

# 小结： 温度和费米分布

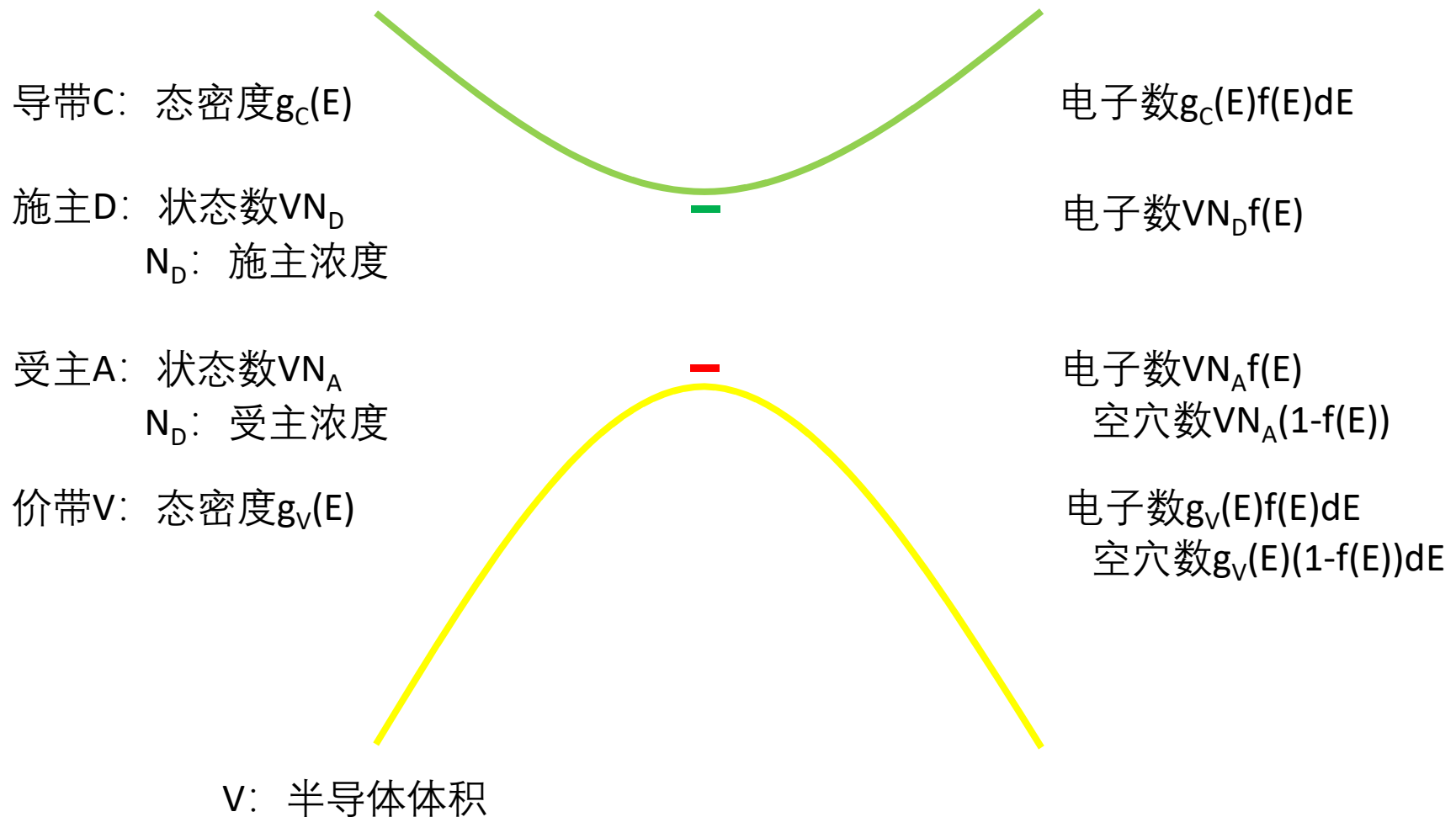
- 确定的温度对应某种确定的粒子能量分布
- 对于电子，该分布为费米分布

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1}$$

其中E代表能量， $E_F$ 表示费米能级， $k_B$ 为玻尔兹曼常数，T为温度  
f(E)表示粒子占据能量为E的态的概率

- f(E)表示一个态中电子的平均个数
- 当状态数为g时，gf(E)表示能量为E的态中电子的（平均）个数
- 当态密度为g(E)时，g(E)f(E)dE表示能量为E到E+dE的态中电子的个数

# 半导体能带中的电子数



# 费米分布

$T=0$ 时有

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{\infty + 1} = 0, E > E_F \\ \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}, E = E_F \\ \frac{1}{0 + 1} = 1, E < E_F \end{cases}$$

即图中的A线

意义： $T=0$ 时，电子由低至高依次填满所有能级；往上则全空

$T>0$ 时，费米分布逐渐“融化”，但始终保持

$$f(E_F) = 1/2$$

$T>0$ 时，费米分布“融化”的部分在 $E_F$ 上下若干 $k_B T$ 的范围

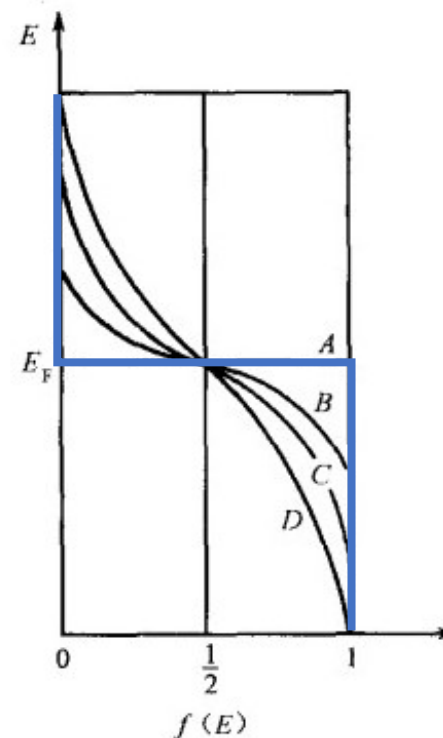


图 3-3 费米分布函数与温度关系曲线 (曲线 A, B, C, D 分别是 0K, 300K, 1 000K, 和 1 500K 的  $f(E)$  曲线)

# 费米能级的特征

- 在半满带中
  - 0 K时，费米能级即电子填到的最高能级
- 有能隙时
  - 精确计算需要额外条件；0 K时，位于带隙里某处
- 费米能级不是独立的参量，可通过温度和电子总数守恒计算
  - 电子总数守恒又叫做电中性条件；指的是，为了保持半导体的电中性，半导体中有多少电子
    - 掺杂施主可使电子变多，掺杂受主可使电子变少
- 费米能级通常会随温度改变

