

# 第7章

# 第7章 FIR 数字滤波器设计

7.1 FIR DF 设计的窗函数法

7.2 窗函数

7.3 FIR DF 设计的频率抽样法

7.4 FIR DF 设计的切比雪夫逼近法

7.5 几种简单形式的滤波器

7.6 低阶低通差分滤波器

7.7 滤波器设计小结

## IIR数字滤波器 $H(z) = B(z)/A(z)$

有极点，也有零点，因此可以借用经典的模拟滤波器的设计方法，且取得非常好的效果，如好的衰减特性，准确的边缘频率。

## FIR数字滤波器 $H(z) = B(z)$

只有零点而没有极点，所以没办法借用模拟滤波器的设计方法。其思路是：直接从频域出发，即以某种准则逼近理想的频率特性，且保证滤波器具有线性相位。

设计方法：窗函数法、频率抽样法、最佳一致逼近法

优缺点：稳定、线性相位、多通带或阻带；一般阶次要高，需尝试多次。

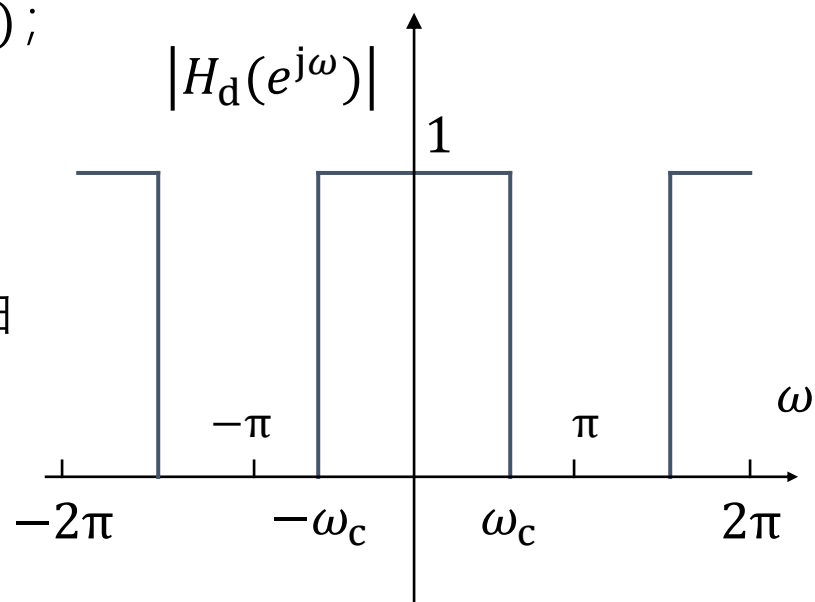
# 7.1 Fourier 级数法（窗函数法）

## 一、思路与方法

1. 由理想的频率响应得到理想的  $h_d(n)$ ;

2. 由  $h_d(n)$  得到因果、有限长的单位抽样响应  $h(n)$ ;

3. 对  $h(n)$  加窗得到较好的频率响应。



理想频率响应

设理想低通滤波器的幅频为1、相频为零

可以化为  
连续矩形  
窗的sinc  
函数形式

则有：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

特点：      无限长                  非因果                  偶对称



解决方法：      截短



移位



保留

得到：

$$h(n) = h_d(n - M/2)$$
$$n = 0, 1, \dots, M$$

$$M = N - 1, \quad N \text{ 为窗长}$$



隐含使用  
了窗函数

于是： $H(z) = \sum_{n=0}^M h(n)z^{-n}$

$M = N-1$   
阶数；长度

注意： $H(z)$ 是因果的，且是线性相位的，即

$$\varphi(\omega) = -\omega M/2, \quad \varphi(\omega) = -(M/2)\omega$$

为了省去每次的移位，可以令：

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}$$

通带内

即，事先给一线性相位

这样：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega M/2} & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

于是：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega M/2} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin(n-M/2)\omega_c}{(n-M/2)\pi}$$

$$h(n) = h_d(n), n = 0, 1, \dots, M$$

使用了矩形窗

上式的表达式及设计  $H(z)$  的思路可推广到高通、带阻及带通滤波器，也可推广到其它特殊类型的滤波器。

实际上，给定一个  $H_d(e^{j\omega})$ ，只要能够积分得到  $h_d(n)$ ，就可由截短、移位的方法得到因果的、且具有线性相位的FIR滤波器  $H(z)$ 。

高通

令

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega M/2} & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0 & 0 \leq |\omega| \leq \omega_c \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{\sin[(n - M/2)\pi] - \sin[(n - M/2)\omega_c]}{(n - M/2)\pi}$$

相当于？

用一个截止频率在 $\pi$ 处的低通滤波器（实际上是全通滤波器）减去一个截止频率在 $\omega_c$ 处的低通滤波器。

$$\text{低通: } h_d(n) = \frac{\sin(n-M/2)\omega_c}{(n-M/2)\pi}$$



带通

令

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega M/2} & \omega_l \leq |\omega| \leq \omega_h \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{\sin[(n - M/2)\omega_h] - \sin[(n - M/2)\omega_l]}{(n - M/2)\pi}$$

相当于用一个截止频率在 $\omega_h$ 处的低通滤波器减去一个截止频率在 $\omega_l$ 处的低通滤波器。

带阻

令

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega M/2} & |\omega| \leq \omega_l, |\omega| \geq \omega_h \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{\sin\left[\left(n - \frac{M}{2}\right)\omega_l\right] + \sin\left[\left(n - \frac{M}{2}\right)\pi\right] - \sin\left[\left(n - \frac{M}{2}\right)\omega_h\right]}{(n - M/2)\pi}$$

相当于?

$$h(n) = h_d(n)w(n), \quad n = 0, 1, \dots, M$$

$w(n)$ : 窗函数, 自然截短即是矩形窗。当然, 也可以用其它形式的窗函数。

## 例1. 设计低通 FIR DF

令截止频率

$$\omega_c = 0.25\pi$$

$$M = 10, 20, 40,$$

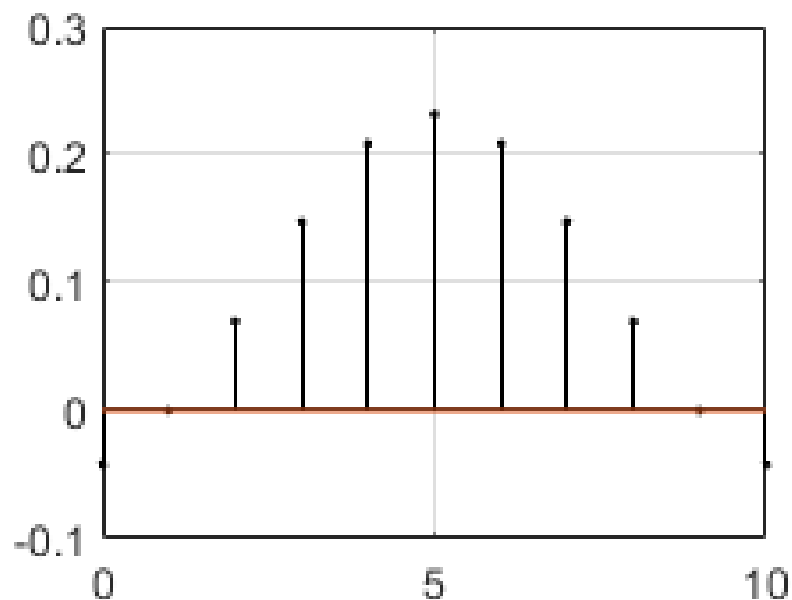
用矩形窗截短。

(代码附后) 结果如下图

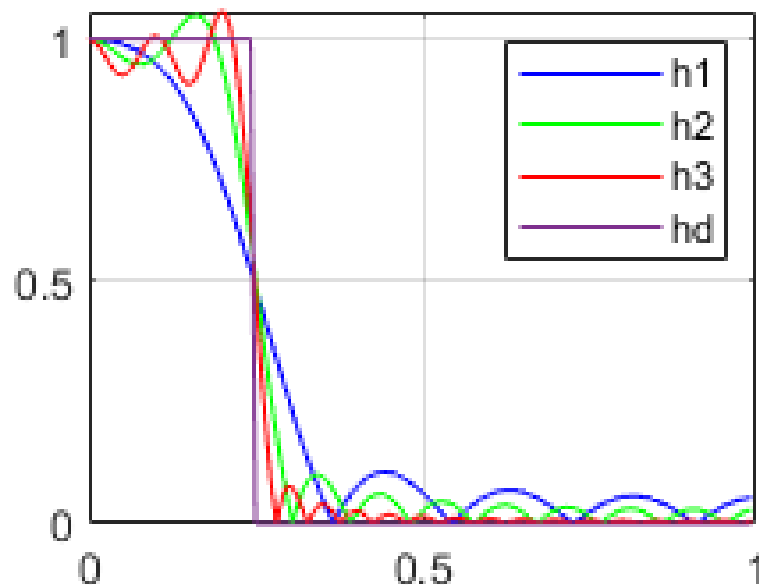
幅频响应原点归一化

分析窗长的影响

吉布斯现象：现象；原因；措施



偶奇特点的FIR系统



归一化频率 ( $\times \pi$  rad)

```
clear; close all;
N=128;
% 用矩形窗和文件 fir1 设计
% 三个 FIR 滤波器, 长度
% 分别为11, 21, 41;
b1=fir1(10,0.25,boxcar(11));
b2=fir1(20,0.25,boxcar(21));
b3=fir1(40,0.25,boxcar(41));

% 求出三个滤波器的频率响应;
h1=freqz(b1,1,N);
h2=freqz(b2,1,N);
h3=freqz(b3,1,N);

% 绘图;
Xval=0:10;
subplot(221)
stem(Xval,b1,'k');grid;
hold on;
plot(Xval,zeros(1,11));
```

```
t=0:1/N:1-1/N;
N1=N/4;
for k=1:N1
    hd(k)=1;
    %hd(k+N1)=0;
    %hd(k+2*N1)=0;
    hd(k+3*N1)=0;
end

subplot(222)
plot(t,abs(h1),'b-',t,abs(h2),'g-',t,abs(h3),'r-','t,hd','-');grid;
legend('h1','h2','h3','hd')
```

窗函数相关的频率分辨率和频谱泄露  
在应用中需要注意的问题, 例如LPC

```
clear; close all;
M=10;
b1=fir1(M,0.25,boxcar(M+1)); % 用矩形窗作为冲激响应的窗函数
b2=fir1(M,0.25,hamming(M+1)); % 用Hamming窗作为冲激响应的窗函数
N=128; % 分别求两个滤波器的频率响应;
```

```
h1=freqz(b1,1,N);
h2=freqz(b2,1,N);
```

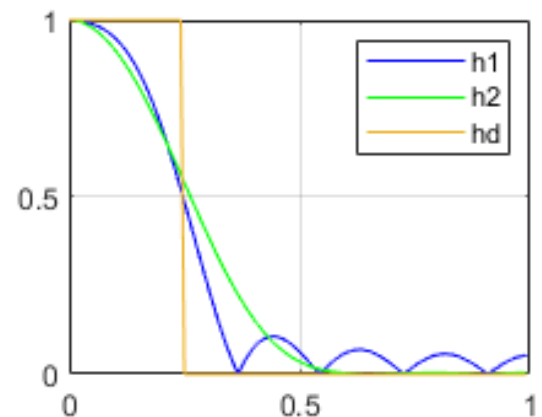
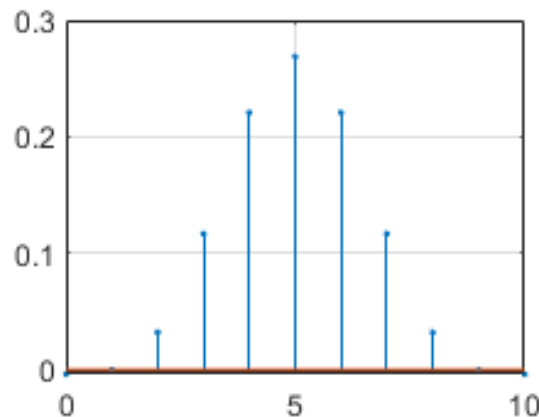
```
t=0:10;
subplot(221); stem(t,b2,'.');hold on;
plot(t,zeros(1,11));grid;
```

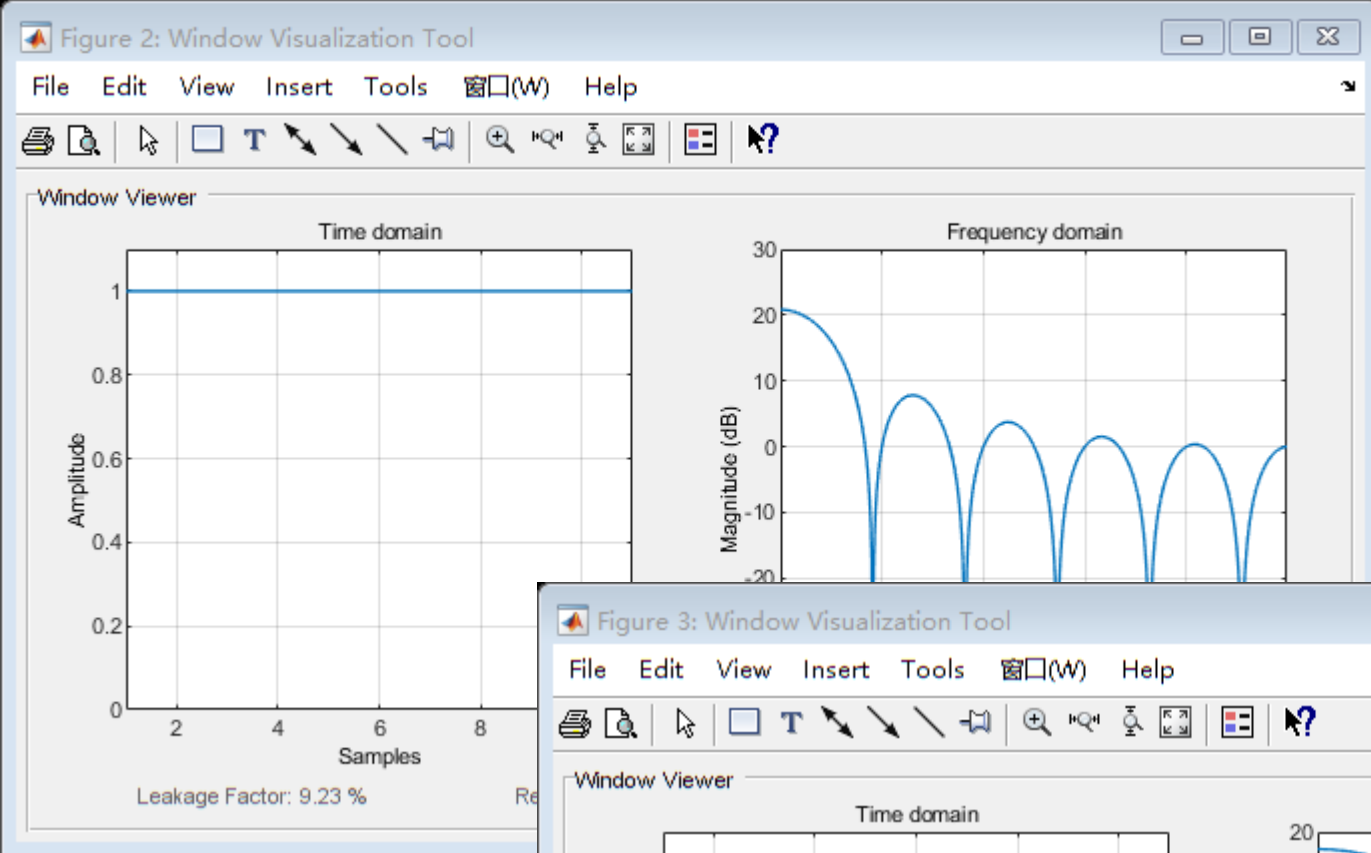
接上例：M = 10  
分别用**矩形窗**  
和**Hamming窗**

**汉明窗**可以**改善**吉布斯现象，通带内的振荡基本消除，阻带内波纹大为减小，**但**过渡带加宽

```
f=0:1/N:1-1/N;
N1=N/4;
for k=1:N1
    hd(k)=1;
    hd(k+3*N1)=0;
end
```

```
subplot(222)
plot(f,abs(h1),'b-',f,abs(h2),'g-',f,hd,'-');grid;
legend("h1","h2",hd)
```





