中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

电磁场与波

红专并进
理实交融

课程的体系结构

场（物理量） ⟹ 分析（数学） ⟹ 应用基础（工程）

Helmholtz 定理

Volta

矢量场

静电场（Ch.2）

恒定电流场（Ch.A）

稳恒磁场（Ch.4）

准静态电、磁场（Ch.5）

时变电磁场（Ch.6）

矢量分析（Ch.1）

边值问题解析解（Ch.3）

数值计算方法（after class）

恒定场的有关应用（散在Ch.2-5）

平面电磁波（Ch.7）

导行电磁波基础（Ch.8）

电磁波的辐射（Ch.9）

… …（after class）

2

A 恒定电流场

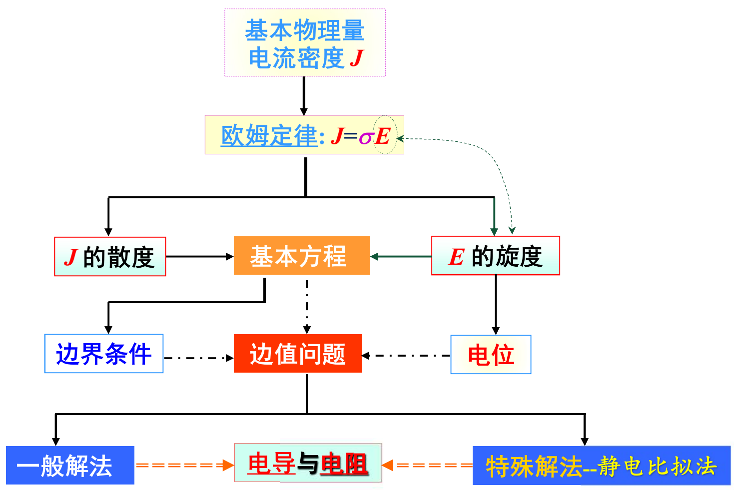
- 1785 Coulomb independently invents the torsion balance to confirm the inverse square law of electric charges. （库仑定律
- 1799 Volta （伏达） shows that galvanism is not of animal origin but occurred whenever a moist substance is placed between two metals. Volta pile, a year later, the 1st electric batteries.
- 1827 Georg Simon Ohm **formulates the relationship between current to electromotive force and electrical resistance.** （欧姆定律

电流在空间的分布，称为该物理量的场 ===➔ 电流场

- 电流密度 (媒质的损耗)
- 恒定电流场的方程
- 恒定电流场的边界条件
- 恒定电流场与静电场的比较
- 恒定电流场的求解问题

3

恒定电流场的知识结构

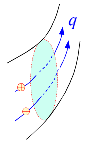


4

A-1 电流密度

1、电流强度：

电荷的定向移动形成电流，方向为**正电荷**运动的方向。



- **电流强度**：单位时间流过给定截面的电荷的多少，即电流的大小。

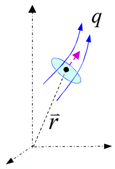
$$I=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{dq}{dt}$$ 单位：安培（A）

- 传导电流
- 运流电流
- 位移电流

➢ 电流强度并不能描述电流在电流场中的分布情况。

2、电流密度：

➢ **电流密度**：单位时间内通过垂直于该点电流方向单位面积的电量（体密度，方向为电流方向）

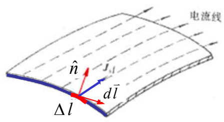


$$\overline{J}=\lim_{\Delta s\to 0}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q/\Delta t}{\Delta S}\hat{n}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta S}\hat{n}$$

✓ 单位：安/米²（A/m^2）

✓ 体电流密度实际上是“面密度”。

➢电流强度是电流密度的通量： $I=\iint_S \overline{J}\cdot d\overline{S}$



- **面电流密度**：单位时间通过曲面上垂直于该点电流方向单位长度的电量

$$\overline{J_s}=\lim_{\Delta l\to 0}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q/\Delta t}{\Delta l}\hat{e}_t=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta l}\hat{e}_t$$

电流在很薄的一层曲面上，方向为该点正电荷运动的方向

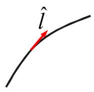
单位：安培/米

注意：面电流密度实际上是“线密度”。

➢通过长L的薄面的电流强度为：

$$I=\int_L \overline{J_s}\cdot(\hat{n}\times d\overline{l})$$

- **线电流密度**：电流在很细的导线中流动，可将电流看成是线分布，线电流密度 J_l 就是电流强度I，方向为该点正电荷流动的方向 $\hat{l}$



$$\overline{J_l}=I\hat{l}$$

线电流仅在一条曲线上存在，无法再定义密度，但有时根据需要，将线电流表示为体电流密度或面电流密度（借助于δ函数）。

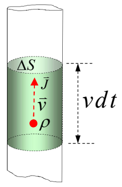
➢ 电流管（很细的导线）电流密度与电荷平均速度 v 的关系：

dt 时间内流过 △S 面的电量及电流分别为：

$$dq = \rho\Delta S\Delta l = \rho\Delta S \cdot vdt$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \rho\Delta Sv$$

$$\boxed{\bar{J} = \rho\bar{v}}$$



➢若通过△S 有若干不同类型 (用下标 i 表征) 的运动电荷：

$$\boxed{\bar{J} = \sum_i \rho_i \bar{v}_i}$$

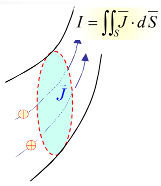
3、恒定电流场

$\bar{E}$ = 恒定（时不变/静电场）

欧姆定律微分式：在不包含外源的各向同性导电体中有电流存在时，导体中任一点处电流密度与电场强度成正比。

$$\boxed{\bar{J} = \sigma\bar{E}}$$

σ --媒质的电导率，单位：西门子/米 (S/m)



