出现恰k次的字符串共有$\dfrac{(n-kD+k)!}{k!\cdot\prod_{i=1}^{D}(f_i-k)!}$个$(\forall i, f_i\geq k)$

如果$\exists i$使$f_i<k$，则这样的字符串不存在，共有0种

1.21

解：(1) 穿袜子先于鞋子，左脚先于右脚，则整体顺序为左袜-右袜-左鞋-右鞋

穿每一边的袜子或鞋子的顺序都是100只脚的全排列

则穿鞋袜的方案数为$(P(100,100))^4=(100!)^4$

(2) 每只脚袜子先于鞋子，每对脚左脚先于右脚，则每对脚可能有2种顺序：

左袜-右袜-左鞋-右鞋 / 左袜-左鞋-右袜-右鞋

将100对脚的4次操作(共400次)全排列，共有$(400)!$个方案

但由于每对脚的$P(4,4)=4!$种排列中只有2种符合要求，每对应除以$\frac{2}{4!}$

则穿鞋袜的方案数为$\dfrac{(400)!}{(\frac{1}{2}\cdot 4!)^{100}}=\dfrac{400!}{12^{100}}$

1.22

解：非负整数k满足$2^k\mid P(2n,n)=2n\cdot(2n-1)\cdots(n+1)$，$k$最大值为$n$，证明如下：

(1) 当$n=1$时，$2^k\mid P(2,1)=2$，k最大值为1，结论成立

(2) 假设当$n=m$时，满足$2^k\mid P(2n,n)$的k最大值为m，结论成立

则当$n=m+1$时，$P(2n,n)=P(2m+2,m+1)=\dfrac{P(2m,m)\cdot 2(m+1)\cdot(2m+1)}{m+1}$

$=2(2m+1)P(2m,m)$

由于满足$2^k\mid P(2m,m)$的k最大值为m，$P(2m,m)=A\cdot 2^m$，其中A不能被2整除

则$P(2m+2,m+1)=2(2m+1)\cdot A\cdot 2^m=2^{m+1}(2m+1)A$

由于$2m+1$为奇数，不能被2整除，A也不能被2整除

故满足$2^k\mid P(2m+2,m+1)$的k最大值为$m+1$，$n=m+1$时结论成立

如今各位同学早已学完 Catalan 数，上述结论实际上在 Catalan 数的母函数推导（参见教材 129 页）那里发挥了一点作用。

1.23

证：(1) 证明任意正整数在该进制下的表示存在

对于任意正整数 N，由于 $1=1!\le N\le N!$，所以存在正整数 m 使 $m!\le N<(m+1)!$

在找到符合条件的 m 后，用 $m!$ 对 N 进行整数除，得到递增进位制第 1 位

随后用小一级阶乘数对余数进行整数除，直至余数为 0，可得 N 的递增进位制表示

(2) 证明任意正整数在该进制下的表示唯一

由 (1) 可知，$N=\sum_{i=1}^{m} a_i\cdot i!$，N 的递增进位制表示为 $(a_m\cdots a_1)\uparrow$ $(a_m>0)$

假设 N 在递增进位制下存在另一表示 $(b_n\cdots b_1)\uparrow$ $(b_n>0)$

若 $n>m$，即 $n\ge m+1$，则 $N=b_n\cdot n!+\cdots+b_1\cdot 1!\ge b_n\cdot n!\ge(m+1)!$ 与 $N<(m+1)!$ 矛盾

若 $n\le m$，而 m 位及以内的递增进位制表示的最大值为 $m!-1$（不大于 $m!$ 的最大正整数）

即正整数 $1\sim m!-1$ 都有 m 位及以内的递增进位制表示

m 位及以内的递增进位制有 $m!-1$ 种不同表示（a_i 可取 $0\sim i$，除去前导 0/全 0）

且每一种表示都通过计算表示了唯一的一个正整数

则去除 $(b_n\cdots b_1)\uparrow$ 和 $(a_m\cdots a_1)\uparrow$ 2 个表示后，

$m!-3$ 个递增进位制只能表示 $m!-3$ 个正整数，

而除了 N 外还有 $m!-2$ 个正整数，都有对应的递增进位制表示，矛盾

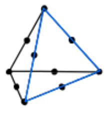
则任意正整数 N 在递增进位制下不存在另一种表示

综合 (1)(2) 可得，任意正整数在递增进位制下的表示唯一

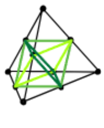
本题注意“唯一”的含义是有且仅有一种表示，二者均需证明。

1.24

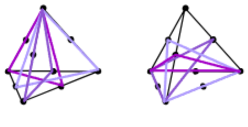
解：从 10 个点中选 4 个，共有 C_{10}^4 种方案，但需要减去从同一平面上选 4 点情况



