线 信号与系统

中国科学技术大学

信号 ①能量: $E_x=\int|x(t)|^2dt=\sum|x[n]|^2$ $E_x<\infty$, 能量信号 能量守恒:

功率: $P_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T|x(t)|^2dt$. $E_x>\infty$. 功率信号 $E_x=E_f=2\pi E_\omega$.

② $<x(t),g(t)>=\int x(t)g^*(t)dt=\sum x[n]g[n]$

$E_x=<x,x>$ 偶分量: $\frac{x(t)+x(-t)}{2}$ $\sum_{t=0}^{n}a^t=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

奇: $\frac{x(t)-x(-t)}{2}$.

$R_{xv}(\tau)=<x(t+\tau),v(t)>$
$=<x(t),v(t-\tau)>$ $x*y=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau$

$R_x(\tau)=R_{xx}(\tau)$. $=<x(\tau),y(t-\tau)>$

系统: 无记忆性: $y(t_0)$仅取决于$x(t_0)$, $h(t\neq 0)=0$.
记忆性.

因果性: $y(t_0)$仅取决于$x(t\leq t_0)$ $h(t<0)=0$
(与未来无关)
非因果性

稳定性: 输入有界(功率有限)信号. 输出也有界 $\int|h(t)|dt<\infty$
不稳定性. (用Const验证: $x(t)=\text{const}\Rightarrow y(t\to+\infty)<\infty$)

可逆性: $x(t)\leftrightarrow y(t)$ 一一对应 $\exists h_{inv}*h=\delta(t)$.
不可逆 $x\to$时移$\to$处理 $x\to$处理$\to$时移 $\stackrel{?}{=}$

时不变性: $x(t-t_0)\to y(t-t_0)$
时变 (看系数排除) ⇒只有LTI才能用 $h(t)$描述.

线性性: $\alpha x_1+\beta x_2\to\alpha y_1+\beta y_2$

eg. $y(t)=x(1-t)$

$h(t)$描述系统: $\delta(t)$与$y=h(t)$ $x[???]$替换成. $y(t-t_0)$
$\alpha x_1[???]+\beta x_2[\,]$ $x(1-t_0)$ y(先处理t)括号整体不变(把t换成t-t0)

$x(t)\xrightarrow{D}x(t-t_0)\xrightarrow{y}x[(1-t)-t_0]$
$x(1-t)\xrightarrow{D}x[1-(t-t_0)]$

eg. $x(t-t_0)$ $\int_0^{2t}x(\tau-1)d\tau$
$\int_0^{2t}x(\tau-1-t_0)d\tau$

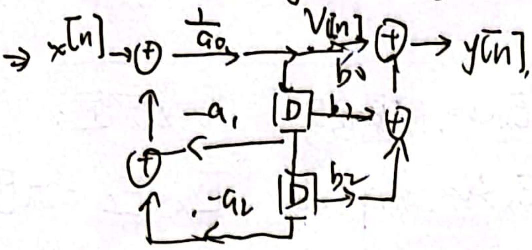
1101C-08 201412·2500

线 →

$x(t) \to \boxed{D} \to \frac{d}{dt}x(t)$ 微分系统的表示.

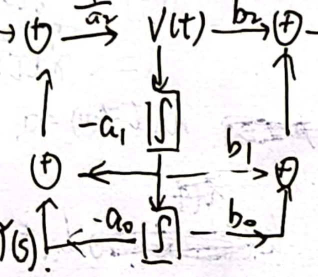
$x[n] \to \quad \to x[n-1]$.

$\cancel{a_3y[n-3]}+a_2y[n-2]+a_1y[n-1]+a_0y[n]=b_2x[n-2]+b_1x[n-1]+b_0x[n]=V[n]$



$a_2y''+a_1y'+a_0y=b_2x''+b_1x'+b_0x$

$a_2y+a_1\int y+a_0\iint y=b_2x+b_1\int x+b_0\iint x=v$.



