

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ РАДИОФИЗИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ**

Кафедра информатики и компьютерных систем

С. Г. Мулярчик, В. В. Хомич

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

**Методические указания
к лабораторному практикуму**

В двух частях

**Часть 1
Задачи высшей математики**

**Минск
2019**

УДК 519.6 (076.5)
ББК 22.19я73
М90

Рекомендовано
советом факультета радиофизики
и компьютерных технологий
30 апреля 2019 г., протокол № 10

Р е ц е н з е н т
кандидат физико-математических наук,
доцент *Ю. И. Воротницкий*

Мулярчик, С. Г.
М90 Численные методы : метод. указания к лаб. практикуму.
В 2 ч. Ч. 1. Задачи высшей математики / С. Г. Мулярчик,
В. В. Хомич. – Минск : БГУ, 2019. – 39 с.

Приводится описание пяти лабораторных работ по изучению методов численного решения систем линейных алгебраических уравнений, систем нелинейных алгебраических уравнений, систем обыкновенных дифференциальных уравнений, приближения функций, вычисления определенных интегралов.

Для студентов специальностей 1-31 04 02 «Радиофизика», 1-31 04 03 «Физическая электроника», 1-31 04 04 «Аэрокосмические радиоэлектронные и информационные системы и технологии», 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность», 1-31 03 07 «Прикладная информатика».

УДК 519.6 (076.5)
ББК 22.19я73

© БГУ, 2019

Цель вычислений – понимание,
а не числа.

Р. В. Хемминг

ПРЕДИСЛОВИЕ

Лабораторный практикум по курсу «Численные методы» состоит из двух частей: часть 1: Задачи высшей математики; часть 2: Уравнения математической физики.

Первая часть практикума, включает работы по изучению методов численного решения типовых, наиболее часто встречающихся на практике, задач высшей математики. К типовым задачам высшей математики относятся: решение систем линейных алгебраических уравнений, решение систем нелинейных алгебраических уравнений, решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений, приближение функций, вычисление определенных интегралов.

Выполнение каждой работы сводится к написанию программы, ее отладке, исследованию соответствующего численного метода на задачах, предложенных преподавателем. Все программы оформляются в виде отдельных процедур, образуя личную библиотеку студента.

Лабораторный практикум построен таким образом, что результаты ранее выполненных работ могут использоваться в последующих работах. Поэтому каждую программу необходимо доводить до отлаженного программного продукта. Программы должны быть оптимизированы по эффективности вычислений (требуемой памяти, количеству операций), иметь защиту от ошибок в задании исходных данных, защиту от закливания, обеспечивать настройку программы на задачу с помощью системы параметров. Возможные языки программирования – C, C++.

Лабораторная работа № 1

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: изучить, программно реализовать на языке высокого уровня, отладить и исследовать на тестовых задачах, предложенных преподавателем, метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу и метод \bar{LDL}^T - факторизации.

Метод Гаусса

К необходимости решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) приводят многие прикладные задачи физики, радиофизики, электроники, других областей науки и техники. По этой причине разработке и исследованию методов решения СЛАУ уделяется повышенное внимание.

Для решения СЛАУ используются как прямые методы, позволяющие получить в случае отсутствия ошибок округления точное решение за конечное, заранее известное количество арифметических операций, так и итерационные методы. Итерационные методы используются для решения СЛАУ большого порядка, а также для уточнения решения, полученного прямыми методами.

Из прямых методов популярным у вычислителей является метод Гаусса (исключения переменных) с выбором главного (максимального по модулю) элемента в столбце. Поиск главного элемента позволяет, с одной стороны, ограничить рост коэффициентов на каждом шаге исключения и, следовательно, уменьшить влияние ошибок округления на точность решения, с другой, обеспечить для невырожденных систем выполнение условия $a_{kk} \neq 0$ (отсутствие аварийных остановов вследствие деления на нуль).

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Процесс ее решения методом Гаусса делится на два этапа, называемых соответственно прямым и обратным ходом.

На первом этапе система (1.1) путем последовательного исключения переменных x_1, x_2, \dots, x_n сводится к эквивалентной системе с верхней треугольной матрицей коэффициентов с единичной диагональю:

$$\begin{aligned}
x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \dots + u_{1,n-1}x_{n-1} + u_{1n}x_n &= q_1, \\
x_2 + u_{23}x_3 + \dots + u_{2,n-1}x_{n-1} + u_{2n}x_n &= q_2, \\
&\dots \\
x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n &= q_{n-1}, \\
x_n &= q_n.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Исключение переменной x_k (k -ый шаг прямого хода Гаусса) включает вычисление k -ой строки треугольной матрицы:

$$u_{kj} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}, \quad j = \overline{k+1, n}, \tag{1.3}$$

k -го свободного члена:

$$q_k = b_k^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}, \tag{1.4}$$

преобразование уравнений системы (1.1) с номерами $k+1, k+2, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} u_{kj}; \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} q_k, \\
i &= \overline{k+1, n}; \quad j = \overline{k+1, n}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

В соотношениях (1.5) переменной внутреннего цикла является j , переменной внешнего цикла – i . Полное число шагов, за которое выполняется прямой ход Гаусса, равно n , т. е. расчеты по формулам (1.3) – (1.5) выполняются для $k = \overline{1, n}$.

На втором этапе (обратный ход Гаусса) решают систему (1.2):

$$x_n = q_n; \quad x_k = q_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j; \quad k = \overline{n-1, 1}, \tag{1.6}$$

последовательно определяя неизвестные x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 .

Описание алгоритма

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу выглядит следующим образом:

Алгоритм 1.1

1. Присвоить компонентам массива перестановок $IOR(k)$ исходные значения:

$$IOR(k) = k, \quad k = \overline{1, n},$$

принять, после этого, $k = 1$.

2. Найти индекс p , для которого

$$|a_{mk}| \geq |a_{lk}|, \quad m = IOR(p), \quad l = IOR(i), \quad i = \overline{k, n}.$$

Это можно сделать следующим образом:

2.1. Положить $AKK=0$;

2.2. Вычислить в цикле ($i = \overline{k, n}$):

2.2.1. $l = IOR(i)$;

2.2.2. Если $|a[l, k]| < AKK$, то перейти к п. 2.2.1;

2.2.3. $M = l$; $p = i$; $AKK = |a[l, k]|$.

3. Поменять местами значения $IOR(k)$ и $IOR(p)$, если $p \neq k$:

$$IOR(p) = IOR(k); \quad IOR(k) = M$$

и выбрать ведущий элемент

$$AMAIN = a[M, k].$$

Если $AMAIN = 0$, то выйти из программы с информацией об ошибке ($IER = 1$).

4. Исключить переменную x_k с помощью соотношений (1.3) – (1.5) (прямой ход Гаусса):

4.1. $a[M, j] = a[M, j] / AMAIN$; $j = \overline{k, n}$;

4.2. $b[M] = b[M] / AMAIN$;

4.3. Вычислить в цикле по i ($i = \overline{k+1, n}$):

4.3.1. $l = IOR(i)$;

4.3.2. $a[l, j] = a[l, j] - a[l, k]a[M, j]$; $j = \overline{k+1, n}$;

4.3.3. $b[l] = b[l] - a[l, k]b[M]$.

5. Увеличить значение k на единицу и вернуться к п. 2, если $k < n$, иначе завершить прямой ход, вычислив

$$l = IOR[n]; \quad b[l] = b[l] / a[l, n]; \quad x[n] = b[l].$$

Если $a[l, n] = 0$, то выйти из программы с сообщением $IER = 1$.

6. Выполнить в цикле для $k = \overline{n-1, 1}$ (обратный ход Гаусса):

$$l = IOR[k]; \quad x[k] = b[l] - \sum_{j=k+1}^n a[l, j]x[j].$$

Сделаем комментарии к описанному алгоритму. Выбор ведущего элемента a_{kk} предполагает перестановку строк системы (1.1). Программно это нетрудно сделать, переставляя соответствующие строки матрицы коэффициентов и соответствующие компоненты вектора свободных членов. Подобную операцию можно и не выполнять, если ввести вспомогательный одномерный массив перестановок IOR . Первоначально в пункте 1 алгоритма его элементам $IOR(k)$, $k = \overline{1, n}$, присваиваются исходные значения $IOR(k) = k$. Обратиться к элементу a_{kj} матрицы коэффициентов с привлечением массива перестановок, значит использовать элемент $a[l, j]$, $l = IOR(k)$, так как первоначально $IOR(k) = k$. Если $IOR(k) = p$, то обращение к элементам

$a[l, j], l = IOR[k]$, приводит к использованию коэффициентов p -го уравнения системы. Следовательно, вместо перестановок строк матрицы коэффициентов достаточно поменять местами $IOR[k]$ и $IOR[p]$. Такой подход реализован в приведенном алгоритме при выборе ведущего элемента.

Выбор ведущего элемента по столбцу обеспечивает выполнение условия $a_{kk} \neq 0$, если матрица решаемой системы не вырождена. Соотношение $IER=1$ в пунктах 3 и 5 алгоритма свидетельствует о вырожденности матрицы.

