



Département Mathématiques Appliquées
Image

Segmentation d'image : formulation convexe de Chan, Esedoglu et Nikolova

Etudiants : Brosset Florian, Juliette Marionneau, Zoé
Montbroussous, Bun-Kim San

Date : 2022-2023

Notre objectif ici est de réaliser la segmentation d'image en échelle de gris. Nous nous concentrerons sur le cas de la segmentation binaire. Il s'agit de séparer le premier plan de l'arrière plan.



Figure 0.1: Image I que l'on a considérée. Le premier plan correspond aux pièces, l'arrière plan au fond blanc.

On définit l'image I comme une fonction, $I : x \in \Omega \mapsto [0; 255]$. Nous souhaitons obtenir un masque $u : x \in \Omega \mapsto \{0, 1\}$ qui pour chaque x associe 0 s'il appartient à l'arrière plan et 1 sinon.

On peut formaliser cela comme un problème de minimisation:

$$(u^*, c_1^*, c_2^*) = \underset{\substack{u \in [0,1] \\ c_1 \in [0,255] \\ c_2 \in [0,255]}}{\operatorname{argmin}} \int_{\Omega} |Du| + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_1|^2 u(x) dx + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_2|^2 (1 - u(x)) dx$$

Dans cette formule :

- c_1 correspond à la couleur moyenne du premier plan,
- c_2 à celle de l'arrière plan,
- Du correspond au gradient (au sens faible) de u.

La formule de la co-aire est un résultat de traitement d'image qui nous donne que

$$\int_{\Omega} |Du| = \partial S_u$$

avec ∂S_u correspondant à la longueur du contour du premier plan.

- $\lambda \geq 0$ correspond au poids que l'on donne au contour (terme de régularisation) par rapport aux termes d' "attaches aux données". Il permet de créer un équilibre dans notre recherche entre la nécessité d'obtenir une taille de contour limitée et l'importance des spécificités de l'image.

Notre problème n'est pas convexe en (u, c_1, c_2) mais il est convexe en (c_1, c_2) .

En u le problème pourrait être convexe mais l'ensemble des $u : x \in \Omega \mapsto \{0, 1\}$ est non convexe. De plus la dérivation du terme de régularisation n'est pas défini partout et demande le recours à des approximations numériques.

Pour résoudre ce problème, une formulation convexe a été introduite par Chan, Esedoglu et Nikolova dans Algorithms for finding global minimizers of image segmentation and denoising models. SIAM Journal on Applied Mathematics, 66(5):1632–1648, 2006.

Dans ce cas la fonction énergie qu'on cherche à minimiser est :

$$(u^*, c_1^*, c_2^*) = \underset{\substack{u \in [0,1] \\ c_1 \in [0,255] \\ c_2 \in [0,255]}}{\operatorname{argmin}} \int_{\Omega} \|\nabla u\|_{\epsilon} + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_1|^2 u(x) dx + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_2|^2 (1 - u(x)) dx$$

On considère cette fois $u : x \mapsto [0, 1]$.

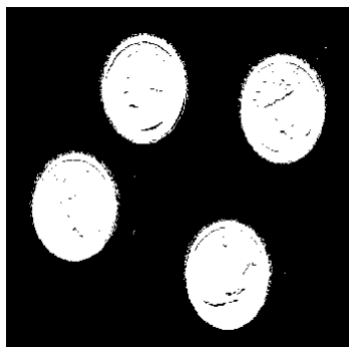
Avec la norme régularisée $\|\nabla \phi\|_{\epsilon} = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \epsilon^2}$

L'ensemble des u forme bien un ensemble convexe et une solution globale u^* peut être obtenue avec l'algorithme de gradient projeté suivant :

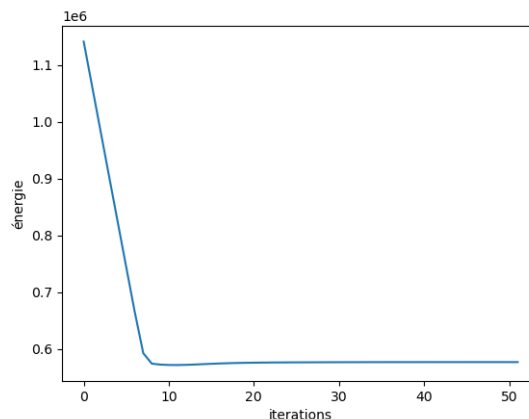
$$u_{k+1} = P_{[0,1]} \left(u_k + \tau \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u_k}{\|\nabla u_k\|_{\epsilon}} \right) - \lambda(I - c_1)^2 + \lambda(I - c_2)^2 \right) \right)$$

avec $P_{[0,1]}$ la projection sur l'intervalle des contraintes $[0, 1]$ et τ le pas de descente.

