8-29 作业

2. 由题意知：

(1) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

(2) $A_1\bigcup A_2\bigcup A_3$

(3) $A_1\bigcap(A_2\bigcup A_3)$

(4) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$

(表示方法有多种，答案不唯一)

8. 由 $P(AC)=0$, 且 $ABC\subset AC$, 有 $P(ABC)=0$. 再由加法公式，得 A,B,C 至少发生一个的概率为

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=1-\frac{2}{8}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

12. 三局两胜时, 甲获胜的概率为

$$P_1=p^2+C_2^1\,p^2(1-p)=p^2(3-2p);$$

五局三胜时, 甲获胜的概率为

$$P_2=p^3+C_3^1\,p^3(1-p)+C_4^2\,p^3(1-p)^2=p^3\left(6p^2-15p+10\right).$$

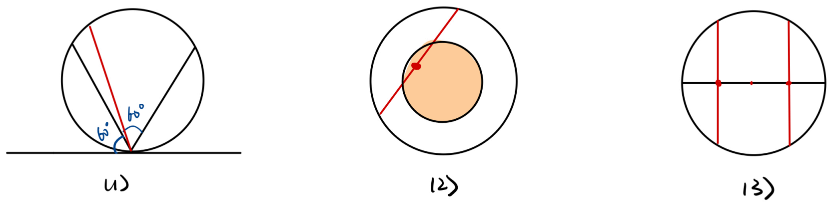
当 $\frac{1}{2}<p\leq 1$ 时, 易得 $P_1<P_2$, 所以, 五局三胜对甲更有利。

13. 记事件 A_i 为甲掷硬币的次数为 i, 则 $P(A_i)=(1/2)^i$. 记事件 B 为甲获胜，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{1}{i+1}$$

当 $n\to\infty$ 时，$P(B)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{1}{i+1}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, 所以该规则对乙更有利。

15.



(1) 样本空间 Ω_1: 圆周上的点

首先假设弦的一端点固定，并在此点作一切线，让另一端点在圆周上作随机游动。则与切线夹角在 $60°$ 与 $120°$ 之间的弦才能大于 $\sqrt{3}$。因此，所求概率为 $P_1 = 1/3$.

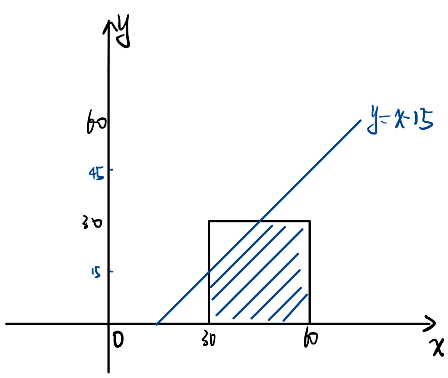
(2) 样本空间 Ω_2: 大圆内的点

圆内弦的位置可以被其中点唯一确定。在此圆内作半径为 $1/2$ 的同心圆。则仅有大圆内弦的中点落在小圆内，弦的长度才能大于 $\sqrt{3}$。由面积之比得所求概率为 $P_2 = 1/4$.

(3) 样本空间 Ω_3: 直径上的点

由于对称性，可只考虑某一特定方向的直径。确定某一直径，沿其垂直方向作弦，弦的中点正好落在直径上。不难发现，只有交直径于 $1/4$ 与 $3/4$ 之间的弦，其长度才能超过 $\sqrt{3}$. 因此，所求概率为 $P_3 = 1/2$.

18.



设 x, y 为甲乙两人到达地点的时间 (min). x, y 所有可能的取值为 $30 \le x \le 60, 0 \le y \le 30$, 而甲队到达即能过河的事件相当于 $x - y > 15$, 对应概率为

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{7}{8}.$$