1 Elementare DSV

1.1 Energie

Die Leistung und Energie eines Signals $x(k)$ $k \in [k_1, k_2]$

$$E_{k_1,k_2} = \sum_{k=k_1}^{k_2} |x(k)|^2 = (k_2 - k_1 + 1)P_{k_1,k_2} \quad (1)$$

Parsevallsche Gleichung ZDFT:

$$E_{-\infty,\infty} = \sum_{-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\Omega})\right|^2 d\Omega \quad (2)$$

Parsevallsche Gleichung DFT:

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |X(n)|^2 \quad (3)$$

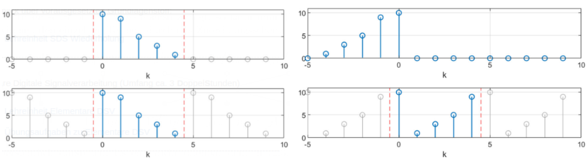
1.2 DFT/IDFT

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \quad (4)$$

$$x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \quad (5)$$

$$(6)$$

Die DFT bewirkt eine implizite Periodisierung.
Math. Modulo: $\tilde{x}(k) = x([k]_{modN})$ $[n]_{modN} = n - N\lfloor \frac{n}{N} \rfloor$



	Zeitbereich	Spektralbereich
Linearität	$a \cdot x_1(k) + b \cdot x_2(k)$	$a \cdot X_1(n) + b \cdot X_2(n)$
Zeit-Verschiebung	$x([k-k_0]_{modN})$	$e^{-j\frac{2\pi n k_0}{N}} X(n)$
Frequenz-Verschiebung	$e^{-j\frac{2\pi n k_0}{N}} x(k)$	$X([n+k_0]_{modN})$
Spiegelung	$x([-k]_{modN})$	$X([-n]_{modN})$
Konj.Kompl	$x^*(k)$	$X^*([-n]_{modN})$
Konj.Kompl.gespiegelt	$x^*([-k]_{modN})$	$X^*(n)$
Faltung	$x_1(k) \circledast x_2(k)$	$X_1(n)X_2(n)$
Multiplikation	$x_1(k)x_2(k)$	$\frac{1}{N} X_1(n) \circledast X_2(n)$
gerade Symmetrie	$x_g(k) = \frac{x(k)+\tilde{x}(-k)}{2}$	$X_g(n) = \frac{X(n)+X(-n)}{2}$
ungerade Symmetrie	$x_u(k) = \frac{x(k)-\tilde{x}(-k)}{2}$	$X_u(n) = \frac{X(n)-X(-n)}{2j}$

$$x[n] \Longleftrightarrow X(e^{j\theta})$$
$$\delta[n-n_0] \Longleftrightarrow e^{-j\theta n_0}$$
$$e^{j\theta_0 n} \Longleftrightarrow 2\pi\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0)$$
$$\cos(\theta_0 n) \Longleftrightarrow \pi\left(\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0) + \delta_{2\pi}(\theta+\theta_0)\right)$$
$$\sin(\theta_0 n) \Longleftrightarrow \frac{\pi}{j}\left(\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0) - \delta_{2\pi}(\theta+\theta_0)\right)$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] \Longleftrightarrow \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \frac{2\pi}{N}k)$$
$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\theta}} + \pi\delta_{2\pi}(\theta)$$
$$\alpha^n u[n], \quad |\alpha| < 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{1-\alpha e^{-j\theta}}$$
$$\frac{\sin(\alpha n)}{\pi n}, \quad 0 < \alpha < \pi \Longleftrightarrow X(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\theta| \leq \alpha \\ 0, & \alpha < |\theta| < \pi \end{cases}$$
$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{\sin\left((2N_1+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{N\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{-j\frac{N-1}{2}\theta}$$

Es gilt: $0 \leq n < N$, $0 \leq k < N$ und $0 \leq m < N$

$$e^{j\frac{2\pi}{N}mn} \Longleftrightarrow N\delta[k-m]$$
$$\cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) \Longleftrightarrow \frac{N}{2}\left(\delta[k-m] + \delta[k+m-N]\right)$$
$$\sin\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) \Longleftrightarrow \frac{N}{2j}\left(\delta[k-m] - \delta[k+m-N]\right)$$
$$\delta[n] \Longleftrightarrow 1$$
$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N_1 \\ 1, & N-N_1 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{\sin\left((2N_1+1)\frac{\pi k}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)}$$

1.3 z-Transformation

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \quad z = e^{sT_a} \quad (7)$$

Eigenschaft	Zeitbereich	Bildbereich
Linearität	$y(k) = a \cdot u_1(k) + b \cdot u_2(k)$	$Y(z) = a \cdot U_1(z) + b \cdot U_2(z)$
Zeitverschiebung	$y(k) = u(k-1)$	$Y(z) = z^{-1} \cdot U(z) + u(-1)$
	$y(k) = u(k-2)$	$Y(z) = z^{-2} \cdot U(z) + z^{-1} \cdot u(-1) + u(-2)$
Differenz	$y(k) = u(k) - u(k-1)$	$Y(z) = (1 - z^{-1}) \cdot U(z) - u(-1)$
Summation	$y(t) = \sum_{\nu=0}^{k} u(\nu)$	$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot U(z) = \frac{z}{z-1} \cdot U(z)$
Faltung	$y(k) = \sum_{\nu=-0}^{k} u(\nu) \cdot g(k-\nu)$	$Y(z) = U(z) \cdot G(z)$
Multiplikation mit k	$y(k) = k \cdot u(k)$	$Y(z) = -z \cdot \frac{dU(z)}{dz}$
Modulation	$y(k) = a^k \cdot u(k)$	$Y(z) = U\left(\frac{z}{a}\right)$

