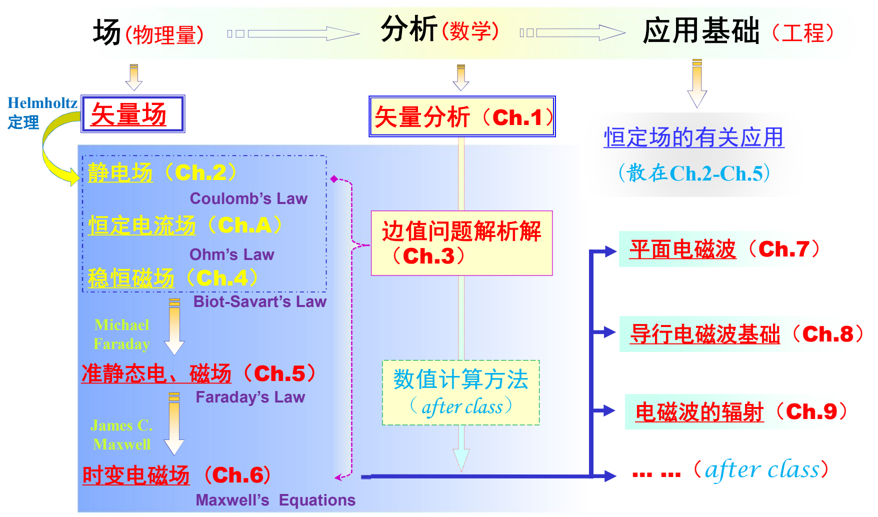
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

电磁场与波

仁寿立达
理实交融

课程的体系结构



2

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

- 从场的角度如何？
(M. Faraday)

静电场

$$\nabla\times\vec{E}=0$$
$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$$

- 从源的角度看
($\nabla\cdot\vec{J}=-\partial\rho/\partial t=0$)

$$\nabla\times\vec{E}=0$$
恒定电流场
$$\nabla\cdot\vec{J}=0$$

恒磁场

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

没有磁荷！

(M. Faraday & others)

革命性突破…

3

- 新纪元：
  - 1831 Michael Faraday begins his investigations into electromagnetism.（电磁感应定律）
  - 1831年8月29日——物理学史上值得纪念的日子。

Faraday发现电磁感应现象----物理史上最优秀范例之一。
（自学成才，直观、简明和单刀直入的科学风格，提出“力线”和“场”观点的第一人！）

Faraday认为：既然Oersted证明了“电能产生磁”，那么，很有可能“磁能产生电”

- ✓ 与电流产生磁对应的应该是磁流产生电。但是，遗憾的是：没有磁流。
- ✓ 法拉第发现了产生电的关键是需要磁随时间的变化。

Faraday发现电磁感应现象—

- 1831年，Faraday以其关键性的突破，永远改变了人类文明…

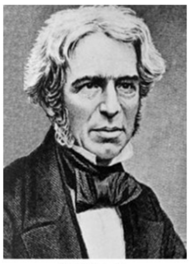
4

5 准静态场

1831年11月24日法拉第—

电磁感应定律

1831年11月24日，法拉第向英国皇家学会提交一个报告，明确定义“电磁感应现象”，并概括了可以产生感应电流的五种类型：变化着的电流、变化着的磁场、运动的稳恒电流、运动的磁铁、在磁场中运动的导体。



法拉第，M.

(1791-1867)

奥斯特(1820年)—电流的磁效应

法拉第(1831年) ⇨ 磁的电效应

✓反映电磁世界具有对称性

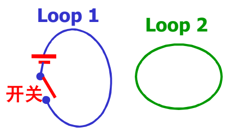
✓使人类对于电磁现象的认识达到新高度

5-1 法拉第电磁感应定律

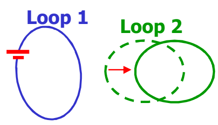
一、电磁感应现象 (实验观察)

体会一个伟大发现的过程！

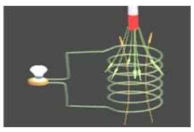
1831年8月29日早晨----



- 回路1接通或断开时，会在回路2上感应出瞬变电流；当回路1电流恒定时，感应电流消失。



- 回路1载有恒定电流，如回路1相对于回路2有相对运动，也会产生感应电流。

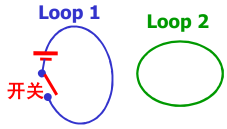


- 永久性磁铁插进一个回路。磁铁静止时，电路中没有电流；插入或抽出的过程中，回路中会有电流。

❖ 对这些现象，作何分析？

法拉第：

"场"–完全创新的概念



➢这些现象与回路的磁通量是否变化有关；

➢变化的磁通量在回路周围产生一个感应电场，这个感应电场的环路积分就是感生电动势（在当时也是完全创新的概念）。其环路积分不为0，与静电场不同。

∵ 此时回路2上没有外加电源，只能认为电流是感生电动势引起的。

What the next?