Метод $\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{L}}^T$ - факторизации

Для систем линейных алгебраических уравнений с симметричной матрицей \mathbf{A} разработан значительно более эффективный метод численного решения – метод $\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{L}}^T$ -факторизации.

Решение СЛАУ

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (1.7)$$

методом $\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{L}}^T$ -факторизации, где $\mathbf{A} - [n \times n]$ -симметричная матрица, выполняется согласно следующей схеме:

1. Формирование $\bar{\mathbf{L}}$ (нижней треугольной с единичной диагональю) и \mathbf{D} (диагональной) матриц.
2. Решение СЛАУ с нижней треугольной матрицей $\bar{\mathbf{L}}$:

$$\bar{\mathbf{L}}\mathbf{y} = \mathbf{b}. \quad (1.8)$$

3. Решение СЛАУ с диагональной матрицей \mathbf{D} :

$$\mathbf{Dz} = \mathbf{y}. \quad (1.9)$$

4. Решение СЛАУ с верхней треугольной матрицей $\bar{\mathbf{L}}^T$:

$$\bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{x} = \mathbf{z} \quad (1.10)$$

Наиболее затратная по времени выполнения часть схемы – формирование матриц $\bar{\mathbf{L}}$ и \mathbf{D} .

Формирование матрицы $\bar{\mathbf{L}}$ осуществляется последовательно по столбцам (цикл по $j = \overline{1, n}$) посредством

1.1. вычисления столбца аналогичной длины вспомогательных величин

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \bar{a}_{ik} \bar{l}_{jk}, \quad i = \overline{j+1, n}$$

(при $j=1, \bar{a}_{ij} = a_{ij}$; при $j=n, \bar{a}_{ij}$ не вычисляется), которые сохраняются на месте соответствующей строки матрицы \mathbf{A} ,

1.2. диагонального элемента d_{jj} матрицы \mathbf{D} :

$$d_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \bar{a}_{jk} \bar{l}_{jk},$$

(при $j=1$, $d_{11} = a_{11}$), сохраняется на месте диагонального элемента матрицы **A**,

1.3. искомого столбца матрицы $\bar{\mathbf{L}}$:

$$\bar{l}_{ij} = \bar{a}_{ij} / d_{jj}, \quad i = \overline{j+1, n},$$

сохраняется на месте столбца матрицы **A**.

Решение СЛАУ с матрицей специальной структуры (пп. 2, 3, 4 схемы) осуществляется следующим образом:

2. в случае нижней треугольной матрицы $\bar{\mathbf{L}}$ с единичной диагональю:

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} \bar{l}_{ik} y_k, \quad i = \overline{2, n}$$

(при $i=1$, $y_1 = b_1$), сохраняется на месте вектора правой части **b** исходной системы;

3. в случае диагональной матрицы **D**:

$$z_i = y_i / d_{ii}, \quad i = \overline{1, n},$$

сохраняется снова на месте вектора **b**;

4. в случае верхней треугольной матрицы $\bar{\mathbf{L}}$:

$$x_n = z_n; \quad x_i = z_i - \sum_{k=i+1}^n \bar{l}_{ki} x_k; \quad i = \overline{n-1, 1}.$$

Метод $\bar{\mathbf{L}}\mathbf{D}\bar{\mathbf{L}}^T$ -факторизации является устойчивым к ошибкам округления и не требует при реализации никаких перестановок строк и столбцов, по времени решения задачи приблизительно вдвое эффективнее метода Гаусса.

Задание

1. Написать, отладить и исследовать на задачах (табл. 1.1), предложенных преподавателем (на двух задачах, одна из которых соответствует позициям 1–20, вторая – позиции 21, вариативность последней достигается заданием параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – собственные числа матрицы системы), программу численного решения систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

2. Вычислить для каждой задачи вектор невязки (для этого до начала выполнения прямого хода Гаусса матрицу **A** и вектор **b** задачи необходимо сохранить)

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b},$$

где $\tilde{\mathbf{x}}$ – решение исходной задачи методом Гаусса, и вычислить его норму:

$$\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} |F_i|.$$

3. Решить методом Гаусса вспомогательную систему

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}},$$

(ее решение методом Гаусса обозначим через $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}$) и оценить относительную погрешность

$$\delta = \frac{\|\tilde{\tilde{\mathbf{x}}} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|} = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |\tilde{\tilde{x}}_i - \tilde{x}_i|}{\max_{1 \leq i \leq n} |\tilde{x}_i|},$$

4. Написать, отладить и исследовать на тестовой задаче (табл. 1.1, позиция 21) с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, предложенными преподавателем ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – собственные числа симметричной положительно определенной матрицы системы, значения которых можно задать, например, такими: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10^3, \lambda_3 = 10^6$), программу численного решения систем линейных алгебраических уравнений методом $\bar{\mathbf{LDL}}^T$ -факторизации.

Содержание электронного отчета

1. Тексты программ.
2. Задачи, результаты их решения, вычисленные значения нормы вектора невязки и оценки относительных погрешностей.

Таблица 1.1

Задачи

№ п/п	Матрица коэффициентов A			Вектор b
1	6	13	-17	2
	13	29	-38	4
	-17	-38	50	-5
2	1	2	1	1
	-1	-2	2	1
	0	1	1	2
3	2.30	5.70	-0.80	-6.49
	3.50	-2.70	5.30	19.20
	1.70	2.30	-1.80	-5.09
4	2.75	1.78	1.11	15.71
	3.28	0.71	1.15	43.78
	1.15	2.70	3.58	37.11

Продолжение табл. 1.1

5	8.64	1.71	5.42		10.21
	-6.39	4.25	1.84		3.41
	4.21	7.92	-3.41		12.29
6	21.547	-95.510	-96.121		-49.930
	10.223	-91.065	-7.343		-12.465
	51.218	12.264	86.457		60.812
7	2.60	-4.50	-2.00		19.07
	3.00	3.00	4.30		3.21
	-6.00	3.50	3.00		-18.25
8	2.31	31.49	1.52		40.95
	4.21	22.42	3.85		30.24
	3.49	4.85	28.72		42.81
9	2.50	-3.00	4.60		-1.05
	-3.50	2.60	1.50		-14.46
	-6.50	-3.50	7.30		-17.73
10	0.14	0.24	-0.84		1.11
	1.07	-0.83	0.56		0.48
	0.64	0.43	-0.38		-0.83
11	2.74	-1.18	3.17		2.18
	1.12	0.83	-2.16		-1.15
	0.81	1.27	0.76		3.23
12	1.80	2.50	4.60		2.20
	3.10	2.30	-1.20		3.60
	4.51	-1.80	3.60		-1.70
13	2.0	1.0	-0.1	1.0	1.0
	0.4	0.5	4.0	-8.5	2.0
	0.3	-1.0	1.0	5.2	3.0
	1.0	0.2	2.5	-1.0	-1.0
14	2.21	3.65	1.69	6.99	-8.35
	8.30	2.62	4.10	1.90	-10.65
	3.92	8.45	7.78	2.46	12.21
	3.77	7.21	8.04	2.28	15.45
15	3.81	0.25	1.28	0.75	4.21
	2.25	1.32	4.58	0.49	6.47
	5.31	6.28	0.98	1.04	2.38
	9.39	2.45	3.35	2.28	10.48
16	7.90	5.60	5.70	-7.20	6.68
	8.50	-4.80	0.80	3.50	9.95
	4.30	4.20	-3.20	9.30	8.60
	3.20	-1.40	-8.90	3.30	1.00

Окончание табл. 1.1

17	0.1582	1.1675	0.1768	0.1871	1.6471
	0.1968	0.2071	1.2168	0.2271	1.7471
	0.2368	0.2471	0.2568	1.2671	1.8471
	1.1161	0.1254	0.1397	0.1490	1.5471
18	4.11	-1.26	-5.99	1.29	-0.75
	-1.26	2.00	4.00	0.00	1.08
	3.18	-1.97	0.49	-1.00	3.38
	1.29	3.81	-1.56	0.00	0.87
19	1	1	1	1	10
	1	2	-2	3	11
	2	0	1	0	5
	3	1	2	2	19
20	2	3	11	5	2
	1	1	5	2	1
	2	1	3	2	-3
	1	1	3	4	-3

№ п/п	Матрица коэффициентов A			Вектор b
21	$2\lambda_1 + 4\lambda_2$	$2(\lambda_1 - \lambda_2)$	$2(\lambda_1 - \lambda_2)$	$-4\lambda_1 - 2\lambda_2$
	$2(\lambda_1 - \lambda_2)$	$2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3$	$2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3$	$-4\lambda_1 + \lambda_2 + 9\lambda_3$
	$2(\lambda_1 - \lambda_2)$	$2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3$	$2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3$	$-4\lambda_1 + \lambda_2 - 9\lambda_3$

Лабораторная работа № 2

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: изучить и программно реализовать на языке высокого уровня метод Ньютона, исследовать его точность и эффективность на тестовых задачах.

Метод Ньютона

Многие прикладные задачи радиофизики и электроники требуют решения систем нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ)

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

...

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

или в векторной форме

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор-столбец переменных, $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ – вектор-столбец функций, R^n – n -мерное векторное пространство.

Для численного решения таких систем используются итерационные методы, сущность которых состоит в построении последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, сходящейся в отсутствие ошибок округления при $k \rightarrow \infty$ к точному решению \mathbf{x}^* .