首先是 4 个表面，每个面有 6 个点，则共有 $4C_6^4$ 种共面情况



然后是 3 个由边中点构成的面，共有 $3C_4^4$ 种共面情况



然后是 6 个由边上 3 点与对边中点构成的面，共有 $6C_4^4$ 种共面情况

则使 4 点不共面的方案数共有 $C_{10}^4-4C_6^4-3C_4^4-6C_4^4=210-60-3-9=141$ 种

进阶 B

1.25

设 $A_i \in S$ 且 $\min A_i = i$，则 A_i 的总个数为 C_{n-i}^{r-1}

即选取 $i \in A_i$，从剩下 $n-i$ 个大于 i 的数中选取 $r-1$ 个组成 A_i

故 $$\sum_{A\in S} \min A = \sum_{i=1}^{n-r+1} i \cdot C_{n-i}^{r-1} = \sum_{i=1}^{n-r+1} C_i^1 C_{n-i}^{r-1} \qquad ①$$

上式可转换为：一共有 $n+1$ 个位置，先选 1 个位置当隔板

再从隔板左侧选 1 个，右侧选 $r-1$ 个的总方案数

等价于 $n+1$ 个位置选 $r+1$ 个

即式① $= \binom{n+1}{r+1}$

1.26

p、dog、q 顺序已经确定，插入剩余 21 个字母的全排列中

方案数 $\frac{(21+3)!}{3!} = P(24, 21)$

1.27

解. 首先排 a、b、c、d、e 的位置，其方案可与在 $100-3-5-7-9=76$ 个元素中选择 5 个位置的方案建立一一映射（在 76 个元素中选取 5 个位置后，再分别在其中插入 3、5、7、9 个元素的空隙），方案数 $\binom{100-24}{5} = \binom{76}{5}$. 再排其它 95 个字母的位置，方案数 $\binom{95}{19\ 19\ 19\ 19\ 19} = \frac{95!}{(19!)^5}$. 综上，总方案数为 $\binom{76}{5}\frac{95!}{(19!)^5}$.

1.28

首先将 f、g、h、i、j 视为相同的小球，共95个.

a、b、c、d、e分别为5个隔板，插入95个小球中.

则有 $a_1+a_2+\cdots+a_6=95$.

由题意： $a_1\geq 0$, $a_2\geq 3$, $a_3\geq 5$, $a_4\geq 7$, $a_5\geq 9$, $a_6\geq 0$.

令 $b_1=a_1$, $b_2=a_2-3$, $b_3=a_3-5$, $b_4=a_4-7$, $b_5=a_5-9$, $b_6=a_6$

则 $b_1+b_2+\cdots+b_6=71$. $b_i\geq 0$.

此时方案有 C_{76}^{5} 种、

再考虑 f、g、h、i、j 不相同，对应的排列有 $\frac{95!}{(19!)^5}$.

则排列方案数为 $C_{76}^{5}\cdot\frac{95!}{(19!)^5}$.

1.29

（1）选择的数字互不相同

- 4个正数：$C(4,4)=1$
- 2正2负：$C(5,2)C(4,2)=60$
- 4个负数：$C(5,4)=5$

因此总共有66个方案。

（2）允许相同数字，那么是可重组合

- 4个正数：$\bar{C}(4,4)=C(7,4)=35$
- 2正2负：$\bar{C}(5,2)\bar{C}(4,2)=C(6,2)C(5,2)=15\times 10=150$
- 4个负数：$\bar{C}(5,4)=C(8,4)=70$

因此总共有255个方案。

本题不少同学在(1)问中用组合，在(2)问中用排列。题干不特别明确是否考虑顺序，当成组合或排列做都可以，但是先组合再排列这种不一致的行为一定是错的。

1.30

解. 进行质因数分解：$xyz = 1000000 = 2^6 \cdot 5^6$. 将 12 个质因数分配给 x, y, z（可以不分）：分配 6 个 2：插 2 个板，方案数 $\binom{8}{2} = 28$. 分配 6 个 5：插 2 个板，方案数 $\binom{8}{2} = 28$. 分配正负号：可以全为正数，也可以有两个负数，方案数 $1 + \binom{3}{2} = 4$. 总方案数 $28 \times 28 \times 4 = 3136$.

注意本题要求的是“整数解”而不是“非负整数解”，这是一个故意设置的陷阱。

1.31

n^{k+1}的意义是：n种不同的球，放入k+1个不同的盒子，每个盒子放1个球的方案数。

P(n,k)的意义是：n种不同的球，放入k个不同盒子，每个盒子放1个球，且各个盒子放的球种类不同，这样的方案数。

kP(n,k)的意义是：n种不同的球，放入k个不同盒子，每个盒子放1个球，且各个盒子放的球种类不同；对于第k+1个盒子，要求和前k个盒子里的某一个盒子放了相同种类的球。

因此$\frac{k \cdot P(n,k)}{n^{k+1}}$的意义是，第k+1个盒子是**第一次**与之前的盒子出现重复种类的球，而前k个盒子的球种类各不相同的概率。

