Level set signal : modèles de contours actifs

Léa Camusat, Eva Etheve, Julie Gonzalez et Lila Roig, 5MA A

Objectif de ce projet : mettre en oeuvre des modèles de contour actif en approximant les contours d'une forme donnée avec une fonction suffisamment régulière.

Principe général : Trouver une courbe régulière (appelée "snake") qui approche le contour de la forme, tout en minimisant de manière itérative une fonction perte (appelée "fonction énergie"). Applications possibles : imagerie médicale

Approche par les courbes de niveau : approche permettant de détecter le contour d'une figure par son changement de signe.

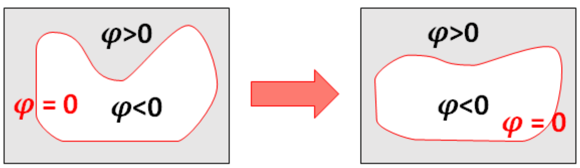


Figure 1: Principe de fonctionnement de l'approche par courbes de niveau

A l'intérieur de la figure, les courbes de niveaux ont des valeurs négatives. A l'extérieur de la figure, elles ont des valeurs positives. Ainsi, lorsque la courbe de niveau atteint le 0, on a trouvé le contour de la figure.

1. Notions principales

Un level set est une courbe de niveau. Ce n'est pas une fonction !

Rappels : Une courbe peut être décrite par sa représentation paramétrique ou par sa représentation cartésienne. Dans la forme paramétrique, les points de la courbe sont exprimés en fonction d'une variable réelle, conventionnellement notée t représentant le temps: $(\gamma(t))_{t=0}^{1}$. La représentation cartésienne est une équation qui décrit les relations entre les coordonnées des points de la courbe. Cette représentation peut être implicite, comme par exemple : $\varphi(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2} - r = 0$ (équation d'un cercle) ou explicite : $\varphi(x_2) = c_2 \pm \sqrt{r - (x_1 - c_1)^2}$

Les représentations cartésiennes et paramétriques sont équivalentes :

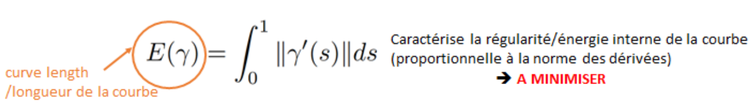
$$\{\gamma(s), s \in [0,1]\} = \{x \in R^n, \varphi(x) = 0\}$$

Union et intersection de deux level sets

La représentation avec des courbes de niveau permet de calculer facilement l'intersection et l'union de deux régions :

- l'intersection se définit comme $\varphi_{inter} = \max(\varphi_1, \varphi_2)$
- l'union se définit comme $\varphi_{union} = \min(\varphi_1, \varphi_2)$

2. Mean Curvature Motion



BUT : trouver la courbe de niveau φ_t la plus régulière possible qui approche le contour de l'intersection ou de l'union entre deux figures. On minimise E en faisant une descente de gradient, où φ_t est la valeur de la courbe de niveau à l'itération t :

$$\varphi_{t+1} = \varphi_t - \tau G(\varphi_t) \tag{1}$$

où τ est le pas et la direction de descente G est définie par

$$G(\varphi_t) = -\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t = -div(\frac{\nabla \varphi_t}{\|\nabla \varphi_t\|}).\|\nabla \varphi_t\| \ , \tag{2}$$

avec $\nabla \varphi_t$ est le gradient spatial de φ_t.