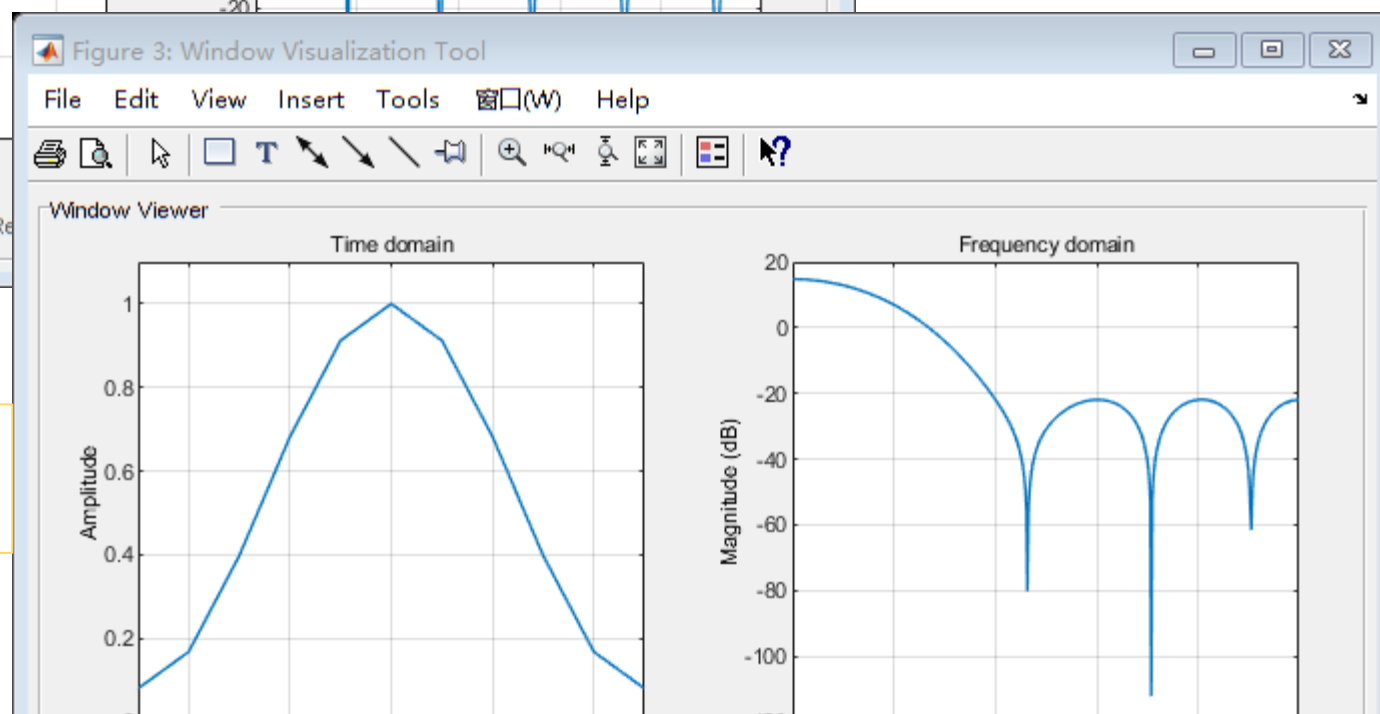
11点长度的  
矩形窗

11点长度的  
汉明窗

G.729协议

半个汉明窗

四分之一余弦窗



$\text{hamming}(11)' = 0.0800 \quad 0.1679 \quad 0.3979 \quad 0.6821 \quad 0.9121$   
 $1.0000 \quad 0.9121 \quad 0.6821 \quad 0.3979 \quad 0.1679 \quad 0.0800$

G.729协议里，在语音信号LPC分析中，对当前80点这一帧信号，要提取其声道模型 $H(z)$ 的参数 $a_i$ ,

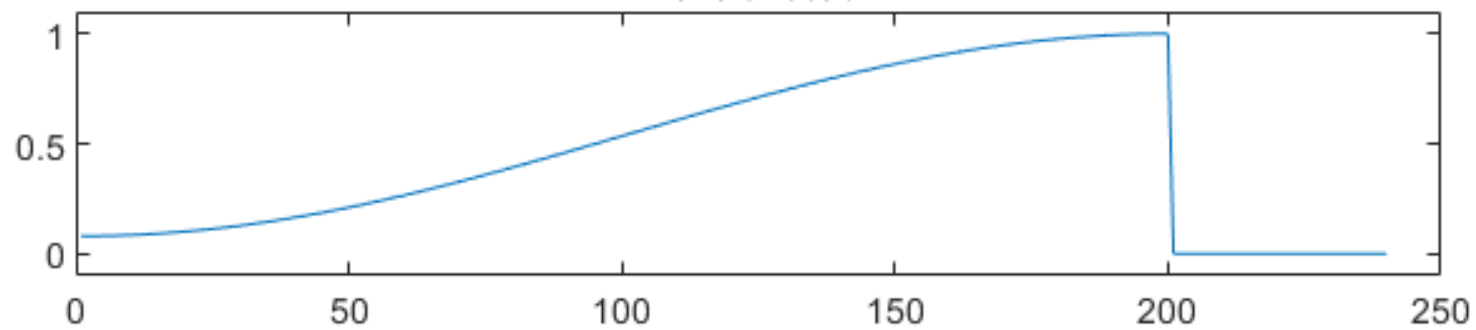
$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^P a_i z^{-i}}, \quad P = 10$$

考虑了过去120点、未来40点，对应30ms语音长度的240点，加半个汉明窗和四分之一余弦窗，通过240点加窗信号的自相关，可以得到很好的 $a_i$ 参数。

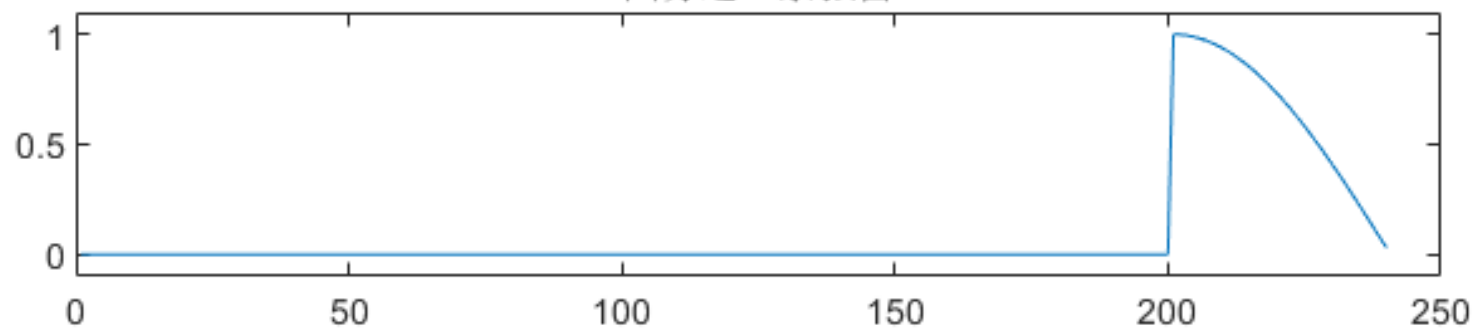
LP分析窗由两部分构成：第1部分是半个Hamming窗，第2部分是四分之一周期的余弦函数序列。

$$w_{lp}(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(\frac{2\pi n}{399}) & n = 0, \dots, 199 \\ \cos(\frac{2\pi(n-200)}{159}) & n = 200, \dots, 239 \end{cases}$$

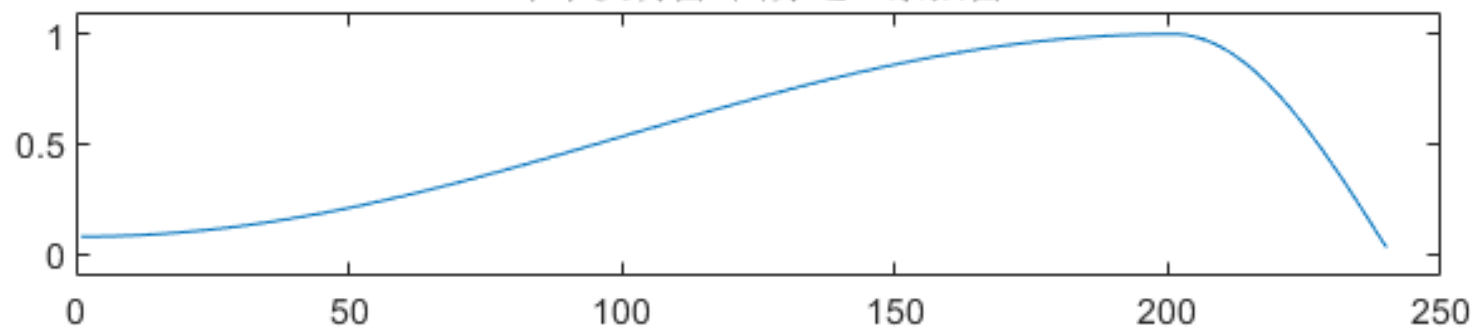
半个汉明窗



四分之一余弦窗



半个汉明窗+四分之一余弦窗





# MATLAB一个重要的滤波器设计工具

## FDATool → filterDesigner

### help filterDesigner

filterDesigner - Design filters starting with algorithm selection

The Filter Designer app enables you to design and analyze digital filters.

另请参阅 Signal Analyzer, [Window Designer](#), designfilt, FVTool, [WVTool](#)

signal/filterDesigner 的文档

# Window Designer

## Design and analyze spectral windows

### Description

The **Window Designer** app enables you to design and analyze spectral windows. Using this app, you can:

Display the time-domain and frequency-domain representations of one or more windows.

Study how the behavior of a window changes as a function of its length and other parameters.

Design windows graphically and export them to the MATLAB<sup>®</sup> workspace.

### Open the Window Designer App

MATLAB Toolstrip: On the **Apps** tab, under **Signal Processing and Communications**, click the app icon.

MATLAB command prompt: Enter [windowDesigner](#).



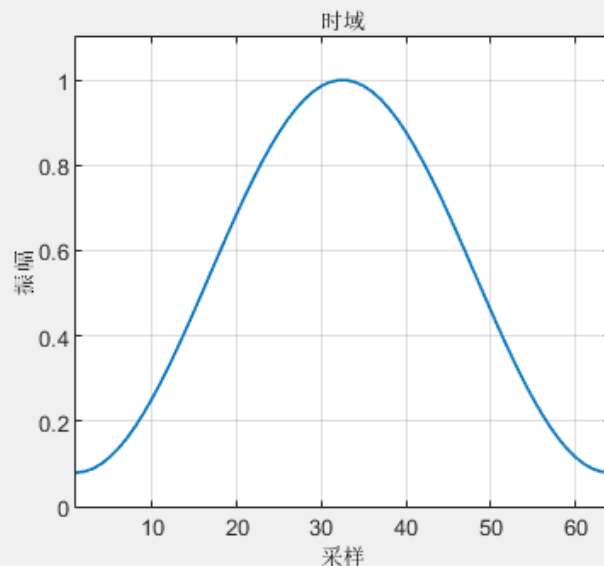
Window Designer



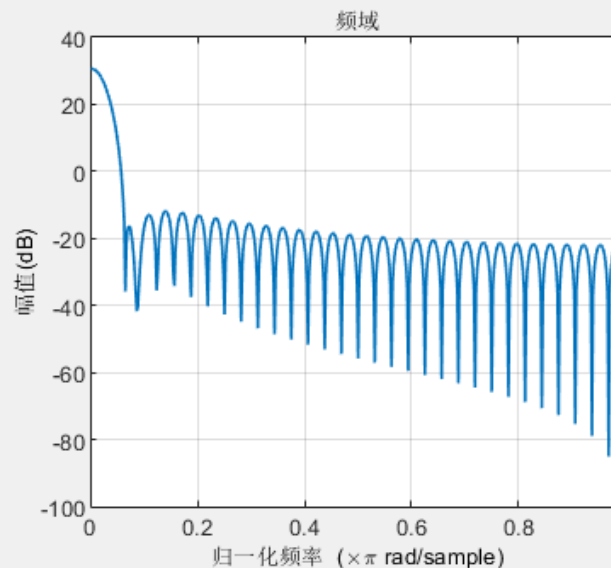
文件(F) 视图(V) 工具(S) 窗口(W) 帮助(H)



窗查看器



泄漏因子: 0.03 %



相对旁瓣衰减: -42.5 dB

主瓣宽度(-3dB): 0.039063

窗列表

选择要显示的窗:

window\_1

添加新窗

复制窗

保存到工作区

删除

当前窗信息

名称:

window\_1

类型:

Hamming

MATLAB 代码:

长度:

64

参数:

参数2:

采样:

对称

应用

## WVTool

### Open Window Visualization Tool expand all in page

#### Description

Window Visualization Tool is an interactive tool that enables you to visualize time and frequency domain plots of the window vector. You can generate window vectors for a number of common window functions using the Signal Processing Toolbox™ software. See window for a list of supported window functions.

#### Note

A related tool, [Window Designer](#), is available for designing and analyzing windows.