$\boxed{\bar{J} = \sigma\bar{E}}$ $\boxed{\bar{J} = \rho\bar{v}}$

$\sigma\bar{E} = \rho\bar{v}$

✓ 与载流子密度有关
✓ 与有没有电流无关
—导电媒质本构方程

- ➢ σ描述媒质的导电特性，其值愈大导电能力愈强；
  （理想电介质 $\sigma = 0$，J =0）
- ➢ 理想导体的电导率趋于无穷大，E→0仍可维持恒定电流
  （超导体并非理想导体，迈斯纳效应）

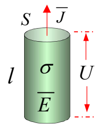
- ◘ 恒定电流场与恒定电场相互依存；
- ◘ 恒定电流场中，运动电荷的空间分布不随时间变化 ==➔ 电荷驻立；
- ◘ 驻立电荷产生的电场也不随时间改变。

电路的欧姆定理：

$\vec{J}=\sigma\vec{E}$

$I=\iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=JS=\sigma ES$

"小"直导体，导体中电流密度视为均匀，横截面面积为S



$U=IR$

$$E=\frac{I}{\sigma S}\Rightarrow U=El=\frac{I}{\sigma S}\cdot l=I\cdot\frac{l}{\sigma S}\equiv IR$$

$$\Rightarrow R=\frac{l}{\sigma S}$$

"小"直导体电阻公式

$\vec{J}=\sigma\vec{E}\Rightarrow U=IR$

- 欧姆定理一般仅适用于电流分布均匀的情况，欧姆定律微分形式是微小体积元上的欧姆定理。
- 可以将欧姆定理看成是欧姆定律微分形式在恒定电流场中电流均匀分布这种特殊情况下的"近似"。

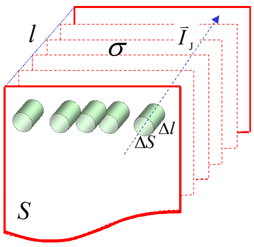
9

推论：若电流场中相邻两等位面之间的距离处处相等（σ均匀），则：

$$R=\frac{1}{\sigma}\int_l\frac{dl}{S}$$ (l为沿电流方向，S为垂直于电流方向的等位面的面积)

证明：利用"小直"导体的结论

⇒ 面上分块，面间分层 (层间电压$\Delta\varphi$)



$$\Delta\varphi=E\Delta l=\frac{I_J}{\sigma\Delta S}\cdot\Delta l$$

$$I_J=\Delta\varphi\frac{\sigma\Delta S}{\Delta l}$$

面上并联（等位）

$$I=\int_S I_J dS=\Delta\varphi\frac{\sigma S}{\Delta l}$$

$$\Delta\varphi=\frac{I}{\sigma S}\cdot\Delta l \xrightarrow{\text{面间串联}} V=\int_l d\varphi=\frac{I}{\sigma}\cdot\int_l\frac{dl}{S}\Rightarrow R=\frac{V}{I}=\frac{1}{\sigma}\int_l\frac{dl}{S}$$

10

$$\boxed{\vec{J}=\sigma\vec{E}} \quad \boxed{\vec{J}=\rho\vec{v}}$$

$$\sigma\vec{E}=\rho\vec{v}$$

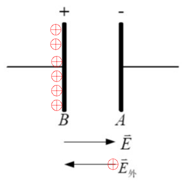
$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\sigma}{\rho}\frac{d\vec{E}}{dt}=0$$

□ 恒定电流场的源——非静电起源的外力：

- ◆ 在电场力的驱动下，导电介质中自由运动电荷做宏观运动。运动中，运动电荷和微观结构中的原子（或分子）发生碰撞，把电场赋予的动能全部转化为热能，唯此才能保持电流恒定。否则，运动电荷在电场的作用下会不断被加速，恒定电流不可能！
- ◆ 恒定电流场由于电荷分布和场都不随时间变化，因此总能量恒定。但电场需不断地对运动电荷做功，运动电荷将动能转化为热能（焦耳热），仅靠电场力（或电场能量）是不可能的。**故必须有非静电力（或非静电场能量）作为维持恒定电流场的源！**

定义电动势：将单位实验电荷从负极板通过电源内部移到正极板时，非静电外力所作的功：

$$\boxed{\xi=\int_A^B \vec{E}_{外}\cdot d\vec{l}}$$



□ 媒质的损耗--焦耳定律：

电荷在电场中运动时，电场力会对运动电荷做功：

对导电媒质体积 dV 中某一类(i类)运动电荷（电荷密度 ρ_i、运动速度 v_i），电场所做的功为：

$$dW_i=(\rho_{vi}dV)\vec{E}\cdot d\vec{l}_i=(\rho_{vi}dV)\vec{E}\cdot\vec{v}_i dt$$