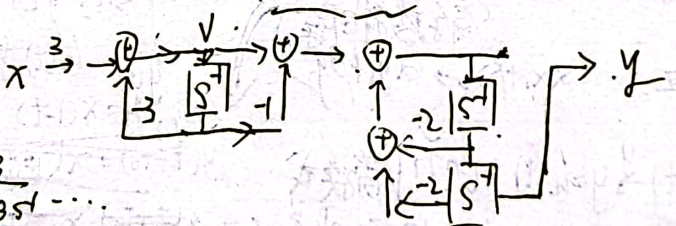
$\int^n y(t) \xrightarrow{L} s^{-n}Y(s)$

$=\frac{b_2+b_1s^{-1}+b_0s^{-2}}{a_2+a_1s^{-1}+a_0s^{-2}}=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}$

$y^{(n)}(t) \xrightarrow{L} s^nY(s)$. $\to H(s)=\frac{\cdots}{\prod(a_is^{-1}+b_i)\prod(c_is^{-2}+d_is^{-1}+e_i)}$

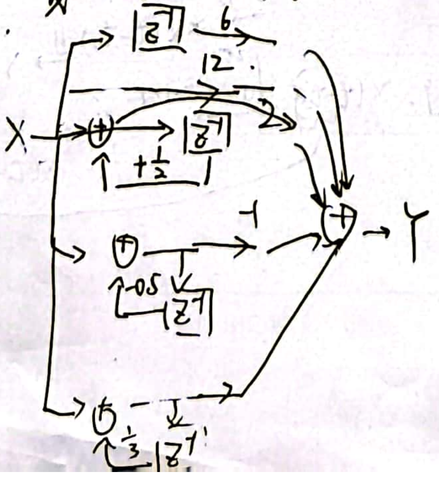
$y[n-n_0] \xrightarrow{Z} z^{-n_0}F(z)$. $H(z)=\frac{b_2z^{-2}+b_1z^{-1}+b_0}{a_2z^{-2}+a_1z^{-1}+a_0}$

级联: eg. $H(s)=\frac{3s-3}{s^3+5s^2+8s+6}=3\frac{1-s^{-1}}{1+3s^{-1}}\cdot\frac{s^{-2}}{1+2s^{-1}+2s^{-2}}$ 利用前面知识, $(1+3s^{-1})y=(1-s^{-1})x=V$.



并联: $H(s)=\frac{A}{1+\alpha s^{-1}}+\frac{B}{1+\beta s^{-1}}\cdots$

eg. $H=6z^{-1}+12+\frac{2}{1-0.5z^{-1}}-\frac{1}{1+0.5z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$



四 信号与系统

中国科学技术大学

微分方程的求解

$\mathcal{L}_u[x(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} x(t)\,dt$

$= \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$

$\sum a_k y^{(k)} = \sum b_k x^{(k)}$

$y'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}_u} sY_u(s) - y(0^-)$

$y''(t) \to s^2 Y_u(s) - sy(0^-) - y'(0^-)$

$x'(t) \to sX_u(s)$

$x''(t) \to s^2 X_u(s)$

$y[n-1] \Rightarrow z^{-1} Y_u(z) + y[-1]$

$y[n-2] \Rightarrow z^{-2} Y_u(z) + z^{-1} y[-1] + y[-2]$

$x[n-1] \Rightarrow z^{-1} X_u(z)$

$x[n-2] \to z^{-2} X_u(z)$ 注意符号!!!

$Y_u = \underbrace{\frac{\sum b_k s^k}{\sum a_k s^k} X_u}_{Y_{zs}} + \underbrace{\frac{\cdots}{\cdots}}_{Y_{zi}}$

$Y_{zs} + Y_{zi}$.

稍: $\lim_{t\to\infty} \Rightarrow +$ 稳. $\lim \neq 0$.

$\frac{A}{\prod s-p_x} + \frac{B}{\prod s-p_h}$. p_x: 由输入产生极点. p_h: 系统自带极点.

$\underbrace{\sum e^{p_x t} u(t)}_{\text{强迫}} + \underbrace{\sum e^{p_h t} u(t)}_{\text{自由}}$.

