Fundamental of Circuit Analysis

课程提纲和总结

尹华锐

电子工程与信息科学系
中国科学技术大学
yhr@ustc.edu.cn

考试信息

- 时间 2022 年 7 月 26 日 9：00～11：00 地点 3A112
- 闭卷考试总分 100 分
- 计算器允许携带，不得使用手机等具备通信功能电子装置

研究对象及相关假设

给定电路结构和元器件的电路的电路行为求解

- ★ 线性电路
- ★ 时不变电路
- ★ 集中参数电路
- ★ 理想元器件

电路变量

- 电流
  - ★ $i = \frac{dq}{dt}$引入了瞬时概念
  - ★ 参考方向-电路电流是一个代数变量
- 电压
  - ★ $u = \frac{dw}{dq}$瞬时特性
  - ★ 参考方向-电路电压代数变量
- 交流-变量幅度和方向周期行变化，均值为 0
- 关联参考方向

  电压电流参考方向满足电流从电压正端流向负端
- 功率 $p = \frac{dw}{dt} = \frac{udq}{dt} = ui$瞬时性
  - ★ 关联参考方向 $p = ui > 0$吸收功率，$p = ui < 0$发出功率
  - ★ 非关联参考方向 $p = ui < 0$吸收功率，$p = ui > 0$发送功率

基尔霍夫定律 KCL, KVL

- **集中参数电路**流入一个节点的电流**代数和**等于 0
  - ★ 对于封闭边界仍然有流入或者流出电流代数和为 0
  - ★ 流入电流的代数和等于流出电流的代数和
- 对于一个 n 节点的电路，KCL 具有以下特点
  - ★ $n-1$ 个独立方程
  - ★ 任何一个方程可以由其余 $N-1$ 个 KCL 得到
- **集中参数电路**任何一个封闭回路，顺着**回路方向**电压降的**代数和**为 0
  - ★ 电压降：回路方向与电压参考方向一致，否则电压升
  - ★ 顺着回路方向电压升等于电压降
  - ★ 平面电路：b 支路，n 节点，$b-n+1$ 独立 KVL，网孔是其中一种特例

关键元件电源、电阻

- 电阻电压电流关系为比例关系 $u = Ri$,$i = Gu$
  - ★ 不考虑材质，不考虑工艺，不考虑 u, i的变化对 R, G的影响
  - ★ 表达采用函数和 uoi表达
  - ★ 引入了负电阻的概念，但是不特别声明，还是默认 $R > 0$
- 电源
  - ★ 独立电压源 (电流源）$u = U_s(t)(i = I_S(t))$和输出的电压电流和电路其他部分无关
  - ★ 受控电压源 (电流源 输出电压电流由电路中控制支路的电压电流决定
    - ◇ 对控制支路的取样不影响控制支路的电压电流

$$U = u_S(u_c(t)) \quad I = i_S(u_c(t))$$

$$U = u_S(i_c(t)) \quad I = i_S(i_c(t))$$

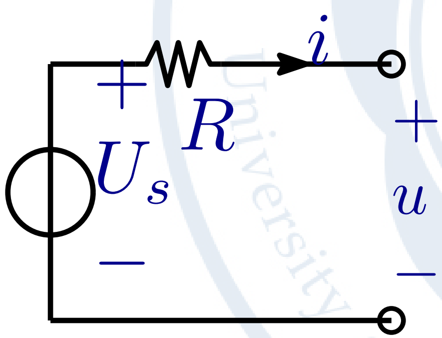
电路等效

- **等效：** 2 个电路所有端口上的电压电流关系都一致

$$F_A(\mathbf{u},\mathbf{i})=0, F_B(\mathbf{u},\mathbf{i})=0, F_A(\mathbf{u},\mathbf{i})=kF_B(\mathbf{u},\mathbf{i}), k\in R$$

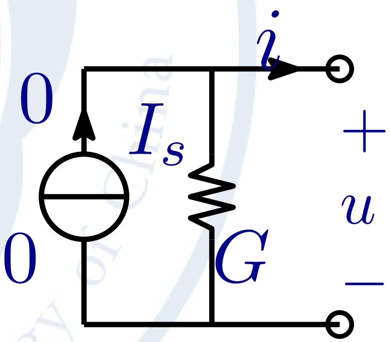
$$\mathbf{u}=\{u_k,0\le k\le N-1\},\mathbf{i}=\{i_k,0\le k\le N-1\},N\text{为端口数目}$$

