

模式识别与机器学习作业-第四章

2019.9.30

1. 设有如下三类模式样本集 w_1, w_2, w_3 , 其先验概率相等, 求 S_w 和 S_b 。

$$\begin{aligned}w_1 &: \{(1, 0)^T, (2, 0)^T, (1, 1)^T\}, \\w_2 &: \{(-1, 0)^T, (0, 1)^T, (-1, 1)^T\}, \\w_3 &: \{(-1, -1)^T, (0, -1)^T, (0, -2)^T\},\end{aligned}$$

由题可得,

$$m_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad m_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad m_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad m_0 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{又, } P(w_1) = P(w_2) = P(w_3) = \frac{1}{3}$$

代入公式得

$$\begin{aligned}S_w &= \sum_{i=1}^3 P(w_i) E\{(x - m_i)(x - m_i)^T | w_i\} \\&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 18 & -3 \\ -3 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{27} \\ -\frac{1}{27} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_b &= \sum_{i=1}^3 P(w_i) (m_i - m_0)(m_i - m_0)^T \\&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 186 & 39 \\ 39 & 186 \end{pmatrix} = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 62 & 13 \\ 13 & 62 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. 设有如下两类样本集，其出现的概率相等，用 K-L 变换，分别把特征空间维数降到二维和一维，并画出样本在该空间中的位置（可用 matlab 计算）。

$$w_1 : \{(0, 0, 0)^T, (2, 0, 0)^T, (2, 0, 1)^T, (1, 2, 0)^T\},$$

$$w_2 : \{(0, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T, (0, -2, 1)^T, (1, 1, -2)^T\},$$

由题意可以求得，样本中心点坐标为： $m = (0.75, 0.25, 0.125)^T$ ，由此可以求出协方差矩阵为

$$C_x = E[(x - m)(x - m)^T] = \begin{pmatrix} 0.6875 & 0.1875 & -0.09375 \\ 0.1875 & 1.1875 & -0.53125 \\ -0.09375 & -0.53125 & 0.859375 \end{pmatrix}$$

求出其特征值和特征向量分别为：

$$\lambda_1 = 1.625, \lambda_2 = 0.64876246, \lambda_3 = 0.46061254$$

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0.21538745 \\ 0.95853318 \\ -0.18660756 \end{pmatrix}, \phi_2 = \begin{pmatrix} 0.78975397 \\ -0.05858624 \\ 0.61061961 \end{pmatrix}, \phi_3 = \begin{pmatrix} -0.57436653 \\ 0.27889386 \\ 0.76962413 \end{pmatrix}$$

当将样本降到二维时，选择 ϕ_1, ϕ_2 ，得

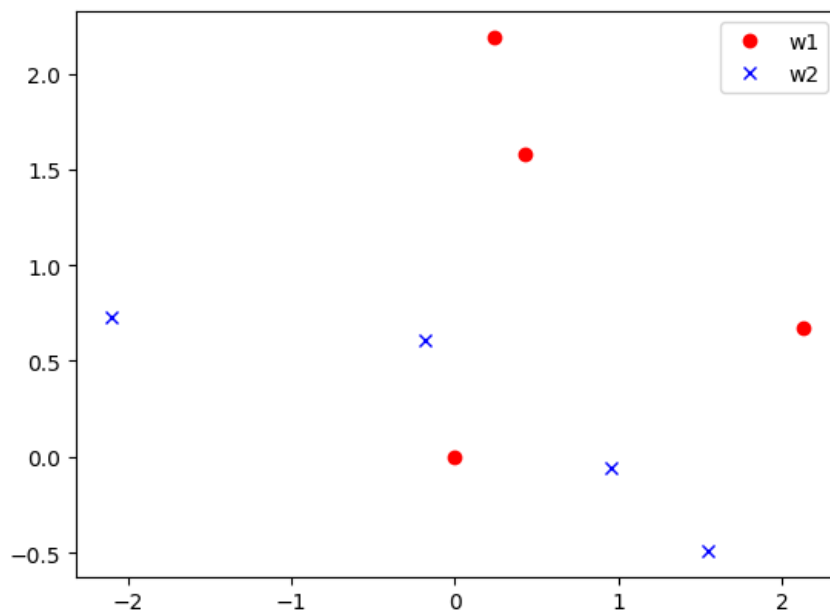
$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.21538745 & 0.78975397 \\ 0.95853318 & -0.05858624 \\ -0.18660756 & 0.61061961 \end{pmatrix}$$

经过线性变换后， $y = \Phi^T x$ ，得

$$w_1 : \{(0., 0.)^T, (0.4307, 1.5795)^T, (0.2441, 2.1901)^T, (2.1324, 0.6725)^T\},$$

$$w_2 : \{(-0.1866, 0.6106)^T, (0.9585, -0.0585)^T, (-2.1036, 0.727)^T, (1.5471, -0.4900)^T\}$$

降维后，样本在空间中的分布如下图所示：



同理，当变换到一维空间中时，选择 ϕ_1 进行线性变换，得

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.21538745 \\ 0.95853318 \\ -0.18660756 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} w_1 &: \{0, 0.430, 0.2441, 2.1324\}, \\ w_2 &: \{-0.1866, 0.9585, -2.1036, 1.5471\} \end{aligned}$$

降维后，样本在空间中的分布如下图所示：

