12-19 作业

4. 由题意知, 要求的值为

$$\alpha = P\left(X > 1/2 \mid H_0\right) = \int_{1/2}^{1} 6x^5 dx = \frac{63}{64}$$
$$\beta = P\left(X \le 1/2 \mid H_1\right) = \int_{0}^{1/2} 4x^3 dx = \frac{1}{16}$$
$$g(\theta) = P(X > 1/2 \mid \theta = 2) \int_{1/2}^{1} 3x^2 dx = \frac{7}{8}$$

6. (1) 功效函数为

$$g(\theta) = P_\theta(\boldsymbol{X} \in W) = P(X_{(n)} \le 2.5) = \left(\frac{2.5}{\theta}\right)^n$$

记显著性水平为 α, 则根据定义，对任意 $\theta \in \Theta_0 = \{\theta : \theta \ge 3\}$,

$$g(\theta) \le \left(\frac{2.5}{3}\right)^n = \alpha.$$

(2) 为使显著性水平达到 0.05,

$$\left(\frac{2.5}{3}\right)^n \le 0.05$$
$$\Rightarrow \quad n \ge \frac{\ln(0.05)}{\ln(5/6)} \approx 16.43104$$

所以 n 至少应取 17.

11. 检验 $H_0 : \mu \le 19 \leftrightarrow H_1 : \mu > 19$, 方差末知, 检验统计量为 $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$, 拒绝域为 $\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \ge t_\alpha(n-1)\right\}$, 计算得

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = 4.4538 > t_{0.01}(15) = 2.602$$

样本落入拒绝域内, 拒绝原假设 H_0, 所以可以认为新工艺的维生素含量有所提高。

14. (1) 题中 64 为样本方差。检验 $H_0 : \mu \le 40 \leftrightarrow H_1 : \mu > 40$. 检验统计量为 $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$, 拒绝域为 $\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \ge t_\alpha(n-1)\right\}$, 计算得

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = 3 > t_{0.05}(8) = 1.8595$$

样本落入拒绝域内, 拒绝原假设 H_0.

(2) 检验 $H_0' : \sigma^2 \geq 70 \leftrightarrow H_1' : \sigma^2 < 70$. 检验统计量为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 拒绝域为 $\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}$, 计算得

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = 7.3143 > \chi^2_{0.95}(8) = 2.733$$

样本未落入拒绝域内，接受原假设 H_0.

22. 两总体为正态总体, 且方差相等, 检验 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$. 检验统计量 $T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$, 其中 $S_w^2 = \frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$, 拒绝域为 $\{|T| \geq t_{\alpha/2}(m+n-2)\}$. 经计算, 在 $\mu_1 = \mu_2$ 时,

$$|T| = \left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\right| = 2.572209 > t_{0.025}(22) = 2.074$$

所以样本落入拒绝域内, 拒绝原假设 H_0, 即认为甲乙两种方法的装配时间不同。

25. 假设 X, Y 分别为 A, B 两药的止痛时间，$X \sim N(\mu_1, \sigma^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 方差未知但相等。
检验 $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 \leftarrow H_1 : \mu_1 < \mu_2$. 检验统计量 $T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$, 其中 $S_w^2 = \frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$, 拒绝域为 $\{T \leq t_{1-\alpha}(m+n-2)\}$. 经计算,

$$T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} = -1.7837 < t_{0.95}(18) = -1.7341$$

所以样本落入拒绝域内, 拒绝原假设 H_0, 即认为 A 止痛药的效果优于 B.

注：根据原假设的提法原则: 如果你希望“证明”某个命题，就取相反结论或者其中一部分作为原假设. 此题希望证明“A 止痛药的效果优于 B 止痛药”, 因此原假设的提法如上. 且假设检验中原假设不被轻易拒绝，因此“拒绝 H_0”的结果比“不能拒绝 H_0”更有保证。虽然此题中 H_0 取 $\mu_1 \leq \mu_2$ 结果是接受 H_0, 依然能得到 A 止痛药的效果优于 B 的结论，但上面的取法更有保证。

37. 假设 X, Y 分别为 A, B 两批电子其间的电阻，$X \sim N(\mu_1, \sigma^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 方差未知，检验均值差异前需检验方差是否相等。
(1) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
检验统计量 $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$, 在 H_0 成立的条件下, 拒绝域为 $\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)\right.$

or $\frac{S_1^2}{S_2^2} \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)\big\}$. 在 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 时, 计算得,

$$\begin{aligned}\frac{S_1^2}{S_2^2} = 1.1080 &\in (F_{0.975}(5,5), (F_{0.025}(5,5)) \\ &= \left(\frac{1}{7.15}, 7.15\right).\end{aligned}$$

所以样本未落入拒绝域, 接受原假设 H_0, 即认为两批器件电阻的方差相等.

(2)$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

检验统计量 $T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$, 其中 $S_w^2 = \frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$, 拒绝域为 $\big\{|T| \geq t_{\alpha/2}(m+n-2)\big\}$. 经计算, 在 $\mu_1 = \mu_2$ 时,

$$|T| = \left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\right| = 1.3718 < t_{0.025}(10) = 2.2281$$

所以样本未落入拒绝域内, 接受原假设 H_0, 即认为两批器件电阻无差异。