#### Open the WVTool

The [WVTool](#) can be opened programmatically using one of the methods described in [Programmatic Use](#).

## help wvtool

wvtool Window Visualization Tool.

wvtool is a Graphical User Interface (GUI) that allows you to analyze windows.

wvtool(W) launches the Window Visualization Tool with window vector W.

wvtool(W1,W2, ...) will perform an analysis on multiple windows.

wvtool(H) launches the Window Visualization Tool with sigwin object H.  
Type 'doc sigwin' for more information.

H = wvtool(...) returns the figure handle.

### EXAMPLES:

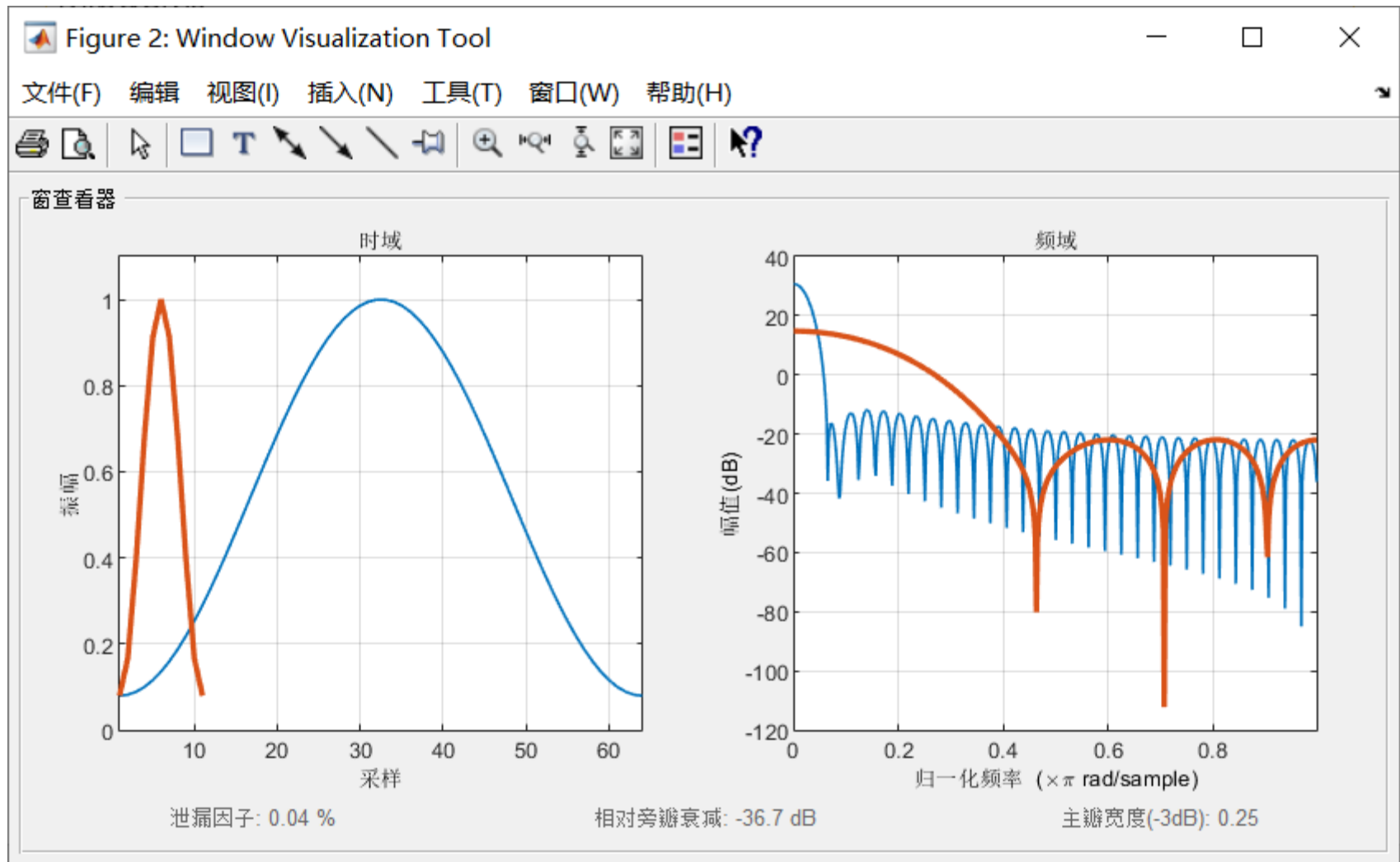
% #1 Analysis of a single window

```
w = chebwin(64,100);  
wvtool(w);
```

```
% #2 Analysis of multiple vectors  
w1 = bartlett(64);  
w2 = hamming(64);  
wvtool(w1,w2);
```

```
% #3 Analysis of window objects  
w1 = sigwin.bartlett(64);  
w2 = sigwin.hamming(64);  
wvtool(w1,w2);
```

```
>> w1 = sigwin.hamming(64);  
>> w2 = sigwin.hamming(11);  
>> wvtool(w1,w2);
```



# filterDesigner – 滤波器设计工具

Filter Designer - [untitled.fda]

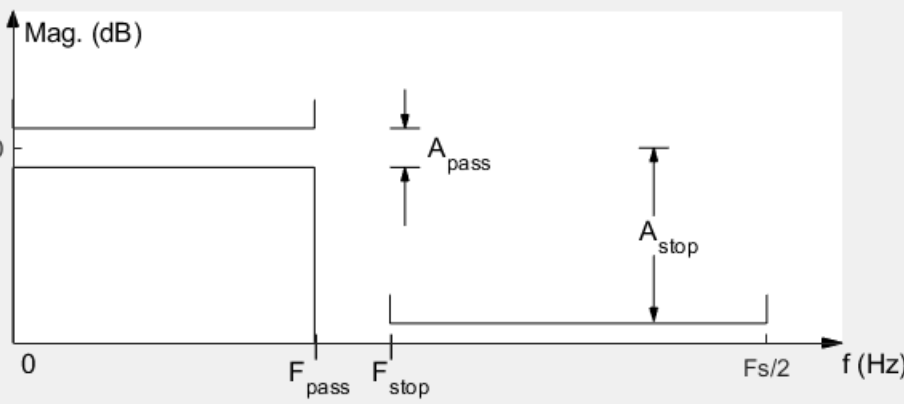
文件(F) 编辑(E) 分析(A) 目标(R) 查看(V) 窗口(W) 帮助(H)

当前滤波器信息

结构: 直接型 FIR  
阶: 50  
稳定: 是  
来源: 已设计

存储滤波器...  
滤波器管理器...

滤波器设定



Mag. (dB)

0

$F_{pass}$   $F_{stop}$   $F_s/2$   $f$  (Hz)

$A_{pass}$   $A_{stop}$

响应类型

☒ 低通  
☐ 高通  
☐ 带通  
☐ 带阻  
☐ 微分器

设计方法

☐ IIR Butterworth  
☒ FIR 等波纹

滤波器阶数

☐ 指定阶: 10  
☒ 最小阶

选项

密度因子: 20

频率设定

单位: Hz  
 $F_s$ : 48000  
 $F_{pass}$ : 9600  
 $F_{stop}$ : 12000

幅值设定

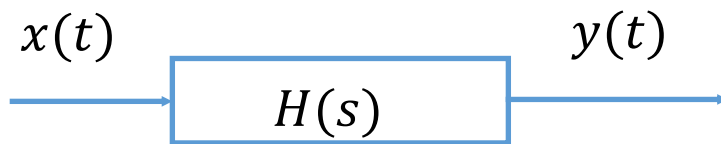
单位: dB  
 $A_{pass}$ : 1  
 $A_{stop}$ : 80

设计滤波器

就绪

## 例2：理想差分器及其设计

理想微分器的  
频率特性？



$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$



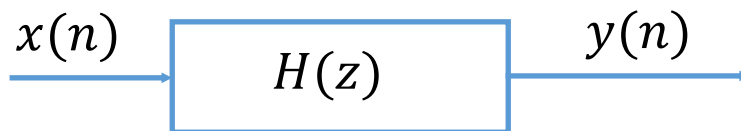
$$H(s) = s$$



$$H(j\Omega) = j\Omega$$

令

$$x(n) = x(t) \Big|_{t=nT_s} \quad y(n) = y(t) \Big|_{t=nT_s}$$



理想差分器的  
频率特性？

$$H(e^{j\omega}) = j\omega, \quad |\omega| < \pi$$

系统函数、频率响应表达式？《信号与系统》，奥



$$H_d(e^{j\omega}) = j\omega \quad |\omega| \leq \pi$$



奇对称,  
纯虚函数

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j\omega e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{n} (-1)^n$$



第2类FIR  
滤波器

$$\begin{aligned} h(n) &= h_d(n - M/2)w(n) \\ &= \frac{(-1)^{n-M/2}}{n - M/2} w(n), n = 0, 1, \dots, M \end{aligned}$$



理想差分器  
的相频特性

$$\varphi_d(\omega) = \begin{cases} \pi/2 & 0 < \omega < \pi \\ -\pi/2 & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

相频特性?

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \pi/2 - M\omega/2 & 0 < \omega < \pi \\ -\pi/2 - M\omega/2 & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$



实际相  
频特性

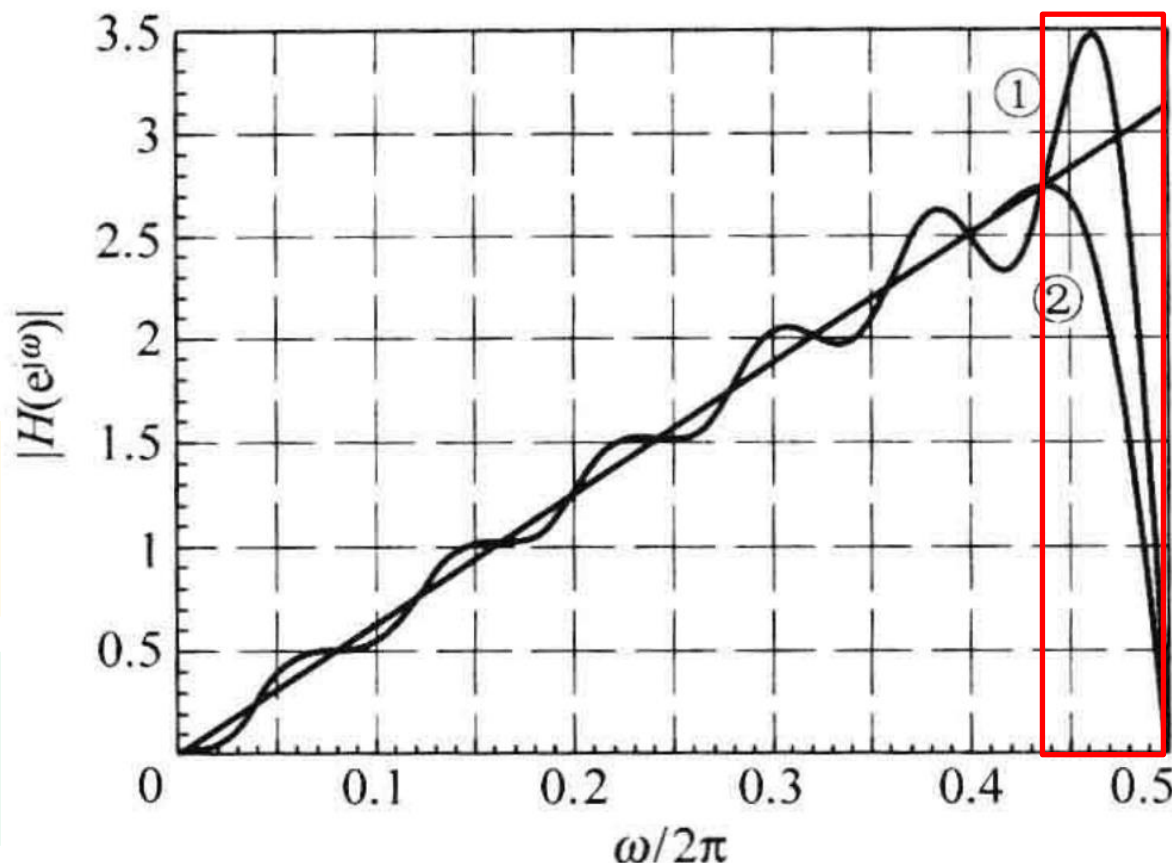
**幅频：**

1 矩形窗

2 哈明窗

红色矩形框内频段的  
差分性能？它们对应  
模拟频率？

感兴趣频率 $f_0$ 落在实  
际差分器的理想差分  
区间内？ $F_s$ ；



有关各种差分器的性能，本章将继续讨论；奥，信号与系统，P.388

数字差分器的频率响应 $H(e^{j\omega}) = j\omega$ ；差分系统： $1 - z^{-1}$

## 注意这些公式及其出处

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a(j(\Omega - k\Omega_s)) \Big|_{\Omega=\omega/T_s} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a\left(j\left(\frac{\omega - k \cdot 2\pi}{T_s}\right)\right)$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} X_a(j\Omega) \Big|_{\Omega=\omega/T_s} = \frac{1}{T_s} X_a\left(j\frac{\omega - k \cdot 2\pi}{T_s}\right)$$

---

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(j\Omega - jk\Omega_s) \Big|_{\Omega=\omega/T_s}$$

---

$$H(e^{j\omega}) = H_a(j\Omega) \Big|_{\Omega=\omega/T_s}$$

利用离散时间滤波器过滤连续时间信号的系统  
连续时间带限微分器的离散时间实现，“奥”

### 例3：设计 Hilbert 变换器

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j & 0 < \omega < \pi \\ j & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

