第2章分离变量法

中国科学技术大学 数学科学学院

March 2, 2022

中心内容：用分离变量法求解一些有界问题.
基本要求：

1. 掌握有界弦的自由振动解及物理意义;
2. 掌握分离变量法的解题思想，解题步骤及其核心问题–固有值问题;
3. 掌握求解非齐次方程的固有函数展开方法;
4. 掌握非齐次边界条件的齐次化方法;
5. 掌握在极坐标系下方程$\Delta_2 u = 0$的求解方法.

需掌握的预备知识I

二阶线性常微分方程 $y'' + py' + qy = 0$, 其中p, q是常数.

特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

1. 特征方程有两个不同实根λ_1, λ_2:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. 特征方程有两个相同实根λ:

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

3. 特征方程有两个共轭复根$\alpha \pm \beta i$:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

需掌握的预备知识II

Euler方程 $x^2y''(x) + pxy'(x) + qy(x) = 0$

做变量代换$t = \ln x$, 方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + (p-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + qy = 0$$

需掌握的预备知识III

设$f(x)$是一个定义在$(-\infty,+\infty)$上的以$2l$为周期的周期函数，$f(x)$在$[-l,l]$上可积（或广义可积并广义绝对可积），

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x),$$

其中$Fourier$系数

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}t\mathrm{d}t,\quad n=0,1,2,\cdots,$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi}{l}t\mathrm{d}t,\quad n=1,2,\cdots.$$

当$f(x)$是周期为$2l$的偶函数时, $b_n = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$, 这时, $f(x)$的$Fourier$级数只是**余弦级数**, 即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x,$$

其中 $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{n\pi}{l} t \mathrm{d}t, \ n = 0, 1, 2, \cdots.$

当$f(x)$是周期为$2l$的奇函数时, $a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$, 这时, $f(x)$的$Fourier$级数是**正弦级数**, 即

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

其中 $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin n\omega t \mathrm{d}t, \ n = 1, 2, \cdots.$

Example 1

长为l的弦两端固定，受一初始扰动后作振幅及其微小的横振动，求解振动过程.

$$\boxed{\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l \\ u(0,t)=0, u(l,t)=0, & 0<t<+\infty \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x) & \end{cases}}$$

解题思路:

1. 从简单情况–简谐波-考虑;
2. 简谐波传播到固定端点引起反射与原来的波叠加形成驻波;
3. 驻波可以表示为$u(x,t)=T(t)X(x)$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, & 0 < t < +\infty \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \quad (1)$$

解题方法:

1.分离变量:

设$u(x,t) = X(x)T(t)$, 代入方程得 $T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} \triangleq -\lambda \quad (2)$$

可以得到

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (3)$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0 \quad (4)$$

代入齐次边界条件$X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0$，可得

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \tag{5}$$

1. 含有参数的微分方程附加边界条件或周期性条件得到的定解问题称为固有值(本征值)问题
2. 使固有值问题有非零解的参数λ的值称为固有值
3. 固有值问题的非零解称为固有函数

2.求解固有值问题:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

$\lambda = 0$时，方程的解为$X = c_1 x + c_2$.
代入边界条件可得$c_1 = c_2 = 0$, 只有0解不合题意.

$\lambda = -\omega^2 < 0$时，方程的解为$X = c_1 e^{\omega x} + c_2 e^{-\omega x}$.
代入边界条件可得$c_1 = c_2 = 0$, 也只有0解不合题意.

$\lambda = \omega^2 > 0$时，方程的解为$X = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$.
代入边界条件$X(0) = 0$,得$c_1 = 0$
代入边界条件$X(l) = 0$,得$c_2 \sin \omega l = 0$, 取$\omega = \dfrac{n\pi}{l}$.

固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

固有值： $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$

固有函数： $X_n = \sin \frac{n\pi}{l} x.$

3.求解T_n:

$$T_n'' + \lambda_n a^2 T_n = 0$$

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \quad (6)$$

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

这样的函数均满足齐次偏微分方程和齐次定解条件，但不满足初始条件.

4.叠加出满足初始条件的解:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{7}$$

代入初始条件$u(x,0) = \varphi(x)$，$u_t(x,0) = \psi(x)$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l} \Longrightarrow A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} \Longrightarrow B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, & 0 < t < +\infty \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}}$$ 形式上解为：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

问题

- 定叠加系数时逐项积分是否合理？
- 级数是否收敛？
- 若级数收敛，和函数是否是方程的解？

结论

可以证明：当$\varphi(x), \psi(x)$为$[0,l]$上足够光滑的函数（例如$\varphi(x) \in C^3[0,l], \psi(x) \in C^2[0,l]$），且$\varphi(x), \varphi''(x), \psi(x)$在端点为零时，右端级数收敛，且可交换求导、求和顺序，级数是混合问题的解.

解答分析:

1.$\varphi(x)\in C^3[0,l],\psi(x)\in C^2[0,l]$）,且$\varphi(x),\varphi''(x),\psi(x)$在端点为零时,混合问题的解存在，还可以证明唯一性，稳定性。

2.物理意义

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}N_n\cos(\omega_n t-\theta_n)\sin\frac{n\pi x}{l} \longleftarrow\text{-- 驻波叠加}
\end{aligned}
$$

其中：$N_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}, A_n/N_n=\cos\theta_n, B_n/N_n=\sin\theta_n,$
$\omega_n=\dfrac{n\pi a}{l}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n \cos(\omega_n t - \theta_n) \sin \frac{n\pi x}{l} \leftarrow\text{--- 驻波叠加}$$

1. **振幅：** $N_n \sin \dfrac{n\pi x}{l}$
2. **频率：** $\omega_n = \dfrac{n\pi a}{l}$
3. **初位相：** θ_n
4. **波节：** $x_m = \dfrac{ml}{n}, m = 0, 1, \cdots, n$
5. **波腹：** $x_k = \dfrac{2k-1}{2n} l, k = 1, 2, \cdots, n$

两端固定弦的由一系列驻波叠加而成，$\omega_n = \dfrac{n\pi a}{l}$为驻波的固有频率，$\omega_n = \dfrac{\pi a}{l}$为基频，其余固有频率是基频的整数倍，称为倍频.

Example 2 (用分离变量法求解定解问题)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le l \end{cases}$$

解: 1°设$u(x,t) = X(x)T(t)$, 代入方程得

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} \triangleq -\lambda \tag{8}$$

可以得到

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad T'' + \lambda a^2 T = 0$$

代入齐次边界条件得$X(0) = 0, \quad X'(l) = 0.$

$2°$解固有值问题$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < l \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0 \end{cases}.$

$\lambda = \omega^2 > 0$时，方程的解为$X = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$.