进行定量研究--→ 结论：感生电动势和磁通量随时间的变化率成正比

$$\boxed{\xi \propto \frac{d\Phi}{dt}}$$

磁通

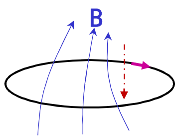
--Direction?

7

流向由楞次定则决定：

感应电流的方向，总是使感应电流的磁场通过回路的磁通量阻碍原磁通量的变化。

即：感生电动势产生感生电流，感生电流对回路产生一个附加的磁通。附加磁通与原来的磁通符号相反，削弱原来的磁通。



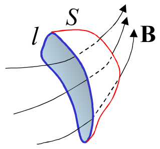
楞次，Э. Х.

(1804-1865)

楞次定则（律）是能量守恒定律在电磁感应现象上的具体体现。

8

二、电磁感应定律



闭合回路磁通的变化，产生感应电动势：

$\xi = \oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}$

$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$

$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Φ --穿过曲面S的磁通量，ξ--沿曲面边界回路的感应电动势。

➤ 感生电动势引起的感应电流产生的磁场企图阻止磁通的变化。

1. 回路不动，磁场变化：

$$\xi = \oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S \nabla\times\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

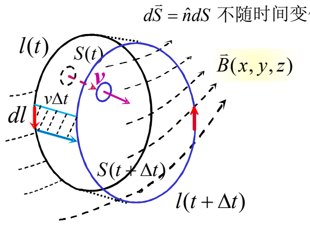
✓ 变化的磁场是电场的旋度源；

✓ 变化的磁场产生的电场为有旋场！

9

2. 回路匀速 v 运动，磁场不变化：

闭合回路l 以匀速 v 在磁场中运动，
回路形状不变。



$$\xi = \oint_l \vec{E}'\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

运动坐标系　　静止坐标系

回路不动，磁场匀速运动：

==➔B的坐标随时间变动！

$\vec{B}(x,y,z) \Rightarrow \vec{B}(x(t),y(t),z(t))$

闭合回路磁通的变化所产生的感应电动势相同。

==➔回路不动，磁场变化

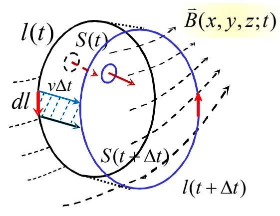
10

3. 回路匀速v运动，磁场变化：

闭合回路l以恒定速度v在变化的磁场中运动，回路形状不变。

闭合回路不变不动，磁场变化并以恒定速度v运动。

闭合回路磁通的变化所产生的感应电动势相同。



$d\vec{S}=\hat{n}dS$ 不随时间变化！

$$\xi=\oint_l \vec{E}'\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=-\int_S \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S}$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt}=\frac{d}{dt}\vec{B}(x,y,z,t)$$

$$=\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\quad=\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\underline{(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{B}}$$

11

$$\because\quad \nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})$$

$$\therefore\quad \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})=(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{v}-\vec{B}\cancel{(\nabla\cdot\vec{v})}-(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{v}\cancel{(\nabla\cdot\vec{B})}$$

$$=\cancel{(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{v}}-(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{B}$$

$$=-(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{B}$$

所以：

$$\xi=\oint_l \vec{E}'\cdot d\vec{l}=-\int_S \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S}=\int_S\left\{-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})\right\}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{E}'\cdot d\vec{l}=\int_S \nabla\times\vec{E}'\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{E}'=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})}$$

12

$$\nabla\times\vec{E}' = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})$$

- $v=0$ 或 $\vec{v}\parallel\vec{B}$： $\nabla\times\vec{E}' = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
- $v\neq 0$, $\vec{B}$ 时不变： $\nabla\times\vec{E}' = \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})$

$\vec{B}$为非均匀场时仍可有 $\nabla\times\vec{E}\neq 0$

考虑以v运动的电荷所受到的力：

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}=q\vec{E}+q(\vec{v}\times\vec{B})\\ \vec{F}'=q\vec{E}'\end{array}\right\}\ \vec{E}'=\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}$$

