4.12.

a. 这些特征矢量满足方程 $\hat{f}|\psi\rangle=\lambda_0|\psi\rangle$

① 加法运算封闭性：若 $|\psi_1\rangle,|\psi_2\rangle$ 满足上述方程，

则 $|\psi_1\rangle+|\psi_2\rangle$ 一定也满足，因为 $\hat{f}$ 是线性算符

数乘运算封闭性：$\hat{f}c|\psi\rangle=c\hat{f}|\psi\rangle=c\lambda_0|\psi\rangle=\lambda_0(c|\psi\rangle)$

即 $c|\psi\rangle$ 也属于这些矢量组成的集合.

② 加法的交换、结合律源于态矢空间是线性空间.

加法的零元素 $|0\rangle$ 在特征矢量集合中，即 $\hat{f}|0\rangle=\lambda_0|0\rangle$

逆元素也在集合中，因 $-|\psi\rangle=(-1)|\psi\rangle$.

③ 数乘的结合律、分配律，以及 $1|\psi\rangle=|\psi\rangle$ 都来源于态矢空间是线性空间

综上，满足 $\hat{f}|\psi\rangle=\lambda_0|\psi\rangle$ 的所有矢量构成线性空间.

b.

解：$\langle u|v\rangle = \frac{1}{2}(1, -i)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} = 0$

$\langle u|u\rangle = \frac{1}{2}(1, -i)\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = 1$

$\langle v|v\rangle = \frac{1}{2}(1, i)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} = 1$

c.

解：本征值需满足 $\begin{vmatrix}-\lambda & i\\ -i & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = +1$

分别代入本征方程，易知

λ_1 对应的本征矢量为 $|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$.

λ_2 对应的本征矢量为 $|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$

d.

解：$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}$ $\quad U^{+}U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$U^{+}fU = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$