- 含源电路的戴维南表示和 Norton 电路表示等效



$$Ri+u-U_s=0$$

$$i+uG-I_s=0$$



戴维南电路 (Thevenin Circuit)　　诺顿电路 (Norton Circuit)

$$f_A=Ri+u-U_s, f_B=i+Gu-I_s$$

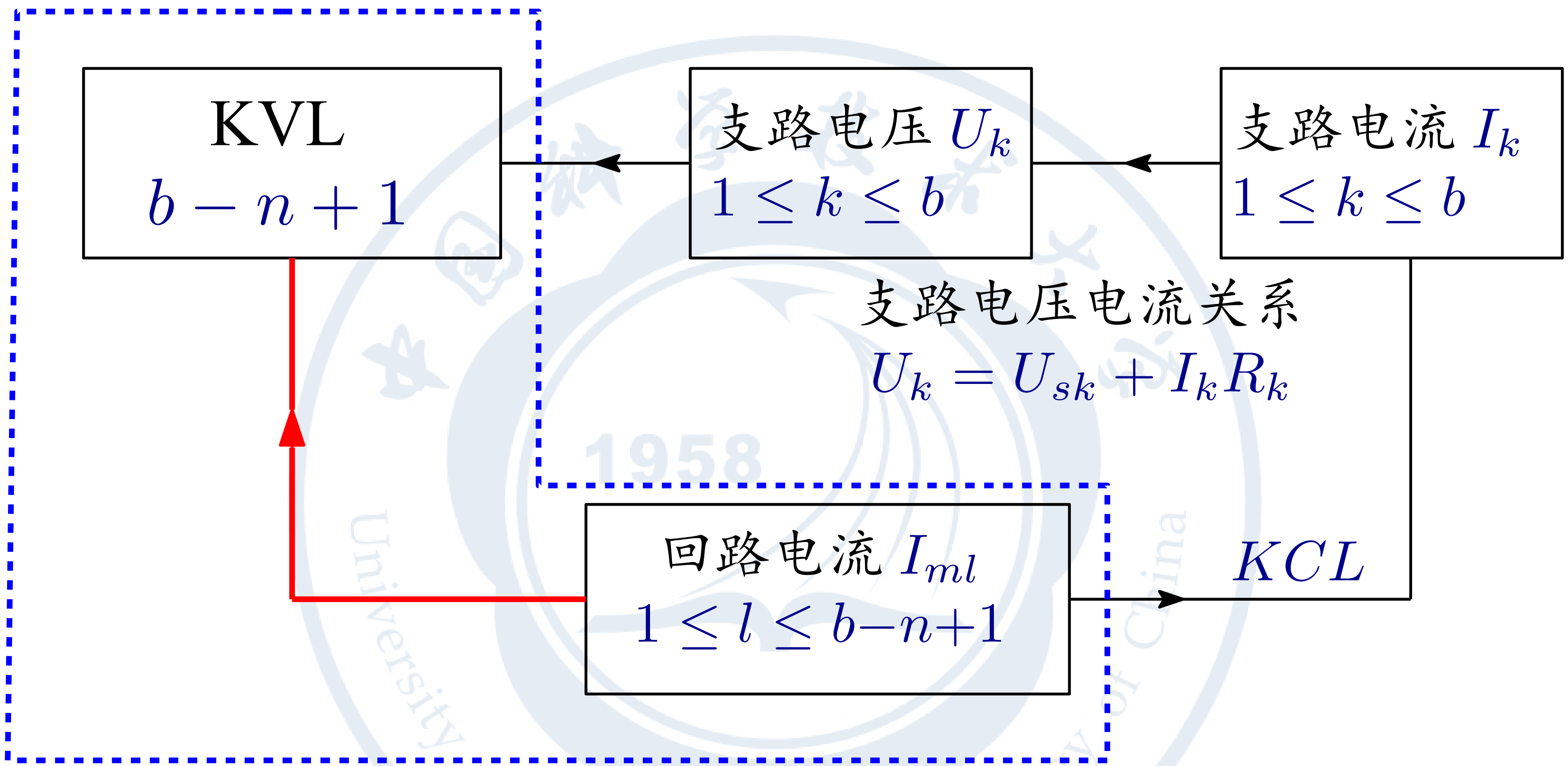
$$\rightarrow R=G, U_s=RI_s\Rightarrow f_A=Rf_B$$