## 例题：简化的施主电离模型

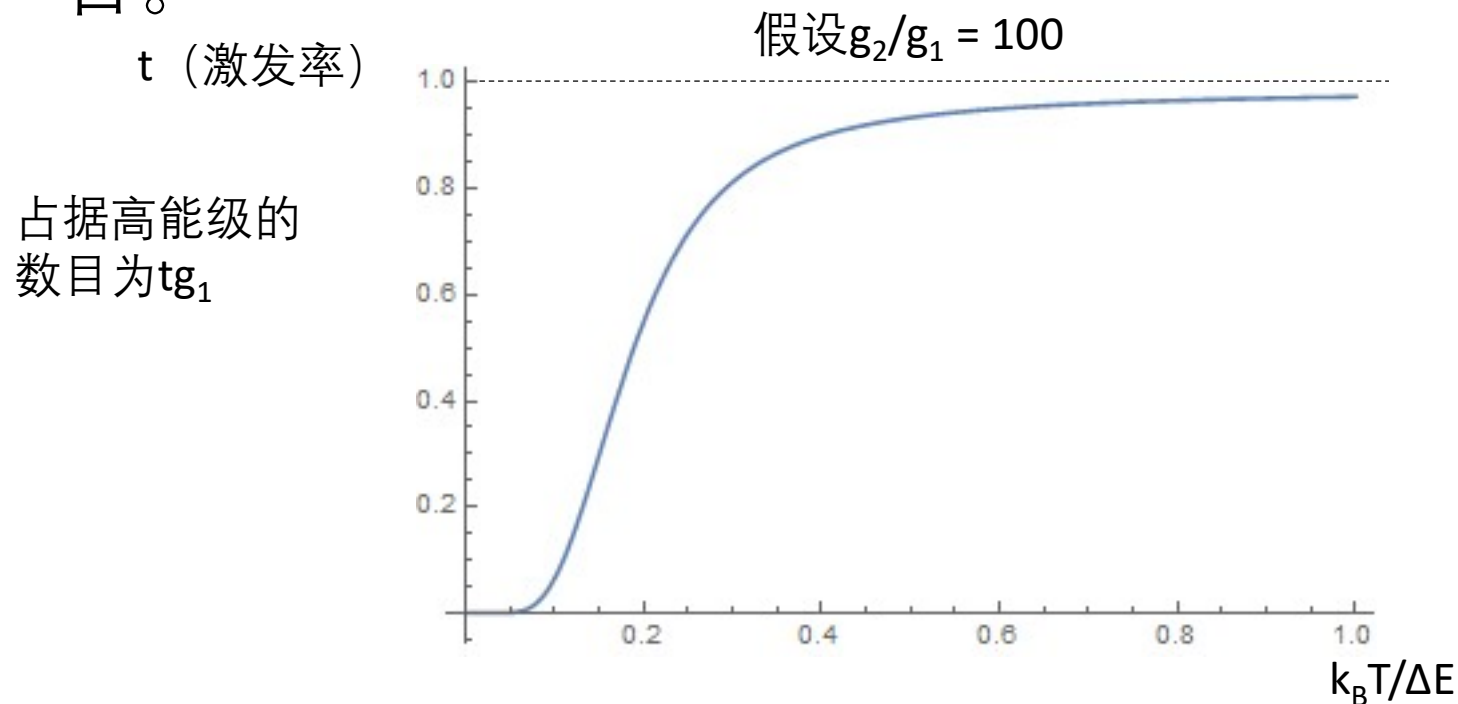
- 假设电子能占据2个能级，能量间隔为 $\Delta E$ 。从低到高每个能级的状态数为 $g_1$ 和 $g_2$ （ $g_1 \ll g_2$ ）。电子总数为 $N$ 。求温度为 $T$ 时电子占据高能级的数目。

# 例题：简化的施主电离模型

- 解法：
- 1.画出能级图，写出能级上的电子数
  - 即 $gf(E)$ 。注意，其中含未知的 $E_F$ ，无法直接计算
- 2.列出电子数守恒/电中性条件方程
  - 即所有电子数加起来等于多少
- 3.利用该方程求出 $E_F$
- 4.利用 $E_F$ 求出电子数

# 例题：简化的施主电离模型

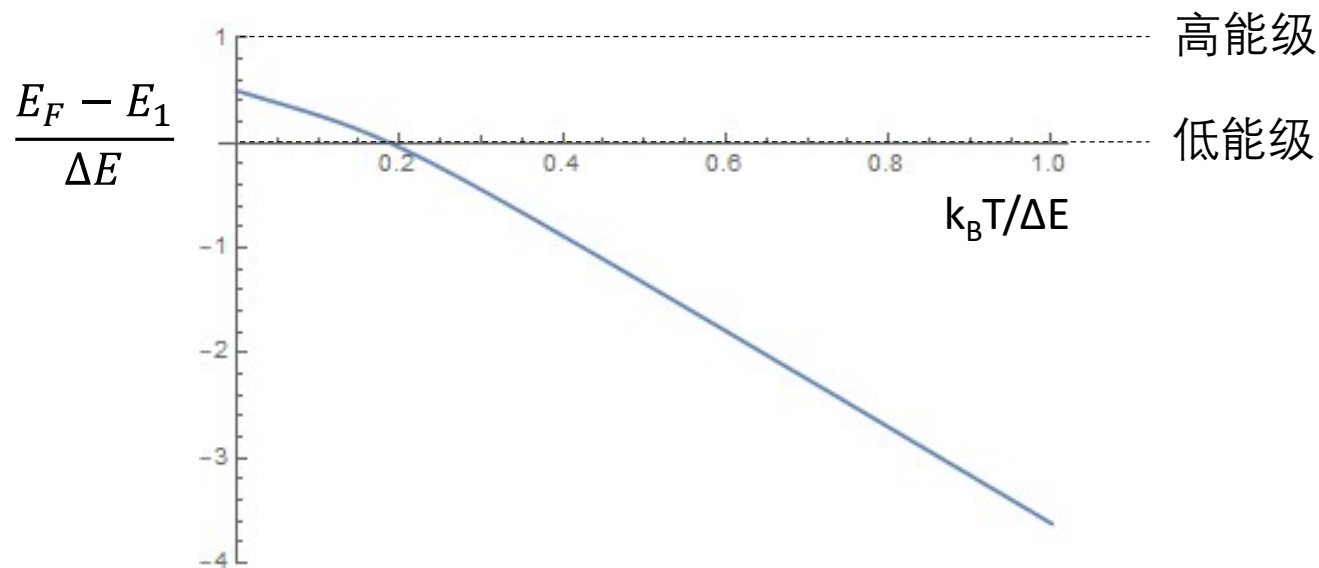
- 假设电子能占据2个能级，能量间隔为 $\Delta E$ 。从低到高每个能级的状态数为 $g_1$ 和 $g_2$ （ $g_1 \ll g_2$ ）。电子总数为 $g_1$ 。求温度为 $T$ 时电子占据高能级的数目。



# 例题：简化的施主电离模型

- 假设电子能占据2个能级，能量间隔为 $\Delta E$ 。从低到高每个能级的状态数为 $g_1$ 和 $g_2$ （ $g_1 \ll g_2$ ）。电子总数为 $g_1$ 。求温度为 $T$ 时电子占据高能级的数目。

假设 $g_2/g_1 = 100$





## 例题：简化的施主电离模型

- 假设电子能占据2个能级，能量间隔为 $\Delta E$ 。从低到高每个能级的状态数为 $g_1$ 和 $g_2$ （ $g_1 \ll g_2$ ）。电子总数为 $g_1$ 。求温度为 $T$ 时电子占据高能级的数目。
- $T=0$ ：全在低能级， $E_F$ 位于两能级中间
- $T>0$ ：逐渐激发， $E_F$ 逐渐下降。当 $k_B T$ 和 $\Delta E$ 大约在一个数量级时，基本激发到高能级
  - 例如， $g_2/g_1=100$ 时， $k_B T=0.4\Delta E$ 即可激发90%的电子
  - 具体什么能量能激发，和 $g_2/g_1$ 的值有关

## 第三章： 大纲

- 回顾热力学里温度的概念（复习）
- **电子系统中温度和能量分布的关系**
  - 费米分布
  - **态密度（复习第二章）**
  - 本征半导体中的载流子浓度
  - 掺杂半导体中的载流子浓度
- 霍耳效应（教材12.1）

# 电子在不同温度下的能量分布

- 电子的统计分布 $f(E)$ 
  - 一个包含温度的表达式，显示了占据某能量态的概率
- 电子的态密度 $g(E)$  (即DOS)
  - 单位能量中含有多少个电子状态
- 电子的统计分布 \* 电子的态密度 $g(E)f(E)$ 
  - 某能量态附近，单位能量中电子的密度
- $g(E)f(E)$ 对能量积分
  - 某能量范围中电子的密度，即载流子浓度

# 能带边缘电子态密度 $g(E)$

三维各向同性单条能带

$g(E)$ 的含义为在某能量 $E$ 附近，单位能量（ $dE$ ）的电子态数目（ $dZ$ ）

能带为 
$$E = \frac{\hbar^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2}{2m^*} + E_C$$