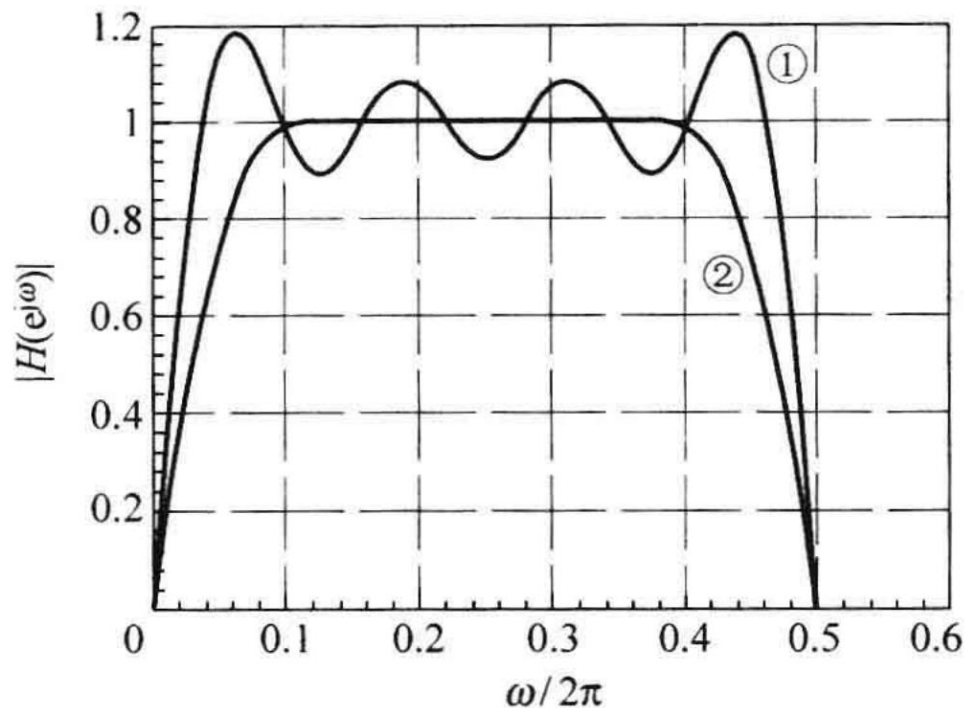
思考：能否用上一章的方法设计差分器和Hilbert变换器？

$$h_d(n) = \frac{j}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 e^{j\omega n} d\omega - \int_0^{\pi} e^{j\omega n} d\omega \right]$$

$$h_d(n) = \begin{cases} 0 & n : \text{even} \\ \frac{2}{n\pi} & n : \text{odd} \end{cases}$$



第2类FIR  
滤波器



## 二、FIR DF 设计的窗函数法的特点

优点：

1. 无稳定性问题；
2. 容易做到线性相位；
3. 可以设计各种特殊类型的滤波器；
4. 方法特别简单。

缺点：

1. 不易控制边缘频率；
2. 幅频性能不理想；
3.  $h(n)$ 较长。

改进：

1. 使用其它类型的窗函数；
2. 改进设计方法。

### 三、关于对 $h_d(n)$ 截短的讨论

$$h(n) = h_d(n)w(n), \quad n = 0, 1, \dots, M$$

$$H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

$$E(\omega) = |H_d(e^{j\omega})| - |H(e^{j\omega})|$$

误差曲线

$$E_M^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(\omega)|^2 d\omega$$

误差能量

$$H_d(e^{j\omega}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^M A_n \cos(n\omega) + \sum_{n=1}^M B_n \sin(n\omega)$$

$$E_M^2 = \frac{(a_0 - A_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n - A_n)^2 + \sum_{n=1}^M (b_n - B_n)^2 + \sum_{n=M+1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

推导？

什么情况下 $E_M^2$ 为最小？

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= A_0 \\ a_n &= A_n \\ b_n &= B_n, \\ n &= 1, 2, \dots, M \end{aligned} \right\} \text{最小} \quad E_M^2 = \sum_{n=M+1}^{\infty} h_d^2(n)$$

所以，**有限项傅立叶级数**是在最小平方意义上对原信号的逼近。傅立叶级数是正交变换，这也体现了正交变换的性质。



$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$h(n) = h_d(n - M/2)$$

$$n = 0, 1, \dots, M$$

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_n h_d(n) e^{-j\omega n}$$

傅里叶系数



周期信号展开  
为傅里叶级数

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

窗函数法

同一事情  
不同名称

傅里叶级数法

小结：吉伯斯现象

## 7.2 窗函数

窗函数的使用在数字信号处理中是不可避免的。数据、频谱、自相关函数等都需要截短。对窗函数提出哪几方面的要求？

关键是要搞清楚  
使用窗函数后所  
产生的影响：一  
个域相乘，在另  
一个域是卷积。

$$x_N(n) = x(n)w(n)$$

$$X_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

$$\begin{aligned} D(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} d(n)e^{-j\omega n} \\ &= e^{-j(N-1)\omega/2} \sin\left(\frac{N\omega}{2}\right) / \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

矩  
形  
窗

# 加窗对频率响应影响的深入分析

用幅度函数（增益）和相位函数来表示理想数字低通滤波器和窗函数的频率特性

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$W_R(e^{j\omega}) = W_R(\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

$$W_R(\omega) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

则所设计的滤波器的频率响应为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\ &= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta \end{aligned}$$

增益  
 $H_d(\omega)$   
 $W_R(\omega)$   
可正可负  
amplitude  
幅特性

## 加窗对频率响应影响的深入分析

令 
$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

则所设计的滤波器的幅度函数为

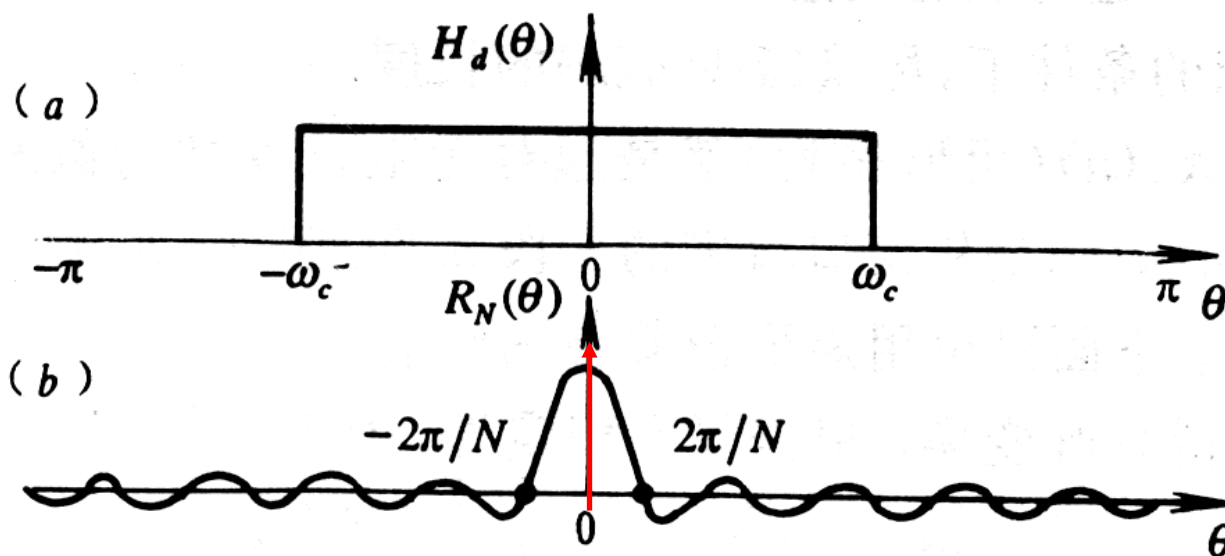
$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} W_R(\omega - \theta) d\theta \end{aligned}$$

## 加窗对频率响应影响的深入分析

$\omega = 0$ 时:

$$H(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} W_R(\theta) d\theta \quad \omega_c \gg \frac{2\pi}{N} \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_R(\theta) d\theta$$

通带内约为 $W_R(\theta)$ 的一个整周期（因为一般有 $\omega_c \gg \frac{2\pi}{N}$ ），为方便，将 $H(0)$ 归一化。

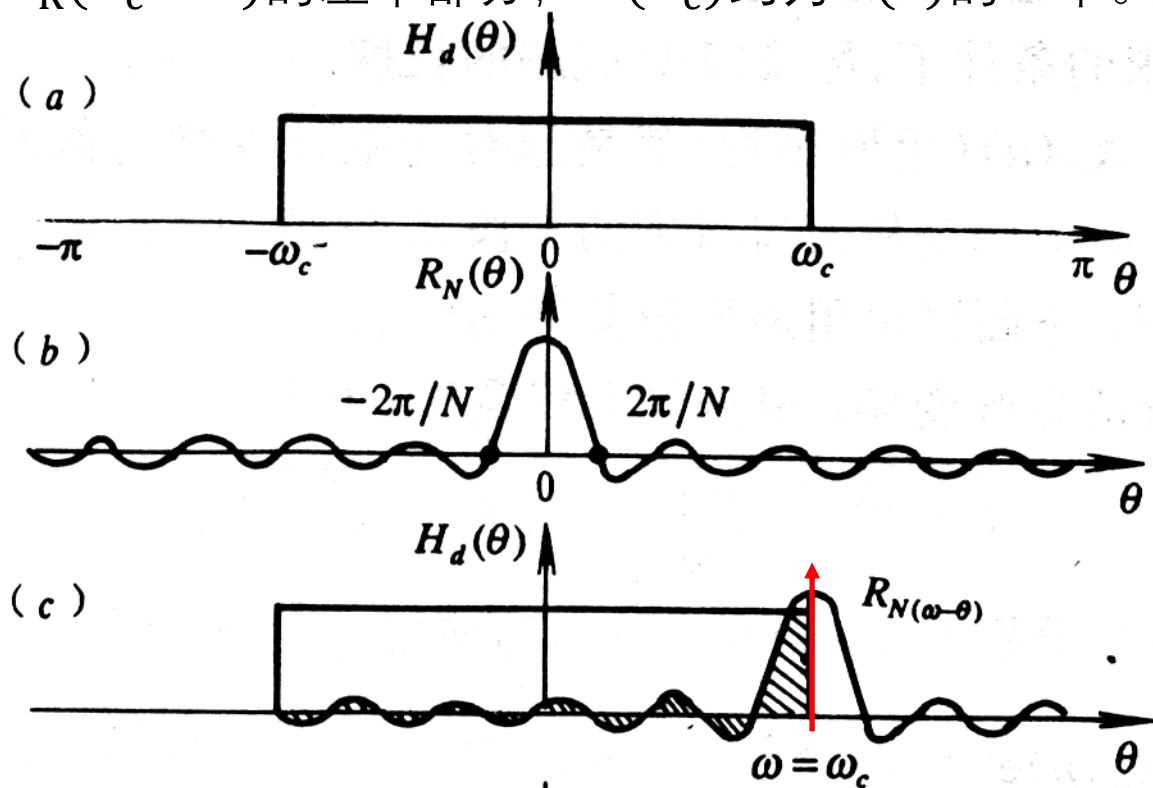


## 加窗对频率响应影响的深入分析

$\omega = \omega_c$ 时:

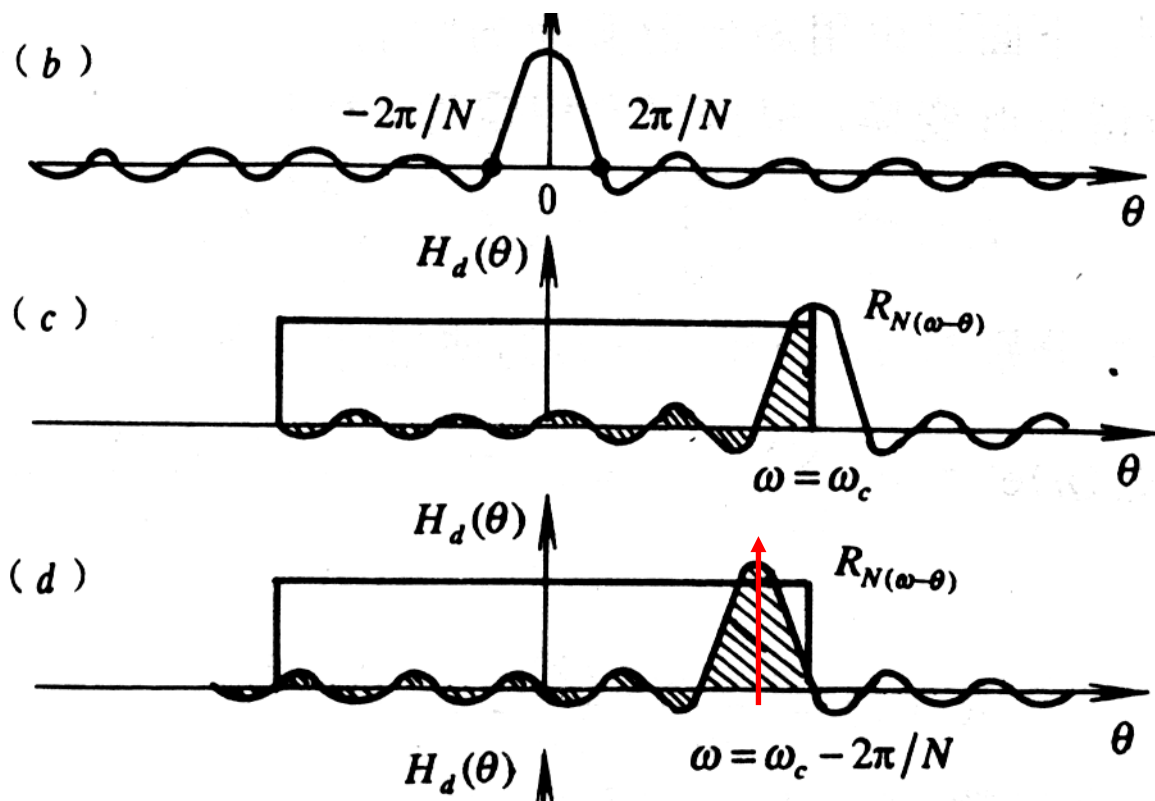
$$H(\omega_c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} W_R(\omega_c - \theta) d\theta \quad \omega_c \gg \frac{2\pi}{N} \quad \frac{1}{2} H(0)$$

通带内约为  $W_R(\omega_c - \theta)$  的左半部分,  $H(\omega_c)$  约为  $H(0)$  的一半。



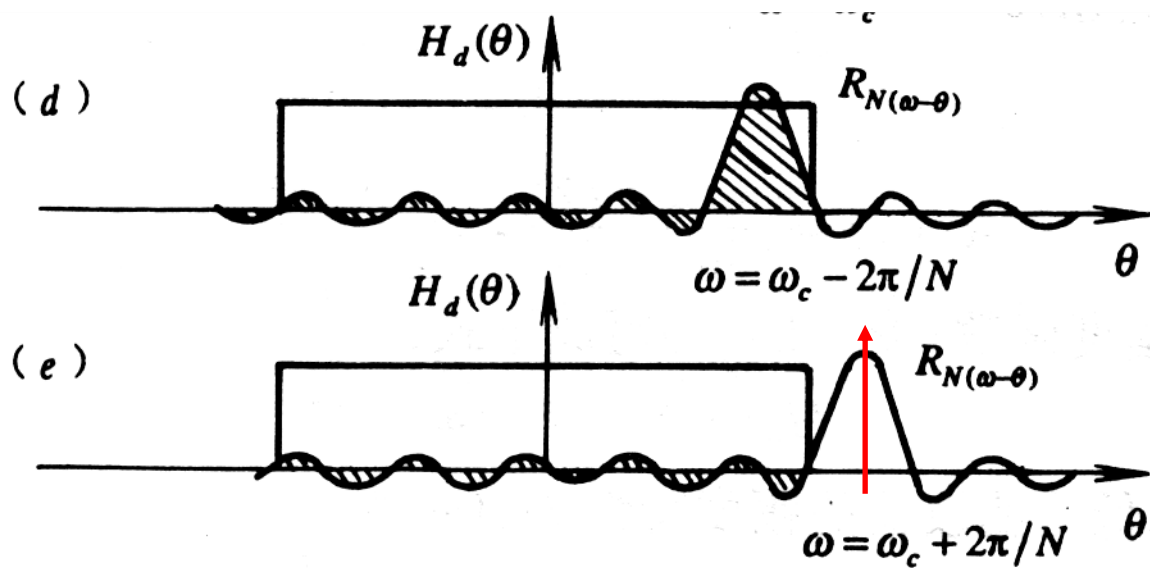
## 加窗对频率响应影响的深入分析

**$\omega = \omega_c - 2\pi/N$** 时，通带内为 $W_R(\omega - \theta)$ 的全部主瓣（对结果提供正值）和左边旁瓣的主要部分（对结果提供负值），右边所有旁瓣都在通带外，不对结果增加负值，因此 $H(\omega)$ 取得最大值，频率响应出现正肩峰（过冲）。