★ 物理意义：相同的内阻，戴维南表示的短路电流是诺顿电路的电流源电流，诺顿表示的开路电压是戴维南表示的电压源电压

支路电流

- 平面电路，n节点,$n-1$个 KCL方程约束电流
- 平面电路，b支路,n节点，$b-n+1$个 KVL方程约束电压
- 平面电路，b支路,$f(u_k,i_k)=0$
  - ★ if: $f_A(u_k,i_k)$线性代数方程,方程组可解，需假设条件?
  - ★ $u_k=u_k(i_k),0\le k\le b-1$代入 KVL，$b$未知数 $i_k,0\le k\le b-1$,b个方程，有唯一解
  - ★ 何时该假设不成立，该如何修正

回路电流法思路


KVL
$b-n+1$
支路电压 U_k
$1\le k\le b$
支路电流 I_k
$1\le k\le b$
支路电压电流关系
$U_k=U_{sk}+I_kR_k$
回路电流 I_{ml}
$1\le l\le b{-}n{+}1$
KCL

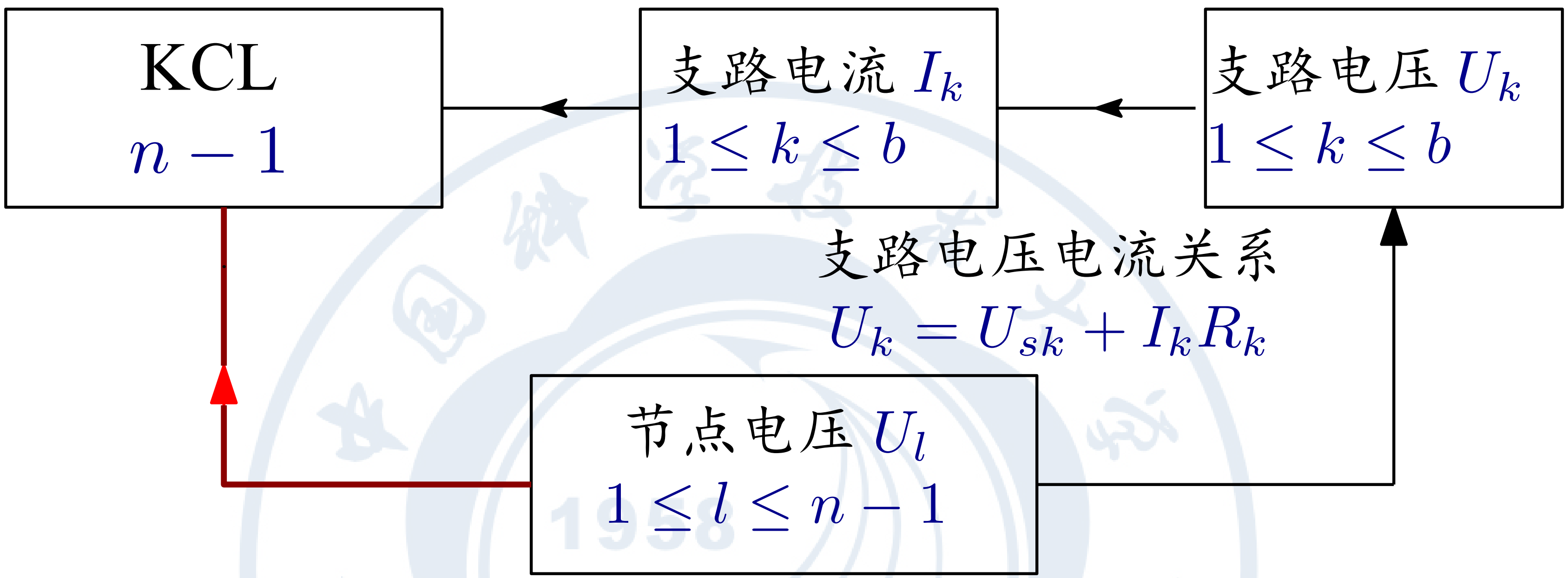
回路电流法

1）选择 $b-n+1$个独立回路，例如选择第 l个回路时，选择一条边至少不在已经选择的回路中;