对所有类的运动电荷做功：
$$dW=\sum_i dW_i=\vec{E}\cdot\sum_i\rho_{vi}\vec{v}_i dtdV=\vec{E}\cdot\vec{J}dtdV$$

功率：电场单位时间所做的功
$$dP=\frac{dW}{dt}=\vec{E}\cdot\vec{J}dV$$

功率密度：单位时间内对单位体积运动电荷做的功

$$\boxed{p=\frac{dP}{dV}=\vec{E}\cdot\vec{J}}$$ ---焦耳定律

$$\boxed{P=\int_V pdV=\int_V\vec{E}\cdot\vec{J}dV}$$ ---积分形式焦耳定律

□ 焦耳热：

在导电媒质（σ）中，欧姆定律：

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$

电场 E 对运动电荷所做的功：

$$p = \vec{E}\cdot\vec{J} = \sigma|\vec{E}|^2$$

$$P = \int_V \vec{E}\cdot\vec{J}dV = \int_V \sigma|E|^2 dV$$

恒流：电荷不被加速，亦不减速，能量损耗—“焦耳热”，故需外源维持恒流。

◆ 对长为 l、端加电压 U 的直导体：

$$P = \int_V \vec{E}\cdot\vec{J}dV = JEV = \sigma E^2 Sl = \sigma\left(\frac{U}{l}\right)^2 Sl = \frac{U^2}{l/(\sigma S)} = \frac{U^2}{R}$$

$$P = \int_V \vec{E}\cdot\vec{J}dV = JEV = \frac{I}{S}\frac{I}{\sigma S}Sl = I^2\frac{l}{\sigma S} = RI^2$$

?

13

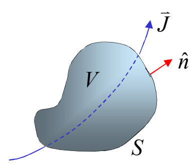
A-2 恒定电流场的方程

1、电流连续性方程：

电荷守恒定律： 在单位时间从任意闭合曲面流出的电量等于此闭和曲面包围体积中电荷的减少率。

$$\oiint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV$$

$$\because \oiint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{J}dV$$



$$\therefore \iiint_V (\nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t})dV = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

---电流连续性方程

14

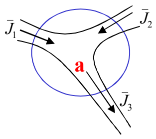
对于恒定电流场，驻立电荷的空间分布不随时间变化，即：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \xrightarrow{\text{电流连续性方程}} \nabla\cdot\bar{J}=0$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \bar{J}\cdot d\bar{S}=0$$

基尔霍夫电流定律：

设电路中一节点为a，在它周围作一个小的闭合曲面：



$$\oint\!\!\!\oint_S \bar{J}\cdot d\bar{S}=0$$

$$\iint_{S_1}\bar{J}_1\cdot d\bar{S}_1+\iint_{S_2}\bar{J}_2\cdot d\bar{S}_2+\iint_{S_3}\bar{J}_3\cdot d\bar{S}_3=0$$

即：$\boxed{-I_1-I_2+I_3=0}$

15

2、旋度源：

驻立电荷产生的恒定电场与静电场性质相同　即：$\nabla\times\bar{E}=0$

恒定电流场在电源区域以外的方程为：

$$\oint_l \bar{E}\cdot d\bar{l}=0 \qquad \oint\!\!\!\oint_S \bar{J}\cdot d\bar{S}=0$$

$$\boxed{\nabla\times\bar{E}=0} \qquad \boxed{\nabla\cdot\bar{J}=0}$$

$\boxed{\bar{J}=\sigma\bar{E}}$ —也称为导电介质的本构关系

$\boxed{\bar{E}=-\nabla\phi}$

？

◆ 恒定电流场中：只有理想导体是等位体，其内部电场为零，电荷密度为零，外表面切向分量为零，外表面电场垂直于导体表面。一般导体，未必如此，如：其内部电场可不为零。

◆ 静电场中：只要是导体，不论其电导率大小，是否均匀，静电平衡后都有：等电位、内部零电场、

16

3、驻立电荷密度：

ρ不随时间变化： $\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}$ $\boxed{\nabla\cdot\bar{J}+\cancel{\frac{\partial\rho}{\partial t}}=0}$

$$\nabla\cdot\bar{J}=\nabla\cdot(\sigma\bar{E})=\sigma\nabla\cdot\bar{E}+\bar{E}\cdot\nabla\sigma$$

$$\nabla\cdot\bar{E}=-\frac{\bar{E}\cdot\nabla\sigma}{\sigma}$$ ---只有在导电媒质不均匀的区域中才有E的散度（即电荷驻立）

更一般的情况：

$$\rho=\nabla\cdot\bar{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\bar{E})=\varepsilon\nabla\cdot\bar{E}+\bar{E}\cdot\nabla\varepsilon)$$

$$\therefore\rho=\bar{E}\cdot(-\frac{\varepsilon\nabla\sigma}{\sigma}+\nabla\varepsilon)=\frac{\bar{J}}{\sigma}\cdot(-\frac{\varepsilon\nabla\sigma}{\sigma}+\nabla\varepsilon)=\bar{J}\cdot\nabla(\frac{\varepsilon}{\sigma})$$ --电荷在媒质不均匀处驻立