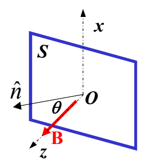
$$\vec{E}=\vec{E}'-\vec{v}\times\vec{B}$$

惯性系：物理规律在伽利略变换下不变。

（狭义相对论框架下需推广）

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

例：有一线圈，其面积为S，法向为$\hat{n}$，$\vec{B}=B_0\sin(\omega t)\hat{z}$，求$\xi$



解：$\xi=\oint_l \vec{E}\cdot dl = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot\hat{n}dS$

$= -\frac{d}{dt}\int_s B_0\sin(\omega t)\hat{z}\cdot\hat{n}dS$

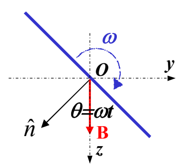
$= -\omega B_0 S\cos(\omega t)\cos\theta$

例：$\vec{B}=B_0\hat{z}$，线圈以角速度ω绕x轴转动，求ξ

解：某一时刻$\theta=\omega t+\theta_0$，其中$\theta_0=0|_{t=0}$

$\xi=\oint_l \vec{E}\cdot dl = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot\hat{n}dS = -\frac{d}{dt}(B_0 S\cos\theta)$

$=\omega B_0 S\sin(\omega t+\theta_0)\ =\omega B_0 S\sin(\omega t)$



或：$\xi=\oint_l \vec{E}'\cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{S} = \int_l (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$

5-2 准静态场

$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$， $\vec{B}(\vec{r},t)\sim$ 缓慢变化

准静态场是一种近似静态场的情况：

---其本身为时变场，但其行为和静态场一样。

- 时变电磁场可视为准静态场的条件：

场域的尺寸远小于波长 λ

即：场源随时间变化很缓慢，频率很低，场源变化的时间间隔比电磁扰动跨过所考虑的物理系统所花的时间大很多。

- 当场源随时间按周期变化，频率为 f 时，准静态条件：

$L/\lambda \ll 1$

L 为物理系统的尺寸；
L/λ 为"电尺寸"

5-3 电感的定义与计算

电容——媒质的极化特性，对电场能量的储存能力；

电阻——媒质的导电特性，对电场能量的损耗能力；

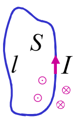
电感——媒质的磁化特性，对磁场能量的储存能力；

- 磁通与磁链
- 电感、自感和互感

1、磁通(Φ)与磁链(Ψ)

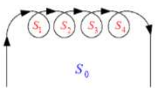
➢ 单匝导线回路围成的曲面的磁通：

$$\Phi^m = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_S \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S} = \oint_l \vec{A}\cdot d\vec{l}$$



$$\Phi^m = \oint_l\oint_l \frac{\mu_0 I d\vec{l}'}{4\pi R}\cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_l\oint_l \frac{d\vec{l}'\cdot d\vec{l}}{R} \propto I$$

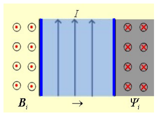
➢ 多匝回路围成的曲面的全磁通—磁链：



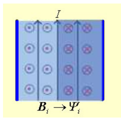
$$\psi^m = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \sum_k a_k \Phi_k^m$$

a_k--不同的交链程度

◆ 磁力线与回路电流（沿线有体密度）的交链：

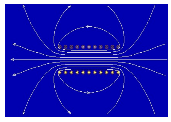


导体外部闭合的磁链



与部分电流交链

◆ N 匝螺线管（忽略边缘效应）



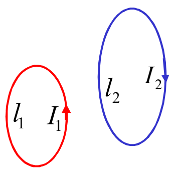
$$\psi^m = N\Phi^m$$

与回路电流多次交链

17

2、电感、自感和互感

两个载流回路的磁链表示



$$\psi_1^m = \psi_{11}^m + \psi_{12}^m \qquad \psi_2^m = \psi_{22}^m + \psi_{21}^m$$

定义--回路的自感为：$\boxed{L_1 = \frac{\psi_{11}^m}{I_1}}$ $\boxed{L_2 = \frac{\psi_{22}^m}{I_2}}$