## 加窗对频率响应影响的深入分析

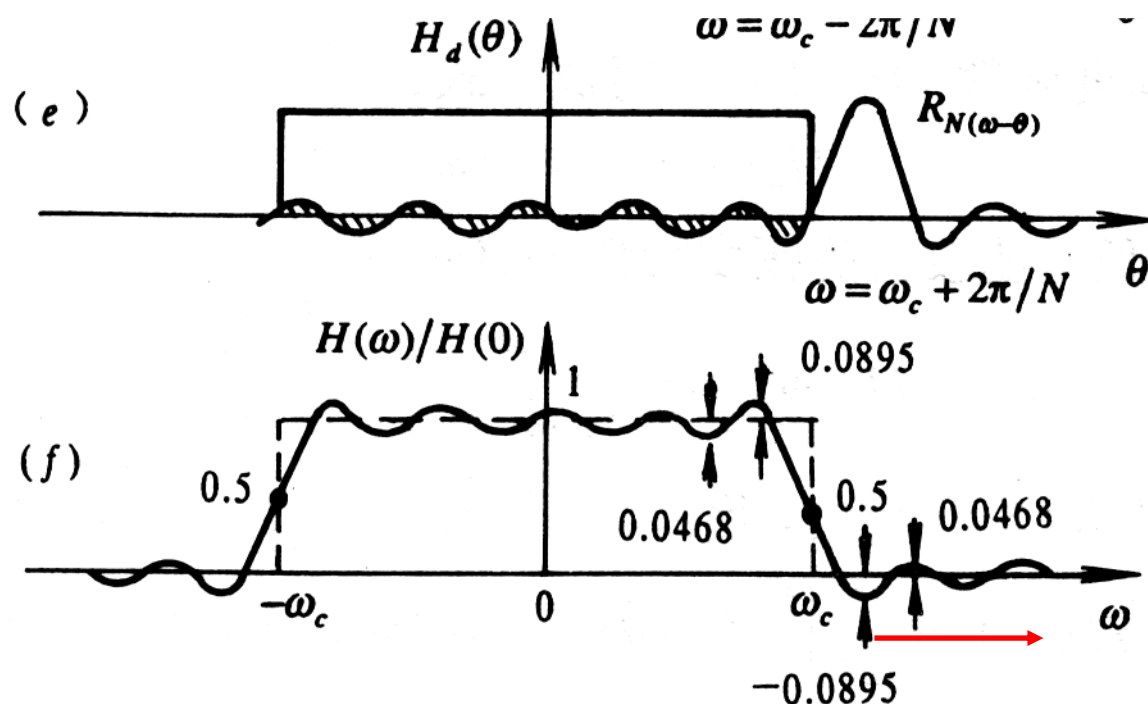
$\omega = \omega_c + 2\pi/N$ 时，通带内为 $W_R(\omega - \theta)$ 的左边旁瓣的主要部分（对结果提供负值），所以 $H(\omega)$ 取得最负值，频率响应出现负肩峰（负过冲）。





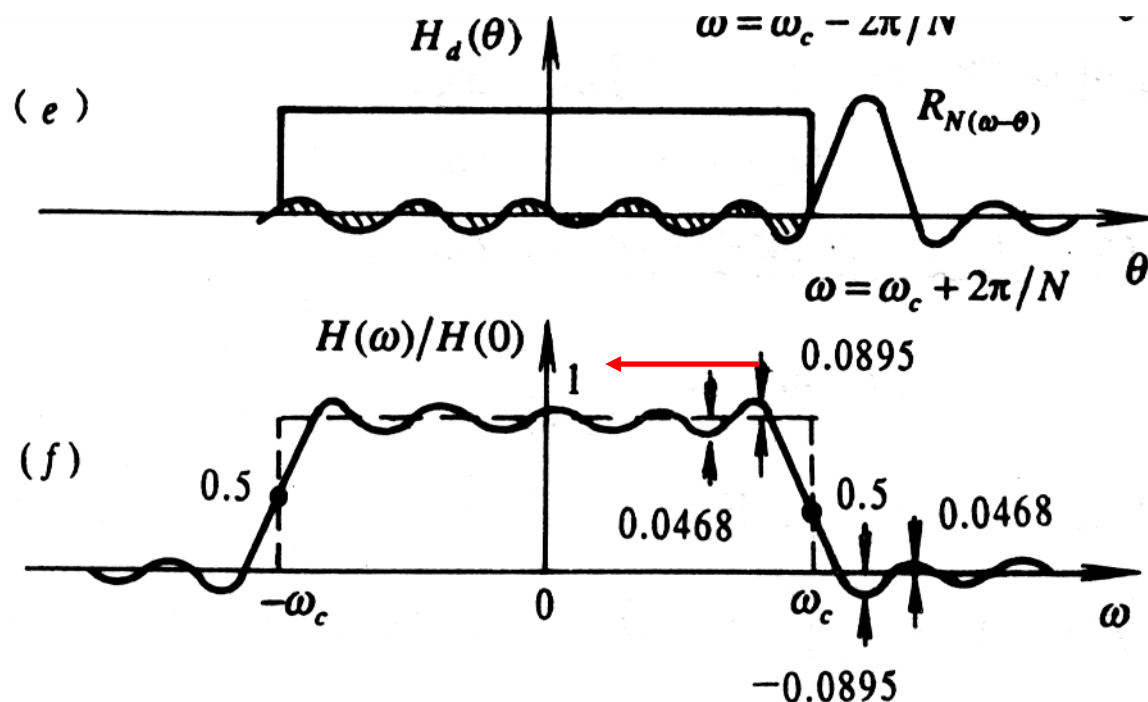
## 加窗对频率响应影响的深入分析

当 $\omega$ 从 $(\omega_c + 2\pi/N)$ 继续增加时， $W_R(\omega - \theta)$ 的左边旁瓣从通带内向右移出，通带内含有旁瓣对结果提供正或负值，所以 $H(\omega)$ 是在零值附近波动的。

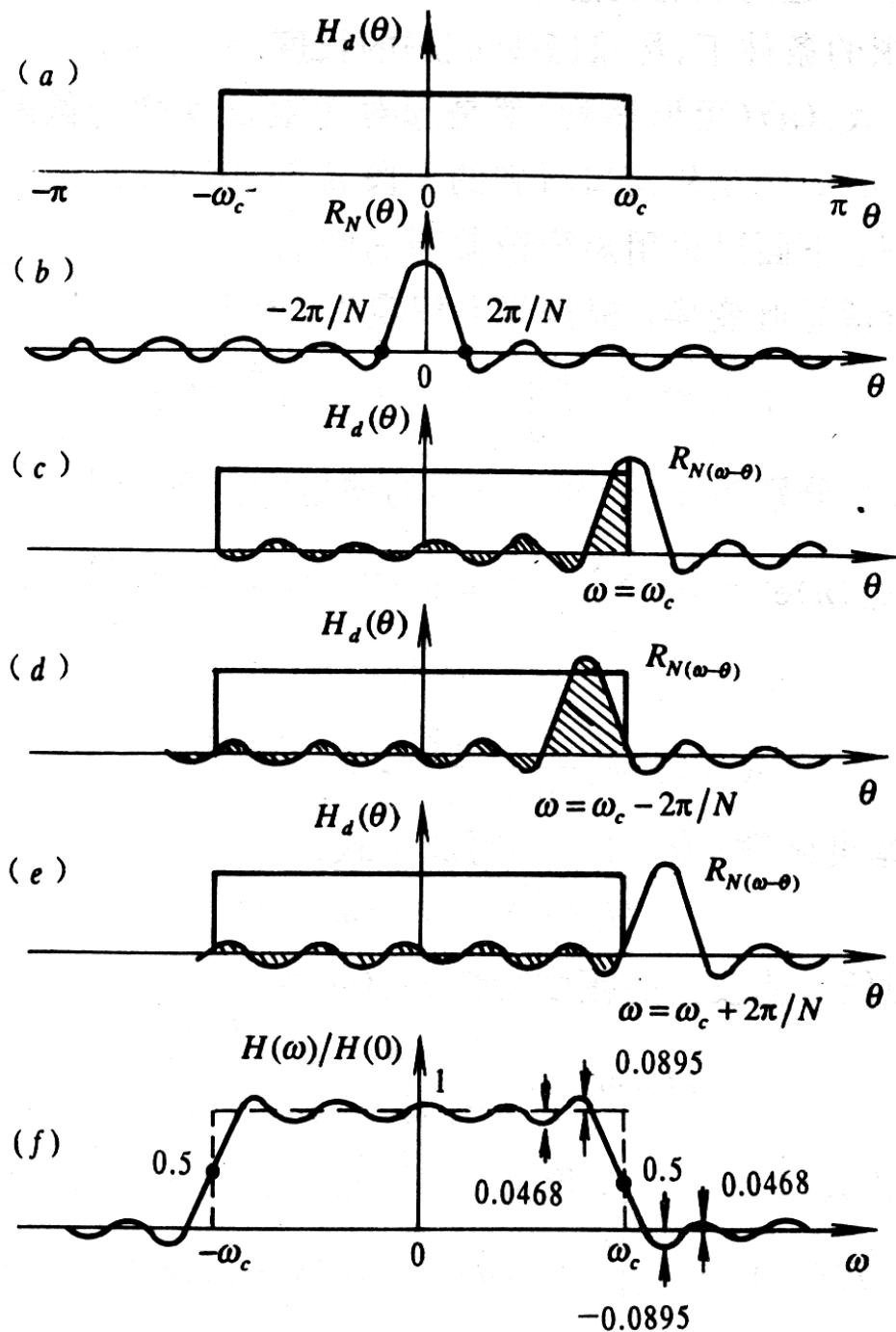


## 加窗对频率响应影响的深入分析

当 $\omega$ 从 $(\omega_c - 2\pi/N)$ 朝0变化时,  $W_R(\omega - \theta)$ 的右边旁瓣逐步进入通带, 对结果提供正值或负值, 所以 $H(\omega)$ 是在 $H(0)$ 值附近波动的。



## FIR LPDF窗函数法 逼近特性分析, 3点



在通带截止频率处是连续的

出现了一个过渡带, 过渡带宽度等于矩形窗函数的的主瓣宽度

矩形窗长度过小时, 通带过窄, 过渡带较宽, 阻带内波动。

## 对窗函数的3项基本技术要求

1. 3dB 带宽 $B$ : 主瓣归一化幅度降到-3dB 时的带宽; 或直接用 $B_0 = 4\pi/N$ 。令 $\Delta\omega = 2\pi/N$ , 则 $B$ 的单位为 $\Delta\omega$ ;



越小越好!

2. 边瓣最大峰值  
( dB)

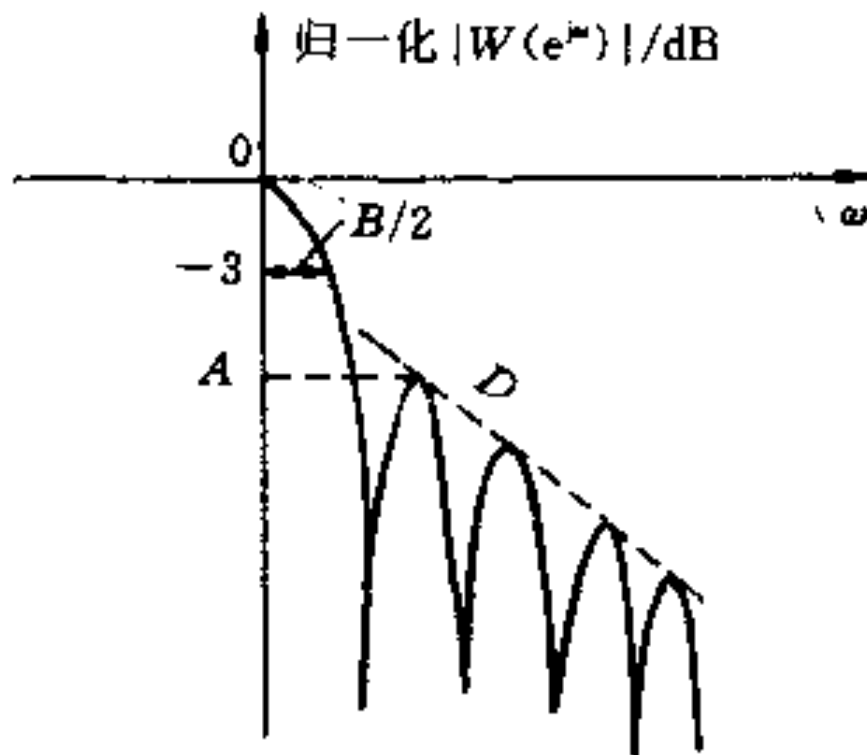


越小越好!

3. 边瓣谱峰衰减速度 ( dB/c



越大越好!