2）对于第 $l(1\leq l\leq b-n+1)$个回路：自阻 R_{ll}为本回路所有电阻之和；互阻 R_{lj}为回路 l与回路 $j(1\leq j\leq b-n+1, j\neq l)$的公共边电阻，该支路两者方向一致，取 $'+'$, 否则取 $'-'$;

3）回路 l的电压升等于所有该回路的电压源之和，如果推动回路电流符号为 $'+'$，阻碍回路电流符号为 $'-'$;

节点电压法



★ 1）含电阻的电压源支路利用 Norton 表示

★ 2）单独的电压源支路，支路两端的电压不独立，可用一个节点电压表征，设定该支路电流为新增变量即可

$[G_{ij}]\,\mathbf{U} = \mathbf{I_S}$ G电导矩阵对角线元素 G_{kk}为节点 k与所有节点的电导之和；非对角元素 $G_{kj}(j \neq k)$为节点 k与节点 j电导。

$\mathbf{U} = [U_k(1 \le k \le n-1)]^T$为节点电压列向量

$\mathbf{I_S} = [I_{Sk}(1 \le k \le n-1)]^T$为流入节点 k的电流源之代数和

电路定理

- 置换定理
- 线性定理

$$AX = B, B = \sum \lambda_i B_i, AX_i = B_i \to X = \sum \lambda_i X_i$$

$AX = B \to X = A^{-1}B$, 任何一个支路的 u_k, i_k 是 A^{-1} 的某一行与 B 的内积，则某个电路响应可以表征为输入的线性组合：

$$Y = \sum_i \lambda_i X_i$$

- 戴维南定理：一端口含源网络等效可以为电压源和电阻的串联组成的含原支路，电压源电压是含原网络开路电压，电阻是独立源设定为 0 以后的电源等效内阻

★ 进一步把戴维喃表示可以转换为 Norton 表示，得到相应的诺顿定理

电路定理

■ 特勒根定理

★ 集中参数电路，相同电路结构和连接关系，无需元件一样

★ 关联参考方向 $u_k, i_k, \tilde{u}_k, \tilde{i}_k$

$$\sum_{k=1}^{b} u_k \tilde{i}_k = 0, \sum_{k=1}^{b} \tilde{u}_k i_k = 0$$

■ 互易定理

★ 两端口，电阻网络

★ 核心是网络内部 u 元件电压电流比例关系

电路元件

- 电容 $q = Cu$,$i = C\frac{du}{dt}$,$W = 0.5Cu^2$
- 电感 $\psi = Li$,$u = L\frac{di}{dt}$,$W = 0.5Li^2$

- 互感元件
  - ★ 同名端电流从同名端流入，互感量为 $+$，否则为 $-$
  - ★ 线圈串并联等效电压电流关系和电感量
- 变压器
  - ★ 电压在同名端同为正，$u_1 : u_2 = n : 1$
  - ★ 变压器永远总的做功等于 0, 确定电流比值符号

正弦稳态电路

- 正弦信号 $u(t) = U_m\cos(\omega t + \phi_u)$,$i(t) = I_m\cos(\omega t + \phi_i)$
  - ★ 三要素幅度 $U_m(I_m)$, 相位 $\phi_u(\phi_i)$, 频率 ω
  - ★ 有效值 $U = U_m/\sqrt{2}$,$I = I_m/\sqrt{2}$
- 正弦信号的相量表示
  - ★ 电压相量 $\dot{U}_m = U_m e^{j\phi_u}$,$\dot{U} = Ue^{j\phi_u}$
  - ★ 电流相量 $\dot{I}_m = I_m e^{j\phi_i}$,$\dot{I} = Ie^{j\phi_i}$
- 相量表示性质
  - ★ 一一映射
  - ★ 线性性质
  - ★ 微分性质
  - ★ 积分性质
- 民用电三相四线制下的线电压，相电压有效值，最大值