Качество итерационных методов оценивают по скорости сходимости, определяя ее как степень уменьшения нормы вектора погрешности при выполнении одного итерационного шага:

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq q \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^p,$$

где q – коэффициент сжатия, p – порядок метода. Если $p = 1$, то итерационный метод имеет линейную сходимость, при $p = 2$ – квадратичную сходимость.

Наиболее часто применяемым на практике при решении систем нелинейных алгебраических уравнений является метод Ньютона, который сочетает в себе квадратичную сходимость с удобством реализации. Он основан на линеаризации системы (2.1) с помощью разложения $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ в ряд Тейлора.

Предположим, что известно k -ое приближение \mathbf{x}^k к точному решению \mathbf{x}^* системы (2.1). Следующее $(k+1)$ -ое приближение в методе Ньютона вычисляется как

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k, \quad (2.2)$$

при этом вектор поправки $\Delta \mathbf{x}^k$ находится путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^k), \quad (2.3)$$

где \mathbf{J} – $[n \times n]$ -матрица Якоби, определяемая следующим образом:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \cdots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \partial f_n / \partial x_2 & \cdots & \partial f_n / \partial x_n \end{bmatrix}.$$

На каждом шаге итерационного ньютоновского процесса необходимо вычислить вектор невязки $\mathbf{F}(\mathbf{x}^k)$, матрицу Якоби $\mathbf{J}(\mathbf{x}^k)$, решить систему линейных алгебраических уравнений (2.3) относительно вектора - поправки $\Delta \mathbf{x}^k$, определить новое приближение \mathbf{x}^{k+1} по уточняющей формуле (2.2).

Критерием завершения итерационного процесса является одновременное выполнение условий:

$$\delta_1 \leq \varepsilon_1 \quad \text{и} \quad \delta_2 \leq \varepsilon_2, \quad (2.4)$$

где

$$\delta_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(\mathbf{x}^k)|, \\ \delta_2 = \begin{cases} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{k+1} - x_i^k|, & |x_i^{k+1}| < 1, \\ \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{x_i^{k+1}} \right|, & |x_i^{k+1}| \geq 1, \end{cases}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – константы, определяющие погрешность решения (они задаются в качестве исходных данных). Эти условия свидетельствуют о том, что в точке приближенного решения задачи становятся меньше заданных как норма вектора невязки, так и норма вектора изменения решения на одной итерации.

Для предотвращения закливания следует задать также предельное число итераций, по достижению которого необходимо принудительно завершить вычисления с сообщением $IER = 2$. Причиной закливания может быть погрешность решения линейной системы,

не позволяющая достичь требуемую в соответствии с условием (2.4) точность.

Описание алгоритма

Алгоритм решения систем нелинейных алгебраических уравнений методом Ньютона реализуется следующим образом:

Алгоритм 2.1

1. Ввести начальное приближение \mathbf{x}^0 , параметры ε_1 и ε_2 , предельное число итераций NIT и положить $k = 1$.
2. Вывести на экран шапку таблицы, содержащую информацию о сходимости метода: номер итерации, δ_1 и δ_2 .
3. Вычислить вектор невязки:

$$\mathbf{F}^k = \mathbf{F}(\mathbf{x}^k).$$

4. Вычислить матрицу Якоби:

$$\mathbf{J}^k = \mathbf{J}(\mathbf{x}^k).$$

5. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{J}^k \Delta \mathbf{x}^k = -\mathbf{F}^k.$$

6. Уточнить решение:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k.$$

7. Вычислить по формулам (2.4) и вывести на экран текущие значения δ_1 и δ_2 , текущий номер итерации.
8. Проверить критерий (2.4) завершения итерационного процесса. Если этот критерий выполняется, то выйти из программы.
9. Проверить условие $k \geq NIT$. Если это условие имеет место, то выйти из итерационного процесса с сообщением $IER = 2$.
10. Положить $k = k + 1$ и перейти к п. 3.

Задание

1. Написать, отладить и исследовать на задаче, предложенной преподавателем (табл. 2.1), программу численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений методом Ньютона. Вычисления выполнить для $\varepsilon_1 = 10^{-9}$, $\varepsilon_2 = 10^{-9}$ от начального приближения, приведенного в таблице в порядке x_1^0, x_2^0, \dots .
2. Задание п.1 следует осуществить, реализовав двумя способами вычисления матрицы Якоби. Первый – аналитически, посредством дифференцирования функций $f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$, по аргументам x_j , $j = \overline{1, n}$, определить вид функций элементов матрицы. Значения

этих функций вычислить в программе, на итерациях метода, формируя таким образом текущую матрицу Якоби \mathbf{J}^k . Второй – матрица Якоби \mathbf{J}^k на текущей k -ой итерации вычисляется численно конечно-разностным методом:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)^k \approx \frac{f_i(x_1^k, \dots, x_{j-1}^k, x_j^k + \Delta x_j^k, x_{j+1}^k, \dots, x_n^k) - f_i(x_1^k, \dots, x_n^k)}{\Delta x_j^k},$$

$$i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n},$$

Здесь $\Delta x_j^k = M x_j^k$, где M – относительное приращение x_j^k .

3. Сравнить результаты решения СНАУ при следующих значениях параметра M : 0,01; 0,05; 0,1.

Содержание электронного отчета

1. Текст программы.
2. Задача, результаты ее решения, характеристики $\delta_1(k)$, $\delta_2(k)$, представленные таблично.

Таблица 2.1

Задачи

№ п/п	Система уравнений	Начальное приближение
1	$\ln\left(1 + \frac{x_1 + x_2}{5}\right) - \sin \frac{x_2}{3} - x_1 + 1.1 = 0;$ $\cos \frac{x_1 x_2}{6} - x_2 + 0.5 = 0$	(1; 1)
2	$x_1 - x_2 - 6 \lg x_1 - 1 = 0;$ $x_1 - 3x_2 - 6 \lg x_2 - 2 = 0$	(0.5; 0.2)
3	$x_1^2 x_2^2 - 3x_1^2 - 6x_2^3 + 8 = 0; \quad x_1^4 - 9x_2 + 2 = 0$	(-1.5; 1.5) (-1; 1)
4	$\sin x_1 - x_2 = 1.32; \quad \cos x_2 - x_1 = -0.85$	(1; 0)
5	$x_1^3 + x_2^3 - 6x_1 + 3 = 0;$ $x_1^3 - x_2^3 - 6x_2 + 2 = 0$	(1; 1) (2; 1.5) (-3; -1.5)
6	$2x_1^3 - x_2^2 - 1 = 0; \quad x_1 x_2^3 - x_2 - 4 = 0$	(1; 1)
7	$\cos(0.4x_2 + x_1^2) + x_2^2 + x_1^2 - 1.6 = 0;$ $1.5x_1^2 - x_2^2 / 0.36 - 1 = 0$	(1; -1) (-1; 1)

8	$2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1 + 1 = 0;$ $x_1 + 3 \lg x_1 - x_2^2 = 0$	(3; 2) (3; -2)
9	$1.5x_1^3 - x_2^2 - 1 = 0; \quad x_1x_2^3 - x_2 - 4 = 0$	(1; 1)
10	$\sin(x_1 + 1) - x_2 = 1; \quad 2x_1 + \cos x_2 = 2$	(1; 1)
11	$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0; \quad x_1x_2^3 - x_2 - 3 = 0$	(1; 1) (-1; -1)
12	$x_1^2 - x_2 + 1 = 0; \quad x_1 - \cos(\frac{\pi}{2}x_2) = 0$	(1; 0)
13	$x_1^7 - 5x_1^2x_2^4 + 1510 = 0; \quad x_2^3 - 3x_1^4x_2 - 105 = 0$	(1; 1) (1; -1)
14	$\operatorname{tg}(x_1x_2 + 0.2) - x_1^2 = 0; \quad 0.5x_1^2 + 2x_2^2 = 1$	(1; 1)
15	$x_1^3 - x_2^2 - 1 = 0; \quad x_1x_2^3 - x_2 - 4 = 0$	(1.2; 1.3)
16	$2x_1 - \sin \frac{x_1 - x_2}{2} = 0; \quad 2x_2 - \cos \frac{x_1 + x_2}{2} = 0$	(0; 1)
17	$\cos \frac{x_1 - x_2}{3} - 2x_2 = 0; \quad \sin \frac{x_1 + x_2}{3} - 2x_1 = 0$	(1; 1)
18	$e^{x_1x_2} - x_1^2 + x_2 = 1.1; \quad (x_1 + 0.5)^2 + x_2^2 = 1$	(1; 1) (-1.; 1)
19	$\sin(x_1 + x_2) - 1.3x_1 = 0.1; \quad x_1^2 + x_2^2 = 1$	(1; 1) (-1; -1)
20	$x_1 + x_1^2 - 2x_2x_3 - 0.1 = 0;$ $x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 + 0.2 = 0;$ $x_3 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 0.3 = 0$	(0; 0; 0)
21	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0; \quad 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 = 0;$ $3x_1^2 - 4x_2 + x_3 = 0$	(1; 1; 1)
22	$\lg \frac{x_2}{x_3} - x_1 + 1 = 0; \quad \frac{x_1x_2}{20} - x_3 + 2 = 0$ $2x_1^2 + x_2 - x_3 - 0.4 = 0;$	(1; 2.2; 2)

Лабораторная работа № 3

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: изучить и программно реализовать на языке высокого уровня такие методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, как явный и неявный методы Эйлера, исследовать их на тестовых задачах.