3. Level set redistancing

Une des propriétés essentielles de la fonction φ est la localisation de ses lignes de niveaux et en particulier de la ligne de niveau nulle. Pour éviter que la fonction φ soit mal conditionnée (i.e le changement de signe n'est pas assez marqué) lors de la résolution de l'EDP (equation 2), on impose à φ d'être une fonction distance signée $||\nabla \varphi|| = 1$. Cependant, cette propriété n'est généralement pas préservée par l'évolution des courbes de niveaux. Le levet-set redistancing est le fait de retrouver cette propriété sans modifier la localisation de la courbe de niveau nulle. Pour ce faire, on extrait dans un premier temps l'ensemble de niveau nul :

1) On initialise une fonction de distance non signée dont on veut conserver les lignes de niveaux φ, càd $C = \{x \in R^2, \varphi(x) = 0\}$. On peut l'initialiser à φ_0^3, ce qui permet de conserver le signe de φ, mais garantit d'avoir un gradient plus fort (modifier le gradient au voisinage de 0).

2) On effectue un redistancing pour trouver $\tilde{\varphi}(x)$, telle qu'elle soit une fonction de distance signée, tout en préservant les lignes de niveaux càd $\{x \in R^n | \varphi(x) = 0\} = \{x \in R^n | \tilde{\varphi}(x) = 0\}$. On utilise l'algorithme Fast marching method (FMM) pour résoudre l'équation eikonale par rapport à $\tilde{\varphi}$ telle que :

$$\begin{cases} ||\nabla \tilde{\varphi}(x)|| = 1 \\ \forall y \in C, \tilde{\varphi}(y) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

4. Deux méthodes de segmentation

4.1 Geodesic Active Contour

BUT : Prendre en compte les caractéristiques de l'image initiale en se basant sur l'approche par contours actifs en pondérant la fonction perte par une fonction W.

Distance géodésique : le plus court chemin entre deux points. L'objectif est de minimiser la "weighted length" :

$$L(t) = \int_0^1 \|\gamma'(s)\| W(\gamma(s)) ds$$

Principe général : On part d'une image f_0 en noir et blanc que l'on veut segmenter. Les contours actifs géodésiques ont pour but de calculer une fonction de détection de contour W. La présence d'un contour est caractérisée par un changement brutal des valeurs des pixels de l'image → la fonction de détection de contours W a des valeurs faibles aux endroits où il y a des forts gradients (et vice-versa) telle que :

paramètres d'échelle

$$W(x) = \alpha + \frac{\beta}{\epsilon + d(x)}$$

norme de la dérivée de l'image ★ filtre gaussien (filtre passe bas)
➔ diminue le bruit et amplifie les contours (gradient élevé)

Figure 2: détection de contours

avec $d = ||\nabla f_0$ [1] $|| * h_a$ et h_a est le kernel de floutage de taille $a > 0$. (Ici, β=1 et α=0). ATTENTION : Ne pas prendre un noyau gaussien avec une variance trop grande, sinon l'image sera trop floue.

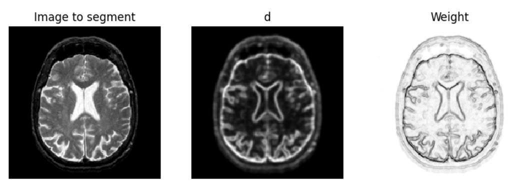


Figure 3: Calcul des poids géodésiques

On veut minimiser :

$$\min_{\gamma} \int_0^1 \|\gamma'(s)\| W(\gamma(s)) ds \tag{4}$$

On calcule le gradient :

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = G(\phi_t) \text{ avec } \mathrm{G}(\phi) = -\|\nabla\phi\| \mathrm{div}(\mathrm{W}\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|})$$

On peut le ré écrire

$$G(\phi) = -W\nabla\phi div\frac{\nabla\phi}{\nabla\phi} - \nabla W \nabla\phi$$

On réalise une descente de gradient :

$$\phi^{(\ell+1)} = \phi^{(\ell)} - \tau G(\phi^{(\ell)}),$$

avec τ >0, le pas, pris suffisamment petit.

4.2 Region-based Segmentation with Chan-Vese

BUT : segmenter des objets sans frontières clairement définies en détectant le contour séparant l'arrière plan et les objets dans l'image.