而由抽屉原理可以知道，由于我们只有n种球，所以最多放到第n+1个盒子的时候，就必然会与之前的盒子放的球种类出现重复。因此k的取值应该是1到n。

所以考虑“第一次与之前盒子放的球的种类重复的盒子标号为k+1”这个随机事件，$k \in [1, n]$，所以概率总和应当为1，也即：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot P(n,k)}{n^{k+1}} = 1$$

1.32

1.32. 由题意，5、7、8的顺序必须为5、7、8.
记 1,2,3,4,6 的某个排列为 $a_1a_2a_3a_4a_5$、

①若 $a_1=6$，则 $a_1a_2a_3a_4a_5$确定后，1到8的全排列唯一确定，为 $a_1a_2 5 7 a_3 8 a_4a_5$. 此时共 $4!$ 个.

②若 $a_2=6$，则 $a_1a_2a_3a_4a_5$确定后，1到8的全排列有两种，即 $a_1a_2 5 7 a_3 8 a_4 a_5$ 与 $a_1 5 a_2 7 a_3 8 a_4 a_5$. 此时共 $2\times4!$ 个.

③若 6在a_3, a_4, a_5中，则 $a_1a_2a_3a_4a_5$确定后，1到8的全排列唯一确定，为 $a_1 5 a_2 7 a_3 8 a_4 a_5$. 此时共 $3\times4!$ 个.

∴ 所有排列方案数为 $4!+2\times4!+3\times4! = 144$ 种.

1.33

Step 1. 从m个盒子中选不相邻的n个. 记第i个盒子的位置为x_i, 由盒子均不相邻, $x_i - x_{i-1} \geq 2$, $x_1 \geq 1$, $x_n \leq m$.

$(x_1-1)+(x_2-x_1-2)+\cdots+(x_n-x_{n-1}-2) = x_n-2n+1 \leq m-2n+1$. 非负整数解 $C_{m-2n+1+n}^{m-2n+1} = C_{m-n+1}^{n}$ 个.

Step 2. 将r个球放进n个盒子中, 每盒至少k个,

$(x_1-k)+\cdots+(x_n-k) = r-nk$. 非负整数解 $C_{r-nk+n-1}^{r-nk}$ 个.

总 $C_{m-n+1}^{n} \cdot C_{r-nk+n-1}^{r-nk}$ 种方法.

1.34

1.34 解: 不考虑回文串时, 方案数为 $A=\frac{n!}{\prod_{k=1}^{26}(a_k!)}$. 假设至少有2种字母.

① 若 a_k $(k=1,2,\cdots,26)$ 都为偶数, 则可用 $\sum_{k=1}^{26}\frac{a_k}{2}=\frac{n}{2}$ 构造回文串前缀.

回文串数为 $B=\frac{\frac{n}{2}!}{\prod_{k=1}^{26}(\frac{a_k}{2}!)}$

则总符合要求的串数为 $A-B=\frac{n!}{\prod_{k=1}^{26}(a_k!)}-\frac{(\frac{n}{2})!}{\prod_{k=1}^{26}(\frac{a_k}{2}!)}$

② 若有一个 a_p 为奇数, 其他 a_k $(k=1,2,\cdots,26, k\neq p)$ 都为偶数,

则要构造回文串, 第 $\frac{n+1}{2}$ 个字符必然是p, 否则左右不对称, 不回文

因此回文串数 $C=\frac{\frac{n-1}{2}!}{(\frac{a_p-1}{2})!\cdot\prod_{k=1,k\neq p}^{26}(\frac{a_k}{2}!)}$

总符合要求的串数为 $A-C=\frac{n!}{\prod_{k=1}^{26}(a_k!)}-\frac{\frac{n-1}{2}!}{(\frac{a_p-1}{2})!\prod_{k=1,k\neq p}^{26}(\frac{a_k}{2}!)}$

③ 若有多于一个 a_k 为奇数, 则必然构不成回文串,

符合要求的串数为 $A=\frac{n!}{\prod_{k=1}^{26}(a_k!)}$

1.35

1.35 将角块和棱块分类讨论，角块共有 8 个，棱块共有 12 个，角块的方向有 3 种，棱块的方向有 2 种，由于心块没有拆下，所以装回的过程中不会出现重复的情况，能复原的概率是 $\frac{1}{12}$，因此，合法状态数目为 $8! * 3^8 * 12! * 2^{12} * \frac{1}{12}$种。

1.36

（1）

- 147个球，4个不同的盒子，插板法$C_{147+4-1}^{4-1} = 551300$

（2）

- 147个球，5个不同的盒子(ABCD+none)，插板法$C_{147+5-1}^{5-1} = 20811575$

（3）

- 147人至少一半是74人，默认74人选C后剩余73人
- 73个球，5个不同的盒子，插板法$C_{73+5-1}^{5-1} = 1353275$