Элементы теории

Большая часть явлений и процессов в различных областях науки и техники описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ)

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= f_1(u_1, u_2, \dots, u_n, t), \\ \dots & \\ \frac{du_n}{dt} &= f_n(u_1, u_2, \dots, u_n, t),\end{aligned} \quad t \in [t_0; T] \quad (3.1)$$

с начальными условиями

$$u_i(t_0) = u_i^0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.2)$$

Такую математическую постановку задачи называют задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Перепишем (3.1), (3.2) в векторном виде:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0, \quad (3.4)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$. Решить задачу (3.3), (3.4) – значит определить траекторию $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0; T]$, удовлетворяющую уравнению (3.3) и начальному условию (3.4).

Применение численных методов предполагает приближенное вычисление значений $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(t_k)$ в точках $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = T$ отрезка $[t_0, T]$. С этой целью задачу (3.3), (3.4) заменяют разностной схемой

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{k+1} + \varphi(\mathbf{y}_{k+1}, \mathbf{y}_k, \dots, \mathbf{y}_{k-p+1}) &= \mathbf{0}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \mathbf{y}_0 &= \mathbf{u}^0,\end{aligned} \quad (3.5)$$

из которой рекуррентно вычисляют приближенные значения $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$, где через \mathbf{y}_j обозначено приближенное значение \mathbf{u}_j .

Разностная схема связывает искомое решение y_{k+1} в текущий момент времени t_{k+1} с построенными к этому моменту времени решениями y_k, \dots, y_{k-p+1} в предыдущие моменты времени. Выбор функции Φ в разностной схеме определяет соответствующий метод численного решения, который носит название одношагового, если $p = 1$, многошагового при $p > 1$, явного, если Φ не зависит от y_{k+1} и неявного в противном случае.

В случае многошаговых численных методов на каждом шаге вычислительного процесса привлекается информация с нескольких предыдущих шагов. В свою очередь одношаговые методы основаны на информации, полученной лишь на одном предыдущем шаге, что, в зависимости от характера задачи, может быть как достоинством, так и недостатком. В частности, если траектория системы (3.3) меняется плавно, то более выигрышными оказываются многошаговые методы. Однако их использование требует предварительного вычисления значений y_1, y_2, \dots, y_{p-1} . Поэтому при разработке программы численного решения выбор расчетной формулы (3.5) осуществляется таким образом, чтобы $p \leq k + 1$. Например, для нахождения y_1 ($k = 0$) применяются одношаговые методы ($p = 1$), для вычисления y_2 ($k = 1$) – двухшаговые ($p = 2$) и т. д.

Если величины y_k, \dots, y_{k-p+1} фиксированы, то схему (3.5) естественно рассматривать как систему уравнений

$$F(y_{k+1}) = 0$$

относительно неизвестного значения y_{k+1} . Решение этой системы

$$y_{k+1} = -\Phi(y_k, \dots, y_{k-p+1}),$$

если схема явная. В случае неявной схемы для определения y_{k+1} привлекается вспомогательный вычислительный процесс, чаще всего метод Ньютона. Стоимость одного шага численного интегрирования при применении неявных методов значительно превосходит аналогичный показатель явного метода. Однако суммарные затраты, необходимые для решения так называемых жестких задач на всем отрезке $[t_0; T]$ с помощью неявных схем, могут существенно сократиться по сравнению с соответствующими затратами явного метода. Причиной этого является ограничение шага интегрирования, накладываемое условиями устойчивости явного метода и отсутствие такового в случае использования абсолютно устойчивого неявного метода.

Определение. Разностный метод называют абсолютно устойчивым, если малые вариации параметров СОДУ приводят к малым изме-

нениям его решения при любых шагах интегрирования $\tau > 0$. Если устойчивость обеспечивается лишь при некоторых ограничениях на τ , то такие методы называют ограниченно устойчивыми.

Для численных методов решения СОДУ важен также их порядок точности.

Определение. Если локальная погрешность численного метода (погрешность на шаге)

$$R(\tau_k) = O(\tau_k^{p+1}),$$

то порядок точности метода равен p .

В научной литературе показано, что не существует абсолютно устойчивых явных линейных (как одношаговых, так и многошаговых) методов. В классе неявных методов абсолютно устойчивыми являются неявный одношаговый метод Эйлера, неявный одношаговый метод трапеций, неявный двухшаговый метод Гира.

В данной лабораторной работе изучаются следующие два наиболее часто используемые на практике численные методы: явный метод Эйлера и неявный метод Эйлера.

Явный метод Эйлера

Формула интегрирования явного метода Эйлера имеет вид:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \tau_k \mathbf{f}(\mathbf{y}_k, t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Его локальная погрешность

$$\varepsilon_k = \frac{\tau_k^2}{2} \mathbf{u}''(\tilde{t}); \quad \tilde{t} \in [t_k, t_{k+1}] \quad (3.7)$$

пропорциональна τ_k^2 , т. е. явный метод Эйлера имеет первый порядок точности.

Выбор величины шага интегрирования τ_k в явном методе Эйлера необходимо делать, исходя из сохранения устойчивости и точности вычислений.

Условие устойчивости явного метода Эйлера

$$|1 + \tau \lambda_i| < 1; \quad i = \overline{1, n},$$

или

$$[1 + \operatorname{Re}(\tau \lambda_i)]^2 + [\operatorname{Im}(\tau \lambda_i)]^2 < 1, \quad i = \overline{1, n} \quad (3.8)$$

в случае комплексных собственных чисел λ_i матрицы $\mathbf{J} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$, существенно ограничивает свободу выбора шага интегрирования. Воспользоваться условием (3.8) при построении правила выбора текущего шага, вообще говоря, затруднительно.

Сформулируем условие устойчивости явного метода Эйлера в более грубой, но полезной для практического выбора шага, форме:

явный метод Эйлера устойчив, если

$$|\Delta y_k^i| < |u_{\max}^i|, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.9)$$

где Δy_k^i – приращение переменной u^i на k -ом шаге интегрирования, $|u_{\max}^i|$ – максимально возможное абсолютное значение данной переменной.

Зададимся локальной погрешностью (например, 1% от максимального значения):

$$\varepsilon_{\text{доп}}^i = 0.01 |u_{\max}^i|, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда условия соблюдения точности интегрирования, при которых выполняются условия устойчивости (3.9), будут иметь вид

$$|\Delta y_k^i| \leq \varepsilon_{\text{доп}}^i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.10)$$

Из (3.6) следует, что

$$|\Delta y_k^i| = \tau_k^i |f^i(\mathbf{y}_k, t_k)|,$$

а, значит, неравенства (3.10) приводят к условиям

$$\tau_k^i \leq \varepsilon_{\text{доп}}^i / |f^i(\mathbf{y}_k, t_k)|, \quad i = \overline{1, n}.$$

Недостатком этой формулы является тот факт, что $\tau_k^i \rightarrow \infty$, если $|f^i(\mathbf{y}_k, t_k)| \rightarrow 0$. Поэтому на шаг интегрирования необходимо ввести ограничение сверху. Обозначим через τ_{\max} максимально допустимый шаг интегрирования. Тогда условия выбора шага примут вид:

$$\tau_k^i \leq \varepsilon_{\text{доп}}^i / \left[|f^i(\mathbf{y}_k, t_k)| + \varepsilon_{\text{доп}}^i / \tau_{\max} \right]. \quad (3.11)$$

Из (3.11) вытекает, что

$$\tau_k = \min_{i=\overline{1, n}} \tau_k^i. \quad (3.12)$$

Приведем возможную схему реализации явного метода Эйлера.

Алгоритм 3.1

1. Задать исходные данные: $\mathbf{u}^0, T, \varepsilon_{\text{доп}}^i, \tau_{\max}$.
2. Задать начальные условия: $t_k = 0, \mathbf{y}_k = \mathbf{u}^0$.
3. Вычислить вектор $\mathbf{f}(\mathbf{y}_k, t_k)$.
4. Определить шаг по формулам (3.11), (3.12).
5. Выполнить шаг:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k + \tau_k \mathbf{f}(\mathbf{y}_k, t_k)$$

6. Вычислить $t_k = t_k + \tau_k$.
7. Вывести на печать \mathbf{y}_k, t_k .
8. Если $t_k < T$, то перейти к п. 3, иначе выйти из программы.

Неявный метод Эйлера

Разностная схема неявного метода Эйлера

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \tau_k \mathbf{f}(\mathbf{y}_{k+1}, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

требует решения на каждом временном шаге алгебраической задачи

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}_{k+1}) = \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k - \tau_k \mathbf{f}(\mathbf{y}_{k+1}, t_{k+1}) = 0 \quad (3.14)$$

относительно искомого вектора \mathbf{y}_{k+1} (например, методом Ньютона).