CFS: 周期信号. $F_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T\rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. T: 最小周期 ① 公式直接积分

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$. $jk\omega_0 t$

CFT: 连续信号. $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$.

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

DFS: T: 最小整数周期

~~$\tilde{x}[n] = \sum$~~

$\tilde{F}_k = \frac{1}{N} \sum_{n\in\langle N\rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n}$

$\tilde{x}[n] = \sum_{k\in\langle N\rangle} \tilde{F}_k e^{jk\Omega_0 n}$.

DTFT: 离散信号: $\tilde{F}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[n] e^{-j\Omega n}$. $\Rightarrow \tilde{F}(\Omega)$ 以 2π 为周期

$f[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi\rangle} \tilde{F}(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$.

而 $\sum_{k\in\langle N\rangle} e^{jk\Omega_0 n}$. $\forall n \neq 0$

$x(t) = e^{st} \xrightarrow{H(s)} y(t) = H(s) e^{st}$ $h(t) \xrightarrow{\text{CFT}} H(\omega)$.

~~$h(t)$~~ $\Rightarrow H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$

$\mathcal{L}$: 单边信号 $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$. $\mathcal{L} \xrightarrow{s=j\omega}$ CFT.

~~$\mathcal{Z}$: 单边信号~~ ~~$F(z)$~~ $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] z^{-n}$. $\mathcal{Z} \xrightarrow{z=e^{j\Omega}}$ DTFT.

$\mathcal{Z}$: 单边

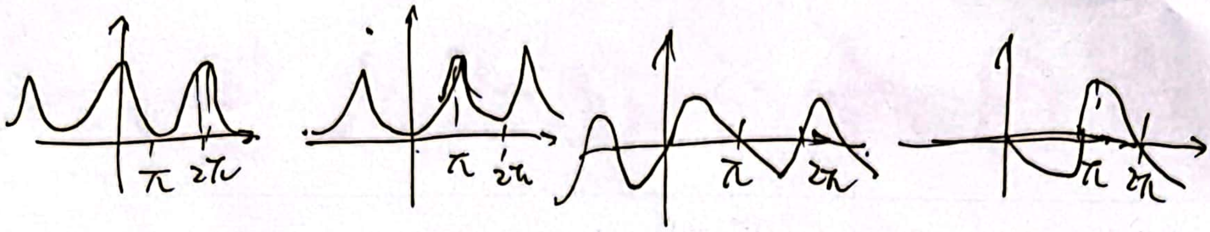
联系: CFS $\longrightarrow$ CFT: $X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \delta(\omega - k\omega_0)$ ~~$x = \sum e^{j\omega t} \xrightarrow{H(\omega)} y = \sum$~~ $H(\omega) e^{j\omega t}$

DFS $\longrightarrow$ DTFT: $\tilde{X}(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$ $x = \sum_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{H(\omega)} y = \sum_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$.

DFT: ① $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N} n}$.

$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jn\frac{2\pi}{N} k}$.

画幅、相图：关键点、特殊值



信号与系统.

CFT: $\delta(t)\leftrightarrow 1$.　　$f(t)\leftrightarrow F(\omega)$.

$\delta(t-t_0)\leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$.　　$F(t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$.

$\frac{d}{dt}\delta(t)\leftrightarrow j\omega$.

$u(t)\leftrightarrow \frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$.

$\mathrm{sgn}(t)\leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$　　$\frac{1}{t}\leftrightarrow -j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)$

$\cos\omega_0 t\leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$　　$\delta(t+t_0)+\delta(t-t_0)\leftrightarrow 2\cos t_0\omega$

$\sin\omega_0 t\leftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$　　$\delta(t+t_0)-\delta(t-t_0)\leftrightarrow 2j\sin t_0\omega$.

$\underbrace{\sqcap}_{2\tau}\leftrightarrow 2\tau Sa(\tau\omega)$. $Sa(x)=\frac{\sin x}{x}$.　　$\frac{W}{\pi}Sa(Wt)=\frac{\sin(Wt)}{\pi t}\leftrightarrow \underbrace{\sqcap}_{2W}$.