正弦稳态电路

■ 相量表达下的电路变量关系

★ 线性定理 →相量形式的 KCL,KVL 成立

★ 微分性质 →R,L,C 相量形式的电压电流线性关系

■ 相量表达下，正弦稳态电路和直流电路等价，只是系数转换为复系数

★ 相量形式的回路电流法

★ 相量形式的节点电压法

■ 相量分析法特殊关注元器件

★ 互感元件–电流表征电压方便

★ 变压器

正弦稳态电路功率问题

- 平均功率 $p = 1/T\int_0^T u(t)i(t)dt$

$$P = UIcos\phi \ \lambda = \cos(\phi_u - \phi_i)$$功率因数

- 无功功率 $Q = UI\sin\phi$
- 电流与电压同相部分 $\dot{I}_P$贡献有功功率（平均功率）
- 电流与电压正交部分 $\dot{I}_Q$贡献无功功率

常用负载是感性负载，可用容性负载抵消部分 $\dot{I}_Q$提高平均功率占比和功率因数

- 复功率 $S = \dot{U}(\dot{I})^* = P + jQ$
- 最大传输定理

对于一个一端口网络，若其等效阻抗为 Z_{in}，则外部负载为 $Z = Z_{in}^*$获得最大功率输出，若 Z相位固定，则 $|Z| = |Z_{in}|$获得最大功率输出。

频率特性和谐振

■ 齐次定理单独立正弦稳态电源某支路响应 $\dot{Y}$u 与激励 $\dot{X}$ 之间满足比例关系：

$$H(j\omega) = \frac{\dot{Y}}{\dot{X}}$$

$H(j\omega)$取决于电路结构，与激励源 $\dot{X}$ 幅度相位无关

★ 关注幅度频率响应，相位频率响应。通带，阻带，3dB 点的意义

■ RLC串联谐振（并联谐振）

★ 品质因数 Q, 谐振频率 ω_0, 特性阻抗 ρ

★ 谐振时电感电容的幅度增益，带宽与 ω_0, Q关系

★ 不同的谐振方式（电流，电压）

■ 一端口电路 RLC的谐振判决端口电压电流满足 $\phi_u = \phi_i$, 端口阻抗显示纯阻性

线性暂态电路的时域分析方法

■ 电路切换电路变量确定

★ 电容 $|i| < \infty \rightarrow u_C(0^+) = u_C(0^-)$，电流有界，电容电压连续

★ 电感 $|u| < \infty \rightarrow i_L(0^+) = i_L(0^-)$，电压有界，电流连续

■ 换路瞬间电路变量求解

★ 换路之前稳态，确定 $u_C(0^-), i_L(0^-)$

★ 判断电容电流，电感电压是否有限值，若确认的到 $u_C(0^+), i_L(0^+)$

★ $t = 0^+$ 电源数值，将 $u_C(0^+), i_L(0^+)$ 作为直流电源利用直流电路求解方法获取其他部分电路变量数值

■ 零输入响应

时间常数 $\tau = RC, \tau = L/R$，初值 $u_C(0^+), i_L(0^+)$。最后结果 $Ae^{-t/\tau}$, 其中 $A = u_C(0^+)$ 或者 $A = i_L(0^+)$

线性暂态电路的时域分析方法

零状态响应

据此确定待定系数

- ★ 响应 = 特解 + 通解 × 待定系数
  - ◇ 若电源有界，则响应（电压，电流值）满足在 $t = 0^+$ 等于 0
  - ◇ 强制响应，暂态响应，稳态响应，自由响应
- ★ 正弦稳态激励源，特解可利用正弦稳态求解方法求解
- ★ 阶跃信号 $K\epsilon(t)$，利用直流电路求解特解
  - ◇ 单位阶跃信号 $\epsilon(t)$对应的响应 $s(t)$称为单位阶跃响应
- ★ 冲激激励源 $K\delta(t)$(注意单位，冲激电压源，冲激电流源)。零状态响应求解方法
  - ◇ $\delta(t) = \frac{s(t)}{dt} \to h(t) = s'(t)$，$h(t)$单位冲激响应
  - ◇ 积分法，求出 $t = 0^+$然后等效为零输入响应

线性暂态电路的时域分析方法

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应 = 强制响应 + 暂态响应（自由响应）

■ 三要素法

★ 将电路记忆元件以外的其他部分等效为戴维南表示（诺顿表示）

$$\tau \frac{df(t)}{dt} + f(t) = g(t)$$

$f(t)$代表响应，$g(t)$代表激励，τ时间常数

★ $f(t) = f_p(t) + (f(0^+) - f_p(0^+))e^{-\frac{t}{\tau}}$ (t>0)