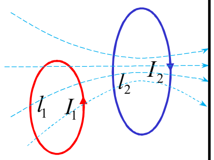
l_2对 l_1 的互感为：$\boxed{M_{12} = \frac{\psi_{12}^m}{I_2}}$

l_1对 l_2 的互感为：$\boxed{M_{21} = \frac{\psi_{21}^m}{I_1}}$

则： $\psi_1^m = L_1 I_1 + M_{12} I_2 \qquad \psi_2^m = L_2 I_2 + M_{21} I_1$

18

关于互感



$$\vec{A}_2=\frac{\mu}{4\pi}\oint_{l_2}\frac{I_2}{R}\cdot d\vec{l}_2$$

证明：均匀线性媒质中有 $M_{21}=M_{12}$

回路2的电流在回路1中产生的磁通链为：

$$\psi_{12}^m=\iint_{S_1}\vec{B}_2\cdot d\vec{S}_1=\oint_{l_1}\vec{A}_2\cdot d\vec{l}_1$$

$$=\frac{\mu I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\left(\oint_{l_2}\frac{d\vec{l}_2}{R}\right)\cdot d\vec{l}_1=\frac{\mu I_2}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1}{R}$$

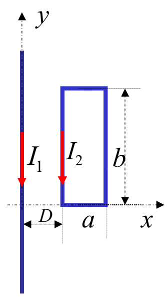
$$M_{12}=\frac{\psi_{12}^m}{I_2}=\frac{\mu}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1}{R}=M_{21}$$ ——诺曼公式

$\boxed{M_{21}=M_{12}}$ 自感磁通始终为正值；互感可正可负，当互感磁场与自感磁场一致时，互感为正，相反为负。

- 两线圈的同名端：当同名端电流方向一致时，线圈互感为正。

例：计算位于真空中的一根无限长的直导线与一位于同一平面、边长分别为 a 和 b，相距为 D 的矩形导电回路间的互感。

解：$\boxed{M_{12}=M_{21}\text{，但计算量大不同！}}$



导线电流磁场 $\vec{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{x}\hat{z}$

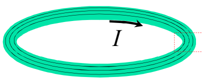
导线电流磁场在矩形回路中产生的磁链为：

$$\psi_{21}^m=\iint_S\vec{B}_1\cdot d\vec{S}_2=\int_D^{D+a}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}b\,dx=\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\ln\frac{D+a}{D}$$

$$M_{21}=\frac{\psi_{21}^m}{I_1}=\frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\frac{D+a}{D}\qquad M_{21}>0$$

关于自感

沿线有体密度时（导线有粗细），磁力线与回路电流的交链：



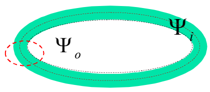
回路的外自感 ＋ 回路的内自感 ＝ 回路自感

体电流回路自感磁链的定义：

当把体电流回路分解成无限细闭合电流管回路时，各电流管回路磁通量的加权平均值，其中电流管的电流为加权平均的权。

$$\psi=\frac{1}{I}\iint_S \Phi J dS=\frac{1}{I}\iint_S \Phi\vec{J}\cdot d\vec{S}$$

$$\Psi_i=\frac{1}{I}\iint_S \Phi_i\vec{J}\cdot d\vec{S}$$



$$\Phi=\Phi_i+\Phi_o$$

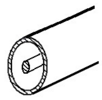
$$\Psi=\Psi_i+\Psi_o$$

(inner+outer)

$$\Psi_o=\frac{\Phi_o}{I}\iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=\Phi_o$$

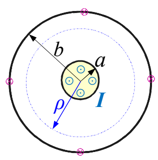
$$\boxed{\therefore L=L_i+L_o}$$

=外自感+内自感



例： 计算如图所示外导体厚度为零的同轴线单位长度的自感。

解： 内导体上有体电流密度，会形成内自感。

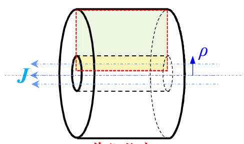


$$B=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}, & \rho<a\\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}, & a<\rho<b\\ 0, & \rho>b\end{cases}$$

安培环路 ==→磁场

电流环路 ==→磁通/链

$$\Phi=\int_\rho^a \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}d\rho+\int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}d\rho=\underbrace{\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}(a^2-\rho^2)}_{\text{内磁通}}+\underbrace{\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b}{a}}_{\text{外磁通}}$$



$$\Psi=\frac{1}{I}\int_S \Phi\vec{J}\cdot d\vec{S} \qquad \frac{JdS}{I}=\frac{\rho d\theta d\rho}{\pi a^2}$$

$$\Psi=\frac{\mu_0 I}{8\pi}+\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \Rightarrow L=\underbrace{\frac{\mu_0}{8\pi}}_{\text{内自感}}+\underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}}_{\text{外自感}}$$