Локальная погрешность неявного метода Эйлера

$$\varepsilon_k = -\frac{\tau_k^2}{2} \mathbf{u}''(\tilde{t}), \quad \tilde{t} \in [t_k, t_{k+1}] \quad (3.15)$$

по порядку величины τ_k является такой же, как и локальная погрешность явного метода Эйлера, и противоположна по знаку.

Условие устойчивости неявного метода Эйлера

$$[1 - \operatorname{Re}(\tau \lambda_i)]^2 + [\operatorname{Im}(\tau \lambda_i)]^2 > 1$$

в случае $\operatorname{Re}(\tau \lambda_i) < 0$ выполняется при любых τ , т. е. такой метод является абсолютно устойчивым, а значит выбор величины шага интегрирования осуществляется, только исходя из требований к точности.

Для вычисления локальной погрешности ε_k по формуле (3.15) необходимо оценить $\mathbf{u}''(\tilde{t})$ в точке $\tilde{t} \in [t_k, t_{k+1}]$. Это можно сделать в разностной форме, используя значения $\mathbf{y}_{k+1}, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k-1}$:

$$\mathbf{u}''(\tilde{t}) \approx \left(\frac{\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k}{\tau_k} - \frac{\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k-1}}{\tau_{k-1}} \right) \bigg/ \left(\frac{\tau_k + \tau_{k-1}}{2} \right).$$

Следовательно

$$\varepsilon_k \approx -\frac{\tau_k}{\tau_k + \tau_{k-1}} [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k - \frac{\tau_k}{\tau_{k-1}} (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k-1})]. \quad (3.16)$$

Возможная стратегия выбора шага в неявном методе Эйлера сводится к следующему. Задается, как и в явном методе Эйлера, допустимая локальная погрешность, например, такая:

$$\varepsilon_{\text{доп}}^i = 0.01 |u_{\text{max}}^i|, \quad i = \overline{1, n}.$$

После выполнения шага интегрирования τ_k вычисляются ε_k^i по формуле (3.16) для всех переменных u^i . Если хотя бы одно

$|\varepsilon_k^i| > \varepsilon_{\text{доп}}^i$, $i = \overline{1, n}$, то шаг τ_k уменьшается вдвое, и вычисления повторяются с шагом $\tau_k / 2$ от точки t_k . В случае $|\varepsilon_k^i| < \varepsilon_{\text{доп}}^i$, $i = \overline{1, n}$, очередной шаг рассчитывается по формуле

$$\tau_{k+1}^i = \sqrt{\varepsilon_{\text{доп}}^i / |\varepsilon_k^i|} \tau_k, \quad (3.17)$$

вытекающей из соотношения для оценки локальной погрешности, т. к.

$$\varepsilon_{\text{доп}}^i = \frac{(\tau_{k+1}^i)^2}{2} |u_i''(\tilde{t})| \quad \text{и} \quad |\varepsilon_k^i| = \frac{\tau_k^2}{2} |u_i''(\tilde{t})|, \quad i = \overline{1, n}.$$

При выборе шага интегрирования можно использовать также стратегию трех зон:

$$\tau_{k+1}^i = \begin{cases} \tau_k / 2, & \text{если } |\varepsilon_k^i| > \varepsilon_{\text{доп}}^i, \\ \tau_k, & \text{если } \varepsilon_{\text{доп}}^i / 4 < |\varepsilon_k^i| \leq \varepsilon_{\text{доп}}^i, \\ 2\tau_k, & \text{если } |\varepsilon_k^i| \leq \varepsilon_{\text{доп}}^i / 4. \end{cases} \quad (3.18)$$

В обеих стратегиях окончательный шаг интегрирования выбирается минимальным среди всех значений τ_{k+1}^i :

$$\tau_{k+1} = \min_i \tau_{k+1}^i. \quad (3.19)$$

Стратегия (3.17), (3.19) на первый взгляд является более предпочтительной, так как обеспечивает квазиоптимальный выбор шага. Однако при такой стратегии число возвратов (повторных расчетов с уменьшенным вдвое шагом интегрирования) может оказаться существенно большим, чем в методе трех зон. Именно по этой причине метод трех зон является широко используемым на практике.

Возможная схема реализации неявного метода Эйлера выглядит следующим образом.

Алгоритм 3.2

1. Задать исходные данные: $\mathbf{u}^0, T, \varepsilon_{\text{доп}}^i, \tau_{\min}, \tau_{\max}$.
2. Положить: $t_k = 0$, $\mathbf{y}_k = \mathbf{u}^0$, $\mathbf{y}_{k-1} = \mathbf{u}^0$, $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{u}^0$, $\tau_{k-1} = \tau_k = \tau_{\min}$.
3. Вычислить $t_{k+1} = t_k + \tau_k$.
4. Решить методом Ньютона систему в общем случае нелинейных алгебраических уравнений (3.14) относительно \mathbf{y}_{k+1} .
5. Вычислить ε_k^i по формуле (3.16).

6. Если $|\varepsilon_k^i| > \varepsilon_{\text{доп}}^i$, то принять $\tau_k = \tau_k / 2$, $t_{k+1} = t_k$, $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k$ и перейти к п. 3.
7. Определить шаг τ_{k+1} по формулам (3.18), (3.19) либо (3.17), (3.19).
8. Если $\tau_{k+1} > \tau_{\text{max}}$, то положить $\tau_{k+1} = \tau_{\text{max}}$.
9. Вывести на печать $\mathbf{y}_{k+1}, t_{k+1}$.
10. Выполнить сдвиг переменных и шагов интегрирования:

$$\mathbf{y}_{k-1} = \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{k+1}, \tau_{k-1} = \tau_k, \tau_k = \tau_{k+1}, t_k = t_{k+1}.$$
11. Если $t_k < T$, то перейти к п. 3, иначе выйти из программы.

Задание

1. Написать, отладить и исследовать на задаче, предложенной преподавателем (на одной из первых трех задач, приведенных ниже), программу численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений явным методом Эйлера.
2. Написать, отладить и исследовать на четвертой жесткой задаче программу численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений неявным методом Эйлера для двух стратегий выбора шага: квазиоптимальной и в соответствии с правилом трех зон.

Вычисления выполнить для $\varepsilon_{\text{доп}}^i = 10^{-3}; 10^{-5}; i = \overline{1, n}$.

Задачи

1.
$$u_1' = -u_1 u_2 + \frac{\sin t}{t}; \quad u_2' = -u_2^2 + \frac{at}{1+t^2}; \quad t \in [0, 1];$$

$$u_1(0) = 0; \quad u_2(0) = -0.412; \quad a = 2.5 + \omega/40; \quad \omega = 25 \quad (1) \quad 48.$$
2.
$$u_1' = u_2 - (au_1 + ku_2)u_1; \quad u_2' = \exp(u_1) - (u_1 + au_2)u_1; \quad t \in [0, 1];$$

$$u_1(0) = 1; \quad u_2(0) = 0; \quad a = 2 \quad (0.25) \quad 3; \quad k = 0.25 \quad (0.25) \quad 1.25.$$
3.
$$u_1' = \frac{k-a}{a} u_2 u_3; \quad u_2' = \frac{a+k}{k} u_1 u_3; \quad u_3' = \frac{a-k}{a} u_1 u_2; \quad t \in [0, 1];$$

$$u_1(0) = u_2(0) = u_3(0) = 1; \quad a = 1 \quad (0.25) \quad 2; \quad k = 2 \quad (0.25) \quad 3.$$

4.

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 & 2(\lambda_1 - \lambda_2) & 2(\lambda_1 - \lambda_2) \\ 2(\lambda_1 - \lambda_2) & 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 & 2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 \\ 2(\lambda_1 - \lambda_2) & 2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 & 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix}; \quad t \in [0, T];$$

$$\mathbf{b} = -\frac{1}{6}(4\lambda_1 + 2\lambda_2, 4\lambda_1 - \lambda_2 - 9\lambda_3, 4\lambda_1 - \lambda_2 + 9\lambda_3)^T;$$

$$u_1(0) = 10; \quad u_2(0) = 22; \quad u_3(0) = 9.$$

Числа $\lambda_i, i = \overline{1,3}$, являются собственными числами симметричной матрицы \mathbf{A} . Если все $\lambda_i < 0$, то решение системы стремится к точке покоя $(-1; 1; -2)$. Значения $\lambda_i, i = \overline{1,3}$ и T задаются преподавателем.

Содержание электронного отчета

1. Тексты программ явного и неявного методов Эйлера.
2. Задачи, результаты их решения соответственно явным либо неявным методом Эйлера (для $\varepsilon_{\text{доп}}^i = 10^{-3}$ и $\varepsilon_{\text{доп}}^i = 10^{-5}$).

Лабораторная работа № 4

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: изучить и программно реализовать на языке высокого уровня метод наименьших квадратов, исследовать его на тестовых задачах.

Элементы теории

В вычислительной практике часто возникает задача восстановления функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если известны ее значения $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$ в отдельных фиксированных точках x_0, x_1, \dots, x_n отрезка. Такая задача имеет место при табличном задании функции. Значения y_0, y_1, \dots, y_n в этом случае – продукт измерения физической величины на наборе x_0, x_1, \dots, x_n аргумента x . Чтобы приближенно восстановить функцию $f(x)$ на всем отрезке $[a, b]$, строят аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$, расчеты по которой в определенном смысле приближаются к экспериментально полученным значениям.

