矩阵分析作业 7：模和内积二

2019.11.10

Exercise.1

1. Using Housholder reduction and Givens reduction, compute the QR factors of

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{pmatrix}.$$

(1).Housholder 约简，首先

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{pmatrix}$$

先消去 (1,1) 下边的元素，

$$u_1 = A_{*1} - ||A_{*1}||e_1 = A_{*1} - 3e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = I - 2\frac{u_1u_1^T}{u_1^Tu_1} = I - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1A = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & -9 & 54 \\ 0 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

下面再消去 (2,2) 下面的元素，

$$A_2 = \begin{pmatrix} -9 & 54 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = [A_2]_{*1} - ||[A_2]_{*1}||e_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} - 15\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 12\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{R}_2 = I - 2\frac{u_2 u_2^T}{u_2^T u_2} == \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad and \quad \hat{R}_2 A_2 = \begin{pmatrix} 15 & -30 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

所以，

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad and \quad P = R_1 R_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{14}{15} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{15} \\ \frac{-2}{15} & \frac{2}{3} & \frac{11}{15} \end{pmatrix}$$

$$PA = R_2 R_1 A = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix} = T$$

即 $PA = T$，我们可以得到 $A = P^T T$ 的类似于 QR 分解的形式，其中 $Q = P^T$，上三角矩阵 $R = T$。

(2).Givens 约简，首先消去 (2,1)

$$P_{12} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad and \quad P_{12}A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 5 & 29 & -74 \\ 0 & 33 & -48 \\ 2\sqrt{5} & 8\sqrt{5} & 37\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

再消去 (3,1) 元素，

$$P_{13} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad and \quad P_{13}P_{12}A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 15\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 33 & -48 \\ 0 & -6 & 111 \end{pmatrix}$$

再消去 (3,2) 的元素，

$$P_{23} = \frac{1}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 5\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -2 \\ 0 & 2 & 11 \end{pmatrix}, \quad and \quad P_{23}P_{13}P_{12}A = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}$$

令 $P = P_{23}P_{13}P_{12}$，得

$$P = P_{23}P_{13}P_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{14}{15} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{15} \\ \frac{-2}{15} & \frac{2}{3} & \frac{11}{15} \end{pmatrix} \quad and \quad `'T = P_{23}P_{13}P_{12}A = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}$$

同样可以得到 $PA = T$ 的形式，所以 $A = P^T T$ 的类似于 QR 分解的形式，其中 $Q = P^T$，上三角矩阵 $R = T$。

Exercise.7

7. Let $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ be subspaces of $\Re^3$ whose respective bases are

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad and \quad \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Explain why $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ are complementary subspaces of $\Re^3$.
(b) Determine the projector $\mathbf{P}$ onto $\mathcal{X}$ along $\mathcal{Y}$ as well as the complementary projector $\mathbf{Q}$ onto $\mathcal{Y}$ along $\mathcal{X}$.
(c) Determine the projection of $\mathbf{v} = (2\ -1\ 1)^T$ onto $\mathcal{Y}$ along $\mathcal{X}$.

(a) 由题目，

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \phi$$
$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathcal{X}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

令 A 等于 $\mathcal{B}$ 的列向量组成的矩阵，则 $rank(A) = 3$,、、所以 $\mathcal{B}$ 中三个向量构成了 $\mathcal{R}^3$ 空间中的一组基，因此，可以说 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 构成了 $\mathcal{R}^3$ 空间中的互补子空间。

(b). 由题，沿 $\mathcal{Y}$ 方向到 $\mathcal{X}$ 的投影算子 P 为，

$$P = [X|0][X|Y]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

沿 $\mathcal{X}$ 方向到 $\mathcal{Y}$ 的投影算子 Q 为，

$$Q = I - P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(c). 由上可知,v 沿 $\mathcal{X}$ 方向到 $\mathcal{Y}$ 的投影为，

$$y = Qv = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$