1.4 Faltung

1.4.1 Lineare Faltung

$$g(k) * u(k) = \sum_{\nu=0}^{k} g(\nu)u(k-\nu) = \sum_{\nu=0}^{k} g(k-\nu)u(\nu) \quad (8)$$

1.4.2 Zyklische Faltung

$x_1(k)$ und $x_2(k)$ durch **Zero-Padding** auf $N = N_1 + N_2 - 1$

$$x_1(k) \circledast x_2(k) = \sum_{\nu=0}^{N-1} x_1(\nu) x_2([k-\nu]_{modN}) = \sum_{\nu=0}^{N-1} x_1([k-\nu]_{modN}) x_2(\nu) \quad (9)$$

1.5 Korrelation

$x_1(k) \in [0, N_1 - 1]$ und $x_2(k) \in [0, N_2 - 1]$ nicht kommutativ sondern an der y-Achse gespiegelt ($r_{x1x2}(\lambda) = r_{x2x1}(-\lambda)$).

$$r_{x_1x_2}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1^*(k) x_2(k+\lambda) \quad (10)$$

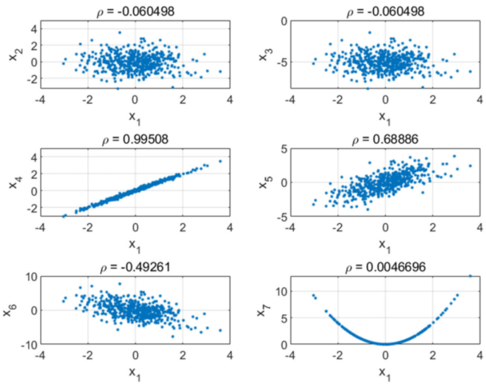
Korrelation durch schnelle Faltung:
1. Beide Signale Zero-Padding auf $N = N_1 + N_2 - 1$
2. x_1 Spiegeln
3. Faltung ausführen

$$r_{x_1x_2}(\lambda) = x_1^*(-\lambda) * x_2(\lambda) \quad (11)$$

- Nicht-Erwartungstreue Schätzung $\hat{\varphi}_{x1x2}$
- Erwartungstreue Schätzung $\hat{\varphi}'_{x1x2}$
- Normierung auf $N = max(N_1, N_2)$

$$\hat{\varphi}_{x_1x_2} = \frac{1}{N} r_{x_1x_2}(\lambda) \quad (12)$$
$$\hat{\varphi}'_{x_1x_2} = \frac{1}{N-|\lambda|} r_{x_1x_2}(\lambda) \quad (13)$$

Korrelationskoeffizient:



1.6 Blocksignalverarbeitung

Der i-te Block $x^{(i)}(k)$ der Länge L mit Versch.abstand D wird als Multiplikation mit Fensterfunktion $w(k)$ beschrieben

$$Allg.: x^{(i)}(k) = x(k+(i-1)D) \cdot w(k) \quad k \in [0, L-1] \quad (14)$$

Überlapp $D_{\%}$

$$D_{\%} = \frac{L-D}{L} 100\% \quad (15)$$

1.6.1 Overlapp-Add Verfahren

Schnelle Faltung $g(k)*u(k)$ $N_u >> N_g$ Aufteilung $u(k)$ nicht-überlappend (**nahtlos**) $\rightarrow D = L$
Zero-Padding $u^{(i)}(k)$ auf $N = L + N_g$

1.6.2 Overlapp-Save Verfahren

Schnelle Faltung $g(k)*u(k)$ $N_u >> N_g$
z.B Überlapp $= N_g - 1 \rightarrow D = L - N_g + 1$

$$u^{(i)}(k) = u(k+(i-1)D) \quad k \in [0, L-1] \quad (16)$$

1.7 Simultane Transformation

$$x_1(k) = Re[y(k)] = \frac{1}{2}(y(k) + y^*(k)) \quad (17)$$
$$x_2(k) = Im[y(k)] = \frac{1}{2j}(y(k) - y^*(k)) \quad (18)$$
$$x_1(k) = x(2k) \quad (19)$$
$$x_2(k) = x(2k+1) \quad (20)$$
$$y(k) = x_1(k) + jx_2(k) \quad (21)$$

$$X_1(n) = \frac{1}{2}(Y(n) + Y^*([-n]_{modN})) \quad (22)$$
$$X_2(n) = \frac{1}{2j}(Y(n) - Y^*([-n]_{modN})) \quad (23)$$