✓ 在导电媒质均匀的区域：$\nabla\varepsilon=0,\ \ \nabla\sigma=0$ ==➔驻立电荷体密度为0

✓ 对于均匀导体，驻立电荷只分布在导线表面上 $\because\nabla\sigma\neq0$

17

- 电荷驻立于导体表面，这种状态的建立是需要一定时间的：

在导体中

$$\left.\begin{array}{l}\nabla\cdot\bar{J}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0\\ \nabla\cdot\bar{J}=\sigma\nabla\cdot\bar{E}\ =\dfrac{\sigma}{\varepsilon}\nabla\cdot\bar{D}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon}\rho\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

解方程得： $$\rho=\rho_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中： $\tau=\dfrac{\varepsilon}{\sigma}$ —— 驰豫时间

- 驰豫时间决定了导体内驻立电荷体密度随时间延续而衰减的快慢。
- 良导体驰豫时间小。

18

■ **恒定电流场方程**（在电源区域以外）：

$$\oint_l \bar{E}\cdot d\bar{l}=0 \qquad \boxed{\nabla\times\bar{E}=0}$$

$$\bar{E}=-\nabla\phi$$ 电流场里有电位！

$$\oiint_S \bar{J}\cdot d\bar{S}=0 \qquad \boxed{\nabla\cdot\bar{J}=0}$$

$$\bar{J}=\sigma\bar{E}$$

--欧姆定律：恒定电流场与静电场相互依存

--导电介质的本构关系

--有电荷运动，但电荷分布不变，呈驻立状态！

--电荷守恒：$\nabla\cdot\bar{J}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$

驻立电荷（不随时间变化）密度：

$$\rho=\bar{E}\cdot(-\frac{\varepsilon\nabla\sigma}{\sigma}+\nabla\varepsilon)=\frac{\bar{J}}{\sigma}\cdot(-\frac{\varepsilon\nabla\sigma}{\sigma}+\nabla\varepsilon)=\bar{J}\cdot\nabla(\frac{\varepsilon}{\sigma})$$

- 对于均匀导体，驻立电荷只分布在导线表面上；$\nabla\sigma\neq 0$
- 恒流状态的建立是需要一定时间的：$\tau=\varepsilon/\sigma$ --驰豫时间

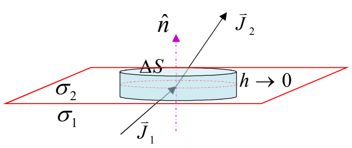
□ 恒流状态的维持需要非静电力的外源：--电源电动势

□ 电荷在导电媒质中有焦耳热损耗：$p=\vec{E}\cdot\vec{J}=\sigma|\vec{E}|^2$

19

A-3 恒定电流场的边界条件

1、电流场的边界条件：

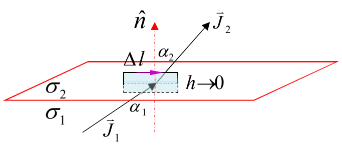


$$\oiint_S \bar{J}\cdot d\bar{S}=0 \Rightarrow \iint_{\Delta S_2}\bar{J}_2\cdot\hat{n}dS-\iint_{\Delta S_1}\bar{J}_1\cdot\hat{n}dS=0$$

$$\Rightarrow J_{2n}\Delta S-J_{1n}\Delta S=0$$

$$\boxed{J_{1n}=J_{2n}} \Rightarrow \sigma_1E_{1n}=\sigma_2E_{2n}$$

$$\sigma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$$



$$\oint_l \bar{E}\cdot d\bar{l}=0 \Rightarrow \int_{\Delta l_1}\bar{E}_1\cdot\hat{l}_1dl+\int_{\Delta l_2}\bar{E}_2\cdot\hat{l}_2dl=0$$

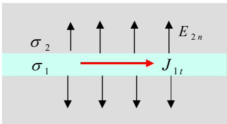
$$\Rightarrow E_{1t}\Delta l-E_{2t}\Delta l=0$$

$$\boxed{E_{1t}=E_{2t}} \Rightarrow \frac{J_{1t}}{\sigma_1}=\frac{J_{2t}}{\sigma_2}$$

$$\varphi_1=\varphi_2$$

20

2、介质—导体界面边界条件：



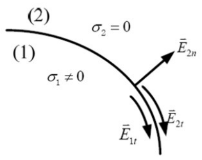
$\vec{J}=\sigma\vec{E}$

$J_{1n}=J_{2n} \Rightarrow \sigma_1 E_{1n}=\sigma_2 E_{2n}$

$E_{1t}=E_{2t} \Rightarrow J_{1t}/\sigma_1=J_{2t}/\sigma_2$

导体理想：$\sigma_1\to\infty \Rightarrow \vec{E}_1=0$ $\quad J_{2t}=0$ $\quad E_{2n}\neq 0$