内自感：源于该导体内部的磁链

外自感：源于外部导体间的磁链

5-4 磁场的能量与磁场力

一、 磁场中储存的能量

1、单个电流回路的磁场能量:

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\psi^m I$$

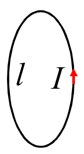
2、多个电流回路的磁场能量:

$$W_m = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2}\psi_k^m I_k$$

3、磁场的能量密度:

$$w_m = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$$

1、单个电流回路的磁场能量



$$I \longrightarrow \vec{B} \longrightarrow W_m$$

建立过程: $i=0 \Longrightarrow \boxed{i \uparrow I} \Longrightarrow i=I$

磁场 $=0$; $\vec{B} \neq 0$; 磁场 $=\vec{B}$

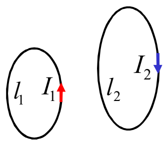
$\phi^m \neq 0$

$$\xi = -\frac{d\phi^m}{dt} \neq 0$$

外加电压 $\boxed{U=-\xi}$，克服感应电动势 $\Longrightarrow \boxed{W_m}$

$$dw = -\xi i dt = i d\phi^m = L i di \Rightarrow W_m = \int_0^I L i di = \frac{1}{2}LI^2$$

2、多个电流回路的磁场能量



设两回路的自感分别为 L_1和 L_2，互感为M，电流为I_1和 I_2

建立过程

1、使回路1的电流从0增加到I_1，回路2电流为0，无外源；（case 1）

2、使回路2的电流从0增加到I_2(同1)，回路1电流恒定为I_1，无外源；

$$\xi_1 = -\frac{d\psi_{12}^{m}}{dt} = -M\frac{di_2}{dt} \Rightarrow U_1 = -\xi_1 = M\frac{di_2}{dt}$$

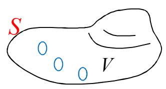
$$dw_{12} = -\xi_1 I_1 dt = MI_1 di_2 \Rightarrow W_{12} = \int_0^{I_2} MI_1 di_2 = MI_1 I_2$$

∴ 两个回路的磁场能量等于以上两步外源作功的和：

$$W_m = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + (MI_1 I_2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2) = \frac{1}{2}\psi_1^m I_1 + \frac{1}{2}\psi_2^m I_2$$

25

3、磁场的能量密度



$$\psi^m = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_S \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S} = \oint_l \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$$W_m = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}\psi_k^m I_k$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}\oint_{l_k}\vec{A}_k\cdot d\vec{l}\, I_k = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}\iiint_{V_k}\vec{A}_k\cdot\vec{J}_k dV$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_V \vec{A}\cdot\vec{J}dV = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})dV$$

$$\nabla\cdot(\vec{H}\times\vec{A}) = \vec{A}\cdot\nabla\times\vec{H} - \vec{H}\cdot\nabla\times\vec{A}$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_V \nabla\cdot(\vec{H}\times\vec{A})dV + \frac{1}{2}\iiint_V \vec{H}\cdot\nabla\times\vec{A}dV$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}\oint_S \vec{H}\times\vec{A}\cdot d\vec{S}} + \frac{1}{2}\iiint_V \vec{H}\cdot\vec{B}dV$$

$$\vec{H}\propto\frac{1}{r^3},\ \vec{A}\propto\frac{1}{r^2}$$

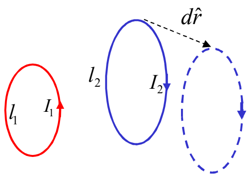
$$\therefore W_m = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{H}\cdot\vec{B}dV \Rightarrow w_m = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$$

26

二、磁场力

电流元在磁场中受力： $d\vec{F}=Id\vec{l}\times\vec{B}$

电流回路在磁场中受力： $\vec{F}=\oint_l Id\vec{l}\times\vec{B}$



也可采用虚位移法来计算磁场力：

（以两个电流回路的情形为例）

位移过程中：

1) 系统内储能将发生变化；

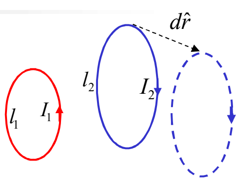
2) 外源提供的能量也将发生变化。但遵循能量守恒： ——实际上回路和磁场均未变化！