2 Stochastische Prozesse

2.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Wahrscheinlickkeit $P(x_u \leq x \leq x_o)$, dass $x \in [x_u, x_o]$

$$P(x_u \leq x \leq x_o) = \int_{x_u}^{x_o} f_x(\alpha) d\alpha \quad (24)$$
$$bzw. \quad F_x(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f_x(u) du \quad (25)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(u) du = 1 \quad (26)$$

Gaußverteilung (Normalverteilung)

$$f_x(\alpha) = \frac{1}{\sigma_x \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \quad (27)$$

2.2 Erwartungswert μ_x, Varianz σ_x^2

Formeln gelten nur für **stationäre** Zufallsvariablen bzw stochastische Prozesse

$$\mu_x = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f_x(\alpha) d\alpha = \sum_{\nu} a_\nu P_\nu \quad (28)$$

$$\sigma_x^2 = E[(x-\mu_x)^2] = E[x^2] - \mu_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - \mu_x)^2 \; f_x(\alpha) d\alpha \quad (29)$$

Für 2 Stoch. unabh. Variablen $f_x(\alpha)$ und $f_y(\beta)$ gilt

$$f_{xy}(\alpha, \beta) = f_x(\alpha) \cdot f_y(\beta) \quad (30)$$
$$\mu_{xy} = \mu_x + \mu_y \quad (31)$$
$$\sigma_{xy}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad (32)$$

2.3 Stationärer Stochastischer Prozess

P. stationär, wenn seine statistischen Eigenschaften zeitinvariant sind
Einzelner stationärer Stochastischer Prozess:

$$f_{x(k)}(\alpha) = f_{x(k+k_0)}(\alpha) = f_x(\alpha) \quad (33)$$

Ein Prozess wird zu zwei verschiedene Zeitpunkte k_1 und k_2

$$f_{x(k_1)x(k_2)}(\alpha) = f_{x(k_1+k_0)x(k_2+k_0)}(\alpha) \quad (34)$$

Zwei Prozesse x und y wird zu zwei verschiedene Zeitpunkte k_1 und k_2

$$f_{x(k_1)y(k_2)}(\alpha) = f_{x(k_1+k_0)y(k_2+k_0)}(\alpha) \tag{35}$$

Autokorrelations $\varphi_{xx}(\lambda)$ und Kreuzkorrelation $\varphi_{xy}(\lambda)$

$$\varphi_{xx}(\lambda) = E[x^*(k)x(k+\lambda)] \tag{36}$$
$$\varphi_{xy}(\lambda) = E[x^*(k)y(k+\lambda)] \tag{37}$$

Definition **schwache Stationarität**

- $\mu_x = E[x(k)] = const.$
- $\varphi_{xx}(\lambda) = \varphi_{xx}(-\lambda)$ (= gerade Symmetrie)
- $\varphi_{xx}(0) \geq |\varphi_{xx}(\lambda)|$ (max(Autokorr.) im Ursprung)
- $\varphi_{xx}(0) = E[|x(k)|^2]$ (= mittlere Leistung)
- $\varphi_{xx}(0) = \sigma_x^2 + |\mu_x|^2$
- aus Stationarität folgt **Unkorreliertheit**

2.4 Ergodizität

Scharmittelwert und Zeitmittelwert sind aquivalent

	Zeitmittelwert(Schätzung)	Scharmittelwert
lin. Mittelw μ_x	$\mu_x = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)$	E[x(k)]
Varianz σ_x^2	$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \lvert x(k)-\mu_x\rvert^2$	$E[\lvert x(k)-\mu_x\rvert^2]$
AKorr. $\varphi_{xx}(\lambda)$	$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x^*(k)x(k+\lambda)$	$E[x^*(k)x(k+\lambda)]$
KKorr. $\varphi_{xy}(\lambda)$	$\varphi_{xy}(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x^*(k)y(k+\lambda)$	$E[x^*(k)y(k+\lambda)]$

	Zeitmittelwert	Scharmittelwert
lin. Mittelw	$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} x(k)$	$E[x(k)]$
Varianz σ_x^2	$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} \lvert x(k)-\mu_x\rvert^2$	$E[\lvert x(k)-\mu_x\rvert^2]$
AKorr. $\varphi_{xx}(\lambda)$	$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} x^*(k)x(k+\lambda)$	$E[x^*(k)x(k+\lambda)]$
KKorr. $\varphi_{xy}(\lambda)$	$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} x^*(k)y(k+\lambda)$	$E[x^*(k)y(k+\lambda)]$

2.5 Leistungsdichtespektrum LDS

LDS = DFT der Stochastischen Prozesse
Autoleistungsdichtespektrum $\phi_{xx}(e^{j\Omega})$ und Kreuzeistungsdichtespektrum $\phi_{xy}(e^{j\Omega})$

$$\phi_{xx}(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{\varphi_{xx}(\lambda)\} \tag{38}$$
$$\phi_{xx}(e^{j\Omega}) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\lambda)e^{-j\Omega\lambda} \tag{39}$$
$$\varphi_{xx}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{xx}(e^{j\Omega})e^{j\Omega\lambda}d\Omega \tag{40}$$
$$\phi_{xy}(e^{j\Omega}) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}(\lambda)e^{-j\Omega\lambda} \tag{41}$$
$$\varphi_{xy}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{xy}(e^{j\Omega})e^{j\Omega\lambda}d\Omega \tag{42}$$