$E$ 和 $E+dE$ 中间的电子态数目为： $E$ 和 $E+dE$ 之间的 $k$ 空间体积\*单位 $k$ 空间体积的状态数

前者为 $E$ 对应的等能面（球）和 $E+dE$ 对应的等能面（球）之间的部分

半径  $\sqrt{\frac{2m^*(E - E_C)}{\hbar^2}}$  球体积  $\frac{4}{3}\pi \left(\frac{2m^*(E - E_C)}{\hbar^2}\right)^{3/2}$  目标体积  $2\pi \left(\frac{2m^*}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E - E_C} dE$   
(过程略)

后者前文已算得，为  $\frac{2V}{(2\pi)^3}$  因为波矢之间的间距： $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$ ，考虑自旋再乘以2

故 
$$g(E) = \frac{dZ}{dE} = 2\pi \left(\frac{2m^*}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E - E_C} \frac{2V}{(2\pi)^3} = \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m^*)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E - E_C}$$

# 能带边缘电子态密度 $g(E)$

三维各向同性单条能带

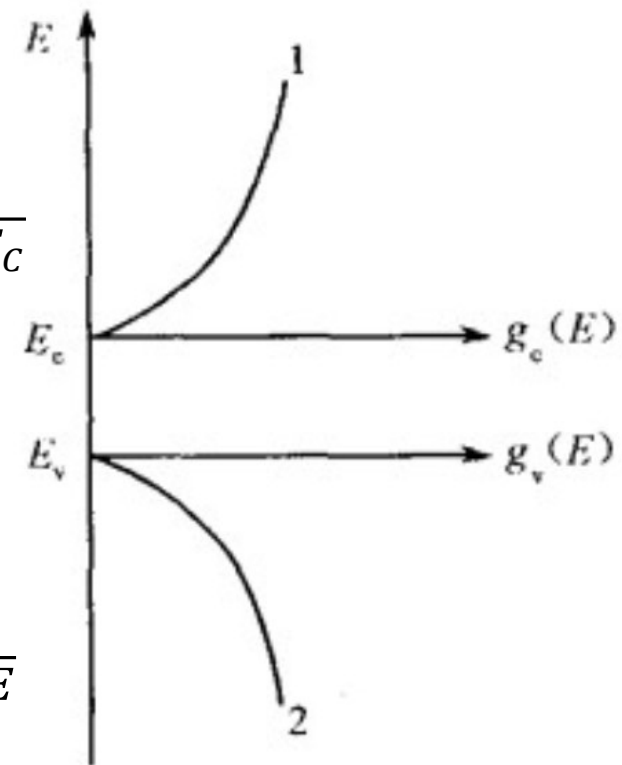
导带底  $E = \frac{\hbar^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2}{2m^*} + E_C = \frac{\hbar^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2}{2m_n^*} + E_C$

$$g(E) = \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m^*)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E - E_C} = \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m_n^*)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E - E_C}$$

价带顶类似，只是电子有效质量为负数， $E_C$ 变为 $E_V$

$$E = \frac{\hbar^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2}{2m^*} + E_V = -\frac{\hbar^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2}{2m_p^*} + E_V$$

$$g(E) = \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m^*)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E - E_V} = \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m_p^*)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E_V - E}$$



因此，在能带边缘，DOS和E到能带边距离的平方根成正比

图 3-2 状态密度与能量的关系

# 硅、锗导带电子态密度的计算

Si、Ge的导带底并非各向同性，还有能级简并

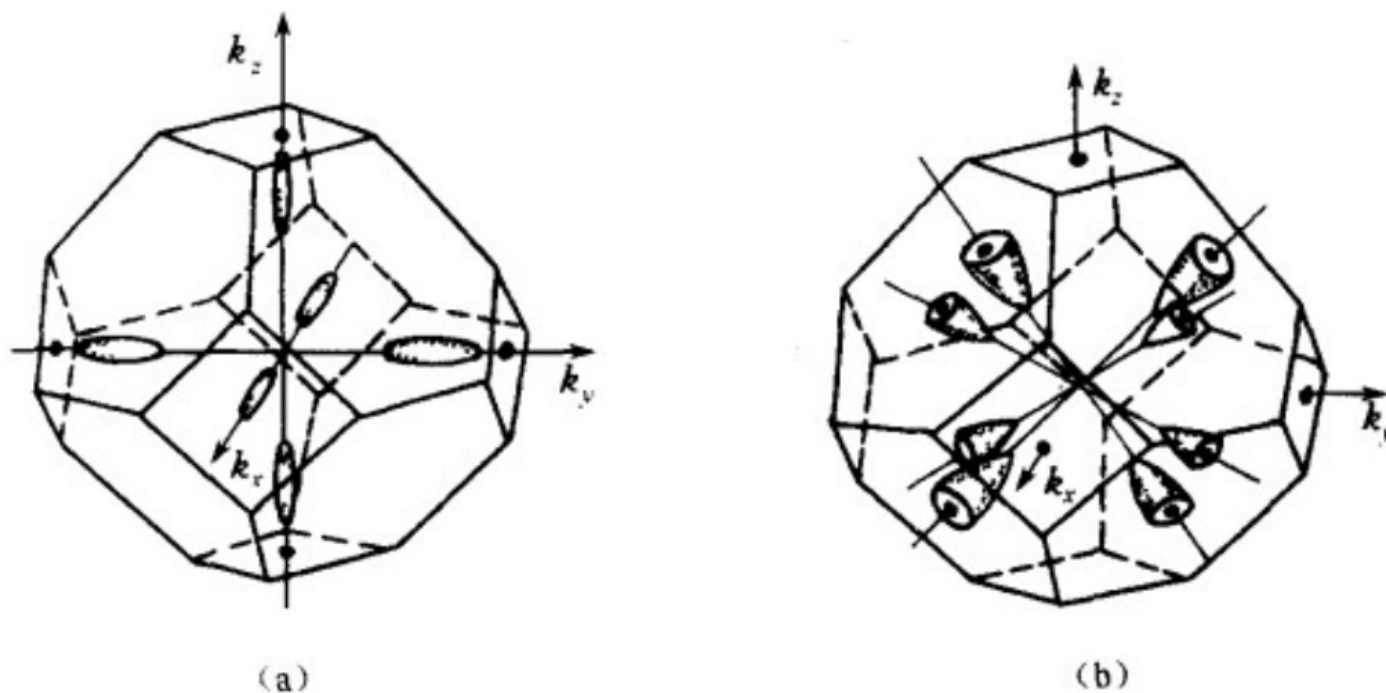


图 1-24 硅和锗导带等能面示意图

# 硅、锗导带电子态密度的计算

$\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$  是相对于导带底的波矢量

能带 
$$E = \frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{k_1^2}{m_t^*} + \frac{k_3^2}{m_l^*} \right) + E_C$$

此时等能面为椭球面

$E$  和  $E+dE$  中间的能量态数目对应等能面向外扩展  $dE$  的椭球壳体积，乘以  $\frac{2V}{(2\pi)^3}$

$E$  对应等能面包围的体积为 
$$\frac{4}{3}\pi \sqrt{\left(\frac{2}{\hbar^2}\right)^3 m_t^{*2} m_l^* (E - E_C)^3}$$

因此 
$$\frac{dZ}{dE} = \frac{2V}{(2\pi)^3} 2\pi \sqrt{\left(\frac{2}{\hbar^2}\right)^3 m_t^{*2} m_l^* (E - E_C)}$$

$$\frac{dZ}{dE} = \frac{V}{2\pi^2} \frac{2^{\frac{3}{2}} (m_t^{*2} m_l^*)^{\frac{1}{2}}}{\hbar^3} \sqrt{E - E_C}$$

# 硅、锗导带电子态密度的计算

考虑对称性，硅有6个相同的导带底，则  $g(E) = 6 \frac{V}{2\pi^2} \frac{2^{\frac{3}{2}} (m_t^{*2} m_l^*)^{\frac{1}{2}}}{\hbar^3} \sqrt{E - E_C}$