$E_{1n}=E_{1t}=E_{2t}=0$ $\quad J_{1t}\neq 0$



介质理想：$\sigma_2=0 \Rightarrow \vec{J}_2=0$ $\quad E_{1n}=0$ $\quad E_{1t}\neq 0$

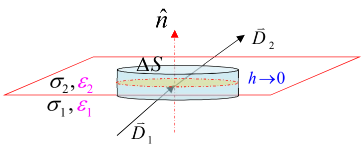
$J_{2t}=J_{2n}=J_{1n}=0$ $\quad J_{1t}\neq 0$

当介质和导体均非理想时：

$$E_{1t}=E_{2t}\neq 0 \qquad J_{2n}=J_{1n}\neq 0$$

3、分界面的驻立电荷面密度：

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=q \Rightarrow \iint_{\Delta S}\vec{D}_2\cdot\hat{n}dS-\iint_{\Delta S}\vec{D}_1\cdot\hat{n}dS=q$$



$D_{2n}-D_{1n}=\rho_{sf}$

$$\rho_{st}=\varepsilon_2 E_{2n}-\varepsilon_1 E_{1n}$$

$$=\varepsilon_2(\frac{J_{2n}}{\sigma_2})-\varepsilon_1(\frac{J_{1n}}{\sigma_1})$$

$J_{1n}=J_{2n}\equiv J_n$

$$\rho_{st}=J_n(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}-\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}) \xrightarrow{\sigma_1>>\sigma_2} \rho_{st}=E_{2n}\varepsilon_2=D_{2n}$$

4、电阻：-----两个等位面间的电压V/电流I

例：将一段截面尺寸为 $a\times b$，电导率为σ 的矩形金属条加工成如图所示的圆弧形，计算两端面间的电阻。

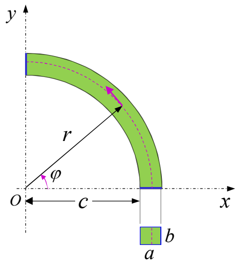
解：设导体两端面电压为V，电流线为弧线且密度为常数。

$$E_\varphi \cdot \frac{\pi r}{2} = V$$

$$J_\varphi = \sigma E_\varphi = \frac{2\sigma V}{\pi r}$$

$$I = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_c^{a+c} \vec{J}\cdot(\hat{\phi} b dr) = \frac{2\sigma b V}{\pi}\ln\frac{a+c}{c}$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\pi}{2\sigma b \ln\frac{c+a}{c}}$$



$c \gg a$：$\ln(1+a/c) \simeq a/c$

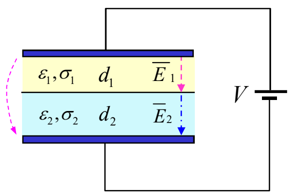
$$R \simeq \frac{\pi}{2\sigma b\cdot a/c} = \frac{\pi c}{2\sigma b a} = \frac{L}{\sigma S}$$

例：已知平行板电容器，面积为S，内填两种非理想介质，介质厚度、介电常数和电导率分别如图所示。计算等效电容和等效电阻（忽略边沿效应）。

解：

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = V$$

$$E_1\sigma_1 = E_2\sigma_2$$



$$E_1 = \frac{\sigma_2 V}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \qquad E_2 = \frac{\sigma_1 V}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$J_1 = E_1\sigma_1 = \frac{\sigma_2\sigma_1 V}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} = J_2$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{V}{JS} = \frac{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}{\sigma_1\sigma_2 S} = \frac{d_2}{\sigma_2 S} + \frac{d_1}{\sigma_1 S} = R_2 + R_1$$

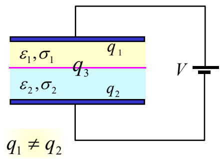
上下极板电荷密度：

$$q_1 = S\rho_{S1} = SE_1\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_1\sigma_2 VS}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$q_2 = S\rho_{S2} = SE_2\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2\sigma_1 VS}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$C_1 = \frac{q_1}{V_1} = \frac{SE_1\varepsilon_1}{E_1 d_1} = \frac{\varepsilon_1 S}{d_1}$$

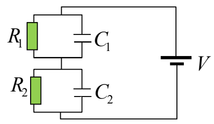
$$C_2 = \frac{q_2}{V_2} = \frac{SE_2\varepsilon_2}{E_2 d_2} = \frac{\varepsilon_2 S}{d_2}$$



$q_1 \neq q_2$

$q_3 = q_2 - q_1$

$\rho_{S3} = J_n(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1})$



电容串联

25

A-4 恒定电流场与静电场的对偶性

1、电流场方程与静电场方程的比较

- 恒定电流场(电源外)：

$$\oint_l \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0 \qquad \nabla\times\bar{E} = 0$$