$e^{-at}u(t)\leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$.

$\delta_{T_0}(t)\leftrightarrow \omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)$.

$f*g\leftrightarrow F\cdot G$.

$f(t-t_0)\leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$.

$e^{j\omega_0 t}f(t)\leftrightarrow F(\omega-\omega_0)$.

$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$.

$\frac{d}{dt}f(t)\leftrightarrow j\omega F(\omega)$　　$-jtf(t)\leftrightarrow \frac{d}{d\omega}F(\omega)$

DTFT: $\delta[n]\leftrightarrow 1$.

$\delta[n-n_0]\leftrightarrow e^{-j\Omega n_0}$.

$u[n]\leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\delta_{2\pi}(\Omega)$

$e^{j\Omega_0 n}\leftrightarrow 2\pi\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)$.

$\cos\Omega_0 n\leftrightarrow \pi[\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)+\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)]$

$\sin\Omega_0 n\leftrightarrow j\pi[\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)-\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)]$

$\delta_{T_0}[n]\leftrightarrow \omega_0\delta_{\omega_0}(\Omega)$.

$\frac{W}{\pi}Sa(Wn)\leftrightarrow \underbrace{\sqcap}_{2W}$　　$-jnf[n]\leftrightarrow \frac{d}{d\Omega}\tilde{F}(\Omega)$

1101C-08 201412·2500

拉

L: $\delta(t) \leftrightarrow 1$

$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}.\ s>0.$

$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2}.\ s>0.$

$-u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s}\ \ s<0.$

$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}.\ s>-a.$

$te^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2}\ s>-a.$

$-e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}\ s<-a.$

$\cos w_0 t\, u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+w_0^2}\ \ s>0$

$\sin w_0 t\, u(t) \leftrightarrow \frac{w_0}{s^2+w_0^2}\ \ s>0.$

$x*g \leftrightarrow X\cdot G.\ \ R_x\cap R_g.$

$f(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0}.\ R_F.$

$e^{s_0 t}f(t) \leftrightarrow F(s-s_0)\ \ R_F+\mathrm{Re}\, s_0$

$\frac{d}{dt}f(t) \leftrightarrow sF(s).\ R_F \qquad -tf(t) \leftrightarrow \frac{d}{ds}F(s)$

$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}\ \ R_F\cap \mathrm{Re}\{s\}>0.$ ⇒ 跟 $F(w)$ 不同!!!

$-tf(t) \leftrightarrow \frac{d}{ds}F(s)$

$f(-t) \leftrightarrow F(-s).\ \ -R_F.$

Z: $\delta[n] \leftrightarrow 1$

$u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}\ \ z>0.$

$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}\ \ z>a$

$(n+1)u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-z^{-1})^2}\ \ z>0.$

$-u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}\ \ z<0.$

$-a^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}\ \ z<a$

$\cos\Omega_0 n\, u[n] \leftrightarrow \frac{1-\cos\Omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\Omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$

$\sin\Omega_0 n\, u[n] \leftrightarrow \frac{\sin\Omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\Omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$

$x*g \leftrightarrow X\cdot G.\ R_x\cap R_g.$

$f[n-n_0] \leftrightarrow F(z)z^{-n_0}$

$z_0^n f[n] \leftrightarrow F(\frac{z}{z_0})$

[illegible] $\leftrightarrow (1-z^{-1})F(z)$

$\sum f[n] \leftrightarrow \frac{F(z)}{1-z^{-1}}.$

$f[-n] \leftrightarrow F(z^{-1})$

初终值:

$f(0^+) = \lim_{\infty} sF(s)$

$f(\infty) = \lim_{0} sF(s).$

$f[0] = \lim_{\infty} F(z)$

$f[\infty] = \lim_{1} (z-1)F(z)$

$f(at) = \frac{1}{|a|}F(\frac{s}{a}),$

$f(-t) = F(-s)$

$f^*(t) = F^*(s)$

$f_{(M)}[n].\quad F(z^M).$

$f[\frac{n}{M}]$

$(n+1)a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^2}$