如果令  $m_{dn}^* = 6^{2/3} (m_t^{*2} m_l^*)^{1/3}$ ，称为导带态密度有效质量

则  $g(E)$  有和各向同性情况具有相似的表达式

$$g(E) = \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m_{dn}^*)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E - E_C}$$

锗的情况类似，不过有4个相同的导带底



# 硅、锗价带空穴态密度的计算

$\mathbf{k}$ 是（相对于价带顶的）波矢量

$$\text{轻空穴带 } E = -\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m_{pl}^*} + E_V \quad \text{重空穴带 } E = -\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m_{ph}^*} + E_V$$

当 $E$ 偏离 $E_V$ 不太多时，等能面近似为球面

$$\text{因此直接有 } g(E) = \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m_{pl}^*)^{3/2} + (2m_{ph}^*)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E_V - E}$$

如果令 $m_{dp}^* = ((m_{pl}^*)^{3/2} + (m_{ph}^*)^{3/2})^{2/3}$ ，称为价带态密度有效质量

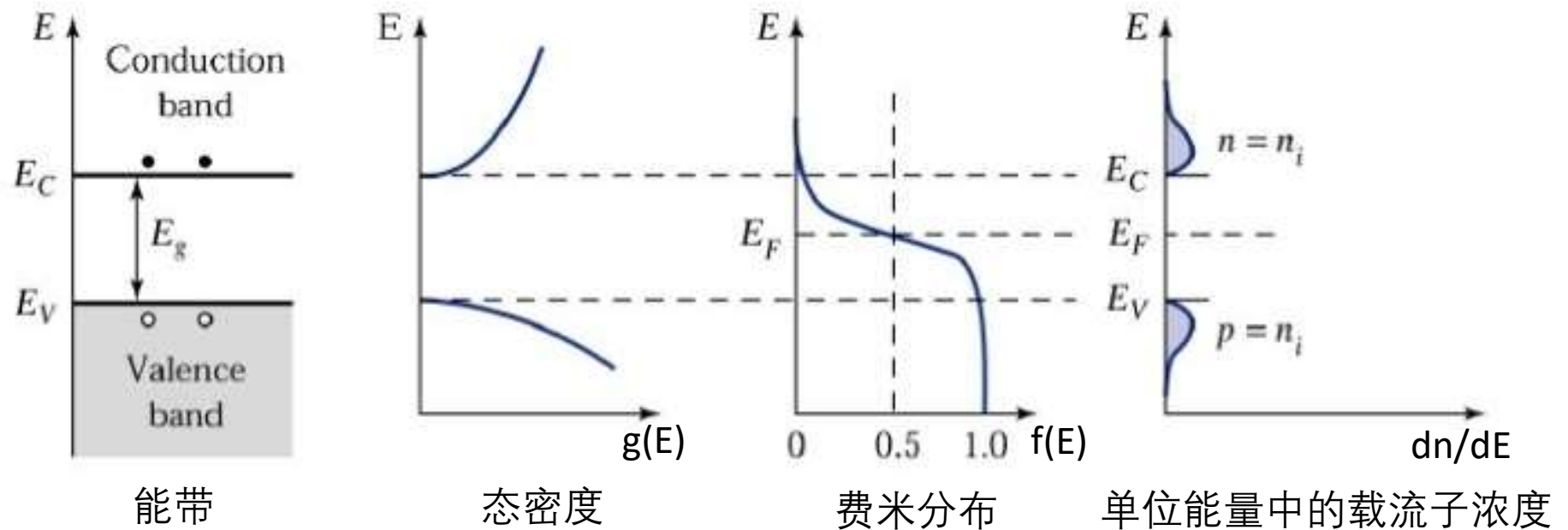
则 $g(E)$ 也有和各向同性单带情况具有相似的表达式

$$g(E) = \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m_{dp}^*)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E_V - E}$$

# 电子在不同温度下的能量分布

- 电子的统计分布 $f(E)$ 
  - 一个包含温度的表达式，显示了占据某能量态的概率
- 电子的态密度 $g(E)$ 
  - 单位能量中含有多少个电子状态
- **电子的统计分布 \* 电子的态密度 $g(E)f(E)$** 
  - 某能量态附近，单位能量中电子的密度
- **$g(E)f(E)$ 对能量积分**
  - 某能量范围中电子的密度，即载流子浓度

# 载流子浓度计算的核心思想



状态数

$$dZ = g(E)dE$$

电子数

$$dN = g(E)f(E)dE$$

电子浓度

$$dn = \frac{1}{V} g(E)f(E)dE$$

因此 
$$n = \int \frac{1}{V} g(E)f(E)dE$$

# 半导体能带中的载流子浓度

导带电子浓度  $n = \int \frac{1}{V} g_C(E) f(E) dE$

导带C: 态密度  $g_C(E)$

电子数  $g_C(E) f(E) dE$

施主D: 状态数  $V N_D$   
 $N_D$ : 施主浓度

电子数  $V N_D f(E)$

受主A: 状态数  $V N_A$   
 $N_A$ : 受主浓度

电子数  $V N_A f(E)$   
 空穴数  $V N_A (1 - f(E))$

价带V: 态密度  $g_V(E)$

电子数  $g_V(E) f(E) dE$   
 空穴数  $g_V(E) (1 - f(E)) dE$

$V$ : 半导体体积

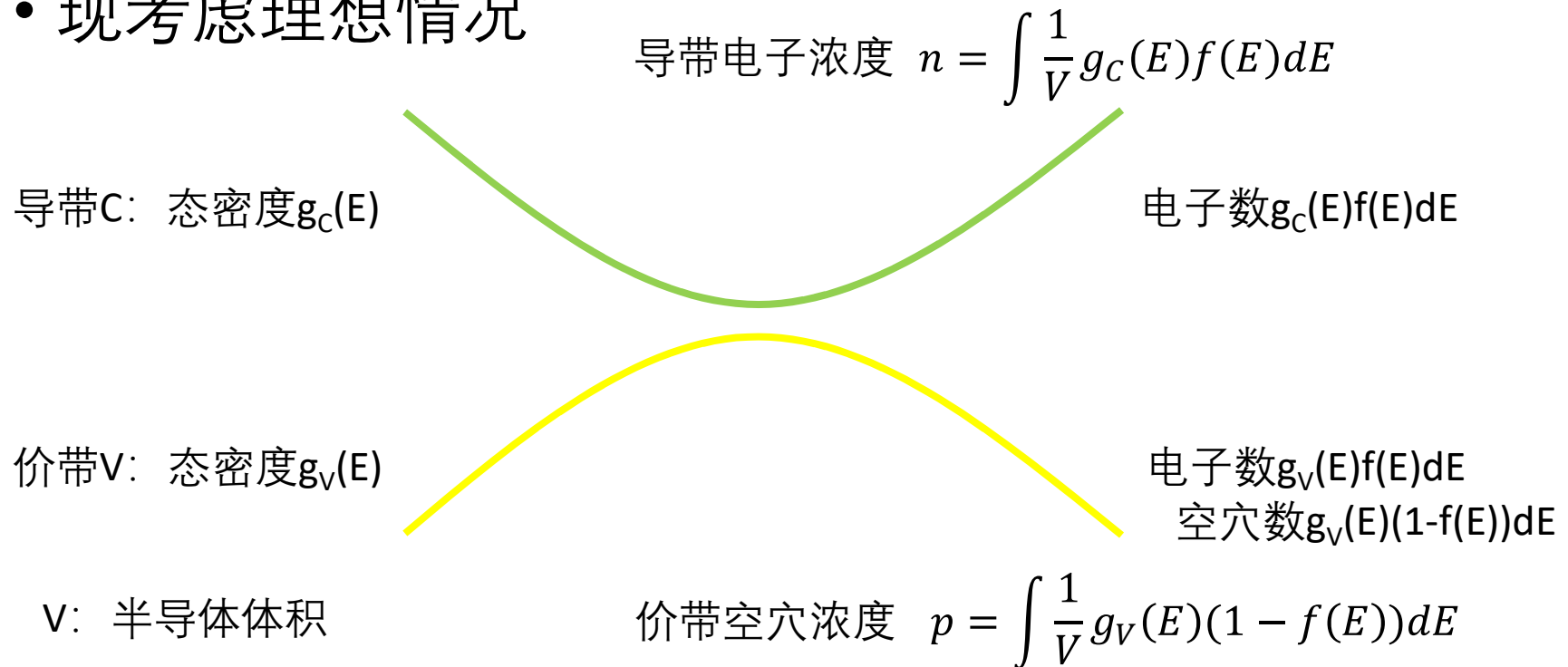
价带空穴浓度  $p = \int \frac{1}{V} g_V(E) (1 - f(E)) dE$