代入边界条件$X(0) = 0$,得$c_1 = 0$

代入边界条件$X'(l) = 0$,得$c_2 \omega \cos \omega l = 0$,

取$\omega_n = \frac{\pi}{l}(n + \frac{1}{2})$, $n = 0, 1, 2 \cdots$.

$3°$解 $T_n'' + \lambda_n a^2 T_n = 0$

$$T_n(t) = A_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{a\pi t}{l} + B_n \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{a\pi t}{l}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{a\pi t}{l} + B_n \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{a\pi t}{l}\right) \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}$$

4° 用初始条件定系数

$$u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(n+\tfrac{1}{2}\right) \frac{a\pi}{l} \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l} = 0 \Rightarrow B_n = 0$$

$$u(x,0) = x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}$$

根据三角函数系的正交性

$$A_n = \frac{\int_0^l x \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l} \mathrm{d}x}{\int_0^l \sin^2\left(n+\tfrac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l} \mathrm{d}x} = \frac{(-1)^n 8l}{\pi^2 (2n+1)^2}$$

解为$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 8l}{\pi^2(2n+1)^2} \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right) \frac{a\pi t}{l} \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}$

总结

- 驻波法也适于求其他的齐次有界问题，又叫分离变量法;
- 分离变量法要领是，令$u(x,t) = X(x)T(t)$,从而将偏微分方程变成常微分方程求解
- 分离变量法的解题步骤为：
  1. 对齐次方程和齐次边界条件分离变量
  2. 解常微分方程的固有值问题
  3. 解其它变量的常微分方程
  4. 叠加，用初始条件（或非齐次边界条件）定系数

总结

从理论上来说，分离变量法能够成功取决于以下条件.

- 固有值问题有解。
- 定解问题的解可以按固有函数展开，即固有函数系是完备的.
- 固有函数系有正交性，可以定系数

Example 3

长为l的两端绝热的均匀细杆，初始温度为$\varphi(x), 0 \le x \le l$.求解杆的热传导问题.

解： 根据题意，热传导过程满足

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l \\ u_x\big|_{x=0} = 0, \ u_x\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \tag{9}$$

1.分离变量： 令$u(x,t) = X(x)T(t)$,代入方程得

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

记 $\dfrac{T'}{a^2 T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$

代入齐次边界条件得: $X'(0) = X'(l) = 0$

2.求解固有值问题: $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$

$\lambda = 0$时，方程的解为 $X = c_1 x + c_2$
代入边界条件得$X' = c_1 = 0$, 所以 $X = c_2$ 常数

$\lambda = -\omega^2 < 0$时，方程的解为 $X = c_1 e^{\omega x} + c_2 e^{-\omega x}$
代入边界条件得 $c_1 = c_2 = 0$, 只有零解。

$\lambda = \omega^2 > 0$时，方程的解为 $X = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$
代入边界条件得 $c_2 = 0$, $c_1 \sin \omega l = 0$, 即$\omega_n = \dfrac{n\pi}{l}$, $n = 1, 2, \cdots$

所以**固有值:** $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$, $n = 0, 1, 2, \cdots$,

固有函数: $X_n = c_n \cos \dfrac{n\pi}{l} x.$

3.求解$T_n(t)$：　$T_n' + \lambda_n a^2 T_n = 0$

此方程的解是：$T_n(t) = B_n e^{-\lambda_n a^2 t}$

4.叠加确定满足初始条件的解：

令 $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n a^2 t} \cos\dfrac{n\pi}{l}x,$

由初始条件$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\dfrac{n\pi}{l}x$

取 $C_n = \dfrac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\dfrac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\ n = 0, 1, 2, \cdots.$

Example 4 (矩形薄片的热传导问题)

$$\begin{cases} u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \ 0 < x < a, \ 0 < y < b, \ t > 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y) \end{cases}$$

解：

1.分离变量： 令$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$代入方程得

$$T'XY = c^2(X''YT + XY''T) \Rightarrow \frac{T'}{c^2T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

令$\dfrac{X''}{X} = \alpha_m$, $\dfrac{Y''}{Y} = \beta_n$, 则$\lambda_{m,n} = \alpha_m + \beta_n$.

边界条件分离变量得$X(0) = X(a) = Y(0) = Y(b) = 0$

2.解固有值问题：

$$\begin{cases} X'' + \alpha X = 0 \\ X(0) = 0,\ X(a) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} Y'' + \beta Y = 0 \\ Y(0) = 0,\ Y(b) = 0 \end{cases}$$

解得$$\begin{cases} \alpha_m = \left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2 \\ X_m(x) = \sin\dfrac{m\pi}{a}x \end{cases}, \quad \begin{cases} \beta_n = \left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2 \\ Y_n(x) = \sin\dfrac{n\pi}{b}y \end{cases}$$

3.求$T_{m,n}(t)$：$T'_{m,n} + c^2(\alpha_m + \beta_n)T_{m,n} = 0.$

$$T_{m,n} = A_{m,n} e^{-c^2(\alpha_m+\beta_n)t}.$$

4.叠加求通解：

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} e^{-c^2(\alpha_m+\beta_n)t} \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$A_{m,n} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b \varphi(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

一、　有界弦的自由振动

二、　极坐标下$\Delta_2 u = 0$的边值问题

三、　固有值问题的一般理论

四、　非齐次问题

Example 5

有一无限长圆柱体（$x^2+y^2=a^2, -\infty < z < +\infty$），内部无热源，边界温度保持为$F(x,y)$,求圆柱内部稳态温度分布.

分析：注意到圆柱体的对称性，表面温度与z无关，可设柱体内部温度为$u(x,y)$.

解： 设柱体内部温度为$u(x,y)$，由题意可得$u(x,y)$满足的定解问题是

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x^2+y^2<a^2 \\ u(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2}=F(x,y) \end{cases}$$

边界是圆周，考虑在极坐标系下求解.