Enfin pour retrouver un masque binaire, on applique un seuillage μ sur u . En pratique on prend $\mu = 0.5$.



(a) Image obtenue après segmentation avec les paramètres $\lambda = 10e(-4)$, $\tau = 0.1$, $\mu = 0.5$, $E = 1$, $c_1 = 110$, $c_2 = 227$

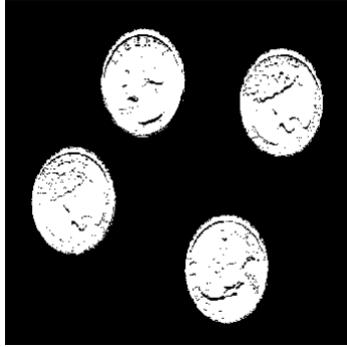


(b) évolution de l'énergie lors du processus de segmentation

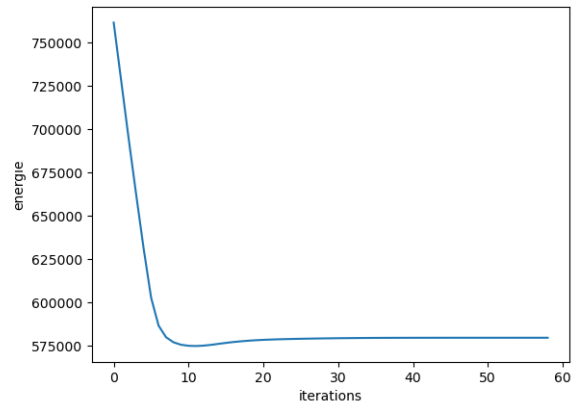
On fait ensuite varier l'état initial u_0 pour étudier si cela a une influence sur la convergence de l'algorithme et le résultat de segmentation

L'initialisation que nous avons choisi était une image codée de 1 (proche de l'objet à segmenter)

En prenant une image codée de 0 (proche du fond), on obtient une meilleure minimisation de l'énergie et les détails des pièces semblent être "segmentés" dans l'objet. Ce n'est pas forcément le but recherché.

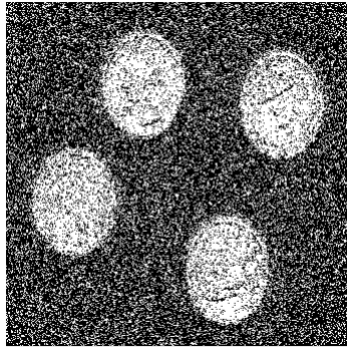


(a) Segmentation obtenue à partir d'une image initialisée de 0

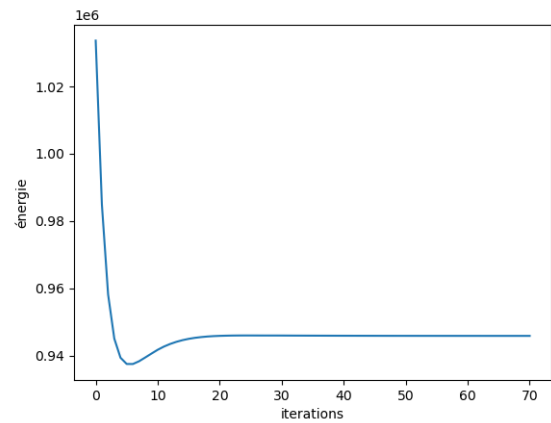


(b) Evolution de l'énergie à partir d'une image initialisée de 0

On peut ainsi se demander que donnerait une initialisation aléatoire :



(a) Segmentation obtenue à partir d'une image de pixels aléatoires



(b) Evolution de l'énergie à partir d'une image de pixels aléatoires

Un bruit a l'air d'avoir été ajouté et celui-ci perturbe l'algorithme