## 第三章： 大纲

- 回顾热力学里温度的概念（复习）
- **电子系统中温度和能量分布的关系**
  - 费米分布
  - 态密度（复习第二章）
  - **本征半导体中的载流子浓度**
  - 掺杂半导体中的载流子浓度
- 霍耳效应（教材12.1）

# 本征半导体

- 理想情况：完全没有掺杂的半导体
- 实际情况：施主和受主掺杂都很少，并且基本补偿的半导体
- 现考虑理想情况



# 载流子浓度计算

注意：为符号简便起见，以下推导中省去态密度有效质量中的“d”

$$\text{导带底 } g_c(E) = \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m_n^*)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E - E_c}$$

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1}$$

$$g_c(E)f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1} \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m_n^*)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E - E_c}$$

$$\text{价带顶 } g_v(E) = \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m_p^*)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E_v - E}$$

$$1 - f(E) = 1 - \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1}$$

$$g_v(E)(1 - f(E)) = \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1}\right) \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m_p^*)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E_v - E}$$

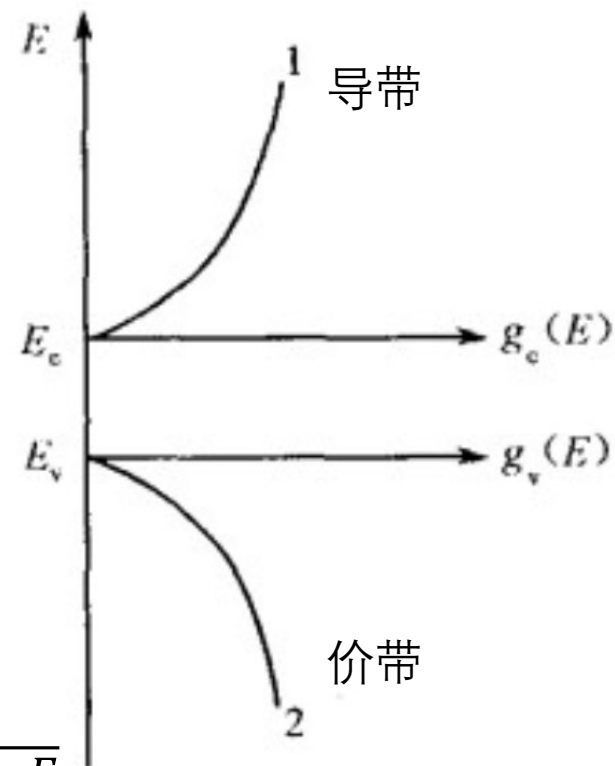


图 3-2 状态密度与能量的关系

# 载流子浓度计算

注意：为符号简便起见，以下推导中省去态密度有效质量中的“d”

$$\text{导带底 } g_c(E) = \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m_n^*)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E - E_c}$$

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1}$$

$$g_c(E)f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1} \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m_n^*)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E - E_c}$$

In[4]:= Integrate[(1/(Exp[(En - EF)/(kBT)] + 1)) (V/(2π^2)) (2m)^(3/2) / hbar^3 Sqrt[En - EC], {En, EC, ∞}]

Out[4]=  $\int_{EC}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \sqrt{-EC + En} m^{3/2} V}{(1 + e^{\frac{-EF + En}{kBT}}) \hbar^3 \pi^2} dEn$

Mathematica软件，算不出来

积分的解析形式连电脑都算不出来，怎么办？

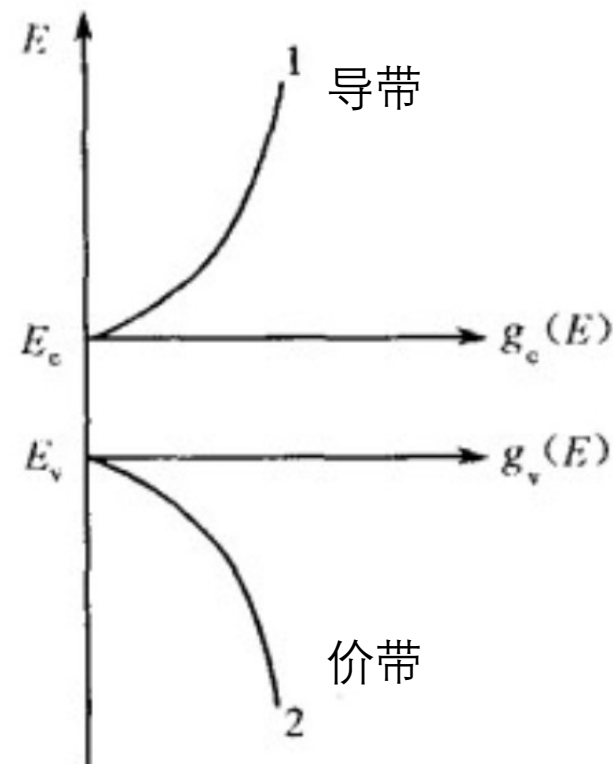


图 3-2 状态密度与能量的关系



# 费米分布的简化

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1} \sim e^{-\frac{E-E_F}{k_B T}}$$

在指数项远大于1时，可以忽略后面的1，此时退化成玻尔兹曼分布，称为非简并系统（非简并半导体）。反之称为简并系统（简并半导体）

$$E - E_F > 2.5k_B T \text{ 时 } e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} \sim 10 \gg 1 \quad \text{通常认为满足要求}$$

$$\text{同理对于空穴 } 1 - f(E) = \frac{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}}}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1} \sim e^{\frac{E-E_F}{k_B T}}$$

在分母指数项远小于1时，可以忽略前面的指数项，此时也退化成玻尔兹曼分布，也有简并和非简并之分

$$E - E_F < -2.5k_B T \text{ 时 } e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} \sim 0.1 \ll 1 \quad \text{通常认为满足要求}$$

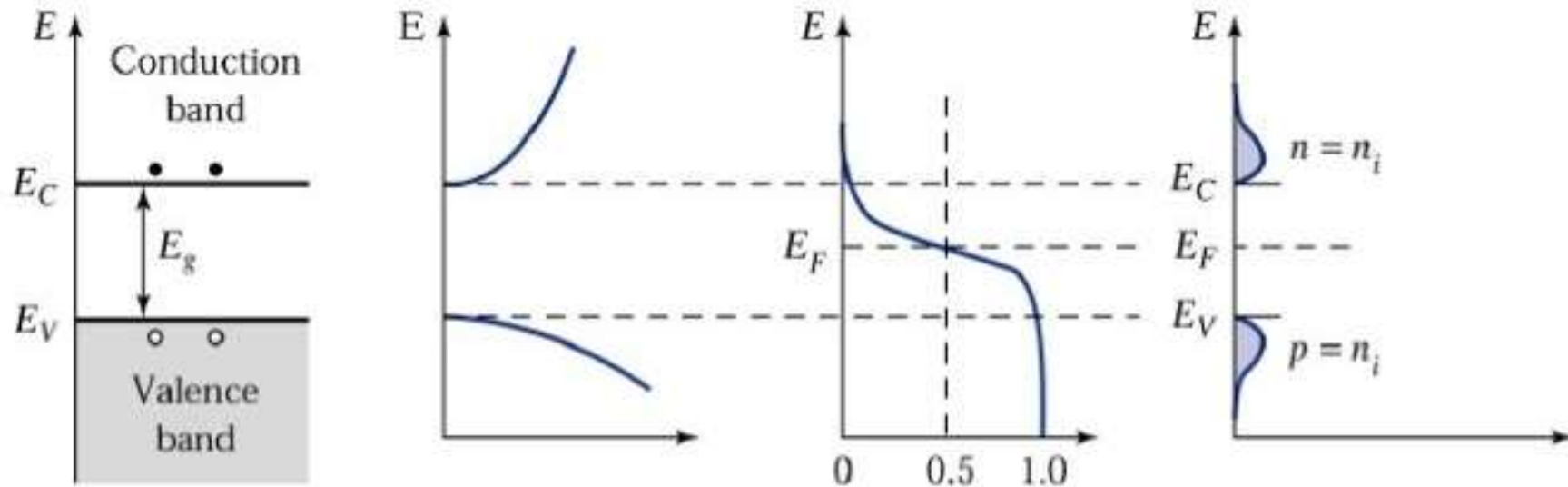
在掺杂浓度不太大时，为非简并半导体；下面主要讨论非简并半导体

# 载流子浓度计算

导带底  $g_c(E)f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1} \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m_n^*)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E - E_C} \sim \frac{V}{2\pi^2} \frac{(2m_n^*)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E - E_C} e^{-\frac{E-E_F}{k_B T}}$