$$\oiint_S \bar{J}\cdot d\bar{S} = 0 \qquad \nabla\cdot\bar{J} = 0$$

$$\bar{J} = \sigma\bar{E} \qquad \nabla^2\varphi = 0$$

- 静电场(无源区)：

$$\oint_l \bar{E}\cdot d\bar{l} = 0 \qquad \nabla\times\bar{E} = 0$$

$$\oiint_S \bar{D}\cdot d\bar{S} = 0 \qquad \nabla\cdot\bar{D} = 0$$

$$\bar{D} = \varepsilon\bar{E} \qquad \nabla^2\varphi = 0$$

➢ 边界条件：

$$J_{1n} = J_{2n}$$
$$E_{1t} = E_{2t}$$

➢ 边界条件：

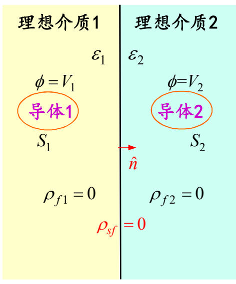
$$D_{1n} = D_{2n}$$
$$E_{1t} = E_{2t}$$

$\bar{J} \Leftrightarrow \bar{D}$

$\sigma \Leftrightarrow \varepsilon$

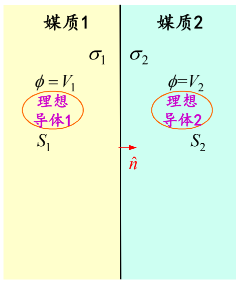
26

- 静电场(无源区)：
- 恒定电流场(电源外)：



$$\varphi_1=\varphi_2$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$$



$$\varphi_1=\varphi_2$$

$$\sigma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\sigma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$$

$\sigma \Longleftrightarrow \varepsilon$

2、静电比拟法

导体中的电流场和介质中的静电场**具有完全相同的分布特性**。

工程中，电流场的测量比静电场容易，常用导体中的电流场来研究相应的静电场问题。

在几何结构和边界条件相同的条件下，媒质的电导和电容间的对应关系：

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{\iint_S \bar{D}\cdot d\bar{S}}{\int_A^B \bar{E}\cdot d\bar{l}}=\frac{\varepsilon\iint_S \bar{E}\cdot d\bar{S}}{\int_A^B \bar{E}\cdot d\bar{l}}$$

$$G=\frac{I}{U}=\frac{\iint_s \bar{J}\cdot d\bar{S}}{\int_A^B \bar{E}\cdot d\bar{l}}=\frac{\sigma\iint_S \bar{E}\cdot d\bar{S}}{\int_A^B \bar{E}\cdot d\bar{l}}$$

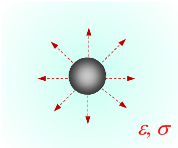
$$\Rightarrow \quad \frac{C}{G}=\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

3、接地电阻

- **接地电阻**：电流流过设备、接地导体、大地（地内电阻）的电阻之和。
- 计算接地电阻通常用**静电比拟法**。

例：计算深埋地下的半径为a的球形电极的接地电阻。

解：不考虑地面的影响，认为电流线均匀向外发散。



其电容： → 其电导： → 其电阻：

$$\frac{G}{C}=\frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad R=\frac{1}{G}$$

$$C=4\pi\varepsilon a \qquad G=4\pi\sigma a \qquad R=\frac{1}{4\pi\sigma a}$$

例：浅埋的半球形接地器，求接地电阻。

解：考虑地面的影响用镜像法处理。

由**静电比拟法**：

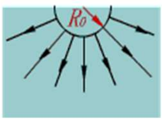
$$\frac{C}{G}=\frac{\varepsilon}{\sigma}, \quad C=4\pi\varepsilon a \rightarrow G=4\pi\sigma a$$

实际电导：

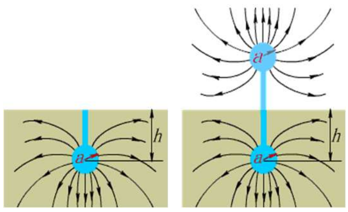
$$G'=G/2$$

故接地器接地电阻：

$$R=\frac{1}{2\pi\sigma a}$$



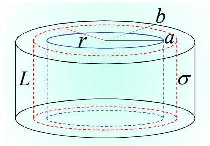
浅埋半球形接地器



非深埋的球形接地器

例：圆柱形电容器，长为L，内外导体均理想，半径分别为a 和 b，中填电导率为 σ 的导电媒质，计算内外导体间的电阻。

解：设内外导体间电流为I，作一半径为r 的圆柱面：



$$J = J_r = \frac{I}{2\pi rL}$$

$$E_r = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{2\pi rL\sigma}$$

$$V = \int_a^b E dr = \frac{I}{2\pi L\sigma}\ln\frac{b}{a}$$

$$\boxed{R = \frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi L\sigma}\ln\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{R = \frac{1}{\sigma}\int_l \frac{dl}{S}}$$

$$= \frac{1}{\sigma}\int_a^b \frac{dr}{2\pi rL}$$

$$C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\frac{b}{a}}$$

$$G = \frac{I}{V} = \frac{2\pi\sigma L}{\ln\frac{b}{a}}$$

31

A-5 恒定电流场的求解问题

求解的方法，与静电场类似，比较灵活：

- 利用与静电场的对偶性；
- 利用高斯定理： $\oint_S \bar{D}\cdot d\bar{S} = Q$ $\quad$ $\oint_S \bar{J}\cdot d\bar{S} = I$