К табличному заданию функции прибегают также в том случае, когда аналитический вид функции $f(x)$ известен, но сложен и требует большого объема вычислений для определения ее отдельных значений. Над такой функцией, кроме того, трудно выполнить математические операции дифференцирования и интегрирования. Замена $f(x)$ приближенной функцией $\varphi(x)$ позволяет упростить вычисления. Для этого по известному выражению $f(x)$ вычисляют небольшую таблицу ее значений и по ним, как и ранее, строят аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$.

В качестве аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ наиболее часто используют степенной полином

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m, \quad (4.1)$$

при этом порядок полинома $m \leq n$. Такую аппроксимацию называют полиномиальной. Она очень удобна, так как степенные полиномы просты по форме, легко вычисляются, дифференцируются и интегрируются.

Для периодической функции $f(x)$ в качестве $\varphi(x)$ выбирают тригонометрические многочлены. Если аппроксимируемая функция

$f(x)$ обращается в бесконечность в заданных точках или вблизи них, то $\varphi(x)$ строят в классе рациональных функций.

Рассмотрим теперь, как вычисляются коэффициенты в (4.1) при полиномиальной аппроксимации. Если значения y_0, y_1, \dots, y_n заданы точно, то коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n выбираются таким образом, чтобы значения полинома $P_n(x)$ в точках x_0, x_1, \dots, x_n совпадали с заданными значениями y_0, y_1, \dots, y_n . Такую аппроксимацию называют интерполяцией. Порядок полинома при интерполяции однозначно определяется количеством узлов интерполяции (так называют точки $x_i, i = \overline{0, n}$): $m = n$. Искомые коэффициенты полинома являются решением системы

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n = y_i, \quad i = \overline{0, n},$$

число уравнений в которой совпадает с количеством неизвестных коэффициентов и узлов интерполяции.

При табличном задании функции приближенными значениями, полученными из эксперимента, не имеет смысла привлекать интерполяцию и требовать совпадения $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точках x_i . Ошибки измерения функции $f(x)$ в узловых точках x_i будут внесены в интерполяционный полином и исказят истинную картину ее поведения. Как показывает практика, $f(x)$ в этом случае лучше аппроксимируют функции, построенные по методу среднеквадратического приближения.

При среднеквадратическом приближении за меру близости функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ принимается величина

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^N p(x_i) [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2},$$

где $p(x_i)$ – заданная неотрицательная весовая функция, учитывающая неодинаковую точность измерения $f(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_N .

Метод среднеквадратического приближения функций, заданных набором экспериментальных данных, называется методом наименьших квадратов (МНК). МНК широко используется для обработки результатов измерения, оценки параметров известной зависимости, подбора вида зависимости, сглаживания и дифференцирования результатов наблюдений, идентификации и оценки параметров систем.

Рассмотрим применение метода наименьших квадратов для среднеквадратического приближения функции $f(x)$ полиномом $P_m(x)$ степени m . Пусть y_1, y_2, \dots, y_N – приближенные значения функции

$y = f(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_N . Среди многочленов степени $m < N$ найдем многочлен, обеспечивающий минимум выражению

$$s = \sum_{i=1}^N [y_i - P_m(x_i)]^2.$$

Для определения значений коэффициентов полинома, обращающих s в минимум, приравняем к нулю частные производные от s по a_k , т. е.

$$\frac{\partial s}{\partial a_k} = -2 \sum_{i=1}^N (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \dots - a_m x_i^m) x_i^k = 0, \quad k = \overline{0, m}. \quad (4.2)$$

После несложных преобразований соотношений (4.2) получим систему линейных алгебраических уравнений $(m+1)$ -го порядка (эти уравнения называют нормальными) относительно неизвестных коэффициентов a_k , $k = \overline{0, m}$:

$$a_0 \sum_{i=1}^N x_i^k + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^{k+1} + \dots + a_m \sum_{i=1}^N x_i^{k+m} = \sum_{i=1}^N y_i x_i^k, \quad k = \overline{0, m} \quad (4.3)$$

Анализ системы (4.3) свидетельствует о том, что для ее формирования необходимо вычислить и запомнить в одномерном массиве $2m$ сумм вида

$$\sum_{i=1}^N x_i, \quad \sum_{i=1}^N x_i^2, \quad \sum_{i=1}^N x_i^3, \quad \dots, \quad \sum_{i=1}^N x_i^{2m}, \quad (4.4)$$

являющихся значениями коэффициентов нормальных уравнений, и $(m+1)$ таких сумм, как

$$\sum_{i=1}^N y_i, \quad \sum_{i=1}^N y_i x_i, \quad \sum_{i=1}^N y_i x_i^2, \quad \sum_{i=1}^N y_i x_i^3, \quad \dots, \quad \sum_{i=1}^N y_i x_i^m,$$

представляющих правые части этих уравнений. Используя элементы одномерного массива, хранящего суммы (4.4), нетрудно сформировать матрицу коэффициентов системы (4.3), учитывая, что матрица коэффициентов имеет одинаковые значения вдоль каждой восходящей диагонали (см. приведенный ниже пример, когда $m = 3$ (стр. 28)).

Коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_m вычисляются путем решения системы линейных алгебраических уравнений (4.3), например, методом Гаусса. Являясь функцией случайных величин y_i , $i = \overline{1, N}$, эти коэффициенты также будут случайными, т. е. полученные значения a_0, a_1, \dots, a_m будут только оценками истинных значений. Для того, чтобы найти их точность, необходимо определить числовые характеристики их законов распределений.

Пример:

$$\begin{aligned}
 a_0 \sum_{i=1}^N x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^1 + a_2 \sum_{i=1}^N x_i^2 + a_3 \sum_{i=1}^N x_i^3 &= \sum_{i=1}^N y_i x_i^0; \\
 a_0 \sum_{i=1}^N x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^N x_i^3 + a_3 \sum_{i=1}^N x_i^4 &= \sum_{i=1}^N y_i x_i^1; \\
 a_0 \sum_{i=1}^N x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^N x_i^4 + a_3 \sum_{i=1}^N x_i^5 &= \sum_{i=1}^N y_i x_i^2; \\
 a_0 \sum_{i=1}^N x_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^4 + a_2 \sum_{i=1}^N x_i^5 + a_3 \sum_{i=1}^N x_i^6 &= \sum_{i=1}^N y_i x_i^3.
 \end{aligned}$$

Качество МНК-аппроксимации принято характеризовать остаточной дисперсией

$$S^2 = \frac{1}{N-m-1} \sum_{i=1}^N (y_i - a_0 - a_1 x_i - \dots - a_m x_i^m)^2, \quad (4.5)$$

где $(N-m-1)$ – число степеней свободы. Из (4.5) следует, что из N наблюдений для определения коэффициентов полинома $P_m(x)$ с помощью условных уравнений (4.3) достаточно использовать только $(m+1)$ наблюдений. Остальные $N-(m+1)$ наблюдения используются для уточнения оценок коэффициентов, т. е. уменьшения их рассеяния вокруг истинного значения – математического ожидания и уменьшения степени их взаимосвязи – коэффициентов ковариации, отражающих то обстоятельство, что оценки получены по одному и тому же статистическому материалу.

Замечание 1. Метод наименьших квадратов наиболее просто применить, когда искомые параметры входят в аппроксимирующую зависимость линейно. Более сложные приближающие функции сводят к многочленным путем замены переменных (если это возможно). Например, зависимость $y = x/(ax+b)$ преобразуют к $y_1 = a + bx$ заменой $y_1 = 1/y$.

Описание алгоритма

Алгоритм МНК-аппроксимации реализуется следующим образом:

Алгоритм 4.1

1. Ввести табличные данные $x_i, y_i, i = \overline{1, N}$ (если аппроксимирующая функция $\varphi(x)$ нелинейна относительно коэффициентов аппроксима-

ции, то предварительно следует линеаризовать ее путем подходящей замены переменных).

2. Ввести число измерений N и степень аппроксимирующего полинома m .

3. Вычислить суммы $\sum_{i=1}^N x_i^k$, $k = \overline{1, 2m}$, и разместить их в одномерном массиве *POWERX* размером $2m$.

4. Сформировать матрицу коэффициентов *SUMX* размером $(m+1) \times (m+1)$ путем выполнения операции присваивания:

$$SUMX[l, 1] = N; \quad SUMX[l, j] = POWERX[k];$$

$$l = \overline{1, m+1}; \quad j = \overline{1, m+1}; \quad k = l + j - 2.$$

5. Сформировать правые части системы (4.3) по правилу:

$$PRAW[l] = \sum_{i=1}^N y_i x_i^{k_1}; \quad k_1 = l - 1; \quad l = \overline{1, m+1}.$$

6. Определить коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_m , решив сформированную систему линейных алгебраических уравнений (4.3), например, методом Гаусса.

7. Вычислить по соотношению (4.5) остаточную дисперсию и на этой основе среднеквадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{S^2}$.

8. Пересчитать коэффициенты, если это необходимо для перехода к исходной нелинейной аппроксимирующей функции $\varphi(x)$, и напечатать их.