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$,问题化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0, & 0<r<a, 0<\theta<2\pi \\ u(r,\theta)\big|_{r=a}=F(a\cos\theta, a\sin\theta)\triangleq f(\theta) \end{cases}$$

问题

- 变量代换前后的两个定解问题是否等价？
- 原微分方程在圆内成立，代换后在$\theta = 0, \theta = 2\pi$是新的边界，没有定义边界条件；
- $(r, 0)$与$(r, 2\pi)$是平面上同一点，应补充定义周期性边界条件$u(r, 0) = u(r, 2\pi), \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0) = \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(r, 2\pi)$.
- 原方程在坐标原点$(0, 0)$也成立，新方程在$r = 0$不成立.
- 补充在$r = 0$的边界条件，由于内部无热源，所以$u(0, \theta)$有界.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \\ u(r,\theta)\big|_{r=a} = F(a\cos\theta, a\sin\theta) \triangleq f(\theta) \\ u(r,0) - u(r,2\pi) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(r,0) - \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(r,2\pi) = 0 \\ u(0,\theta)\text{有界} \end{cases}$$

1.分离变量：令$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$代入方程得

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \Rightarrow r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

$$\boxed{\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \qquad r^2R'' + rR' - \lambda R = 0.}$$

$$R(r)\Theta(0) - R(r)\Theta(2\pi) = 0 \Rightarrow \Theta(0) - \Theta(2\pi) = 0$$

$$R(r)\Theta'(0) - R(r)\Theta'(2\pi) = 0 \Rightarrow \Theta'(0) - \Theta'(2\pi) = 0$$

2.解固有值问题： $\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(0) - \Theta(2\pi) = 0,\ \Theta'(0) - \Theta'(2\pi) = 0 \end{cases}$

当$\lambda = -\omega^2 < 0$时，方程的通解是$\Theta = Ae^{-\omega\theta} + Be^{\omega\theta}$
代入周期边界条件，只有0解.

当$\lambda = 0$时，方程的通解是$\Theta = A\theta + B$
代入周期条件得：$\Theta = B$

当$\lambda = \omega^2 > 0$时，方程的通解是$\Theta = A\cos\omega\theta + B\sin\omega\theta$. 当$\omega$是正整数时，有满足周期条件的通解.
$\Theta_n = A\cos n\theta + B\sin n\theta,\ n = 1, 2, \cdots ..$

3.求解R:

$\lambda = n^2, n = 0, 1, \cdots,\qquad r^2 R_n'' + rR_n' - n^2 R_n = 0.$

作变量代换$r = e^t$, 方程化为$R_n''(t) - n^2 R_n(t) = 0.$

方程的解是

$$R_0 = C_0 + D_0 t = C_0 + D_0 \ln r$$

$$R_n = C_n e^{nt} + D_n e^{-nt} = C_n r^n + D_n r^{-n}$$

4.叠加出满足非齐次边界条件的解:

$$u(r,\theta) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \sin \theta)$$

由自然边界条件$u(0,\theta)$有界可得$D_0 = 0,\ D_n = 0$

设$u(r,\theta) = \dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$

代入边界条件$f(\theta) = \dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$

$$A_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \mathrm{d}\theta,\ B_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \mathrm{d}\theta$$

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \int_0^{2\pi} f(\varphi)[\cos n\varphi\cos n\theta + \sin n\varphi\sin n\theta]\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\varphi-\theta)\right]\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

说明：

1.求解过程中的固有值问题用了周期性条件，此解法不能直接用于扇形区域。

2.方程的解是有界的，解在以下三种区域有不同的形式.

1. 在圆内部求解Lapalce方程，满足周期条件的一般解是

$$u(r,\theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

2. 若在圆的外部$x^2 + y^2 \geq a^2$ 求解Laplace方程，一般解为

$$u(r,\theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

3. 若在圆环$a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ 求解Laplace方程，一般解为

$$u(r,\theta) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

Example 6

求解圆内的边值问题$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (r < a) \\ u\Big|_{r=a} = \sin 2\theta \cos\theta \end{cases}$

解:(待定系数法)圆内Laplace方程的解是

$$u(r,\theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin\theta)$$

利用边界条件

$$u\Big|_{r=a} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin\theta) = \frac{1}{2}(\sin\theta + \sin 3\theta)$$

比较三角函数的系数可得

$$B_1 = \frac{1}{2a}, \quad B_3 = \frac{1}{2a^3}, \text{其余系数为}0$$

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}r\sin\theta + \frac{1}{2}r^3\sin 3\theta$$

一、 有界弦的自由振动

二、 极坐标下$\Delta_2 u = 0$的边值问题

三、 固有值问题的一般理论

四、 非齐次问题

用分离变量法求解本课程中三类典型方程的定解问题时，常会碰到以下几个固有值问题.

(1) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$

固有值$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, 固有函数$X_n = \sin\frac{n\pi x}{l}$, $\quad (n = 1, 2, \cdots)$

(2) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases}$

固有值$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, 固有函数$X_n = \cos\frac{n\pi x}{l}$, $\quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

(3) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l \\ X(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases}$

固有值$\lambda_n = \left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}\right)^2$, 固有函数$X_n = \sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}$,
$(n = 0, 1, 2, \cdots)$

(4) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l \\ X'(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$

固有值$\lambda_n = \left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}\right)^2$, 固有函数$X_n = \cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}$,
$(n = 0, 1, 2, \cdots)$

(5) $\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, & 0 < \theta < 2\pi \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi), \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases}$

固有值$\lambda_n = n^2$, 固有函数$\Theta_n = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta$,
$(n = 0, 1, 2, \cdots)$

Example 7

长为l的导热细杆，杆身侧面绝热，内部无热源，杆的一端绝热，另一端与温度为0度的外部介质自由热交换，杆的初始温度为$\varphi(x), x \in [0, l]$, 求杆的温度分布.

解： 设杆身温度为$u(x,t)$,则u满足定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, 0 < x < l \\ u_x(0,t) = 0, \ u_x(l,t) + hu(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

1. 设$u(x,t) = X(x)T(t)$, 代入方程和齐次边界条件得固有值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l \\ X'(0) = 0, \ X'(l) + hX(l) = 0 \end{cases}$$

及常微分方程$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0$.

2.

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l \\ X'(0) = 0, \ X'(l) + hX(l) = 0 \end{cases}$$

$\lambda = \omega^2 > 0$时，$X = c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x$

代入边界条件得$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1(-\omega\sin\omega l + h\cos\omega l) = 0 \end{cases}$

所以，$\tan\omega l = \dfrac{h}{\omega}$,

记ω_n是此方程的第n个解，固有函数$X_n = \cos\omega_n x$.