## 常用窗函数

### 1. 矩形窗

$$B = 0.89 \Delta\omega, A = -13 \text{ dB}, D = -6 \text{ dB/oct}$$

### 2. 三角窗 Bartlett窗

$$w(n) = \begin{cases} 2n/N & n = 0, 1, \dots, N/2 \\ w(N-n) & n = N/2, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$B = 1.28 \Delta\omega, A = -27 \text{ dB}, D = -12 \text{ dB/oct}$$

### 3. 汉宁窗 Hanning

$$w(n) = 0.5 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), n = 0, 1, \dots, N-1$$

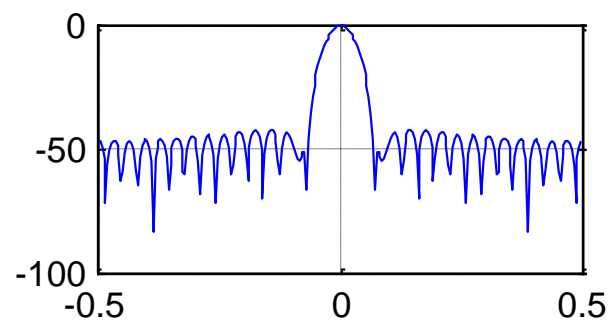
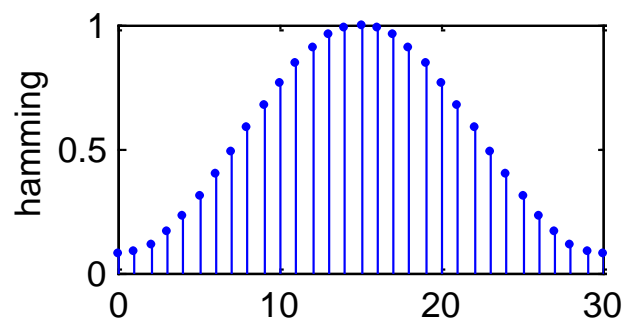
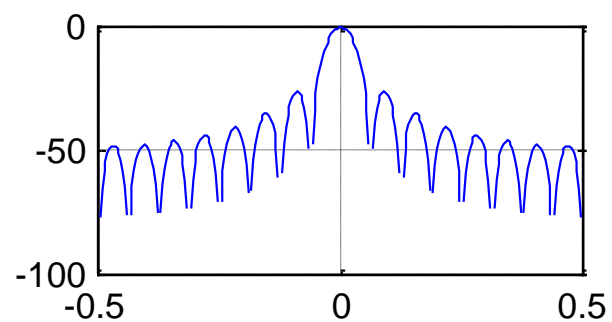
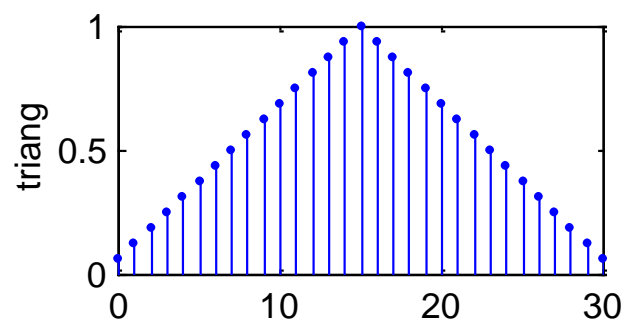
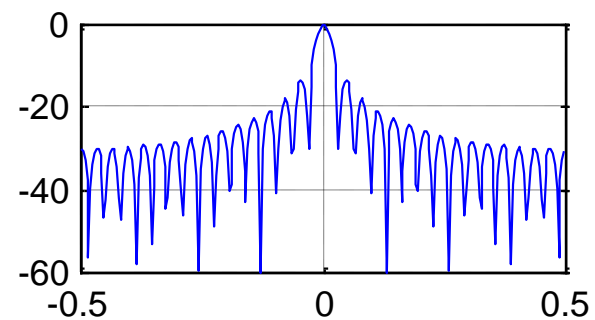
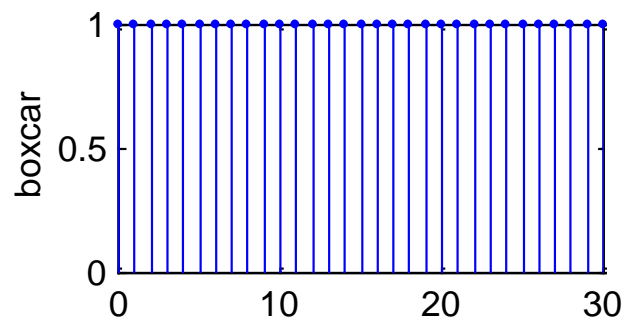
$$B = 1.44 \Delta\omega, A = -32 \text{ dB}, D = -18 \text{ dB/oct}$$

### 4. 汉明窗 Hamming

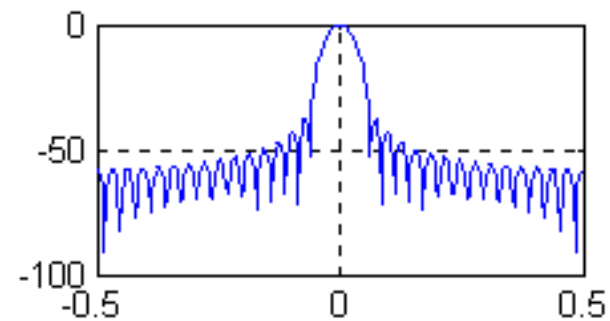
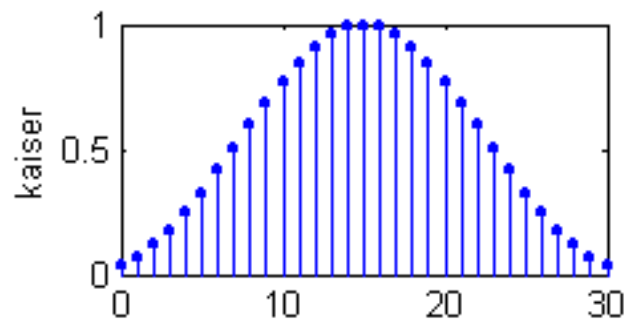
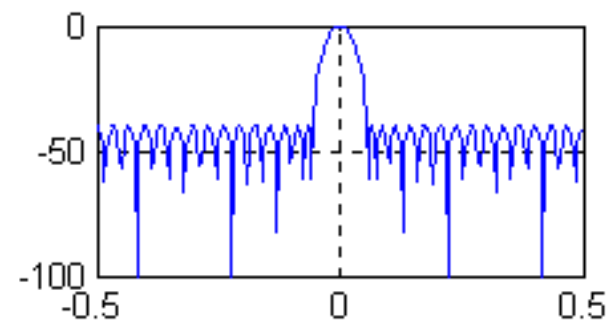
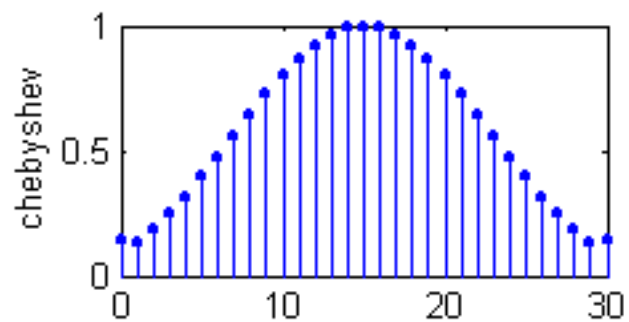
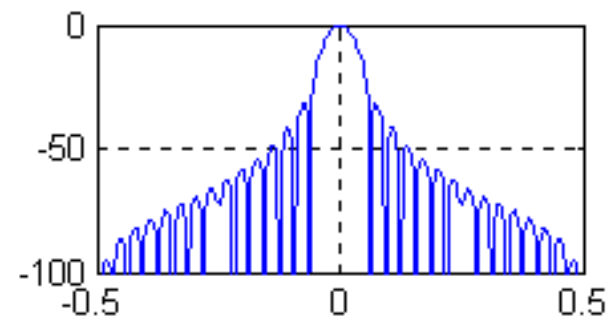
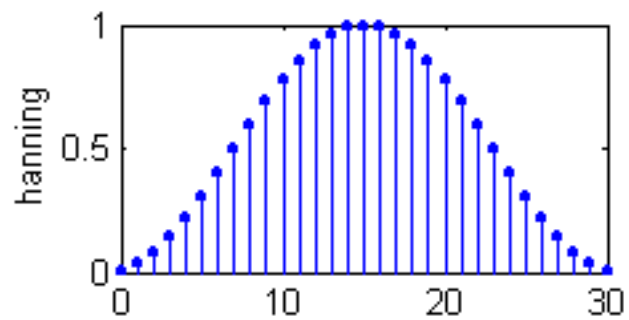
$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$B = 1.3 \Delta\omega, A = -43 \text{ dB}, D = -6 \text{ dB/oct}$$

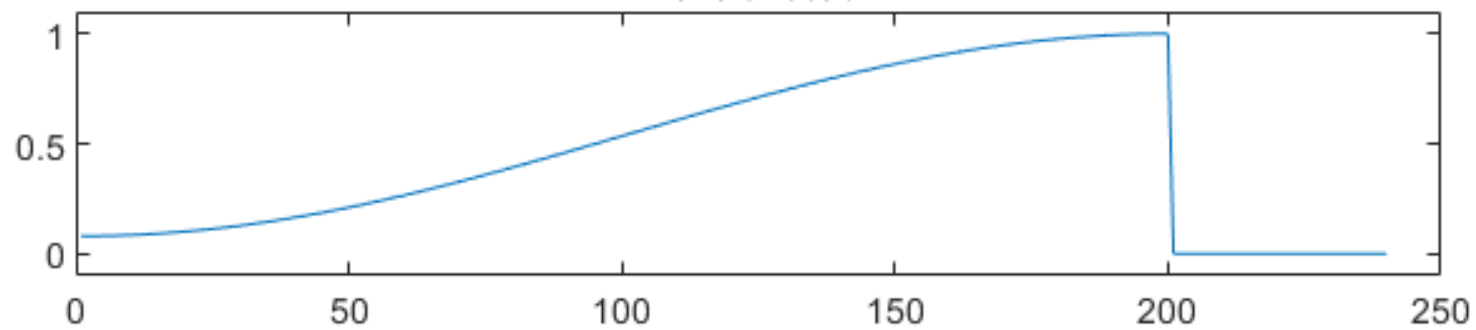
# 窗函数



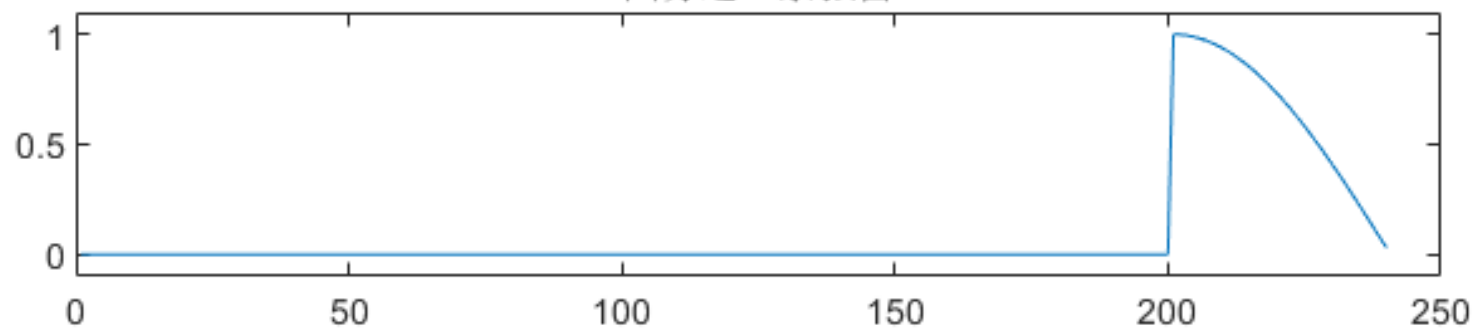
## 窗函数



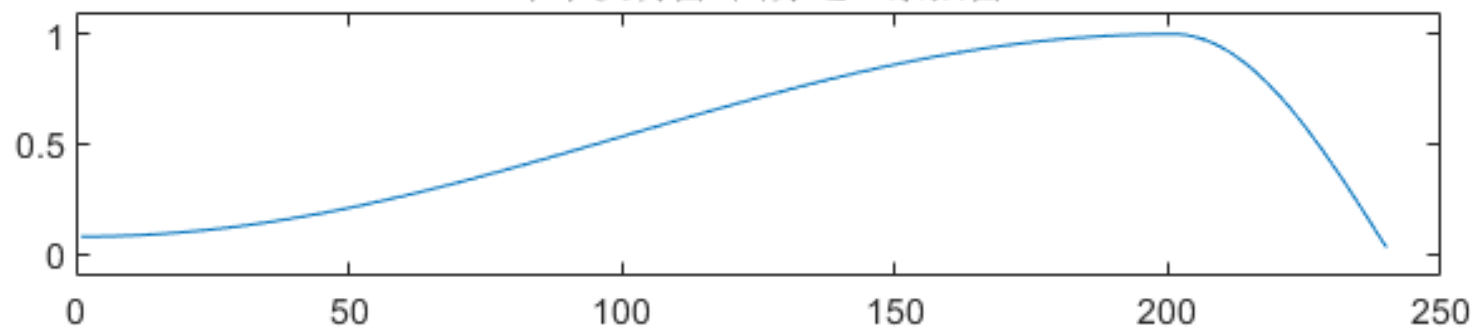
半个汉明窗



四分之一余弦窗



半个汉明窗+四分之一余弦窗





## 7.3 FIR DF设计的频率抽样法

**窗函数法：** 给定连续的理想 $H_d(e^{j\omega})$ ， 用

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \end{aligned}$$

$$h(n) = h_d(n)w(n), \quad n = 0, 1, \dots, M$$

得到因果的、具有线性相位的 FIR DF

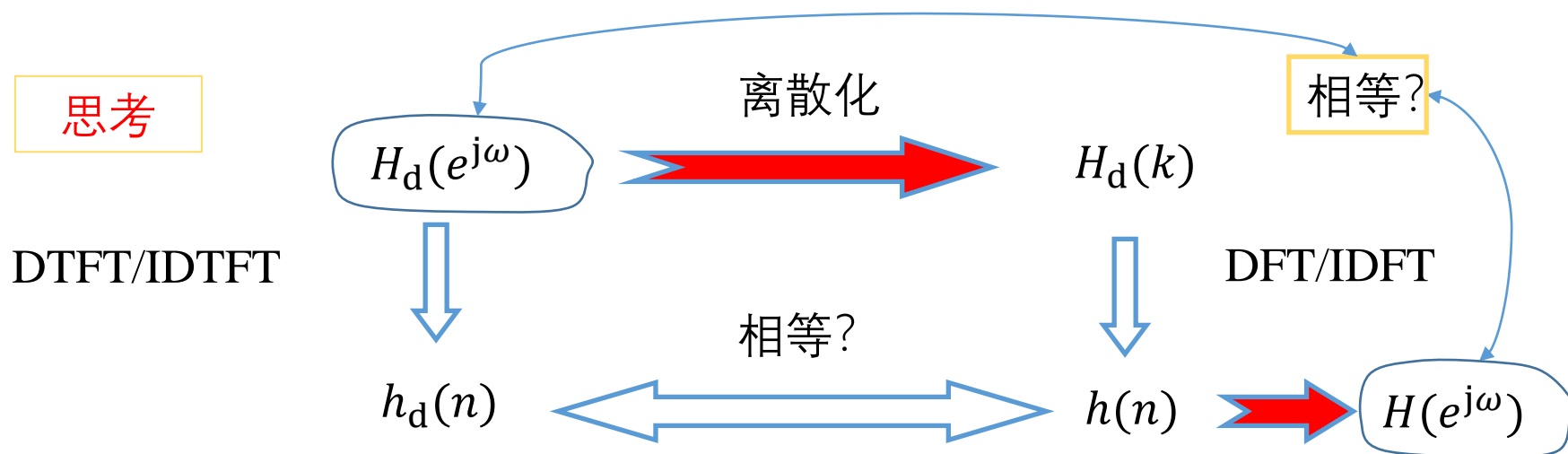


**频率抽样法：** 对给定连续的理想 $H_d(e^{j\omega})$  离散化

$$H_d(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{离散化}} H_d(k) \quad \leftarrow \text{直接赋值}$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j2\pi nk/N} \quad \rightarrow \text{计算更容易}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad \rightarrow \text{滤波器已设计出}$$