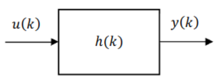
Mittlere Leistung $\varphi_{xx}(0)$

$$\varphi_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{xx}(e^{j\Omega})d\Omega = \frac{\phi_{xx}(e^{j\Omega})}{2\pi} \tag{43}$$

Weißes Rauschen (Mittelwertfrei)

$$\phi_{xx}(e^{j\Omega}) = \phi_0 \tag{44}$$
$$\varphi_{xx}(0) = \phi_0\gamma_0(\lambda) \tag{45}$$

2.6 LTI-Systeme



Mit konst. Mittelwerten $E[u(k-\nu)] = \mu_x$ und $E[y(k)] = \mu_y$

$$\mu_y = \mu_u \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} h(\nu) = \mu_u H(e^{j0}) \tag{46}$$

Zusätzliche Beziehungen

$$\varphi_{uy}(\lambda) = h(\lambda) * \varphi_{uu}(\lambda) \tag{47}$$
$$\varphi_{yu}(\lambda) = h(-\lambda)^* * \varphi_{uu}(\lambda) \tag{48}$$
$$\varphi_{yy}(\lambda) = h(\lambda) * \varphi_{yu}(\lambda) = h^*(-\lambda) * \varphi_{uy}(\lambda) \tag{49}$$
$$\varphi_{yy}(\lambda) = h^*(-\lambda) * h(\lambda) * \varphi_{uu}(\lambda) \tag{50}$$

- $\phi_{uy}(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})\phi_{uu}(e^{j\Omega})$
- $\phi_{yu}(e^{j\Omega}) = H^*(e^{j\Omega})\phi_{uu}(e^{j\Omega})$
- $\phi_{yy}(e^{j\Omega}) = H^*(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})\phi_{uu}(e^{j\Omega}) = \left|H(e^{j\Omega})\right|^2\phi_{uu}(e^{j\Omega})$

3 Spektralschätzung

3.1 Spektralschätzung mit FFT

Umrechnung $n \leftrightarrow f$

$$f_n = n\frac{f_A}{N} \tag{51}$$

Umrechnung $\Omega \leftrightarrow n$

$$\Omega_n = 2\pi\frac{n}{N} = \omega T_a \tag{52}$$

Umrechnung $\omega \leftrightarrow n$

$$\omega_n = 2\pi f_A \frac{n}{N} \tag{53}$$

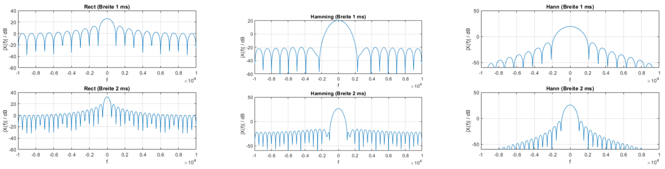
Spektrum	Zeitbereich
$n = 0$	Konstante $x(0) = \frac{1}{N}X(0)$
$n = \tilde{n}$	$x_{\tilde{n}}(k) = \frac{1}{N}(X(\tilde{n})e^{-j\frac{2\pi k\tilde{n}}{N}} + X(N-\tilde{n})e^{-j\frac{2\pi k(N-\tilde{n})}{N}})$
$n = \frac{N}{2}$	$e^{jk\pi} = (-1)^k$

3.2 Leck-Effekt

Kein Ganzzahliges Vielfaches fällt in das Beobachtungsfenster $w(k)$.
Bsp: Sinus $x(t) = sin(w_0 t) \cdot w(t)$ mit $w(t) = rect(\frac{t-T/2}{T})$

$x_w(k) = x(k)w(k) \circ\!\!-\!\!\bullet\ X_w(n) = X(n) * W(n)$
$sin(w_0 t) \circ\!\!-\ j\pi(\delta_0(w + w_0) - \delta_0(w - w_0))$
$rect(\frac{t-T/2}{T}) \circ\!\!-\ T si(w\frac{T}{2})e^{-jw\frac{T}{2}}$
$X(jw) = \frac{2}{2\pi}[j\pi(\delta_0(w+w_0) - \delta_0(w+w_0))] * si(w\frac{T}{2})e^{-jw\frac{T}{2}}]$
$X(jw) = j\frac{T}{2}[si((w+w_0)\frac{T}{2})e^{-j(w+w_0)\frac{T}{2}} - si((w-w_0)\frac{T}{2})e^{-j(w-}$

3.3 Zeitfenster



Rechteck um bei k=0 beginnend (um $\frac{N}{2}$ verschoben)

$$rect(k - \frac{N}{2}) \circ\!\!- \frac{sin(N\frac{\Omega}{2})}{sin(\frac{\Omega}{2})} e^{-j\Omega\frac{N-1}{2}} \tag{54}$$

- Breite der Hauptkeule $\Omega_B = \frac{4\pi}{N}$
- Höhe der Hauptkeule $A_B = N$
- Nullstellen $\Omega_{0\nu} = \frac{2\pi}{N}\nu \quad \nu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