$$n = \int \frac{1}{V} g(E)f(E)dE = \int_{E_C}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2} \frac{(2m_n^*)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{E - E_C} e^{-\frac{E-E_F}{k_B T}} dE$$

$$= 2 \frac{(m_n^* k_B T / 2\pi)^{3/2}}{\hbar^3} e^{-\frac{E_C-E_F}{k_B T}} \equiv N_C e^{-\frac{E_C-E_F}{k_B T}}$$



# 载流子浓度计算

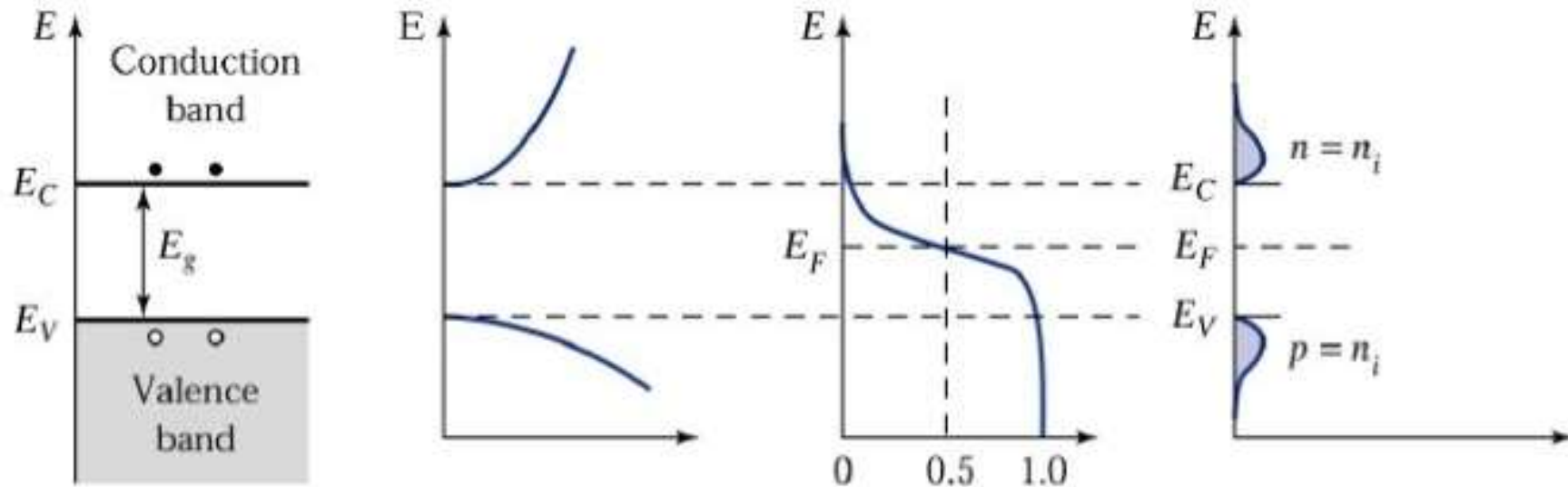
导带底

$$n = 2 \frac{(m_n^* k_B T / 2\pi)^{3/2}}{\hbar^3} e^{-\frac{E_C - E_F}{k_B T}} \equiv N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{k_B T}}$$

$N_C$ 的物理意义:

如果将  $N_C$  理解为  $E_C$  处的状态数,  $e^{-\frac{E_C - E_F}{k_B T}}$  理解为玻尔兹曼分布函数, 也可得到相同结果

因此  $N_C$  也称“导带等效状态浓度”



# 载流子浓度计算

同理，价带顶 
$$p = 2 \frac{(m_p^* k_B T / 2\pi)^{3/2}}{\hbar^3} e^{-\frac{E_F - E_V}{k_B T}} \equiv N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{k_B T}}$$

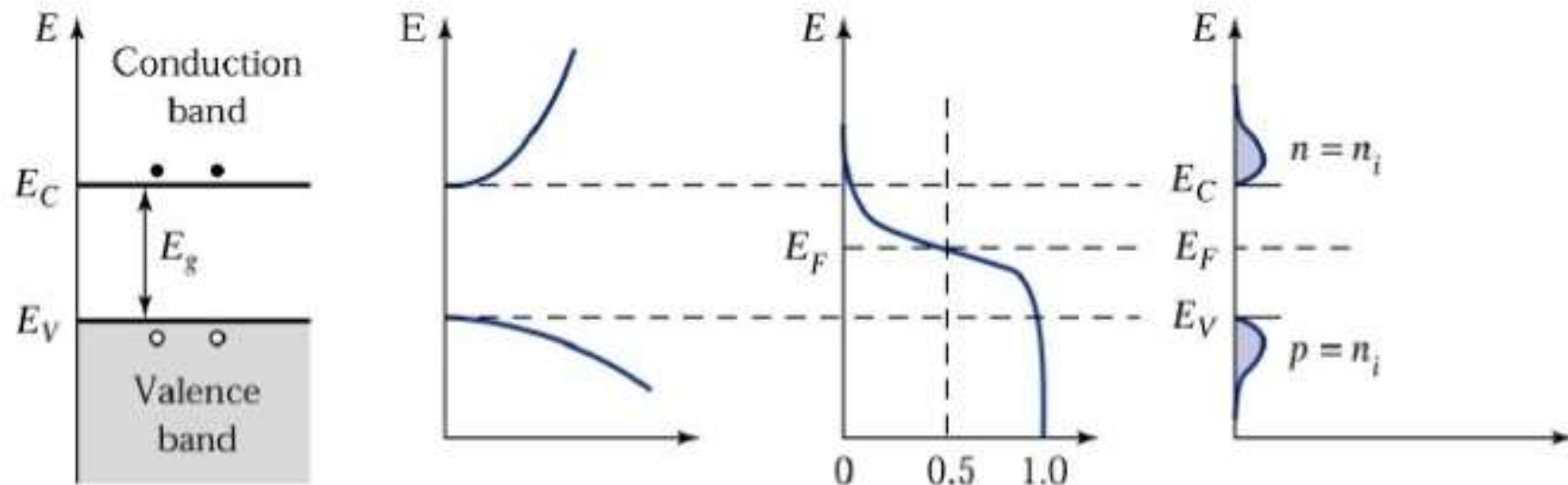
$N_V$  也称“价带等效状态浓度”

注意：导带、价带等效状态浓度不是一种“态密度”！

态密度  $g(E) = \text{DOS} = dZ/dE$  单位是“个/eV”