3.$T_n' + a^2\lambda_n T_n = 0$的解为

$$T_n(t) = A_n e^{-a^2\lambda_n t}$$

4.$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2\lambda_n t} \cos\omega_n x$

问题

- 展开式能否成立？—固有函数系的完备性
- 若可以展开，怎样定系数？—固有函数系正交性

一、一般可分离变量定解问题

$$\begin{cases} L_t u(x,t) + c(t) L_x u(x,t) = 0, \quad a < x < b, t \in I \\ \left(\alpha_1 u - \beta_1 \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=a} = 0, \left(\alpha_2 u + \beta_2 \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=b} = 0 \\ \text{关于}t\text{的定解条件} \end{cases}$$

α_i, β_i 非负，且不同时为0, $i = 1, 2$.

$$L_t = a_2(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a_1(t)\frac{\partial}{\partial t} + a_0(t)$$

$$L_x = b_2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + b_0(x)$$

分离变量法解题步骤

1.分离变量： 设$u(x,t) = X(x)T(t)$ 代入方程和齐次边界条件

$$\begin{cases} L_x X(x) + \lambda X(x) = 0 \\ \alpha_1 X(a) - \beta_1 X'(a) = 0,\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

$$L_t T(t) - \lambda c(t) T(t) = 0 \tag{11}$$

2.解固有值问题： 讨论λ的不同取值，求出固有值$\{\lambda_n\}$和相应固有函数$\{X_n\}$

3.求变量t相关的函数$T(t)$：将固有值λ_n代入方程（11），解出$T_n(t)$

4.叠加定系数：$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) T_n(t)$, 代入关于$t$的定解条件，确定$C_n$.

固有值问题的组成–1.方程

$$b_2(x)X''(x) + b_1(x)X'(x) + b_0(x)X(x) + \lambda X(x) = 0$$

当$b_2(x) \neq 0$时，两边乘以$\dfrac{1}{b_2(x)}\exp\left(\int \frac{b_1(x)}{b_2(x)}\mathrm{d}x\right)$，方程可化为

$$[k(x)X'(x)]' - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0$$

其中$k(x) = e^{\int \frac{b_1(x)}{b_2(x)}\mathrm{d}x}$，$q(x) = -\dfrac{b_0(x)}{b_2(x)}e^{\int \frac{b_1(x)}{b_2(x)}\mathrm{d}x}$，

$$\rho(x) = \frac{1}{b_2(x)}e^{\int \frac{b_1(x)}{b_2(x)}\mathrm{d}x}.$$

Definition 8

称二阶线性常微分方程

$$[k(x)X'(x)]' - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0$$

为$Sturm - Liouvilles(S - L)$型方程，$\rho(x)$称为权函数。

假设S-L型方程的系数满足：
(1)$k(x), k'(x), \rho(x) \in C[a, b]$，当$x \in (a, b)$时，$k(x) > 0$
$\rho(x) > 0, q(x) \geqslant 0$，$x = a, x = b$至多是$k(x), \rho(x)$的一级零点.

(2)$q(x)$在(a, b)连续，在端点$x = a, b$至多是一级极点.

固有值问题的组成–2.定解条件

含有参数的常微分方程加边界条件就构成固有值问题，一般可能搭配的边界条件有以下几种：

1. 当$k(a)>0$(或$k(b)>0$),在端点$x=a$($x=b$)可以搭配一、二、三类边界条件
$$(\alpha_1 u-\beta_1 u_x)\big|_{x=a}=0 \qquad (\text{或}(\alpha_2 u-\beta_2 u_x)\big|_{x=b}=0)$$
2. 当$k(a)=k(b)>0$时，可以搭配周期边界条件
$$y(a)=y(b), \qquad y'(a)=y'(b)$$
3. 如果$k(a)=0$, (或$k(b)=0$), 需要搭配有界性条件.
$$|y(a)|<\infty \qquad \text{或}(|y(b)|<\infty)$$

因为S-L型方程有两个线性无关的解，理论上可以证明:若$k(a)=0$, 则两个解中有一个在$x=a$附近无界.

当$k(x), \rho(x) > 0$在$[a,b]$成立时，称S-L型方程是正则的，如果在某个端点处$k(x), \rho(x)$为0,称方程是奇异的.

问题

1. 一般的固有值问题是否存在可数个固有值和固有函数？
2. 固有函数是否是函数空间的一组完备正交函数系？

解决方法: Sturm-Liouville 定理.

L^2函数空间及正交函数系

二、相关定义

函数空间: $L^2[a,b] = \{f(x) \mid \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x < +\infty\}$

内积: $< f(x), g(x) > \triangleq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$

模长: $\|f(x)\| \triangleq < f(x), f(x) >^{1/2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$

正交: $f(x), g(x) \in L^2[a,b]$正交$\Leftrightarrow < f(x), g(x) > = 0$

正交基: $X_n(x) \in L^2[a,b], n = 1, 2, \cdots$满足

(1)$< X_i, X_j > = \|X_i\|^2 \delta_{ij}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

(2)对任意$f(x) \in L^2[a,b]$, 存在数列$\{c_n\}$使得

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x).$$

说明： $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x).$

- $c_n = \dfrac{< f(x), X_n(x) >}{\|X_n\|^2}$ 称为广义Fourier 系数.
- 展开式中的收敛是指

$$\lim_{N\to\infty}\left\| f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x)\right\|^2$$
$$= \lim_{N\to\infty}\int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x)\right|^2 \mathrm{d}x = 0$$

称为均方收敛。
- 对复函数空间，内积定义改为$< f(x), g(x) > \triangleq \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$

$$\boxed{\begin{cases} [k(x)X'(x)]' - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0 \\ \alpha_1 X(a) - \beta_1 X'(a) = 0,\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0 \end{cases}}$$

$\alpha_i, \beta_i \geq 0,\ \alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0,\ i = 1, 2$

$\rho(x)$是非零函数，此固有值问题的解满足的的正交性需要考虑权函数.

- $L^2_\rho[a,b] \triangleq \{f(x) \big| \int_a^b |f(x)|^2 \rho(x)\mathrm{d}x < +\infty\}$
- $< f(x), g(x) > \triangleq \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)\mathrm{d}x.$
- $f(x), g(x) \in L^2_\rho[a,b]$带权正交是指

$$< f(x), g(x) >_\rho = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)\mathrm{d}x = 0$$

- 模平方$\|f\|^2_\rho = \int_a^b f^2(x)\rho(x)\mathrm{d}x.$

Sturm-Liouville定理

定理： $S-L$型方程的固有值问题

$$\begin{cases}[k(x)X'(x)]' - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0 \\ \alpha_1 X(a) - \beta_1 X'(a) = 0,\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0\end{cases}$$

系数满足给定条件,(正则的S-L方程)，有以下结论：

1 **可数性：** 存在可数无穷多个固有值

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

且$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$;每个固有值对应一个固有函数，所有固有函数线性无关.

2 **非负性：** 所有固有值均为实数，且$\lambda \geq 0$; 有零固有值的充要条件是$q(x) \equiv 0$, 且两端点不含有I, III类边界条件.

Sturm-Liouville定理

3 **正交性**：设λ_m, λ_n是任意两个不同的固有值，则相应的固有函数$X_m(x), X_n(x)$在$[a, b]$上带权正交，即

$$\int_a^b X_m(x) X_n(x) \rho(x) \mathrm{d}x = 0.$$

4 **完备性**：固有函数系$\{X_n(x)\}$是完备的，构成$L_\rho^2[a, b]$空间中以$\rho(x)$为权函数的一组正交基.