- ◇ $f_p(t)$：特解，对于直流 $f(+\infty)$, 正弦稳态相量法
- ◇ $f(0^+)$: 初值
- ◇ 时间常数 τ

线性暂态电路的时域分析方法

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应 = 强制响应 + 暂态响应（自由响应）

■ 三要素法

★ 将电路记忆元件以外的其他部分等效为戴维南表示（诺顿表示）

$$\tau\frac{df(t)}{dt}+f(t)=g(t)$$

$f(t)$代表响应，$g(t)$代表激励，τ时间常数

★ $f(t)=f_p(t)+(f(0^+)-f_p(0^+))e^{-\frac{t}{\tau}}$(t>0)

- ◇ $f_p(t)$：特解，对于直流 $f(+\infty)$, 正弦稳态相量法
- ◇ $f(0^+)$: 初值
- ◇ 时间常数 τ

强制响应

自由响应（暂态响应）

线性暂态电路的时域分析方法

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应 = 强制响应 + 暂态响应（自由响应）

三要素法

★ 将电路记忆元件以外的其他部分等效为戴维南表示（诺顿表示）

$$\tau\frac{df(t)}{dt}+f(t)=g(t)$$

$f(t)$代表响应，$g(t)$代表激励，τ时间常数

★ $f(t)=f_p(t)+(f(0^+)-f_p(0^+))e^{-\frac{t}{\tau}}$ (t>0)

- ◇ $f_p(t)$：特解，对于直流 $f(+\infty)$, 正弦稳态相量法
- ◇ $f(0^+)$: 初值
- ◇ 时间常数 τ

强制响应

自由响应（暂态响应）

激励信号	特解形式
K(直流)	A(直流)
$Ke^{\alpha t}(\alpha\neq\tau)$	$Ae^{\alpha t}$
$K\cos(\omega t+\phi)$	$A\cos(\omega t+\psi)$

线性暂态电路的复频域分析方法

- 拉普拉斯变换

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{e^{-st}}dt, f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

- 一一映射　　求解 $u(t), i(t)$ 和 $U(s), I(s)$ 等价
- 线性性质　　KCL.KVL依然成立
- 微分性质　　$g(t)=f'(t)\rightarrow G(s)=sf(s)-f(0^-)$

微分关系在象函数侧是线性关系（不一定比例关系）

- 微分性质　　$g(t)=\int_0^t f(\xi)d\xi \rightarrow G(s)=f(s)/s$

原信号	象函数
$K\epsilon(t)$	K/s
$e^{\alpha t}\epsilon(t)$	$1/(s-\alpha)$
$\delta(t)$	1
$K\cos(\omega t+\phi)$	$(s\cos\phi+\omega\sin\phi)/(s^2+w^2)$

线性暂态电路的复频域分析方法

元器件电压电流关系

- ★ 电阻 $U(s) = RI(s)$
- ★ 电感 $U(s) = sLI(s) - \boxed{Li_L(0^-)}$ 初值引入的附加电源
- ★ 电容 $U(s) = I(s)/cs + \boxed{u_C(0^-)/s}$

利用复频域分析线性暂态电路

- ★ 1. $\forall k, 1 \le k \le b, u_k \to U_k(s), i(k) \to I_k(s), u_S(t) \to U_S(s), i_S(t) \to I_S(s)$，画出运算电路，特别注意初值引入的附加电源
- ★ 2. 利用直流回路电流法或者节点电压法，得到待球支路电压、电流象函数 $U_k(s), I_k(s)$
- ★ 3.$U_k(s) \to u_k(t), I_k(s) \to i_k(t)$

暂态电路复频域下电路定理成立

- ★ 互易定理要求电容电感是零状态（电流电压比例关系要求）

单激励源齐次定理 零状态为前提$H(s) = Y(s)/X(s)$

$Y(s) = X(s)H(s)$ $X(s)$激励极点决定强制响应形式和激励源一致，$H(s)$极点决定暂态响应波形形式

二端口电路

- Y, Z, H, A参数定义和彼此关系
  - ★ 各参数矩阵下的互易，对称判据
  - ★ 定义对直流电路，正弦稳态电路（相量形式），暂态电路（复频域）都成立
- 已知 Y, Z如何实现，包括互易和非互易情况
- 二端口网络电源和负载连接特性