$$dW_s=dW_m+\vec{F}\cdot d\hat{r}$$

即：外源提供的能量增量导致系统内储能变化(dW_s)。

一部分用于磁场储能的增量dW_m，一部分用于磁场力做功使回路移动。

27



可按两种情况来讨论：

1、假定两回路的电流不随时间变化：外能使之“移动”！

由于两回路的电流不随时间变化，回路移动，

则两回路的磁链要变化，储能也要变化：

$$W_m=\frac{1}{2}(I_1\psi_1+I_2\psi_2)=\frac{1}{2}(L_1I_1^2+L_2I_2^2+2MI_1I_2)$$

--两回路的磁链变化，实际是由于两回路的互磁链变化，即互感变化所致。

两回路的储能增量：

$$dW_m=I_1I_2dM$$

--外源提供的能量增量？

28

由于两回路的电流不变，回路移动外源要克服感应电动势做功==→外源提供的能量增量：

$$dW_s = -(\xi_1 I_1 dt + \xi_2 I_2 dt)$$

$$\xi_1 = -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -I_2\frac{dM}{dt} \qquad \xi_2 = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -I_1\frac{dM}{dt}$$

$$dW_s = 2I_1I_2dM = 2dW_m$$

$$dW_s = dW_m + \vec{F}\cdot d\hat{r}$$

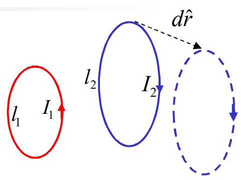
$$\vec{F}\cdot d\hat{r} = dW_m \Rightarrow dW_m = I_1I_2dM$$

可见：外源提供的能量增量一半用于磁场储能增量，一半用于磁场力做功。

$$\because \vec{F}\cdot d\hat{r} = f_xdx + f_ydy + f_zdz \qquad \therefore f_x = I_1I_2\left.\frac{\partial M}{\partial x}\right|_{I_i=C} = \left.\frac{\partial W_m}{\partial x}\right|_{I_i=C}$$

$$\boxed{\vec{F} = \nabla W_m|_{I_i=C}}$$

29



2、假定两回路磁链不随时间变化：内能使之“移动”！

两回路中不产生感应电动势，外源不再对系统做功并提供能量：

$$dW_s = 0$$

要回路 l_2 移动，只能靠消耗系统中磁场能量来实现 ===→回路中磁场能量的减少。即：

$$\begin{cases} W_m = \frac{1}{2}(I_1\psi_1 + I_2\psi_2) \\ dW_s = dW_m + \vec{F}\cdot d\hat{r} = 0 \end{cases} \qquad \therefore \vec{F}\cdot d\hat{r} = -dW_m$$

$$\because \vec{F}\cdot d\hat{r} = f_xdx + f_ydy + f_zdz$$

沿x方向的磁场力：$f_x = -\left.\frac{\partial W_m}{\partial x}\right|_{\psi_i=C}$

$$\boxed{\vec{F} = \nabla W_m|_{I_i=C}}$$

30

注意：

- 回路的位移**是假想的**，实际上回路和磁场均未变化。按上述两种思路求得的回路间作用力是一样的：

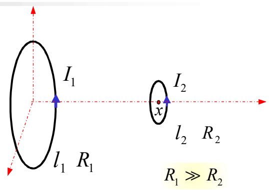
$$f_x = -\frac{\partial W_m}{\partial x}\Big|_{\psi_i=C} = \frac{\partial W_m}{\partial x}\Big|_{I_i=C}$$

- 按照虚位移法求得的磁场力与按照安培定律求得的磁场力相同：

（书上有证明p.156-157）

$$\boxed{\vec{F} = \oint_l I d\vec{l} \times \vec{B} = \nabla W_m\Big|_{I_i=C}}$$

例： 求如图所示的两个同轴圆电流环间的作用力。



解： 圆环2半径很小，可认为圆环1在圆环2所在位置产生的磁场是均匀的。电流环1在电流环2处所产生的磁感应强度：

$$B_x = \frac{\mu_0 I_1 R_1^2}{2\sqrt{(R_1^2 + x^2)^3}}$$

$$M = \frac{\phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2\sqrt{(R_1^2 + x^2)^3}}$$

$$F_x = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{3\mu_0 \pi I_1 I_2 R_1^2 R_2^2}{2\sqrt{(R_1^2 + x^2)^5}} x \xrightarrow{x \gg R_1} F_x = -\frac{3\mu_0 \pi I_1 I_2 R_1^2 R_2^2}{2x^4}$$

Thank You !

33