9. Вывести в графическом виде построенную функцию $\varphi(x)$.

Задание

1. Написать, отладить и исследовать на задаче, предложенной преподавателем (см. ниже перечень задач), программу приближения функций методом наименьших квадратов, используя для решения СЛАУ метод Гаусса.

Содержание электронного отчета

1. Текст программы.

2. Задача, результаты ее решения, графики функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, таблица x_i , $f(x_i)$, $\varphi(x_i)$, $i = \overline{1, N}$.

Задачи

1. Аппроксимировать зависимость атмосферного давления (в мм. рт. ст.) от барометрической высоты (в км) функцией $p = a \cdot 10^{bh}$, используя экспериментальные данные:

H (км)	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
P (мм.р.с.)	760.0	674.8	598.0	528.9	466.6	410.6	360.2

2. Найти по методу наименьших квадратов приближенное представление многочленом 4-ой степени функции $f(x) = 1/(1+x)$ по ее значениям в точках $x = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$.

3. Аппроксимировать многочленом второй степени такие данные:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3	87	156	210	238	252	239	211	158	90	-5

4. В теории резания зависимость скорости резания v (м/мин) от площади поперечного сечения стружки F (мм²) выражается эмпирической формулой $v = c \cdot F^{-1/\epsilon}$. Найти коэффициенты c и ϵ методом наименьших квадратов, если заданы следующие значения v и F :

F (мм ²)	1.1	1.4	1.7	2.1	2.6	4.7	6.1
v (м/мин)	25.0	22.7	22.1	19.8	17.0	12.3	10.7
F (мм ²)	7.0	10.0	12.8	16.5	20.8	40.6	-
v (м/мин)	10.0	8.2	6.7	5.6	5.0	3.5	-

5. Зависимость коэффициента трения μ в подшипнике от температуры t выражается формулой $\mu = a \cdot \exp(-\beta t)$. Найти a и β методом наименьших квадратов, если измерения дали такие результаты:

t	60	70	80	90	100	110	120
μ	0.0148	0.0124	0.0102	0.0085	0.0071	0.0059	0.0051

6. Результаты измерения сопротивления медного стержня при изменении температуры приведены в таблице:

t °C	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	50.0
r , мкОм	76.30	77.80	79.75	80.80	82.35	83.90	85.0

Найти зависимость $r = at + b$ методом наименьших квадратов.

7. В таблице приведены опытные данные зависимости теплоемкости воды C от температуры t (теплоемкость воды при 15°C принята за единицу):

t	0.0	5.0	10.0	15.0	20.0	25.0
C	1.00762	1.00392	1.00153	1.00000	0.99907	0.99852
t	30	35	40	45	50	55
C	0.99826	0.99818	0.99828	0.99849	0.99878	0.99919
t	60.0	65.0	70.0	75.0	80.0	85.0
C	0.99967	1.00024	1.00091	1.00167	1.00253	1.00351
t	90.0	95.0	100.0	-	-	-
C	1.00461	1.00586	1.00721	-	-	-

Найти методом наименьших квадратов аппроксимирующий полином третьей степени.

8. Аппроксимировать полиномом второй степени по результатам десяти измерений зависимость скорости течения v (м/сек) от относительной глубины D :

D	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
v (м/сек)	0.957	0.969	0.976	0.978	0.975
D	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
v (м/сек)	0.968	0.954	0.939	0.918	0.894

9. При исследовании скорости истечения жидкости из щели получены данные (H – напор жидкости, μ – коэффициент истечения):

H	0.164	0.328	0.656	0.984	1.312	1.640
μ	0.448	0.432	0.421	0.417	0.414	0.412

Найти методом наименьших квадратов коэффициенты уравнения $\mu = a / H + b$.

10. При падении парашюта в воздухе проведены измерения скорости падения v (м/с) и давления на поверхность парашюта P (кг/см²):

v (м/с)	2.40	3.50	5.00	6.89	10.00
P (кг/см ²)	0.0141	0.0281	0.0562	0.1125	0.2250

Найти методом наименьших квадратов коэффициенты уравнения

$$P = a + bv^2.$$

11. В зависимости от времени t содержание влаги y в % от сухого остатка описывается экспериментальной зависимостью $y = 10^{a+bt}$. По

приведенным ниже данным эксперимента определить параметры a и b :

t (с)	0	20	40	60	80	100
y (%)	29.5	18.4	11.9	8.6	5.0	3.3

12. Зависимость коэффициента теплоотдачи γ (ккал/м²·час·град) от горизонтальной стенки к кипящей воде от разности температур Δt стенки и кипящей воды выражается формулой $\gamma = a\Delta t^b$. Найти коэффициенты a и b , располагая опытными данными:

Δt °C	6.10	7.50	8.88	11.10	12.20
γ	3185	5390	6860	10045	12740

13. При исследовании влияния температуры на ход хронометра получены такие результаты:

t	5.7	9.6	16.0	24.4	29.8	34.4
ω	2.60	2.01	1.34	0.94	1.06	1.25

Зависимость хода хронометра от температуры может быть представлена функцией $\omega = \omega_{15} + (t - 15)\beta + (t - 15)^2\gamma$. Найти методом наименьших квадратов значения ω_{15} , β , γ .

14. В таблице помещены результаты измерения скоростей v в км/сек и расстояний x в мегапарсеках для десяти внегалактических туманностей:

x , мегапарсек	1.20	1.82	3.31	7.24	8.92
v , км/сек	630	890	2350	3810	4630
x , мегапарсек	9.12	10.97	14.45	22.91	36.31
v , км/сек	4820	5230	7500	11800	19600

Полагая зависимость v от x линейной, т. е. $v = a + bx$, оценить методом наименьших квадратов коэффициенты a и b .

15. Данные таблицы показывают зависимость между потерей в весе y (%) и температурой t (в °C) для 16 проб почвы:

t , °C	37.8	40.6	43.3	46.1	49.4	55.6	62.2	67.2
y , %	3.71	3.81	3.86	3.93	3.96	4.20	4.34	4.51
t , °C	72.8	81.7	88.3	95.0	100.0	107.8	113.9	121.7
y , %	4.73	5.35	5.74	6.14	6.51	6.98	7.44	7.76

Пользуясь методом наименьших квадратов, построить аппроксимацию $y(x)$ в виде полинома третьей степени.

Лабораторная работа № 5

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: изучить и программно реализовать на языке высокого уровня широко применяемые на практике численные методы вычисления одномерных и кратных определенных интегралов, исследовать их на тестовых задачах.

Элементы теории

При решении задач радиофизики и электроники численное интегрирование применяется всякий раз, когда первообразная слишком сложна либо вообще не выражается через элементарные функции, а также в случае, когда подынтегральная функция задана таблично.

Методы численного интегрирования подразделяются на детерминированные и статистические. Детерминированные методы делятся на методы с равномерным и оптимальным распределением узлов интегрирования. Формулы численного интегрирования одномерных интегралов называются квадратурными, кратных – кубатурными.

Квадратурные формулы в общем виде записываются так:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^n c_k f(x_k) + R_n,$$

где x_k , $k = \overline{0, n}$ – фиксированные узлы отрезка $[a, b]$, c_k – постоянные коэффициенты, R_n – погрешность квадратурной формулы. Строятся квадратурные формулы посредством интегрирования на отрезке $[a, b]$ интерполяционной функции $\varphi(x)$, которая аппроксимирует подынтегральную функцию $f(x)$ на всем отрезке $[a, b]$ или на его отдельных частях. Широко используемые на практике формулы Ньютона - Котеса, являющиеся предметом исследования данной лабораторной работы, основываются на интерполяции Лагранжа.

Формула трапеций

Формула трапеций имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)]. \quad (5.1)$$

Она базируется на двух положениях: интервал интегрирования $[a, b]$

покрывается равномерной сеткой x_k , $k = \overline{0, n}$, с шагом $h = (b - a) / n$; подынтегральная функция на интервалах $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$, заменяется линейной интерполянтной Лагранжа.

Погрешность формулы трапеций

$$R = -\frac{h^2(x_n - x_0)}{12} f''(\xi), \quad x_0 \leq \xi \leq x_n, \quad (5.2)$$

пропорциональна h^2 . Квадратичная зависимость погрешности интегрирования от шага сетки позволяет выбором шага сетки обеспечивать требуемую точность.

Вычисление определенного интеграла по формуле (5.1) в условиях ошибок округления сопровождается также вычислительной ошибкой:

$$|\delta| \leq \frac{|\bar{f}| \delta_k (x_n - x_0)^2}{2h},$$

которая обратно пропорциональна h , где \bar{f} – среднее по всем узлам сетки значение подынтегральной функции, δ_k – ошибка округления на одной операции, которая не превосходит величины $5 \cdot 10^{-k}$, здесь k – число десятичных разрядов, отведенных под мантиссу. Именно ошибка округления ограничивает при уменьшении шага сетки достижимую точность вычисления определенного интеграла.