转移函数、频率响应和给定的 $H_d(k)$ 的关系

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j2\pi nk/N} \right] z^{-n} \end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j2\pi k/N} z^{-1}}$$

有何  
特点

用DFT系数作为权函数来表示设计出的 $H(z)$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{j2\pi k/N} e^{-j\omega}}$$

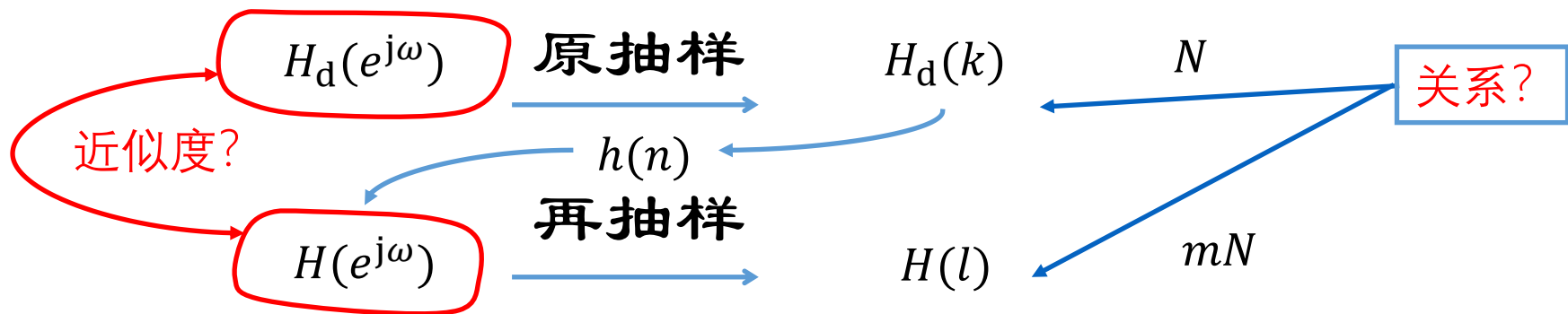
$$= e^{-j(N-1)\omega/2} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) S(\omega, k)$$

内插函数

$$S(\omega, k) = e^{j(N-1)k\pi/N} \frac{\sin[N(\omega - 2\pi k/N)/2]}{N \sin[(\omega - 2\pi k/N)/2]}$$

移位  $2\pi k/N$  的 sinc 函数  
sinc 函数：离散矩形窗函数的  
频谱，  $\sin(\frac{\omega N}{2})/\sin(\frac{\omega}{2})$

讨论：频率抽样法特点 - 内插函数、内插函数插值及其影响。

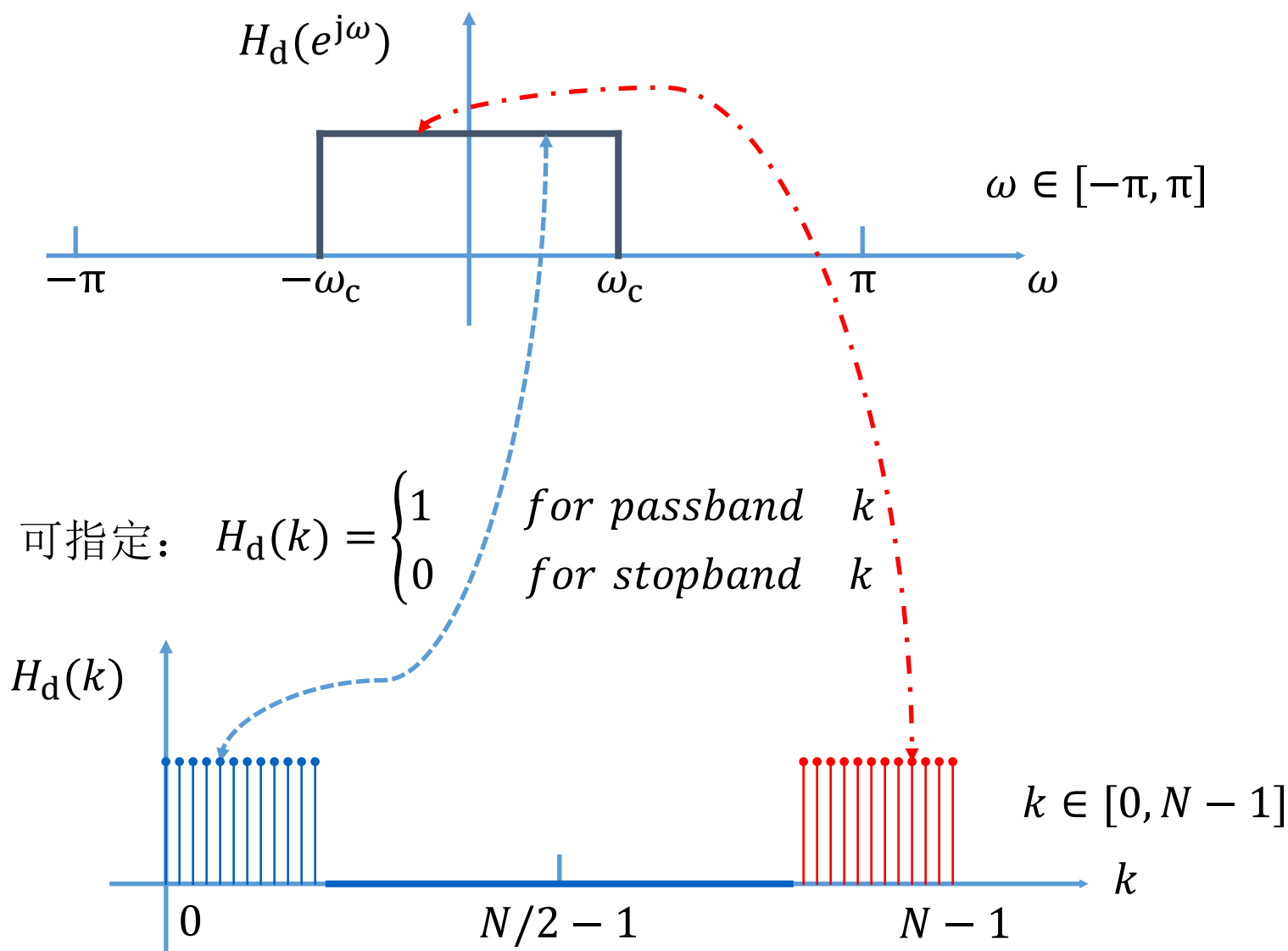


$$H(l) = e^{-j(N-1)\pi l/mN} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j(N-1)k\pi/N} \frac{\sin[N(2\pi l/mN - 2\pi k/N)/2]}{N \sin[(2\pi l/mN - 2\pi k/N)/2]}$$

$N$  越大  
近似度越好

$$H(l = mk) = H_d(k), \quad l = 0, \dots, mN - 1, \quad k = 0, \dots, N - 1$$

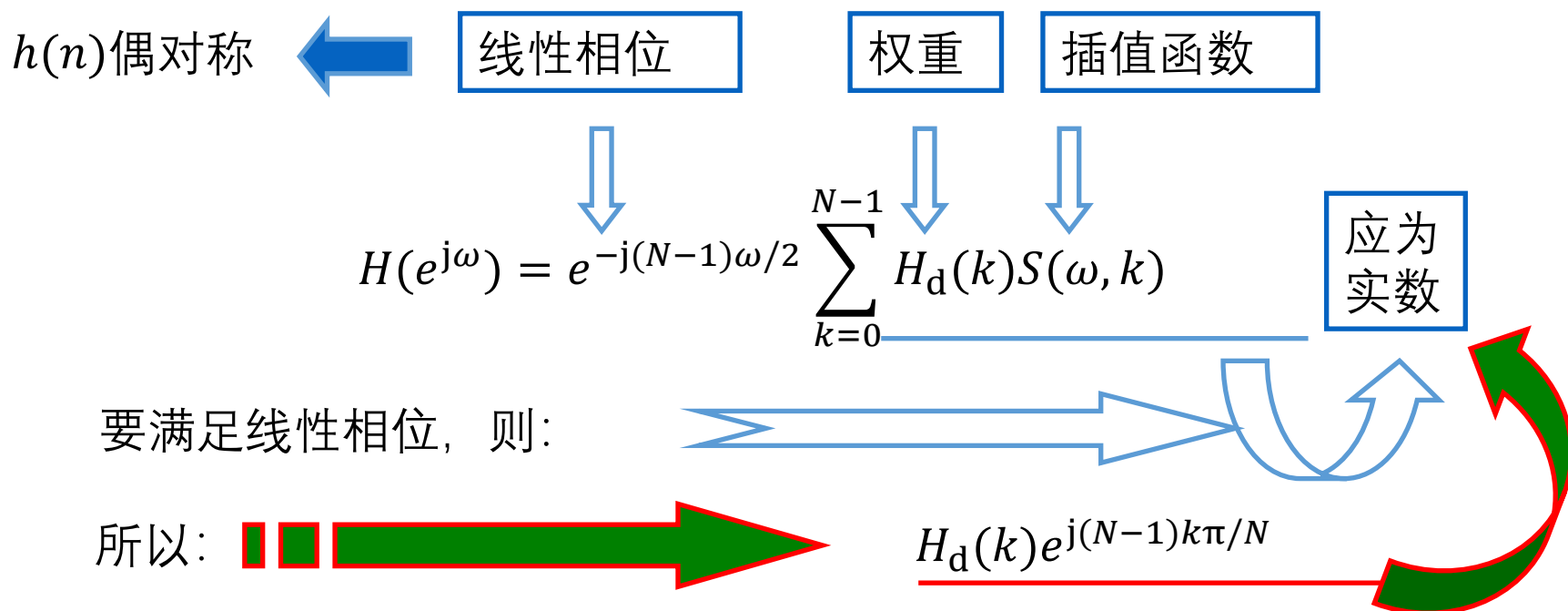
关键：如何指定 $H_d(k)$ ？先看一个简单情况：理想低通



**一般情况下指定 $H_d(k)$ 的原则：** ①通带内模为1、相位待定，阻带内模为0；  
②其IDFT的时间序列 $h(n)$ 为实数； ③由 $h(n)$ 得到的系统的频率响应是线性相位特性的。

## 如何具体指定 $H_d(k)$ ?

回顾用插值的方法得到所要的滤波器，并进行分析。



根据线性相位，以及设满足通带内模为1，则应有

$$H_d(k) = e^{-j(N-1)k\pi/N}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

$\pm ?$

要 $h(n)$ 为实数，则

$$H_d^*(k) = H_d(-k) = H_d(N-k)$$

由以上两式，有


$$\begin{aligned} H_d(N-k) &= e^{-j(N-1)(N-k)\pi/N} \\ &= e^{-j(N-1)\pi} e^{j(N-1)k\pi/N} \\ &= e^{-j(N-1)\pi} H_d^*(k) \end{aligned}$$

而

$$e^{-j(N-1)\pi} = \begin{cases} -1, & N \text{ 为偶数} \\ 1, & N \text{ 为奇数} \end{cases}$$

矛盾?

$N$ 为偶数

$$H_d(k) = \begin{cases} e^{-j(N-1)k\pi/N} & k = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \\ 0 & k = N/2 \\ -e^{-j(N-1)k\pi/N} & k = N/2 + 1, \dots, N - 1 \end{cases}$$


 $N$ 为奇数

$$H_d(k) = e^{-j(N-1)k\pi/N} \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

## 回顾

$h(n)$  偶对称,  $N$  为奇数时, 系统增益  $H_g(\omega)$  关于  $\omega = 0$ 、 $\pi$ 、 $2\pi$  是偶对称的;

$h(n)$  偶对称,  $N$  为偶数时, 系统增益  $H_g(\omega)$  关于  $\omega = \pi$  是奇对称的。不能由  
于设计高通、带阻滤波器。



