

1 Elementare DSV

1.1 Energie

Die Leistung und Energie eines Signals $x(k)$ $k \in [k_1, k_2]$

$$E_{k_1, k_2} = \sum_{k=k_1}^{k_2} |x(k)|^2 = (k_2 - k_1 + 1) P_{k_1, k_2} \quad (1)$$

Parsevallsche Gleichung ZDFT:

$$E_{-\infty, \infty} = \sum_{-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega \quad (2)$$

Parsevallsche Gleichung DFT:

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X(n)|^2 \quad (3)$$

1.2 DFT/IDFT

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j \frac{2\pi k n}{N}} \quad (4)$$

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{j \frac{2\pi k n}{N}} \quad (5)$$

	Zeitbereich	Spektralbereich
Linearität	$a \cdot x_1(k) + b \cdot x_2(k)$	$a \cdot X_1(n) + b \cdot X_2(n)$
Zeit-Verschiebung	$x(k - k_0)$	$e^{-j \frac{2\pi n k_0}{N}} X(n)$
Frequenz-Verschiebung	$e^{-j \frac{2\pi n k_0}{N}} x(k)$	$X(n + k_0)$
Spiegelung	$x(-k)$	$X(-n)$
Konj. Kompl	$x^*(k)$	$X^*(-n)$
Faltung	$x_1(k) \otimes x_2(k)$	$X_1(n) X_2(n)$
Multiplikation	$x_1(k) x_2(k)$	$\frac{1}{N} X_1(n) \otimes X_2(n)$
gerade Symmetrie	$x_g(k) = \frac{x(k) + x(-k)}{2}$	$X_g(n) = \frac{X(n) + X(-n)}{2}$
ungerade Symmetrie	$x_u(k) = \frac{x(k) - x(-k)}{2}$	$X_u(n) = \frac{X(n) - X(-n)}{2}$

1.3 z-Transformation

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \quad z = e^{sT_a} \quad (6)$$

Eigenschaft	Zeitbereich	Bildbereich
Linearität	$y(k) = a \cdot u_1(k) + b \cdot u_2(k)$	$Y(z) = a \cdot U_1(z) + b \cdot U_2(z)$
Zeitverschiebung	$y(k) = u(k-1)$ $y(k) = u(k-2)$	$Y(z) = z^{-1} \cdot U(z) + u(-1)$ $Y(z) = z^{-2} \cdot U(z) + z^{-1} \cdot u(-1) + u(-2)$
Differenz	$y(k) = u(k) - u(k-1)$	$Y(z) = (1 - z^{-1}) \cdot U(z) - u(-1)$
Summation	$y(t) = \sum_{v=0}^k u(v)$	$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot U(z) = \frac{z}{z-1} \cdot U(z)$
Faltung	$y(k) = \sum_{v=0}^k u(v) \cdot g(k-v)$	$Y(z) = U(z) \cdot G(z)$
Multiplikation mit k	$y(k) = k \cdot u(k)$	$Y(z) = -z \cdot \frac{dU(z)}{dz}$
Modulation	$y(k) = a^k \cdot u(k)$	$Y(z) = U\left(\frac{z}{a}\right)$

1.4 Faltung

1.4.1 Lineare Faltung

$$g(k) * u(k) = \sum_{\nu=0}^k g(\nu) u(k-\nu) = \sum_{\nu=0}^k g(k-\nu) u(\nu) \quad (7)$$

1.4.2 Zyklische Faltung

$x_1(k)$ und $x_2(k)$ durch **Zero-Padding** auf $N = N_1 + N_2 - 1$

$$x_1(k) \otimes x_2(k) = \sum_{\nu=k_0}^{k_0+N-1} x_1(\nu) x_2(k-\nu) \quad (8)$$

1.5 Korrelation

$x_1(k) \in [0, N_1 - 1]$ und $x_2(k) \in [0, N_2 - 1]$

$$r_{x_1 x_2}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1^*(k) x_2(k + \lambda) \quad (9)$$

1.6 Blocksignalverarbeitung

Der i -te Block $x^{(i)}(k)$ der Länge L mit Versch.abstand D wird als Multiplikation mit Fensterfunktion $w(k)$ beschrieben

$$Allg.: x^{(i)}(k) = x(k + (i-1)D) \cdot w(k) \quad k \in [0, L-1] \quad (10)$$

Überlapp $D_{\%}$

$$D_{\%} = \frac{L-D}{L} 100\% \quad (11)$$

1.6.1 Overlapp-Add Verfahren

Schnelle Faltung $g(k) * u(k)$ $N_u \gg N_g$ Aufteilung $u(k)$ nicht-überlappend (**nahtlos**) $\rightarrow D = L$
Zero-Padding $u^{(i)}(k)$ auf $N = L + N_g$

1.6.2 Overlapp-Save Verfahren

Schnelle Faltung $g(k) * u(k)$ $N_u \gg N_g$
z.B Überlapp = $N_g - 1 \rightarrow D = L - N_g + 1$

$$u^{(i)}(k) = u(k + (i-1)D) \quad k \in [0, L-1] \quad (12)$$

1.7 Simultane Transformation

$$x_1(k) = \text{Re}[y(k)] = \frac{1}{2}(y(k) + y^*(k)) \quad (13)$$

$$x_2(k) = \text{Im}[y(k)] = \frac{1}{2j}(y(k) - y^*(k)) \quad (14)$$

$$x_1(k) = x(2k) \quad (15)$$

$$x_2(k) = x(2k+1) \quad (16)$$

$$y(k) = x_1(k) + j x_2(k) \quad (17)$$

$$X_1(n) = \frac{1}{2}(Y(n) + Y^*(-n)) \quad (18)$$

$$X_2(n) = \frac{1}{2j}(Y(n) - Y^*(n)) \quad (19)$$