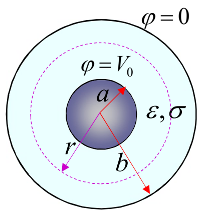
  同前，高斯面的选取很重要。特别注意：

  体积全部在均匀导电介质内部才有：$\oint_S \bar{D}\cdot d\bar{S} = 0$

  J 包括所有的电流才有：$\oint_S \bar{J}\cdot d\bar{S} = 0$，即 $\nabla\cdot\bar{J} = 0$
- 求解Laplace方程；
- 利用电阻的串并联；

32

例： 求如图所示理想导体球形电容器中的 $\varphi, \vec{E}, \vec{J}, G$



解： 方法多多！

➢ 利用静电场高斯定理：电场强度的对称性

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=Q_f \xrightarrow{4\pi r^2\cdot\varepsilon E_r=Q_f} E_r=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$$\varphi(r)=\int_r^b \vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon r}-\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon b}$$

$$\varphi(a)=\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon a}-\frac{Q_f}{4\pi\varepsilon b}=V_0$$

$$Q_f=\frac{4\pi\varepsilon V_0 ab}{b-a}$$

$$\varphi(r)=\frac{V_0 ab}{b-a}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)$$

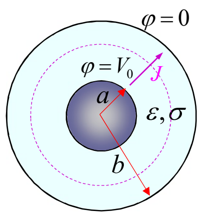
$$\vec{E}(r)=\frac{V_0 ab}{b-a}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}(r)=\frac{\sigma V_0 ab}{b-a}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$I=\oiint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=\frac{4\pi\sigma V_0 ab}{b-a}$$

$$G=\frac{I}{V_0}=\frac{4\pi\sigma ab}{b-a}$$

33



➢ 从恒定电流场通量出发：电流密度的对称性

$$\oiint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=I \xrightarrow{4\pi r^2\cdot J_r=I} \vec{J}=\frac{I}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E}(r)=\frac{\vec{J}}{\sigma}=\frac{I}{4\pi\sigma r^2}\hat{r}$$

$$\varphi(r)=\int_r^b \vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{I}{4\pi\sigma r}-\frac{I}{4\pi\sigma b}$$

$$\varphi(a)=\frac{I}{4\pi\sigma a}-\frac{I}{4\pi\sigma b}=V_0$$

$$I=\frac{4\pi\sigma V_0 ab}{b-a}$$

$$\varphi(r)=\frac{V_0 ab}{b-a}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)$$

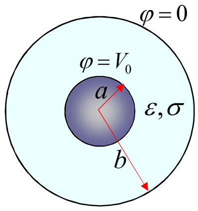
$$\vec{J}=\sigma\vec{E}(r)=\frac{\sigma V_0 ab}{b-a}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{E}(r)=\frac{V_0 ab}{b-a}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$G=\frac{I}{V_0}=\frac{4\pi\sigma ab}{b-a}$$

34

➢ **求解Laplace方程:** 电位的对称性（球面对称场）



$$\nabla^2\varphi(r)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial r})=0 \Rightarrow \varphi_1(r)=-\frac{C_1}{r}+C_2$$

$$\varphi(a)=-\frac{C_1}{a}+C_2=V_0$$

$$\varphi(b)=-\frac{C_1}{b}+C_2=0$$

$$C_1=\frac{V_0ab}{b-a},\quad C_2=-\frac{V_0a}{b-a}$$

$$\varphi(r)=\frac{V_0ab}{b-a}(\frac{1}{r}-\frac{1}{b})$$

$$\bar{E}(r)=-\nabla\varphi=\frac{V_0ab}{b-a}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

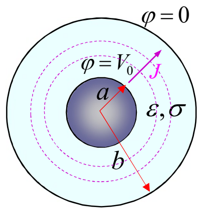
$$\bar{J}=\sigma\bar{E}(r)=\frac{\sigma V_0ab}{b-a}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$I=\oint\!\!\oint_S\bar{J}\cdot d\bar{S}=\frac{4\pi\sigma V_0ab}{b-a}$$

$$G=\frac{I}{V_0}=\frac{4\pi\sigma ab}{b-a}$$

35

➢ **利用电阻串并联：** 等位面间距处处相等



$$\boxed{R=\frac{1}{\sigma}\int_l\frac{dl}{S}}=\frac{1}{\sigma}\int_a^b\frac{dr}{4\pi r^2}=\frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$G=\frac{1}{R}=\frac{4\pi\sigma ab}{b-a}$$

$$I=V_0G=\frac{4\pi\sigma V_0ab}{b-a}$$

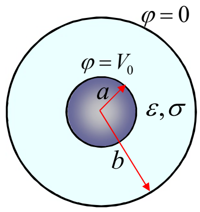
$$\bar{J}=J_r\hat{r}=\frac{I}{4\pi r^2}\hat{r}=\frac{\sigma V_0ab}{b-a}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\bar{E}(r)=\frac{\bar{J}}{\sigma}=\frac{V_0ab}{b-a}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\varphi(r)=\int_r^b\bar{E}\cdot d\bar{r}=\frac{V_0ab}{b-a}(\frac{1}{r}-\frac{1}{b})$$