如果$f(x) \in L_\rho^2[a, b]$，有连续的一阶导数和分段连续的二阶导数，且满足问题中的齐次边界条件，

则$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)$，$x \in [a, b]$，其中，广义Fourier系数

$$C_n = \frac{\int_a^b f(x) X_n(x) \rho(x) \mathrm{d}x}{\|X_n(x)\|^2} = \frac{\int_a^b f(x) X_n(x) \rho(x) \mathrm{d}x}{\int_a^b |X_n(x)|^2 \rho(x) \mathrm{d}x}$$

如果$\|X_n(x)\|^2 = 1$，$\{X_n(x)\}$称为标准正交基.

周期条件下的S-L定理

定理： $S-L$型方程的固有值问题S-L型方程搭配周期边界条件时

$$\begin{cases} [k(x)X'(x)]' - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0 \\ X(a) = X(b), \ X'(a) = X'(b) \end{cases}$$

系数满足给定条件,以及$k(a) = k(b)$, 则有S-L定理相同结论结论：

1.可数性（每个固有值对应两个线性无关的固有函数）
2.非负性, 3.正交性， 4.完备性。

说明：

1. S-L定理提供了分离变量法的理论依据.
2. 通过解固有值问题找出函数空间的正交基，再将未知函数表示为关于正交基的广义Fourier展开式，分离变量法可以看做Fourier展开法.
3. 当方程不满足正则性条件时，例如a或b是$k(x)$的一级零点，是$q(x)$的至多一级极点时，S-L定理的部分结论（非负性，正交性）依然成立. 当$k(a)$（或$k(b)$）为0时，需要添加自然边界条件−$y(x)$在a附近有界.

Example 9

求解固有值问题$\begin{cases} X'' + 2X' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$.

解:微分方程的特征方程是$t^2 + 2t + \lambda = 0$, 根为$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\lambda}$.记$\Delta = \sqrt{1-\lambda}$,

(1)$\Delta > 0$, 方程通解是$X = Ae^{t_1 x} + Be^{t_2 x}$,代入边界条件得

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(1) = Ae^{t_1} + Be^{t_2} = 0 \end{cases}$$

解得$A = B = 0$, 方程只有零解.

(2) $\Delta=0$, 方程通解是$X=Ae^{-x}+Bxe^{-x}$,代入边界条件得

$$\begin{cases} X(0)=A=0 \\ X(1)=Be^{-1}=0 \end{cases}$$

解得$A=B=0$, 方程只有零解.

(3) $\Delta<0$, 方程通解是$X=Ae^{-x}\cos(\sqrt{\lambda-1}x)+Be^{-x}\sin(\sqrt{\lambda-1}x)$,

代入边界条件得 $\begin{cases} X(0)=A=0 \\ X(1)=Be^{-1}\sin(\sqrt{\lambda-1})=0 \end{cases}$

得到$\sqrt{\lambda-1}=n\pi, \lambda_n=1+(n\pi)^2$, 方程有非零解.

所以：固有值$\lambda_n=1+(n\pi)^2$, 固有函数$X_n=e^{-x}\sin(n\pi x)$.

例题

Example 10

$$\begin{cases} x^2X''(x) + xX'(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 1 < x < e \\ X(1) = X(e) = 0 \end{cases}$$

解:

$$\rho(x) = \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{x}{x^2} \mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$$

方程两边乘以$\rho(x)$, 方程可以化为

$$(xX'(x))' + \frac{\lambda}{x} X(x) = 0$$

在区间$[1, e]$满足S-L型固有值条件，所以有可数个固有值，没有0固有值.

设$\lambda = \omega^2 > 0$, 方程是Euler方程，作变量代换$x = e^t$, 方程化为

$$X''(t) + \omega^2 X(t) = 0$$

此方程的解是$X = A\cos\omega t + B\sin\omega t = A\cos\omega\ln x + B\sin\omega\ln x$.

$X(1) = A\cos 0 + B\sin 0 = A = 0, \qquad X(e) = A\cos\omega + B\sin\omega = 0$

所以$\sin\omega = 0$时，即$\omega = n\pi, n = 1, 2, \cdots$

固有值$\lambda_n = n^2\pi^2$, 固有函数$X_n(x) = \sin(n\pi\ln x)$.

求解扇形区域上的定解问题

$$\begin{cases} r^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \\ u\big|_{r=1} = u\big|_{r=e} = 0 \\ u\big|_{\theta=0} = 0,\ u\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = g(r) \end{cases}$$

解:（1）设定解问题的解是$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, 代入方程和齐次边界条件得

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + \lambda R = 0 \\ R(1) = R(e) = 0 \end{cases}, \quad \Theta'' - \lambda\Theta = 0$$

(2)求解固有值问题。转化成S-L标准型是$(rR')' + \frac{\lambda}{r} R = 0$.
权函数$\rho(r) = \frac{1}{r}$, 固有值$\lambda_n = n^2\pi^2, n = 1, 2, \cdots$
固有函数$R_n(r) = \sin(n\pi \ln r)$

(3)解方程$\Theta_n - n^2\pi^2\Theta = 0$

通解是 $\Theta_n = A_n \cosh n\pi\theta + B_n \sinh n\pi\theta$.

(4)一般解是$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cosh n\pi\theta + B_n \sinh n\pi\theta)\sin n\pi\ln r$.

$$u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi \ln r = 0 \Rightarrow A_n = 0$$

$$u(r,\tfrac{\pi}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh n\tfrac{\pi^2}{2} \sin n\pi \ln r = g(r)$$

$$\int_1^e g(r)\sin(n\pi\ln r)\frac{1}{r}\mathrm{d}r$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_1^e \sinh(k\frac{\pi^2}{2})\sin(k\pi\ln r)\sin(n\pi\ln r)\frac{1}{r}\mathrm{d}r$$

$$=B_n \sinh(n\frac{\pi^2}{2})\int_1^e \sin^2(n\pi\ln r)\frac{1}{r}\mathrm{d}r = B_n\frac{\sinh(n\frac{\pi^2}{2})}{2}$$

$$B_n = \frac{2}{\sinh(n\frac{\pi^2}{2})}\int_1^e g(r)\sin(n\pi\ln r)\frac{1}{r}\mathrm{d}r.$$

一、 有界弦的自由振动

二、 极坐标下$\Delta_2 u = 0$的边值问题

三、 固有值问题的一般理论

四、 非齐次问题

1、齐次边界条件下非齐次方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & t > 0, 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

解题思路

I.特解法用叠加原理 $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$，使得$v(x,t)$满足非齐次方程以及齐次边界条件，此时$w(x,t)$满足齐次方程和齐次边界条件，此时初始条件都在$w(x,t)$的方程中体现.

$$(I)\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,t), \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0, \\ w(0,t) = w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = \Phi(x), w_t(x,0) = \Psi(x) \end{cases}$$

I.特解法

例题1

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \quad t > 0, 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}, \ f(x)\text{是已知函数}.$$

分析：$f(x)$与t无关，可取一特解v是x的函数满足非齐次方程，齐次边界条件.