3.4 Zero-Padding

Zero-Padding = Annäherung an die DTFT → feinere Spektrumauflösung Energiegehalt $E = E_{ZP}$

3.5 Spektralschätzung Stoch. Prozesse

Periodogramm

$$\hat{\phi}_{Per} = \frac{1}{N}|X(n)|^2 \tag{55}$$

Mittlere Leistung P mittels Periodogramm

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\hat{\phi}_{Per} = \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}|X(n)|^2 \tag{56}$$

Falls nur Spektrum von $n \in [0, N/2]$ gegeben

$$P = \frac{1}{N}(\hat{\phi}_{Per}(0) + 2sum_{n=0}^{N/2-1}\hat{\phi}_{Per} + \hat{\phi}_{Per}(\frac{N}{2})) \tag{57}$$

$$P = \frac{1}{N^2}(|X(0)|^2 + 2\sum_{n=0}^{N/2-1}|X(n)|^2 + |X(N/2)|^2) \tag{58}$$

Falls nur best. Frequenzintervall $P \in [f_u, f_0] \rightarrow [n_1, n_2]$

$$P = \frac{2}{N}\sum_{n=n_1}^{n_2}\hat{\phi}_{Per} = \frac{2}{N^2}\sum_{n=n_1}^{n_2}|X(n)|^2 \tag{59}$$

Auch hier tritt Leck-Effekt auf → Minderung mit Fensterfunktion w(t) ABER: Verlust von Energie => Modifikation d. Schätzung mit Korrekturfaktor U (hängt von w(t) ab) Spezialfall: w(t) = rect(t) => U = 1

$$\hat{\phi}_{Per,m} = \frac{1}{NU}|X_m(n)|^2 \tag{60}$$

$$U = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|w(t)|^2 \tag{61}$$

3.5.1 Weißes Rauschen

LDS ist Konstante $\phi_{xx,WR}(n) = \phi_{xx,WR} = const.$

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\phi_{xx,WR}(n) = \phi_{xx,WR} \tag{62}$$

3.6 Welch-Methode

Zerlegung von x(k) der Länge N in K Sequenzen $x^{(i)}(k)$ der Länge L. Die Startzeitpunkte liegen im Abstand D
Es gilt $N = L + D(K-1)$

$$x^{(i)}(k) = x(k + iD) \quad k \in [0, L-1] \tag{63}$$

z.B Fensterung + Zero-Padding $\tilde{L} = L + L_{ZP}$

$$\hat{\phi}^{(i)}_{Per}(n) = \frac{1}{LU}\left|X^{(i)}(n)\right|^2 \tag{64}$$

$$U = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{N-1}|w(t)|^2 \tag{65}$$

Das LDS ergiebt sich aus Mittelung aller K Periodogramme

$$\hat{\phi}_W(n) = \frac{1}{K}\sum_{i=0}^{K-1}\hat{\phi}^{(i)}(n) \tag{66}$$

$$P = \frac{1}{\tilde{L}}\sum_{n=0}^{\tilde{L}-1}\hat{\phi}_W(n) \tag{67}$$

$K\uparrow$ => Varianz d. Schätzung↓ => Qualität ↑
$L\downarrow$ => Frequenzauflösung↓
$D\downarrow$ => Überlapp↑ => K↑ => Rechenaufwand↑

4 Digitale-Filter

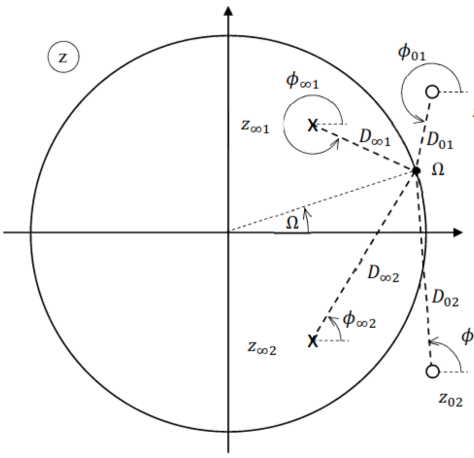
$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu z^{-\mu}}{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^{-\nu}} \tag{68}$$

Darstellung Linearfaktoren für n=2

$$H(z) = \frac{b_0(z - z_{01})(z - z_{02})}{a_0(z - z_{\infty 1})(z - z_{\infty 2})} \quad (69)$$

Jeder Linearfaktor kann als von der Frequenz Ω abhängiger Drehzeiger

- Pole verstärkt Amplitudengang
- Nullstelle dämpft Amplitudengang
- Pole und Nullstellen treten immer **konj. komplex** auf
- $(e^{j\Omega} - z_{01}) = D_{01}e^{j\phi_{01}}$ und $(e^{j\Omega} - z_{02}) = D_{02}e^{j\phi_{02}}$
- $(e^{j\Omega} - z_{\infty 1}) = D_{\infty 1}e^{j\phi_{01}}$ und $(e^{j\Omega} - z_{01}) = D_{\infty 2}e^{j\phi_{\infty 2}}$