**补充说明：**阻带内应指定为零。

**注意问题：**通带内较大的上冲、阻带内较大的波纹。

**问题的根本原因：**理想滤波器频响在 $\omega_c$ 处突跳

形式上：取样点之间的频率响应通过内插函数得到；

原理上：理想低通的冲激响应序列在时域上无限长无论  $N$  多大，也不能满足频域取样定理。

**解决办法：**为了得到好的幅频响应，可以采用在1和0之间**加过渡点**的方法，例如添加值为0.5的过渡点。

**这种做法不一定能取得最优效果**

**进一步增大阻带衰减的方法？**

**增大阻带衰减但不增宽过渡带的方法？**

**例题（3个）**

**注意：**掌握通带对应的参数 $k$ 的计算方法。

增加过渡点

增加滤波器阶次

**例 7.3.1** 用频率抽样法设计一个低通 FIR 数字滤波器,其截止频率是抽样频率的  $1/10$ ,取  $N=20$ 。

**解** 此处  $N$  为偶数,且在通带内对  $H_d(e^{j\omega})$  抽样时,仅得两个点,由(7.3.12)式,有

$$H_d(0) = 1$$

$$H_d(1) = e^{-j19\pi/20}$$

$$H_d(k) = H_d(N-k) = 0 \quad k = 2, 3, \dots, 10$$

$$H_d(19) = H_d(20-1) = -e^{-j19(20-1)\pi/20} = e^{j19\pi/20} = H_d^*(1)$$

$H_d(19)$ 也可由(7.3.13)式直接指定。将  $H_d(k)$ 代入(7.3.2)式,求得  $h(n)$ 如下

$$h(0) = h(19) = -0.048\,77, \quad h(1) = h(18) = -0.039\,1$$

$$h(2) = h(17) = -0.020\,7, \quad h(3) = h(16) = 0.004\,6$$

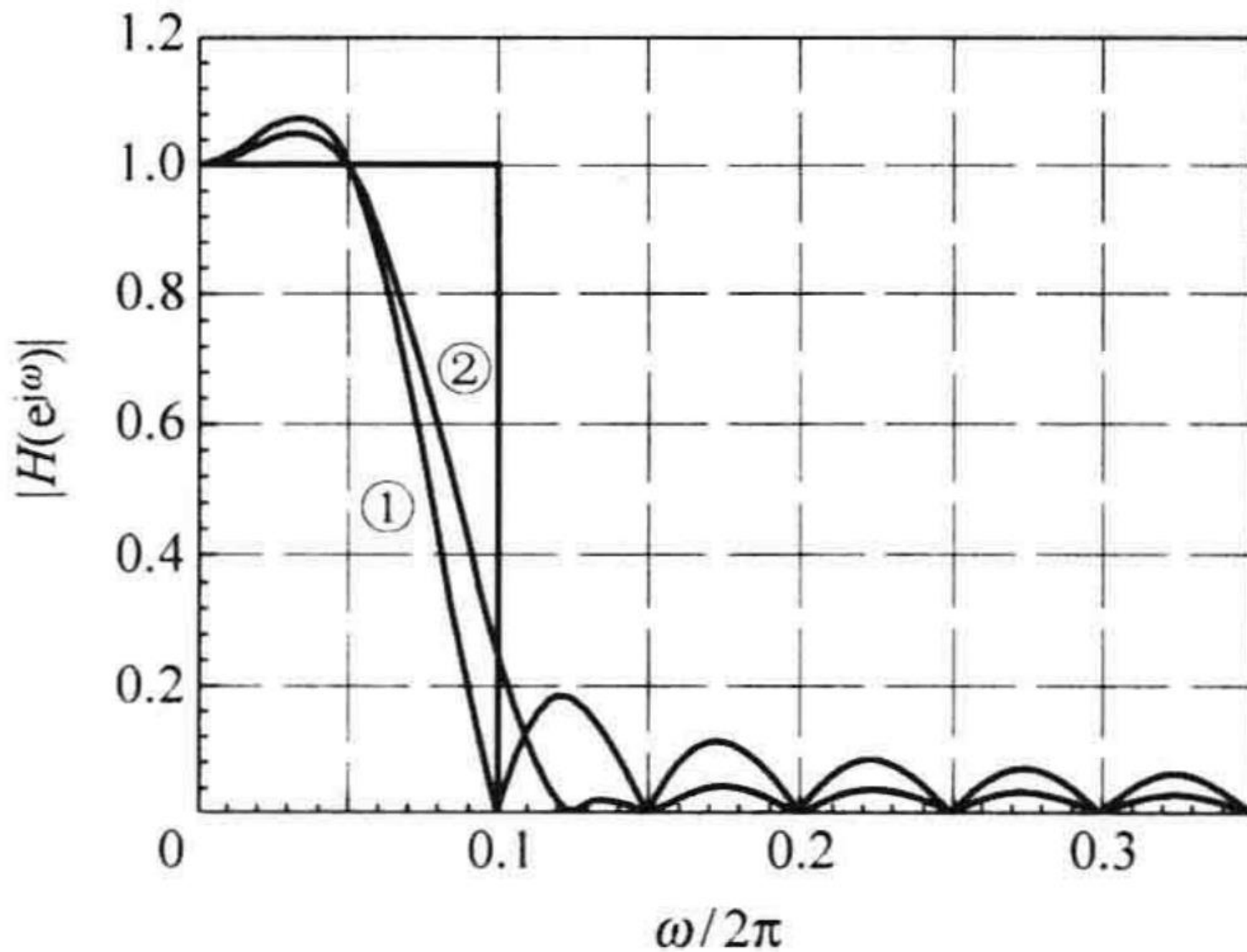
$$h(4) = h(15) = 0.034\,36, \quad h(5) = h(14) = 0.065\,6$$

$$h(6) = h(13) = 0.095\,4, \quad h(7) = h(12) = 0.120\,71$$

$$h(8) = h(11) = 0.139\,1, \quad h(9) = h(10) = 0.148\,77$$

$$F_s, 20; f_c, x \quad x; \frac{f_c}{F_s} \cdot 20; 2$$

?



曲线2对应设置了：

$$|H_d(2)| = |H_d(18)| = 0.5$$

**例 7.3.2** 用频率抽样法设计一个带通数字滤波器,其通带频率是  $500 \sim 700\text{Hz}$ , 抽样频率  $f_s = 3300\text{Hz}$ , 使用阶次  $N = 33$ 。

**解** 此时  $N$  为奇数, 按照设计要求, 可指定  $H_d(k)$  为

$$H_d(k) = \begin{cases} e^{-j32k\pi/33} & k = 5, 6, 7, 26, 27, 28 \\ 0 & k = 0 \sim 4, 8 \sim 25, 29 \sim 32 \end{cases}$$

求得单位抽样响应

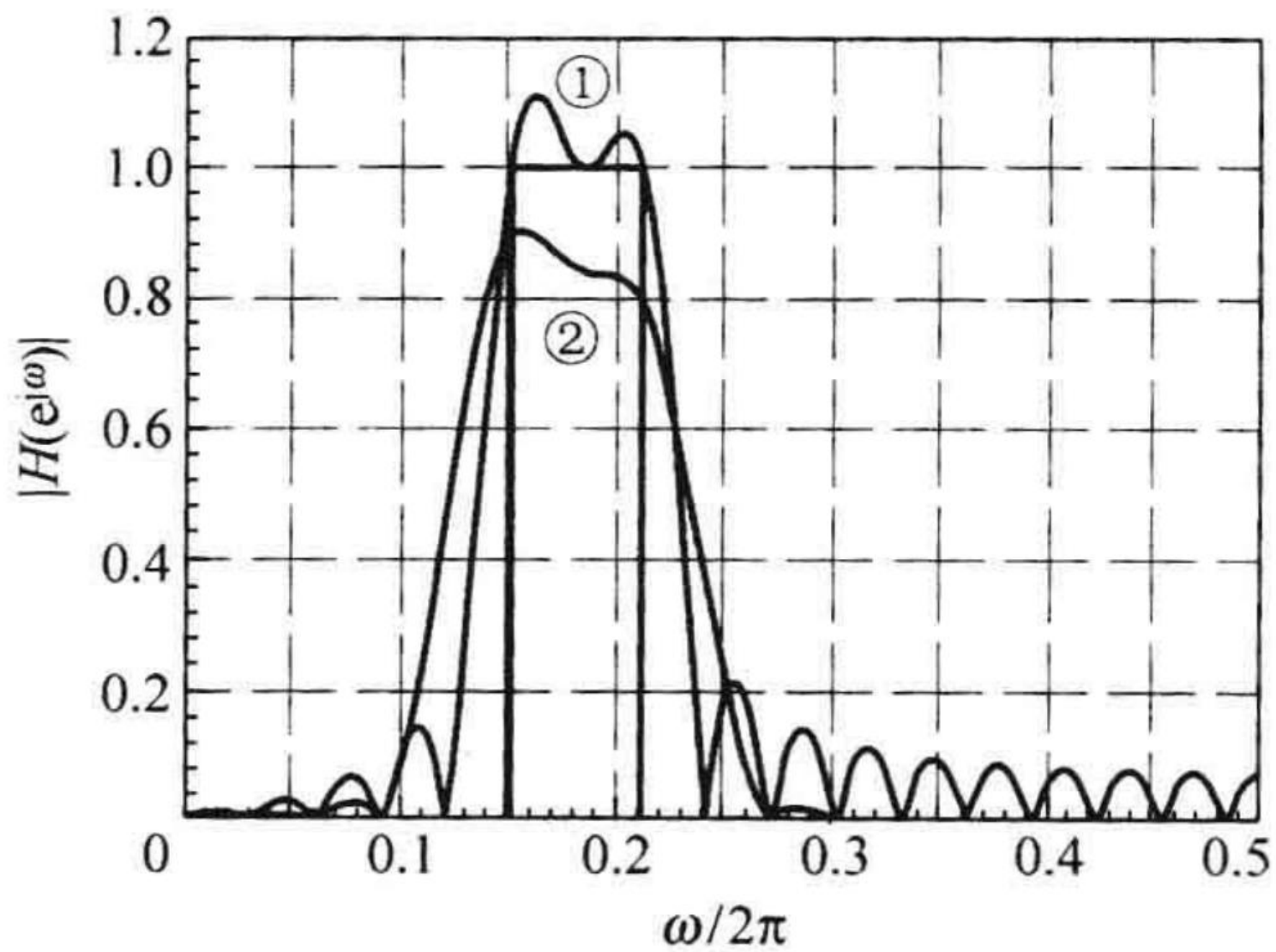
$$\begin{aligned} h(0) &= h(32) = -0.0505, & h(1) &= h(31) = 0.00793 \\ \vdots & & \vdots & \\ h(14) &= h(18) = -0.1134, & h(15) &= h(17) = 0.0746 \\ h(16) &= 0.181819 \end{aligned}$$

$H(e^{j\omega})$  的幅频特性如图 7.3.2 的曲线①所示, 显然, 其通带及阻带内都有较大的纹波。现在在  $H_d(4)$  和  $H_d(8)$  处各增加一个过渡点, 令其幅值都是 0.5, 重新求出  $H(e^{j\omega})$ , 其幅频特性如图 7.3.2 的曲线②所示。显然, 特性得到了很大的改善。

$$F_s, 33; 500, x \quad x; \frac{33}{3300} \cdot 500; 5$$

$$F_s, 33; 700, y \quad y; \frac{33}{3300} \cdot 700; 7$$

通带内 $k=5 \sim 7$
---------------------



# FIR DF设计之频率抽样法

## **fir2**

Frequency sampling-based FIR filter design

### **Syntax**

`b = fir2(n,f,m)`

`b = fir2(n,f,m,npt,lap)`

`b = fir2(____,window)`

### **Description**

`b = fir2(n,f,m)` returns an  $n$ th-order FIR filter with frequency-magnitude characteristics specified in the vectors `f` and `m`. The function linearly interpolates the desired frequency response onto a dense grid and then uses the inverse Fourier transform and a Hamming window to obtain the filter coefficients.

对...归一化?

```
f=[0 0.19 0.2 0.3 0.31 0.59 0.6 0.8 0.81 1];
```

```
% 给定频率轴分点;
```

```
m=[0 0 1 1 0 0 1 1 0 0];
```

```
% 给定在这些频率分点上理想的幅频响应
```

```
fm = [0 0.19 0.2 0.3 0.31 0.59 0.6 0.8 0.81 1;0 0 1 1 0 0 1 1 0 0]
```

```
fm = 2×10
```

```
0 0.1900 0.2000 0.3000 0.3100 0.5900 0.6000 0.8000 0.8100 1.0000
```

```
0 0 1.0000 1.0000 0 0 1.0000 1.0000 0 0
```

```
N1=30;
```

```
N2=90;
```

```
% 取两种不同的滤波器长度;
```

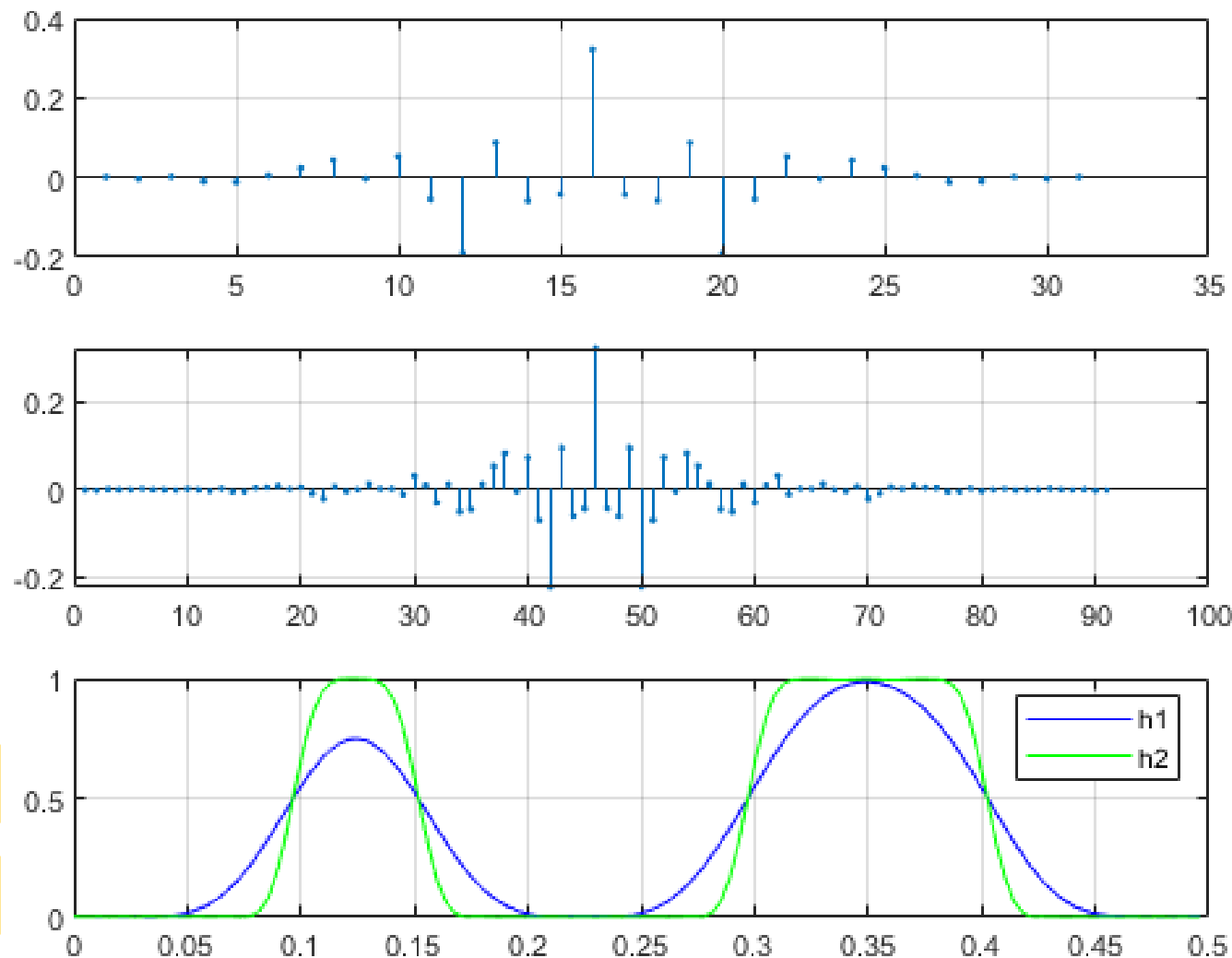
```
b1=fir2(N1,f,m);
```

```
b2=fir2(N2,f,m);
```

```
% 得到两个滤波器;
```

```
subplot(311); stem(b1,'.');grid; subplot(312); stem(b2,'.');grid;
```

```
M=128; [h1,w]=freqz(b1,1,M,1); [h2,w]=freqz(b2,1,M,1);  
subplot(313); plot(w,abs(h1),'b-',w,abs(h2),'g-');grid;  
legend('h1','h2')
```



第1个通带带宽?

对...归一化?