解：设$u(x,t) = v(x) + w(x,t)$，$v(x), w(x,t)$分别满足

$$(I)\begin{cases} v'' = -\dfrac{1}{a^2} f(x), \\ v(0) = v(l) = 0 \end{cases} \quad (II)\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0, \\ w(0,t) = w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = \varphi(x) - v(x), w_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

解得$v(x) = \displaystyle\int \left(\int -\frac{1}{a^2} f(x) \mathrm{d}x + C_1 \right) \mathrm{d}x + C_2$

由边界条件确定C_1, C_2.

例2

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A_0 \sin \omega t, 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

解： 选特解$v(x,t) = f(x)\sin \omega t$，设$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$，

则$w(x,t)$ 满足$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0 \\ w(0,t) = w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = \varphi(x), w_t(x,0) = \psi(x) - \omega f(x) \end{cases}$

$v(x,t)$满足$\begin{cases} -\omega^2 f(x) - a^2 f''(x) = A_0 \\ f(0) = f(l) = 0 \end{cases}$

例3

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = xy, 0 < x < a, 0 < y < b \\ u(0,y) = 0, u(a,y) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u(x,b) = \psi(x) \end{cases}$$

解： 选特解$v(x,y) = \dfrac{1}{6}x^3y + Cxy$,有边界条件可得$C = -\dfrac{1}{6}a^2$.
设$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$, 则$w(x,y)$满足

$$\begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0, 0 < x < a, 0 < y < b \\ w(0,y) = 0, w(a,y) = 0 \\ w(x,0) = \varphi(x), w(x,b) = \psi(x) - \dfrac{b}{6}(x^2 - a^2)x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad t > 0, 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

解题思路

II. 齐次化原理（冲量原理）

$$(I) \begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \quad t > 0, 0 < x < l \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = \varphi(x), v_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = f(x,t), \quad t > 0, 0 < x < l \\ w(0,t) = w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = 0, w_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

用分离变量法解（I），用齐次化原理解（II）

设$w(x,t)$的齐次化问题是

$$\begin{cases} W_{tt} - a^2 W_{xx} = 0, \quad t > \tau, 0 < x < l \\ W(0,t) = W(l,t) = 0 \\ W(x,\tau) = 0, W_t(x,\tau) = f(x,\tau) \end{cases}$$

再做时间平移$T = t - \tau$, 可以用分离变量法求出$W(x,t;\tau)$, 从而得到

$$w(x,t) = \int_0^t W(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau.$$

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad t > 0, 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

解题思路

III. 按相应齐次方程固有函数展开法

分析：分离变量法的基本思想是：

(1)先求出分离变量形式的特解;

(2)将未知函数用这一组完备的固有函数系展开，再来定系数，叠加出来的一般解不是分离变量形式的.

分离变量法提供了一种求完备函数系的方法.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad t > 0, 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

解题思路:找到一组完备的固有函数系$\{X_n(x)\}$,
将未知函数$u(x,t)$,非齐次项$f(x,t)$都按固有函数系展开

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x), \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x)$$

代入方程比较$X_n(x)$的系数，得到$T_n(t)$满足的常微分方程，再求解$T_n(t)$

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad t > 0, 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

解题步骤：

(1)求解相应齐次方程$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad t > 0, 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}$

的固有值问题，分离变量可得固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, \ X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \ X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$$

(2)将未知函数$u(x,t)$,非齐次项$f(x,t)$，初始条件$\varphi(x)$,$\psi(x)$都按固有函数系展开

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) \qquad \left(f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x \right)$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) \qquad \left(\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x \right)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x) \qquad \left(\psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x \right)$$

将$u(x,t), f(x,t)$代入偏微分方程

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t)X_n(x)-a^2T_n(t)X_n''(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t)+a^2\lambda_nT_n(t)\right)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x)$$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_nX_n(x)\Longrightarrow T_n(0)=\varphi_n$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_nX_n(x)\Longrightarrow T_n'(0)=\psi_n$$

所以$T_n(t)$满足的常微分方程定解问题是

$$\begin{cases}T_n''(t)+a^2\lambda_nT_n(t)=f_n(t)\\ T_n(0)=\varphi_n,\ T_n'(0)=\psi_n\end{cases}$$

(3)求解$T_n(t)$.

对方程作Laplace变换，令$\widehat{T}_n(p) = \mathcal{L}[T_n]$, $\widehat{f}_n(p) = \mathcal{L}[f_n]$, 则

$$\mathcal{L}[T_n''] = p^2\widehat{T}_n - pT_n(0) - T_n'(0) = p^2\widehat{T}_n - p\varphi_n - \psi_n$$

方程化为$p^2\widehat{T}_n(p) - p\varphi_n - \psi_n + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \widehat{T}_n(p) = \widehat{f}_n(p)$

所以 $$\mathcal{L}[T_n] = \frac{p\varphi_n + \psi_n + \widehat{f}_n(p)}{p^2 + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}$$

做Laplace逆变换

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p\varphi_n}{p^2 + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\right] = \varphi_n \cos\frac{n\pi at}{l},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\psi_n}{p^2 + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\right] = \frac{\psi_n l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\widehat{f}_n}{p^2+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}[\widehat{f}_n]*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}\right]$$

$$=f_n(t)*\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau$$

(4)

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{\psi_n l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}\right.$$
$$\left.+\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}$$

例题4: 解非齐次方程定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin\omega t, \quad t > 0, 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

解:(1) 相应齐次方程的固有值$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$,

固有函数$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x$, $n = 1, 2, \cdots$.

(2)设混合问题的解$u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$

非齐次项$\sin\omega t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \sin\omega t X_n(x)$,

$$f_n = \tfrac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)$$

将展开式代入方程可得

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(T_n''X_n-a^2T_nX_n''\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(T_n''X_n+a^2\lambda_nT_nX_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n\sin\omega tX_n\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(0)X_n(x)=0,\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n'(0)X_n(x)=0\end{cases}$$

(3)比较X_n的系数有$\begin{cases}T_n''+\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2T_n=\dfrac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin\omega t\\ T_n(0)=0,\ T_n'(0)=0\end{cases}$

此常微分方程定解问题的解是$T_n(t)=c\sin\omega t-\frac{c\omega l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}$

其中$c=\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\frac{l^2}{(n\pi a)^2-(\omega l)^2}$.