- Amplitudengang: $\left|H(e^{j\Omega})\right| = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \left|\frac{D_{01}D_{02}}{D_{\infty 1}D_{\infty 2}}\right|$
- Phasengang: $arg(H(e^{j\Omega})) = arg(\frac{b_0}{a_0}) + \phi_{01} + \phi_{02} - \phi_{\infty 1} - \phi_{\infty 2}$

4.1 Rekursiver Glätter

Vergangenheitswert y(k-1) wird mit Faktor $a \in [0, 1]$

$$y(k) = ay(k-1) + (1-a)u(k) \quad (70)$$
$$H(z) = \frac{1-a}{1-az^{-1}} = \frac{(1-a)z}{z-a} \quad (71)$$

Vom Verhalten entspricht er einem Tiefpass 1.Ordnung mit Grenzfrequenz Ω_g (a lässt sich aus Ω_g berechnen)

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1-a}{1-ae^{-j\Omega}} \quad (72)$$
$$\Omega_g = 2\pi\frac{f_g}{f_A} \quad (73)$$
$$a = 2 - cos(\Omega_g) - \sqrt{(2 - cos(\Omega_g))^2 - 1} \quad (74)$$

4.2 Arithmetischer Mittelwert Glätter

$$y(k) = \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} u(k-\nu) \quad (75)$$
$$H(z) = \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} z^{-\nu} = \frac{1}{N}\frac{z^{-N}-1}{z^{-1}-1} \quad (76)$$

4.3 Notch-Filter

$$H(z) = \frac{(z - e^{j\Omega_0})(z - e^{-j\Omega_0})}{(z - r_\infty e^{j\Omega_0})(z - r_\infty e^{-j\Omega_0})} \quad (77)$$

Vorgabe Kerbe bei Frequenz f_N und -3dB Breite Δf und gegebener Abtastfrequenz f_A

$$\Omega_0 = \frac{2\pi f_N}{f_A} \quad (78)$$
$$\Delta\Omega = \frac{2\pi\Delta f}{f_A} \quad (79)$$

Einsetzen in Übertragungsfunktion H(z), Kerbentiefe $+A_B[dB]$

$$H(z) = b\frac{1 - 2cos(\Omega_0)z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2bcos(\Omega_0)z^{-1} + (2b-1)z^{-2}} \quad (80)$$
$$b = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{1-G_B^2}}{G_B}tan(\frac{\Delta\Omega}{2})} \; mit \; G_B = 10^{\frac{-A_B}{20}} \quad (81)$$

4.4 Kammfilter

Zu jeder Nullstelle z_{0n} einen Pol $z_{\infty n}$ im Radius $r_\infty < 1$ plazieren.
p = Ordnung, (K) = Kerbenbildend, (R) = Resonanzbildend

$$z_{\infty n}^{(K)} = r_\infty e^{j\frac{2\pi n}{p}} \quad (82)$$
$$z_{0n}^{(K)} = e^{j\frac{2\pi n}{p}} \quad (83)$$
$$z_{\infty n}^{(R)} = e^{j\frac{(\pi + 2\pi n)}{p}} \quad (84)$$
$$z_{\infty n}^{(R)} = r_\infty e^{j\frac{(2\pi n)}{p}} \quad (85)$$

4.4.1 Kerbenbildend Kammfilter $H_{(K)}(z)$

Dimensionierung b, sodass zwischen Kerben $0dB(=1)$

$$H_{(K)}(z) = \frac{1 + r_\infty^p}{2} \cdot \frac{1 - z^{-p}}{1 - r_\infty^p z^{-p}} \quad (86)$$

4.4.2 Resonanzbildender Kammfilter $H_{(R)}(z)$

Dimensionierung b, sodass zwischen Kerben $0dB(=1)$

$$H_{(R)}(z) = \frac{1 - r_\infty^p}{2} \cdot \frac{1 + z^{-p}}{1 - r_\infty^p z^{-p}} \quad (87)$$

4.5 Goertzel-Algorithmus

Bestimmung eines einzelnen DFT-Spektralwert X(n). Gleicher Rechenaufwand wie FFT aber Blocklänge N muss keine 2er Potenz sein. $\tilde{x}(k) = [x(0..N-1) \; 0]$ (N-ter Wert 0 setzen)

$$n_0 = \frac{f_0}{f_A} N \tag{88}$$

$$X(n_0) = y(k) = x(k) * h(k)|_{k=N} \tag{89}$$

$$X(n_0) = y_n(k) = \sum_{\nu=0}^{k} \tilde{x}(\nu) e^{j\frac{2\pi}{N}(k-\nu)n} \tag{90}$$

4.6 IIR-Filter

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{\mu=0}^{m} b_\mu z^{-\mu}}{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^{-\nu}} \tag{91}$$

Gruppenlaufzeit τ = Verzögerungszeit des Systems aufgelöst nach Frequenzen

$$\tau = -\frac{d}{df}\varphi \tag{92}$$

4.6.1 IIR-Entwurfsmethoden

Entwurfsmethode	Besonderheiten des Amplitudengangs (vorgegebenes Toleranzschema)
Butterworth	- maximal flacher Verlauf im Durchlassbereich - monoton fallender Verlauf
Tschebyscheff Typ I	- oszilliert im Durchlassbereich mit p Extrema (mit p = Filterordnung, „equiripple“-Verhalten) - monoton fallend im Übergangs- und Sperrbereich
Tschebyscheff Typ II	- oszilliert im Sperrbereich („equiripple“-Verhalten) - monoton fallend im Durchlass- und Übergangsbereich - Nullstellen im Sperrbereich
Cauer	- oszilliert im Durchlass- und Sperrbereich („equiripple“-Verhalten) - monoton fallend im Übergangsbereich - hohe Sperrdämpfung