$N_C$ 、 $N_V$  单位为“个/cm<sup>3</sup>”，叫做“浓度”是因为除以了体积  $V$

书上  $N_C$ 、 $N_V$  叫做“等效状态密度”，很容易引起混淆



# 非简并半导体的载流子浓度

玻尔兹曼分布

导带电子浓度  $n = N_C f(E)$

导带C: 状态数  $VN_C$

$N_C$ : 导带等效状态浓度

电子数  $VN_C f(E)$

施主D: 状态数  $VN_D$

$N_D$ : 施主浓度

电子数  $VN_D f(E)$

暂时不看施主受主

受主A: 状态数  $VN_A$

$N_A$ : 受主浓度

电子数  $VN_A f(E)$

空穴数  $VN_A (1-f(E))$

价带V: 态密度  $VN_V$

$N_V$ : 价带等效状态浓度

电子数  $VN_V f(E)$

空穴数  $VN_V (1-f(E))$

$V$ : 半导体体积

价带空穴浓度  $p = N_V (1 - f(E))$

玻尔兹曼分布

# 本征半导体模型

- 假设电子能占据2个能级，能量间隔为 $E_g$  ( $= E_c - E_v$ 为半导体的带隙)。从低到高每个能级的状态浓度为 $N_v$ 和 $N_c$  ( $N_v$ 和 $N_c$ 为同一数量级)。电中性条件为 $n=p$ 。求温度为 $T$ 时的载流子浓度。使用非简并条件。

# 本征半导体的电中性条件

- 对于本征半导体，激发的电子数=留下的空穴数
- $n=p$ ，即电中性条件

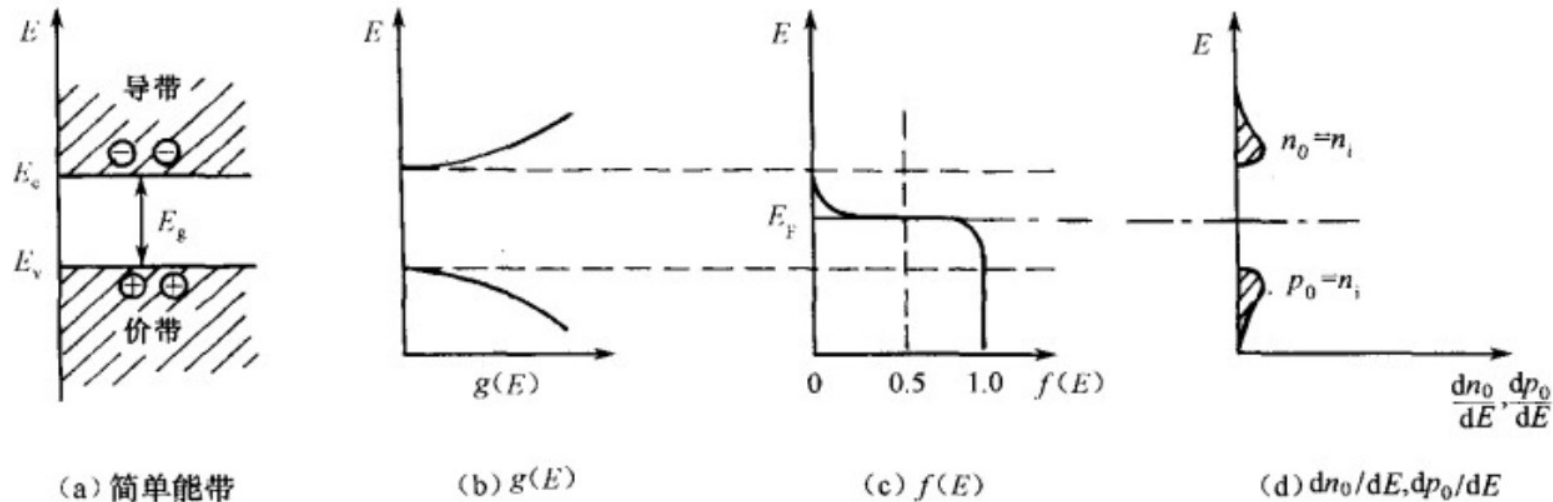


图 3-6 本征半导体<sup>[5]</sup>

# 本征半导体模型

- 假设电子能占据2个能级，能量间隔为 $E_g$  ( $= E_c - E_v$  为半导体的带隙)。从低到高每个能级的状态浓度为 $N_v$ 和 $N_c$  ( $N_v$ 和 $N_c$ 为同一数量级)。电中性条件为 $n=p$ 。求温度为 $T$ 时的载流子浓度。使用非简并条件。



# 本征半导体模型的解法

- 解法：
- 1.画出能级图，写出能级上的电子数
  - 即 $gf(E)$ 。注意，其中含未知的 $E_F$ ，无法直接计算
- 2.列出电子数守恒/电中性条件方程
  - 即所有电子数加起来等于多少
- 3.利用该方程求出 $E_F$
- 4.利用 $E_F$ 求出电子数

# 能级上的载流子浓度

$$n = 2 \frac{(m_n^* k_B T / 2\pi)^{3/2}}{\hbar^3} e^{-\frac{E_C - E_F}{k_B T}} = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{k_B T}}$$

$$p = 2 \frac{(m_p^* k_B T / 2\pi)^{3/2}}{\hbar^3} e^{-\frac{E_F - E_V}{k_B T}} = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{k_B T}}$$

- $n$ 、 $p$ 和 $E_C$ 、 $E_V$ 和 $E_F$ 的差值成指数关系
  - 注意： $E_F$ 是温度、掺杂的函数，稍后计算
- $n$ 、 $p$ 正比于 $T^{3/2} \exp(-1/T)$ ，对温度敏感
- 这两个载流子浓度公式的应用条件：
  - 非简并半导体+热平衡

# 本征半导体模型的巧解法

$$np = N_C N_V e^{-\frac{E_C - E_V}{k_B T}} = N_C N_V e^{-\frac{E_g}{k_B T}} = \frac{(m_n^* m_p^*)^{3/2}}{2\pi^3 \hbar^6} (k_B T)^3 e^{-\frac{E_g}{k_B T}}$$

其中  $E_g = E_C - E_V$  为半导体的带隙

- 对一定的半导体材料，在一定的温度下， $np$ 乘积是一定的，而与 $E_F$ 无关

定义本征载流子浓度  $n = p \equiv n_i$       i: intrinsic (本征)

此时

$$n_i = \sqrt{N_C N_V e^{-\frac{E_g}{k_B T}}} = \frac{(m_n^* m_p^*)^{3/4}}{\sqrt{2\pi^3} \hbar^3} (k_B T)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$$

# 本征载流子浓度

电子-空穴浓度乘积

$$np = n_i^2 = N_C N_V e^{-\frac{E_g}{k_B T}} = \frac{(m_n^* m_p^*)^{3/2}}{2\pi^3 \hbar^3} (k_B T)^3 e^{-\frac{E_g}{k_B T}}$$

$$\text{可得 } n_i = \sqrt{N_C N_V e^{-\frac{E_g}{k_B T}}} = \frac{(m_n^* m_p^*)^{3/4}}{\sqrt{2} \pi^{3/2} \hbar^3} (k_B T)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$$

本征载流子浓度

- 本征载流子浓度与材料有关，并随温度变化而迅速变化
- 同一材料温度变化时，性能不稳定，不适合做器件
- 同一温度下不同材料， $E_g$ 越大， $n_i$ 越小