Использование для оценки погрешности формулы (5.2) вызывает определенные трудности вследствие необходимости вычисления $f''(\xi)$, $\xi \in [a, b]$. Поэтому на практике привлекают прием вычисления интеграла на сгущающихся сетках с шагом h и rh , где $r < 1$, и формулу Рунге для оценки главной составляющей погрешности:

$$R \approx (I_h - I_{rh}) / (r^p - 1), \quad (5.3)$$

где p – порядок погрешности метода (степень h в формуле погрешности). В случае правила трапеций $p = 2$, $r = 0.5$, а значит $R_h \approx 4(I_{h/2} - I_h) / 3$ для I_h или $R_{h/2} \approx (I_{h/2} - I_h) / 3$ для $I_{h/2}$. Критерием завершения процесса вычисления определенного интеграла с заданной точностью ε методом трапеций на сгущающихся сетках служит условие

$$|I_{h/2} - I_h| \leq 3\varepsilon. \quad (5.4)$$

Формула Симпсона

Формула Симпсона записывается следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(x_{2m})]. \quad (5.5)$$

При ее построении также используется равномерная сетка $x_k, k = \overline{0; 2m}$, однако число интервалов разбиения теперь обязательно должно быть четным, что и подчеркивает запись $n = \overline{2m}$. Подынтегральная функция $f(x)$ на интервалах $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, $k = \overline{1, m}$, содержащих три узла сетки, заменяется интерполяционным полиномом Лагранжа второго порядка.

Погрешность формулы Симпсона

$$R = -\frac{h^4(x_n - x_0)}{180} f^{(4)}(\xi); \quad x_0 \leq \xi \leq x_n,$$

прямо пропорциональна h в четвертой степени.

На практике, как и в случае метода трапеций, расчеты ведут на сгущающихся сетках и оценку погрешности формулы Симпсона осуществляют по формуле (5.3), в которой $p = 4$, $r = 0.5$. Критерием завершения процесса вычисления определенного интеграла с заданной точностью ε методом Симпсона на сгущающихся сетках служит условие

$$|I_{h/2} - I_h| \leq 15\varepsilon. \quad (5.6)$$

Кубатурная формула Симпсона

Вычисление двойных интегралов

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$$

в прямоугольной области можно также вести по формуле Симпсона, которая в этом случае принимает такой вид:

$$I \approx \frac{h_x h_y}{9} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} [f_{2i, 2j} + 4f_{2i+1, 2j} + f_{2i+2, 2j} + 4f_{2i, 2j+1} + 16f_{2i+1, 2j+1} + 4f_{2i+2, 2j+1} + f_{2i, 2j+2} + 4f_{2i+1, 2j+2} + f_{2i+2, 2j+2}],$$

где $h_x = (b-a)/2N$, $h_y = (d-c)/2M$, $f_{i,j}$ обозначает $f(x_i, y_j)$.

Если S – криволинейная область интегрирования, то для применения формулы Симпсона область S заключают в прямоугольник S_n ($a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$) и пользуются вспомогательной функцией

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } (x, y) \in S, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin S. \end{cases}$$

Тогда

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \iint_{(S_n)} g(x, y) dx dy$$

и для вычисления последнего интеграла привлекают метод Симпсона.

Задание

1. Разработать, программно реализовать и исследовать на задачах, предложенных преподавателем (см. ниже перечень задач), алгоритмы интегрирования функций одной переменной методами трапеций, Симпсона на сгущающихся сетках с критерием завершения вычислительного процесса в виде (5.4) и (5.6) для $\varepsilon = 10^{-4}$, 10^{-5} , двух переменных – методом Симпсона на заданной преподавателем сетке.

Содержание электронного отчета

1. Тексты программ.
2. Задачи, результаты их решения.

Таблица 5.1

Задачи

№ п/п	Подынтегральная функция $f(x)$ либо $f(x, y)$	Интервал $[a; b]$	Интервал $[c; d]$
1	$(1+x^3)^{1/2}$	[0.8; 1.762]	–
2	$(x^3-1)^{-1/2}$	[1.3; 2.621]	–
3	$(x+x^3)^{1/2}$	[0.6; 1.724]	–
4	$(1+x^2)/(1+x^3)$	[3.0; 4.254]	–
5	$(\sin^2 x)/(1+x^3)^{1/2}$	[0; 1.234]	–
6	$e^{x/2}/(x+1)^{1/2}$	[0; 1.047]	–
7	$(1+2x^3)^{1/2}$	[1.2; 2.471]	–
8	$1/(\lg^2 x + 1)$	[1.0; 2.835]	–
9	$(1+x+x^2)/(x^3-1)^{1/2}$	[1.0; 2.631]	–

Продолжение табл. 5.1

10	$0.1x^2/\lg x$	[2.0; 3.104]	–
11	$3x/(1+x^3)^{1/2}$	[0; 1.075]	–
12	$1/(1+x^{1/2})$	[0; 4.0]	–
13	$\sin \alpha \cos^2 \alpha$	[0; $\pi/2$]	–
14	$(\sin \alpha + \cos \alpha)/(3 + \sin 2\alpha)$	[0; $\pi/4$]	–
15	$1/(e^x + e^{-x})$	[0; 1.0]	–
16	$(x-2)^{2/3}/[(x-2)^{2/3} + 3]$	[3.0; 29.0]	–
17	$e^x(e^x - 1)^{1/2}/(e^x + 3)$	[0; $\ln 5$]	–
18	$x/(2+4x)^{1/2}$	[1.0; 4.0]	–
19	$1/(3+2\cos \alpha)$	[0; π]	–
20	$(4 - \sin^2 x)^{1/2} / 2$	[0; $\pi/2$]	–
21	$e^{2x}/(1-x^2)^{1/2}$	[-1.0; 1.0]	–
22	$1/[(1-x^2)^{1/2}(1+x^2)]$	[-1.0; 1.0]	–
23	$(\sin x)/x^{1/2}$	[0; 1.0]	–
24	$1/[x^{1/2}(e^{0.4x} + 1.5)]$	[0; 1.0]	–
25	$x^{1/2} \sin(x^2)$	[0; 1.0]	–
26	$x^{1/2}/(1+x^2)$	[0; 1.0]	–
27	$1/[(1+x^2)(4+3x^2)]^{1/2}$	[0; 1.0]	–
28	$e^{a(x-1)}/[x^{1/2}(x+b)];$ $a = 0.6 + 0.07k; \quad b = 2 + 0.25k;$ $k = 0(1) 6$	[0; 1.0]	–
29	$x^2/(1+y^2)$	[0; 4.0]	[1.0; 2.0]
30	$1/(x+y)^2$	[3.0; 4.0]	[1.0; 2.0]
31	$x^2 + 2y$	[0; 2.0]	[0; 1.0]

32	$4 - x^2 - y^2$	$[-1.0; 1.0]$	$[-1.0; 1.0]$
33	$\sin(x + y)$	$[0; \pi/2]$	$[0; \pi/4]$
34	$\sin(x^2 + y^2)/(1 + ax + by);$ $a = 0.5 + 0.1k; \quad b = 0.5 + 0.1k;$ $k = 0 (1) 5$	$[0; 1.0]$	$[1.0; 2.0]$
35	$e^{-a(x+y)}/[1 + b(x + y)];$ $a = 0.2m; \quad b = 0.1k;$ $m = 0 (1) 5; \quad k = 0 (1) 5$	$[0; 2.0]$	$[0.5; 1.5]$

Список литературы

1. Мулярчик, С. Г. Численные методы : учеб. пособие / С. Г. Мулярчик. – Минск : РИВШ, 2017. – 318 с.
2. Вержбицкий, В. М. Численные методы / В. М. Вержбицкий. – М. : Высш. шк., 2005. – 841 с.
3. Турчак, Л. И. Основы численных методов : учеб. пособие для студентов вузов / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. – М. : Физматгиз, 2005. – 301 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
--------------------------	---

Лабораторная работа № 1

Решение систем линейных алгебраических уравнений	4
---	---

Метод Гаусса (4). Описание алгоритма (5). Метод \overline{LDL}^T - факторизации (7). Задание (8)

Лабораторная работа № 2

Решение систем нелинейных алгебраических уравнений	12
---	----

Метод Ньютона (12). Описание алгоритма (14). Задание (14)

Лабораторная работа № 3

Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений .	17
---	----

Элементы теории (17). Явный метод Эйлера (19). Неявный метод Эйлера (21). Задание (23)

Лабораторная работа № 4

Приближение функций методом наименьших квадратов	25
---	----

Элементы теории (25). Описание алгоритма (28). Задание (29)

Лабораторная работа № 5

Вычисление определенных интегралов	33
---	----

Элементы теории (33). Формула трапеций (33). Формула Симпсона (35). Кубатурная формула Симпсона (35). Задание (36)

Список литературы	38
--------------------------------	----

Учебное издание

Мулярчик Степан Григорьевич
Хомич Василий Васильевич

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

**Методические указания
к лабораторному практикуму**

В двух частях

Часть 1
Задачи высшей математики

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *С. Г. Мулярчик*

Подписано в печать 23.05.2019. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,32. Уч.-изд. л. 1,92. Тираж 50 экз. Заказ

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/270 от 03.04.2014.

Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Отпечатано с оригинал-макета заказчика
на копировально-множительной технике
факультета радиофизики и компьютерных технологий
Белорусского государственного университета.
Ул. Курчатова, 5, 220045, Минск.