

# Калибровка камеры по плоскому шаблону

## Введение

Калибровка камеры позволяет восстановить количественную связь между трёхмерными координатами точек сцены и их двумерными проекциями на изображении. Эта связь определяется параметрами камеры, включающими внутренние характеристики (фокусное расстояние, положение главной точки), а также внешние параметры, описывающие положение камеры в пространстве.

В данной лабораторной работе рассматривается классический метод калибровки по плоскому шаблону. В основе метода лежит оценка гомографий между плоскостью шаблона и изображением, после чего внутренние параметры камеры восстанавливаются с использованием линейных ограничений, предложенных Чжаном.

## Геометрическая модель камеры

В pinhole-модели проекция трёхмерной точки сцены на изображение описывается уравнением

$$\lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = K [R \mid t] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Матрица внутренних параметров камеры имеет вид

$$K = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Здесь  $f_x$  и  $f_y$  — фокусные расстояния в пикселях, а  $(c_x, c_y)$  — координаты главной точки изображения. Параметр сдвига осей (skew) считается равным нулю.

Матрица  $R \in SO(3)$  и вектор  $t \in \mathbb{R}^3$  описывают ориентацию и положение камеры относительно мировой системы координат. В программных библиотеках вращение часто представляется в виде вектора Родрига, однозначно соответствующего матрице  $R$ .

**Место для иллюстрации:** геометрия pinhole-модели и системы координат.

## Модель искажений

Пусть  $(x, y)$  — нормализованные координаты точки в системе координат камеры:

$$x = \frac{X_c}{Z_c}, \quad y = \frac{Y_c}{Z_c}. \quad (3)$$

Радиальная дисторсия описывается выражением

$$x_r = x \left( 1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 \right), \quad (4)$$

$$y_r = y \left( 1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 \right), \quad (5)$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2. \quad (6)$$

Тангенциальная дисторсия имеет вид

$$x_d = x_r + 2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2), \quad (7)$$

$$y_d = y_r + p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2xy. \quad (8)$$

Данные параметры описывают отклонения реальной оптической системы от идеальной модели и особенно заметны на периферии изображения.

**Место для иллюстрации:** визуализация радиальной и тангенциальной дисторсии.

## Калибровка камеры средствами OpenCV

Алгоритмы калибровки камеры основаны на минимизации ошибки репроекции. Под оператором проекции

$$\pi(K, R, t, X)$$

понимается отображение трёхмерной точки  $X = (X, Y, Z)$  в двумерную точку изображения с использованием уравнения (1) и модели дисторсии.

Формально оператор  $\pi(\cdot)$  включает следующие этапы:

- преобразование точки из мировой системы координат в систему координат камеры;
- перспективное деление для получения нормализованных координат;
- применение модели радиальной и тангенциальной дисторсии;
- переход к пиксельным координатам с использованием матрицы  $K$ .

Ошибка репроекции определяется как

$$e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\| \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} - \pi(K, R, t, X_i) \right\|, \quad (9)$$

где  $(u_i, v_i)$  — наблюдаемые координаты точки на изображении,  $\pi(K, R, t, X_i)$  — координаты той же точки, полученные путём проекции.

## Гомография и метод DLT

Если все точки шаблона лежат в плоскости  $Z = 0$ , проекционное уравнение (1) упрощается и принимает вид

$$\lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где:

- $(X, Y)$  — координаты точки на плоскости шаблона;
- $(u, v)$  — координаты соответствующей точки на изображении;
- $H$  — матрица гомографии размера  $3 \times 3$ , определяемая с точностью до масштаба.

Матрица гомографии записывается в виде

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{bmatrix}.$$

Каждое соответствие  $(X, Y) \leftrightarrow (u, v)$  задаёт два линейных уравнения относительно элементов  $H$ . Объединяя уравнения для всех точек, получается однородная линейная система

$$Ah = 0, \quad (11)$$

где

$$h = [h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4 \ h_5 \ h_6 \ h_7 \ h_8 \ h_9]^\top$$

— вектор, составленный из элементов матрицы  $H$  построчно.

Матрица  $A$  имеет размер  $2N \times 9$ , где  $N$  — число соответствий точек. Поскольку система (11) является однородной, ненулевое решение существует только с точностью до масштабного множителя.

Решение системы (11) определяется как правый сингулярный вектор матрицы  $A$ , соответствующий наименьшему сингулярному значению. Для повышения численной устойчивости перед построением матрицы  $A$  выполняется нормализация координат точек.

## Метод Чжана

Пусть для каждого изображения плоского шаблона вычислена гомография  $H_i$ . Связь гомографии с параметрами камеры задаётся соотношением

$$H_i = K[r_{i1} \ r_{i2} \ t_i], \quad (12)$$

где:

- $K$  — матрица внутренних параметров камеры;
- $r_{i1}, r_{i2}$  — первые два столбца матрицы вращения  $R_i$ ;
- $t_i$  — вектор переноса для  $i$ -го изображения.

Поскольку столбцы матрицы вращения ортонормированы, выполняются условия

$$r_{i1}^\top r_{i2} = 0, \quad \|r_{i1}\| = \|r_{i2}\|. \quad (13)$$

Эти условия не зависят от внешних параметров и могут быть переписаны в виде линейных ограничений на элементы матрицы

$$B = K^{-T} K^{-1}. \quad (14)$$

Для каждой гомографии формируются два уравнения:

$$v_{12}^\top b = 0, \quad (v_{11} - v_{22})^\top b = 0. \quad (15)$$

Объединяя ограничения для всех изображений, получается система

$$Vb = 0, \quad (16)$$

которая решается методом SVD. После восстановления матрицы  $B$  матрица внутренних параметров  $K$  вычисляется аналитически.

Заключительным этапом является нелинейная оптимизация параметров камеры путём минимизации ошибки репроекции (9).

**Алгоритм метода Чжана:**

1. Для каждого изображения шаблона:
  - 1.1. вычислить гомографию  $H_i$  методом DLT;
  - 1.1. нормализовать  $H_i$ .
2. Для каждой гомографии сформировать линейные ограничения на элементы матрицы  $B = K^{-T} K^{-1}$ .
3. Объединить все ограничения в линейную систему  $Vb = 0$ .
4. Найти решение системы с помощью SVD.
5. Восстановить матрицу внутренних параметров  $K$  из найденной матрицы  $B$ .
6. Выполнить нелинейную оптимизацию параметров камеры путём минимизации ошибки репроекции.

**Место для иллюстрации:** результат устранения дисторсии до и после оптимизации.

## **Рекомендуемые источники**

- OpenCV Camera Calibration Documentation [https://docs.opencv.org/4.x/dc/dbb/tutorial\\_py\\_calibration.html](https://docs.opencv.org/4.x/dc/dbb/tutorial_py_calibration.html)
- Camera Parameters (video) <https://www.youtube.com/watch?v=uHApDqH-8UE>
- DLT Method (video) <https://www.youtube.com/watch?v=3NcQbZu6xt8>
- Zhang's Method (video) <https://www.youtube.com/watch?v=-9He7Nu3u8s>
- Zhang's Method (article) <https://sangillee.com/2025-07-27-calibrating-cameras-zhang/>
- Z. Zhang, “A Flexible New Technique for Camera Calibration”, 1999.