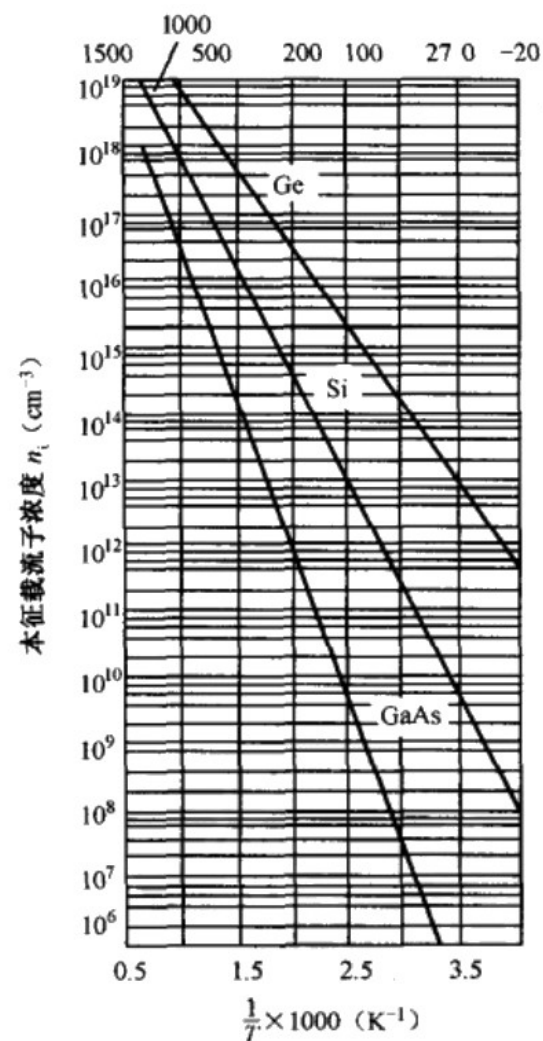


图 3-7 硅、锗、砷化镓的  $\ln n_i \sim 1/T$  关系<sup>[5]</sup>

# 本征费米能级

$$n = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{k_B T}} = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{k_B T}} = p$$

$$\frac{N_C}{N_V} = e^{\frac{E_C - E_F}{k_B T}} e^{-\frac{E_F - E_V}{k_B T}} = e^{\frac{E_C + E_V - 2E_F}{k_B T}}$$

$$E_C + E_V - 2E_F = k_B T \log \frac{N_C}{N_V}$$

$$E_F = \frac{1}{2} (E_C + E_V - k_B T \log \frac{N_C}{N_V}) \equiv E_i \quad \text{称为本征费米能级}$$

即本征费米能级和禁带中线相距若干个 $k_B T$  是否为非简并半导体?

表 3-2 300K 下锗、硅、砷化镓的本征载流子浓度

各项参数	$E_g$ (eV)	$m_n^* (m_{dn})$	$m_p^* (m_{dp})$	$N_c$ (cm <sup>-3</sup> )	$N_v$ (cm <sup>-3</sup> )	$n_i$ (cm <sup>-3</sup> ) (计算值)	$n_i$ (cm <sup>-3</sup> ) (测量值)
Ge	0.67	$0.56m_0$	$0.29m_0$	$1.05 \times 10^{19}$	$3.9 \times 10^{18}$	$1.7 \times 10^{13}$	$2.33 \times 10^{13}$
Si	1.12	$1.062m_0$	$0.59m_0$	$2.8 \times 10^{19}$	$1.1 \times 10^{19}$	$7.8 \times 10^9$	$1.02 \times 10^{10}$
GaAs	1.428	$0.068m_0$	$0.47m_0$	$4.5 \times 10^{17}$	$8.1 \times 10^{18}$	$2.3 \times 10^6$	$1.1 \times 10^7$

对常见半导体, 室温下, 本征费米能级和禁带中线差距较小

# 本征半导体模型

- 假设电子能占据2个能级，能量间隔为 $E_g$  ( $= E_C - E_V$ 为半导体的带隙)。从低到高每个能级的状态浓度为 $N_V$ 和 $N_C$  ( $N_V$ 和 $N_C$ 为同一数量级)。电中性条件为 $n=p$ 。求温度为 $T$ 时的载流子浓度。使用非简并条件。

$$n = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{k_B T}} = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{k_B T}} = p$$

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} = \frac{(m_n^* m_p^*)^{3/4}}{\sqrt{2} \pi^{3/2} \hbar^3} (k_B T)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$$

$$E_F = \frac{1}{2} (E_C + E_V - k_B T \log \frac{N_C}{N_V}) \equiv E_i$$

# 例题：本征硅的载流子浓度

- 试计算本征硅在100 K、300 K、350 K时的载流子浓度。取 $E_g = 1.12$  eV,  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  J/K,  $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$  Js, 电子质量 $m = 9.1 \times 10^{-31}$  kg。电子有效质量纵向0.91 $m$ , 横向0.19 $m$ ; 重空穴0.53 $m$ , 轻空穴0.16 $m$ 。

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{E_g}{k_B T}} = \frac{(m_{dn}^* m_{dp}^*)^{3/4}}{\sqrt{2} \pi^{3/2} \hbar^3} (k_B T)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$$

$$m_{dn}^* = s^{2/3} (m_t^{*2} m_l^*)^{1/3}$$

$$m_{dp}^* = ((m_{pl}^*)^{3/2} + (m_{ph}^*)^{3/2})^{2/3}$$

# 例题：本征硅的载流子浓度

- 试计算本征硅在100 K、300 K、350 K时的载流子浓度。取 $E_g = 1.12$  eV,  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  J/K,  $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$  Js, 电子质量 $m = 9.1 \times 10^{-31}$  kg。电子有效质量纵向0.91 $m$ , 横向0.19 $m$ ; 重空穴0.53 $m$ , 轻空穴0.16 $m$ 。

$$m_{dn}^* = s^{2/3} (m_t^{*2} m_l^*)^{1/3} = 1.06m$$

$$m_{dp}^* = ((m_{pl}^*)^{3/2} + (m_{ph}^*)^{3/2})^{2/3} = 0.59m$$

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{E_g}{k_B T}} = \frac{(m_{dn}^* m_{dp}^*)^{3/4}}{\sqrt{2} \pi^{3/2} \hbar^3} (k_B T)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} = \begin{cases} 2.0 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3} & (T = 100 \text{ K}) \\ 6.9 \times 10^9 \text{ cm}^{-3} & (T = 300 \text{ K}) \\ 1.9 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3} & (T = 350 \text{ K}) \end{cases}$$



## 例题：本征GaN的载流子浓度

- 试计算本征氮化镓在300 K、500 K时的载流子浓度。取 $E_g = 3.39$  eV,  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  J/K,  $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$  Js, 电子质量 $m = 9.1 \times 10^{-31}$  kg。电子有效质量 $0.4m$ ; 重空穴 $1.4m$ , 轻空穴 $0.3m$ 。

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{E_g}{k_B T}} = \frac{(m_{dn}^* m_{dp}^*)^{3/4}}{\sqrt{2} \pi^{3/2} \hbar^3} (k_B T)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$$

$$m_{dp}^* = \left( (m_{pl}^*)^{3/2} + (m_{ph}^*)^{3/2} \right)^{2/3}$$

# 例题：本征GaN的载流子浓度

- 试计算本征氮化镓在300 K、500 K时的载流子浓度。取 $E_g = 3.39$  eV,  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  J/K,  $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$  Js, 电子质量 $m = 9.1 \times 10^{-31}$  kg。电子有效质量 $0.4m$ ; 重空穴 $1.4m$ , 轻空穴 $0.3m$ 。

$$m_n^* = 0.4m$$

$$m_{dp}^* = ((m_{pl}^*)^{3/2} + (m_{ph}^*)^{3/2})^{2/3} = 1.5m$$

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} = \frac{(m_{dn}^* m_{dp}^*)^{3/4}}{\sqrt{2} \pi^{3/2} \hbar^3} (k_B T)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} = \begin{cases} 5.7 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3} & (T = 300 \text{ K}) \\ 3.0 \times 10^2 \text{ cm}^{-3} & (T = 500 \text{ K}) \end{cases}$$

# 禁带宽度的影响有多显著？

- 例如Si: 1.12 eV; GaN: 3.39 eV。
- 室温时, Si为 $10^{10} \text{ cm}^{-3}$ 数量级, 虽然比较绝缘, 但仍有一定导电性; 而GaN为 $10^{-10} \text{ cm}^{-3}$ 数量级, 基本上不能导电
- 公式显示, 在室温300 K时, 如忽略有效质量的影响, 1 eV的禁带宽度变化约可带来 $e^{20} \sim 5 \times 10^8$ 的本征载流子浓度变化!

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{E_g}{k_B T}} = \frac{(m_{dn}^* m_{dp}^*)^{3/4}}{\sqrt{2} \pi^{3/2} \hbar^3} (k_B T)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2 k_B T}}$$