(4) $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(c\sin\omega t-\frac{c\omega l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$.

解:(方法2：齐次化原理) 先求解齐次化的方程

$$\begin{cases} W_{tt} - a^2 W_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, t > \tau \\ W|_{x=0} = W|_{x=l} = 0 \\ W|_{t=\tau} = 0, \ \frac{\partial W}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = \sin\omega\tau \end{cases}$$

利用分离变量法可解得

$$W(x,t;\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos(\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)) + D_n \sin(\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)) \right) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件

$$W|_{t=\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{l} = 0 \Rightarrow C_n = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi a}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} = \sin\omega\tau$$

$$D_n = \frac{2\sin\omega\tau}{n\pi a}\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{2l(1-(-1)^n)}{(n\pi)^2 a}\sin\omega\tau$$

$$W(x,t;\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l(1-(-1)^n)}{(n\pi)^2 a} \sin\omega\tau \sin(\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

由齐次化原理

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t W(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l(1-(-1)^n)}{(n\pi)^2 a} \sin\frac{n\pi x}{l} \int_0^t \sin\omega\tau \sin(\frac{n\pi a}{l}(t-\tau))\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

例题5: 解Poisson方程边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = A, \quad 0 < x < a, 0 < y < b \\ u(0,y) = 0,\ u(a,y) = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = 0 \end{cases}$$

解:(1)考虑相应齐次方程的固有值问题 $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$

固有值是$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$, 固有函数$X_n = \sin\frac{n\pi x}{a}$.

(2)设方程的解是$u(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\sin\frac{n\pi x}{a}$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{a},$$

其中$A_n = \frac{2A}{a}\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}dx = \frac{2A}{n\pi}[1-(-1)^n]$.

代入方程和定解条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(Y_n X_n'' + X_n Y_n''\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(Y_n'' - \lambda_n Y_n\right) X_n = A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n$$

所以Y_n满足$\begin{cases} Y_{2m+1}'' - \lambda_{2m+1} Y_{2m+1} = \frac{4A}{(2m+1)\pi} \\ Y_{2m+1}(0) = Y_{2m+1}(b) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} Y_{2m}'' - \lambda_{2m} Y_{2m} = 0 \\ Y_{2m}(0) = Y_{2m}(b) = 0 \end{cases}, \text{所以} Y_{2m}(y) = 0.$$

$$Y_{2m+1} = c_1 \cosh \frac{(2m+1)\pi y}{a} + c_2 \sinh \frac{(2m+1)\pi y}{a} - \frac{4Aa^2}{(2m+1)^3\pi^3}$$

$$\begin{cases} Y_{2m+1}(0) = c_1 - \frac{4Aa^2}{(2m+1)^3\pi^3} = 0 \\ Y_{2m+1}(b) = c_1 \cosh \frac{(2m+1)\pi b}{a} + c_2 \sinh \frac{(2m+1)\pi b}{a} - \frac{4Aa^2}{(2m+1)^3\pi^3} = 0 \end{cases}$$

解得$c_1 = \frac{4Aa^2}{(2m+1)^3\pi^3}$,

$$c_2 = \frac{4Aa^2}{(2m+1)^3\pi^3}\,\frac{1 - \cosh \frac{(2m+1)\pi b}{a}}{\sinh \frac{(2m+1)\pi b}{a}} = -\frac{4Aa^2}{(2m+1)^3\pi^3} \tanh \frac{(2m+1)\pi b}{2a}$$

$$
\begin{aligned}
Y_{2m+1}(y) =& c_1 \cosh \frac{(2m+1)\pi y}{a} + c_2 \sinh \frac{(2m+1)\pi y}{a} - \frac{4Aa^2}{(2m+1)^3\pi^3} \\
=& \frac{4Aa^2}{(2m+1)^3\pi^3} \left(\cosh \frac{(2m+1)\pi y}{a} \right. \\
& \left. - \tanh \frac{(2m+1)\pi b}{2a} \sinh \frac{(2m+1)\pi y}{a} - 1 \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u =& \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4Aa^2}{(2m+1)^3\pi^3} \sin \left(\frac{(2m+1)\pi x}{a} \right) \\
& \left(\cosh \frac{(2m+1)\pi y}{a} - \tanh \frac{(2m+1)\pi b}{2a} \sinh \frac{(2m+1)\pi y}{a} - 1 \right).
\end{aligned}
$$

例题5: 解Poisson方程边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = A, \quad 0 < x < a, 0 < y < b \\ u(0,y) = 0,\ u(a,y) = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = 0 \end{cases}$$

解:(方法2)设$u(x,y) = \frac{A}{2}x^2 - \frac{Aa}{2}x + v(x,y)$, 则函数$v(x,y)$满足定解问题

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0 \\ v(0,y) = 0, v(a,y) = 0 \\ v(x,0) = -\frac{A}{2}x^2 + \frac{Aa}{2}x, v(x,b) = -\frac{A}{2}x^2 + \frac{Aa}{2}x \end{cases}$$

利用分离变量法，可以得到方程的解是

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cosh\frac{n\pi y}{a} + D_n \sinh\frac{n\pi y}{a} \right) \sin\frac{n\pi x}{a}$$

代入边界条件

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{a} = -\frac{A}{2}x^2 + \frac{Aa}{2}x \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cosh\frac{n\pi b}{a} + D_n \sinh\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\frac{n\pi x}{a} = -\frac{A}{2}x^2 + \frac{Aa}{2}x \end{cases}$$

利用固有函数的正交性得

$$\begin{cases} C_n = \frac{2}{a}\int_0^a \left(-\frac{A}{2}x^2 + \frac{Aa}{2}x\right)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x = \frac{2a^2A(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3} \\ C_n \cosh\frac{n\pi b}{a} + D_n \sinh\frac{n\pi b}{a} = \frac{2a^2A(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3} \end{cases}$$

解方程组

$$C_n = \frac{2a^2A(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3} \qquad D_n = \frac{2a^2A(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}\,\frac{1-\cosh\frac{n\pi b}{a}}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}$$

定解问题得解是

$$u = \frac{A}{2}x^2 - \frac{Aa}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cosh\frac{n\pi y}{a} + D_n \sinh\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}$$

2、带非齐次边界条件的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad t > 0, 0 < x < l \\ u(0,t) = g(t),\ u(l,t) = h(t) \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

为什么边界条件必须是齐次的？

1. 非齐次边界条件不能分离变量；
2. 满足齐次方程和齐次边界条件的解叠加后仍满足齐次方程和边界条件；
3. 齐次方程和齐次边界条件组成的固有值问题，得到的固有函数才是完备，正交的.