Principe général : Soit f_0, une image que l'on veut segmenter. Quand f_0 est une fonction constante par morceaux (ici f_0 est en noir et blanc), on veut identifier deux régions : une première région représentant les objets à détecter dans l'image et une deuxième région représentant l'arrière-plan de l'image. On minimise la fonction énergie suivante:

$$\min_{\varphi} E = \min_{\varphi}(L(\varphi) + \lambda \underbrace{\int_{\varphi(x)<0=int(C)} |f_0(x) - c_1|^2 dx}_{A} \tag{5}$$

$$+\lambda \underbrace{\int_{\varphi(x)>0=out(C)} |f_0(x) - c_2|^2 dx)}_{B}$$

où C représente le contour de l'objet (i.e. C est la courbe de niveau nulle). Les constantes $(c_1, c_2) \in R^2$ supposées connues, désignent respectivement les intensités moyennes à l'intérieur et à l'extérieur de la courbe. Ainsi, le terme A correspond à la somme des différences d'intensité par rapport à la valeur moyenne à l'intérieur de la région segmentée et B correspond à la somme des différences d'intensité par rapport à la valeur moyenne à l'extérieur de la région segmentée. Ces deux intégrales sont pondérés par des coefficients λ fixes. Enfin, le terme de régularisation $L(\varphi)$ représente la longueur de la courbe de niveau nulle (= longueur de la région segmentée) et permet de contrôler le caractère lisse de la frontière C.

L'algorithme Chan-Vese est basé sur des ensembles de niveaux qui évoluent de manière itérative pour minimiser l'énergie E. Le temps t est artificiel et sert uniquement à décrire l'évolution des courbes de niveau au travers des itérations.

Minimiser E revient à résoudre:

$$\frac{\delta\varphi}{\delta t} = -G(\varphi_t) \quad avec \quad G(\varphi) = \tag{6}$$

$$-W||\nabla\varphi||div\left(\frac{\nabla\varphi}{||\nabla\varphi||}\right) + \lambda(f_0 - c_1)^2 - \lambda(f_0 - c_2)^2$$

Pour résoudre 6, on réalise une descente de gradient:

$$\varphi_t^{(\ell+1)} = \varphi_t^{(\ell)} - \tau G(\varphi_t^{(\ell)}),$$

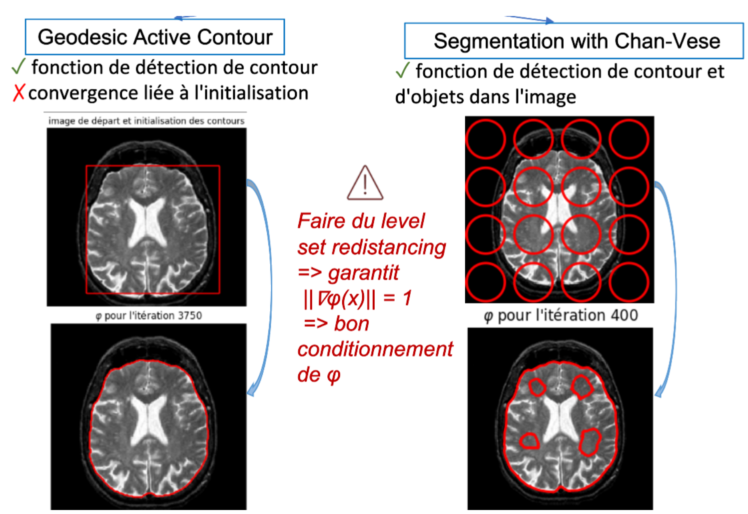


Figure 4: Résumé

[1]Le gradient d'une image est composé de deux tableaux, un avec les dérivées discrétisées verticales et un avec les dérivées discrétisées horizontales. La norme du gradient est donc importante si les dérivées horizontales et/ou verticales sont importantes, c'est-à-dire s'il y a de brusques changement de niveaux de gris entre des pixels consécutifs selon les lignes ou les colonnes.