4.7 FIR-Filter

grundsätzlich Stabil, Ordnung m $\rightarrow$ m Pole im Ursprung

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu z^{-\mu} \tag{93}$$

$$H(z) = \frac{b_0 \Pi_{\mu=1}^{m}(z - z_{0\mu})}{z^m} \tag{94}$$

$$h(k) = b_k \quad k \in [0, m] \tag{95}$$

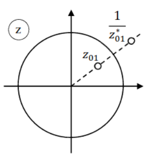
Gewollte Eigenschaft: lineare Phase

$$\tau_g = -\frac{d}{d\Omega} arg(H(e^{j\Omega})) = const. \tag{96}$$

lineare Phase wenn Nullstellen von H(z)

- auf Einheitskreis
- in am Einheitskreis gespiegelten Paaren z_{01} und $\frac{1}{z_{01}^*}$

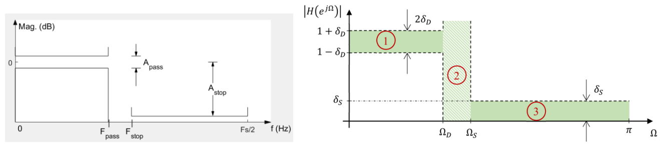
auftreten



Für linearphasige FIR-Filter der Ordnung p gilt für Impulsantwort h(k) eine der beiden Symmetrien

- $h(k) = h(p-k)$ (gerade Symmetrie)
- $h(k) = -h(p-k)$ (ungerade Symmetrie)

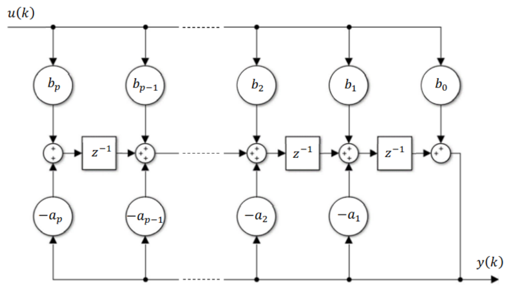
4.8 Toleranzschema



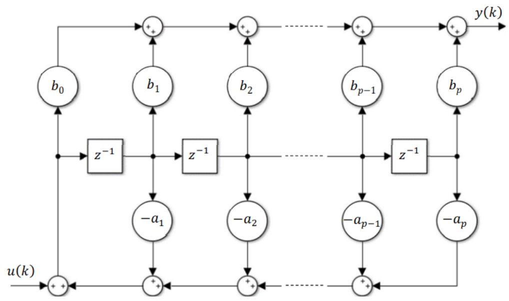
- $A_{pass} = 20\ log\left(\frac{1+\delta_D}{1-\delta_D}\right)$
- $A_{Stop} = |20\,log(\delta_S)|$
- $F_{pass} = \frac{\Omega_D}{2\pi} f_A$
- $F_{stop} = \frac{\Omega_S}{2\pi} f_A$

4.9 1. Kanonische-Form (IIR)

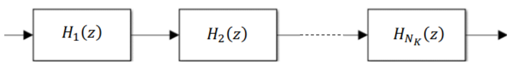
Hälfte der Speicherzellen $a_0 = 1$



4.10 2. Kanonische-Form (IIR)



4.11 3. Kanonische-Form (IIR)

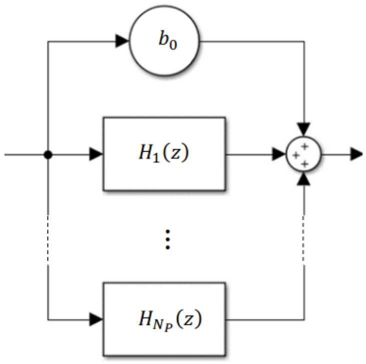


$$H(z) = \Pi_{\nu=0}^{N_K} H_\nu(z) \tag{97}$$

$$H_\nu(z)^{(1)} = \frac{b_{0\nu} + b_{1\nu} z^{-1}}{1 + a_{1\nu} z^{-1}} \tag{98}$$

$$H_\nu(z)^{(2)} = \frac{b_{0\nu} + b_{1\nu} z^{-1} + b_{2\nu} z^{-2}}{1 + a_{1\nu} z^{-1} + a_{2\nu} z^{-2}} \tag{99}$$