带非齐次边界条件时，必须先将边界条件齐次化

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad t > 0, 0 < x < l \\ u(0,t) = g(t),\ u(l,t) = h(t) \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

解题思路： 设$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$.

- $v(x,t)$只需满足边界条件$v(0,t) = g(t),\ v(l,t) = h(t)$
- $w(x,t)$满足方程和齐次边界条件

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = -(v_{tt} - a^2 v_{xx}), \quad t > 0, 0 < x < l \\ w(0,t) = 0,\ w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = \varphi(x) - v(x,0),\ w_t(x,0) = \psi - v_t(x,0) \end{cases}$$

- 设$v(x,t) = Ax + B$ 代入边界条件，确定A, B的表达式，
- $w(x,t)$用分离变量法求解.

$v(x,t)$只需满足边界条件$v(0,t) = g(t),\ v(l,t) = h(t)$

即求一个经过$(0, g(t)), (l, h(t))$两点的函数.

最简单的情形：考虑过两点的直线 $v(x,t) = A(t)x + B(t)$

$$v(0,t) = B(t) = g(t), \qquad v(l,t) = A(t)l + B(t) = h(t)$$

可以取 $v(x,t) = \dfrac{h(t) - g(t)}{l}x + g(t).$

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = -v_{tt}, \quad t > 0, 0 < x < l \\ w(0,t) = 0,\ w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = \varphi(x) - v(x,0),\ w_t(x,0) = \psi(x) - v_t(x,0) \end{cases}$$

说明：

- 经过两点的曲线有无穷多条，第一类边界条件选择直线方程.
- 若边界条件是第二类的,例如

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad t > 0, 0 < x < l \\ u_x(0,t) = g(t), \; u_x(l,t) = h(t) \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

此时可以考虑抛物线

$$v(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x = \frac{h(t) - g(t)}{2l} x^2 + g(t)x$$

- 边界条件齐次化往往导致方程非齐次化。

例题6

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, t>0 \\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=\sin\omega t, \quad (\omega\neq\frac{n\pi a}{l}) \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

解:(方法1)设有满足边界条件得特解$v(x,t)=A(t)x+B(t)$,则

$$v(0,t)=B(t)=0, \quad v(l,t)=A(t)l+B(t)=\sin\omega t$$

所以$v(x,t)=\frac{x}{l}\sin\omega t$.

设$u(x,t)=v(x,t)+W(x,t)$, $W(x,t)$满足的定解问题是

$$\begin{cases} W_{tt}=a^2W_{xx}+\frac{\omega^2 x}{l}\sin\omega t, \quad 0<x<l, t>0 \\ W(0,t)=0,\ W(l,t)=0, \quad (\omega\neq\frac{n\pi a}{l}) \\ W(x,0)=0, W_t(x,0)=-\frac{\omega}{l}x \end{cases}$$

按照非齐次方程，齐次边界条件的方法求解$W(x,t)$.

解:(方法2)最好选取函数同时满足方程和非齐次边界条件.

设$v(x,t)=f(x)\sin\omega t$, 代入方程和定解条件得

$$\begin{cases}-\omega^2 f(x)\sin\omega t=a^2 f''(x)\sin\omega t\\ f(0)=0, f(l)=1\end{cases}$$

解得$f(x)=\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}$, $v(x,t)=\frac{1}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t$.

则$W(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$满足

$$\begin{cases}W_{tt}=a^2 W_{xx}, \quad 0<x<l, t>0\\ W(0,t)=0,\ W(l,t)=0, \quad (\omega\neq\dfrac{n\pi a}{l})\\ W(x,0)=0, W_t(x,0)=-\frac{\omega}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}\end{cases}$$

说明：

1. 选择不同的齐次化函数$v(x,t)$,导出的$w(x,t)$满足的定解问题也不同；
2. 定解问题的解的存在唯一性保证最后$u(x,t)$是相同的，表达式的形式可能不同；
3. 应选择适当的函数$v(x,t)$,使得$w(x,t)$的方程尽可能简单;
4. 最好的选择是使$v(x,t)$同时满足非齐次边界条件和方程，此时$w(x,t)$满足的方程和边界条件都是齐次的。

三、非齐次稳定方程的场位问题

例题7：环形区域内Poisson方程边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 12(x^2 - y^2), \quad 0 < a^2 < x^2 + y^2 < b^2 < \infty \\ u\big|_{x^2+y^2=a^2} = 1, \ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{x^2+y^2=b^2} = 0 \end{cases}$$

解: 设$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$,
其中v满足方程$v_{xx} + v_{yy} = 12(x^2 - y^2)$,
可以取特解$v(x,y) = x^4 - y^4$.

$$v = r^4\cos^4\theta - r^4\sin^4\theta = r^4(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^4\cos 2\theta$$

$$w(x,y)\text{满足}\begin{cases} \Delta_2 w = 0 \\ w\big|_{r=a} = 1 - a^4\cos 2\theta, \ w_r\big|_{r=b} = -4b^3\cos 2\theta \end{cases}$$

极坐标下，圆环内Laplace方程的解是

$$u(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n})(C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta)$$

代入边界条件得

$$\begin{aligned} w\Big|_{r=a} &= A_0 + B_0 \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n a^n + B_n a^{-n})(C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) \\ &= 1 - a^4 \cos 2\theta \\ \frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=b} &= \frac{B_0}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} (n A_n b^{n-1} - n B_n b^{-n-1})(C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) \\ &= -4b^3 \cos 2\theta \end{aligned}$$

比较系数可得 $\begin{array}{ll} A_0 + B_0 \ln a = 1 & (A_2 a^2 + B_2 a^{-2}) C_2 = -a^4 \\ \frac{B_0}{b} = 0 & (2A_2 b - 2B_2 b^{-3}) C_2 = -4b^3 \end{array}$

解得: $A_0 = 1,\ B_0 = 0,\ A_2 = -\dfrac{a^6 + 2b^6}{a^4 + b^4},\ B_2 = -\dfrac{a^4 b^4 (a^2 - 2b^2)}{a^4 + b^4}$,
其余系数为0.

$$w(r,\theta) = 1 + \left(-\frac{a^6 + 2b^6}{a^4 + b^4} r^2 + \frac{a^4 b^4 (2b^2 - a^2)}{a^4 + b^4} r^{-2} \right) \cos 2\theta$$

最后得到原定解问题的解是

$$u(r,\theta) = 1 + \left(r^4 - \frac{a^6 + 2b^6}{a^4 + b^4} r^2 + \frac{a^4 b^4 (2b^2 - a^2)}{a^4 + b^4} r^{-2} \right) \cos 2\theta.$$