36

◆ **关于高斯定理：**



$$\oiint_S \bar{J}\cdot d\bar{S}=I$$

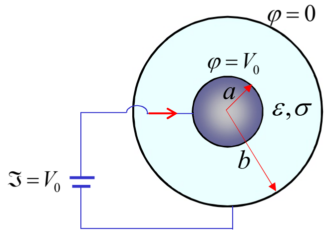
$$\bar{J}=\sigma\bar{E}(r)=\frac{\sigma V_0 ab}{b-a}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\nabla\cdot\bar{J}=\frac{\sigma V_0 ab}{b-a}\nabla\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)=0$$

$$\oiint_S \bar{J}\cdot d\bar{S}\neq\iiint_V \nabla\cdot\bar{J}dV$$

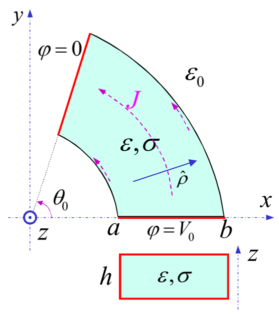
$\because$电容器漏电 $G=\dfrac{I}{V_0}=\dfrac{4\pi\sigma ab}{b-a}$，

$\therefore$维持内导体电位V_0需要外源！



电容器中均匀介质，但 $\nabla\cdot\bar{J}\neq0$?!

例： 求如图所示边界结构中的 φ 和 G。



解1： 根据边界上的电力线分布，可假定：$\bar{E}=E_\theta\hat{\theta}$

等位面为每一个 $\theta=$常数 的面；

内部充以均匀导电介质：$\nabla\cdot\bar{E}=0$，故电力线连续；

由于ρ向上没有电场强度的通量，且矢量管的通量不变，故 E_θ与θ 无关！

$$-d\varphi=\bar{E}\cdot d\bar{l}=E_\theta r d\theta$$

$$\varphi(\theta)=-\int_\theta^{\theta_0}d\varphi=E_\theta r(\theta_0-\theta)$$

$$\varphi(0)=E_\theta r\theta_0=V_0$$

$$E_\theta=V_0/r\theta_0$$

$$\varphi(\theta)=\frac{V_0}{\theta_0}(\theta_0-\theta)$$

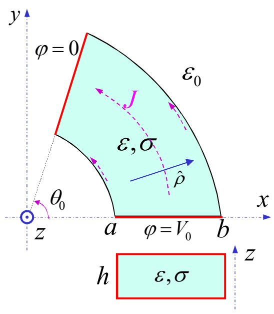
$$J_\theta=\sigma E_\theta$$

$$I=\int_S \bar{J}\cdot d\bar{S}=\int_0^h\int_a^b\frac{\sigma V_0}{r\theta_0}drdz=\frac{\sigma V_0 h}{\theta_0}\ln\frac{b}{a}$$

$$G=\frac{I}{V_0}=\frac{\sigma h}{\theta_0}\ln\frac{b}{a}$$

解2： 求解Laplace方程。

据边界条件分析，不妨假定： $\varphi=\varphi(\theta)$



$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0 \Longrightarrow \varphi(\theta)=A(\theta_0-\theta)+B$$

利用边界条件，得：

$$\varphi(\theta)=\frac{V_0}{\theta_0}(\theta_0-\theta)$$

$$E=E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{V_0}{r\theta_0}$$

$$J_\theta=\sigma E_\theta$$

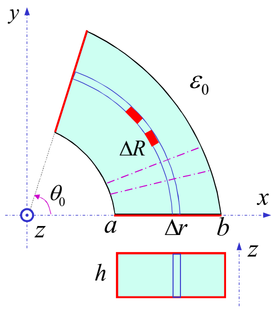
$$I=\int_S\vec{J}\cdot d\vec{S}=\int_0^h\int_a^b\frac{\sigma V_0}{r\theta_0}drdz=\frac{\sigma V_0 h}{\theta_0}\ln\frac{b}{a}$$

$$G=\frac{I}{V_0}=\frac{\sigma h}{\theta_0}\ln\frac{b}{a}$$

39

解3： 求电导，直接分析电阻。

由于其等位面为 $\theta=\theta_i$ 等位面间距离不等，需要在区域里作分区分层处理，求得不同小区的等效电阻，最后串并联求得总电阻：



“沿垂直于等位面方向分层，沿电流流向分段”

计算电阻时，相当于先串联后并联。

分层上，一个条带的电阻： $\Delta R_r=\frac{r\Delta\theta}{\sigma h\Delta r}$ $\quad R=\frac{l}{\sigma S}$

电阻沿电流方向串联： $R_r=\int_0^{\theta_0}dR_r=\int_0^{\theta_0}\frac{rd\theta}{\sigma h\Delta r}=\frac{r\theta_0}{\sigma h\Delta r}$

该分层的电导： $G_r=\frac{1}{R_r}=\frac{\sigma h\Delta r}{r\theta_0}$

不同分层电导的并联： $G_r=\int_a^b G_r=\int_a^b\frac{\sigma hdr}{r\theta_0}=\frac{\sigma h}{\theta_0}\ln\frac{b}{a}$

40

Thank You !

41