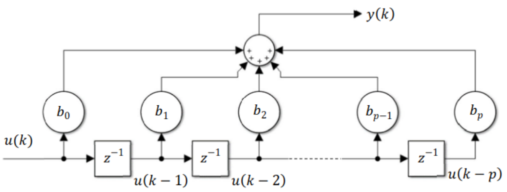
4.12 4. Kanonische-Form (IIR)



$$H(z) = b_0 + \sum_{\nu=1}^{N_P} H\nu(z) \tag{100}$$

4.13 Trasversalfilter (FIR)

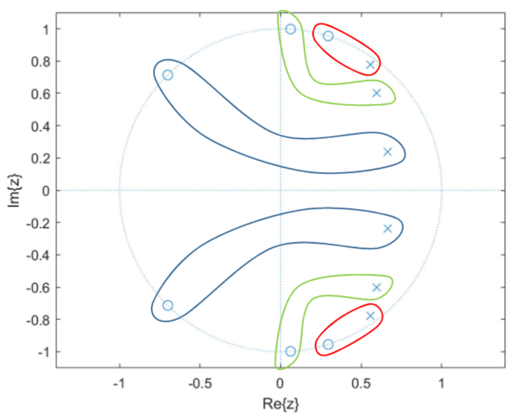
Kann effizient durch MAC-Befehl realisiert werden. Für linearphasige reelwertige FIR-Filter kann die Symmetrie der b_k genutzt werden.



4.14 SOS-Faustregel (IIR)

Aufteilung der Pole-Nullstellen in Biquads, sodass sich Einflüsse auf Frequenzgang ausgleichen. Vorgehen:

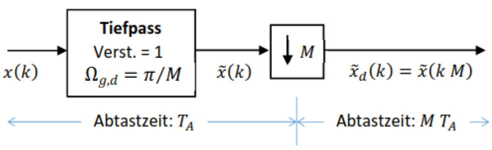
- Beginnen mit Pol der am dichtesten am EHK liegt



5 Abtastung

5.1 Dezimator Ganzzahliges M

Dezimator = Kompressor



Das Spektrum $X(e^{j\tilde{\Omega}})$ des ursprünglichen Signals x(k) wird um M dezimiert, was zum Spektrum $X_d(e^{j\Omega})$ führt.

$$x_d(k) = x_c(kMT_A) \tag{101}$$

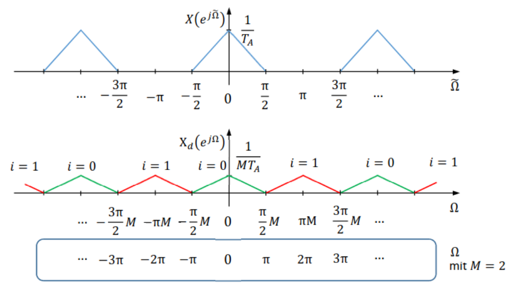
$$X(e^{j\tilde{\Omega}}) = \frac{1}{T_A} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} X_c(j\frac{\tilde{\Omega}}{T_A} - \nu\frac{2\pi}{T_A}) \tag{102}$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{MT_A} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} X_c(e^{j\frac{\Omega}{MT_A} - \mu\frac{2\pi}{MT_A}}) \tag{103}$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j\frac{\Omega}{M} - i\frac{2\pi}{M}}) \tag{104}$$

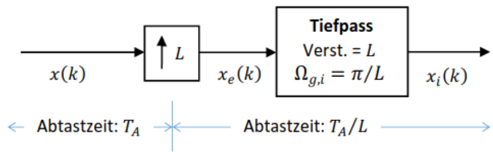
$$\tag{105}$$

- Skalierung der Frequenzachse um $\frac{\Omega}{M}$
- Verringerung der Periodisierung
- Skalierung des Spektrums mit $\frac{1}{M}$
- Falls Nyquist-Kriterium $\frac{f_A}{M} > 2\tilde{f}_{max}$ nicht erfüllt $\rightarrow$ Hohe Frequenzanteile Tiefpass-Filtern



5.2 Interpolator Ganzzahliges M

Interpolator = Expander



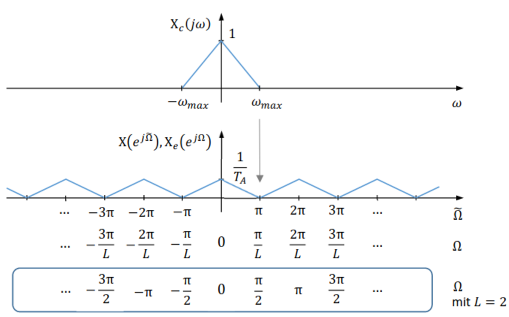
Expander hängt hinter jedem Abtastwert von x(k) L-1 0er an. $x_e(k) = [x(k/L)\ zeros(1, L-1)]$

$$x_i(k) = x_c(k\frac{T_A}{L}) \tag{106}$$

$$X_e(e^{j\tilde{\Omega}}) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} x(\nu)e^{-j\Omega\nu L} \tag{107}$$

$$X_e(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega L}) \tag{108}$$

- Spektrum $X_e(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega L})$ läuft von $-\pi/L...\pi/L$
- Keine Skalierung des Spektrums



5.3 Änderung nicht Ganzzahlig

Zusammenfassung der Tiefpässe zu einem mit V=L und Grenzfrequenz $\Omega_{g,i\&d} = min(\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M})$

$$\Omega_{nachher} = \Omega_{vorher} \frac{M}{L} \tag{109}$$