中国科学技术大学

5.13.

1. 已知金属Li在温度为78k时的自由电子浓度为$4.7\times10^{22}/cm^3$，求其费米波矢k_F和费米能.

解:

$k_F=(3\pi^2 n)^{1/3}$

$=(3\times3.14^2\times4.7\times10^{22})^{1/3}\ cm^{-1}$

$=1.12\times10^8\ cm^{-1}=1.12\times10^{10}\ m^{-1}$

$E_F=\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$

$=\frac{(1.05\times10^{-34})^2\times(1.12\times10^{10})^2}{2\times9.1\times10^{-31}}$

$=7.2\times10^{-19}J=4.5eV$

5.15

1. 假设一量子点是边长为3nm的正方体盒子，请计算电子在其中的基态($m=n=l=1$)能量和第一激发态(如$m=1, n=1, l=2$)能量，及两能量差值对应多少波长的光？($\Delta E=hc/\lambda$, $m_e=0.067\times9.11\times10^{-31}kg$)

解:

根据量子点本征能量公式，易知边长为a的正方体量子点能级为

$E_{m,n,l}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(m^2+n^2+l^2)$，其中，m, n, l取正整数.

①基态能量

$E_{111}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\times3=\frac{(1.05\times10^{-34})^2\times(3.14)^2\times3}{2\times0.067\times9.11\times10^{-31}\times(3\times10^{-9})^2}=2.97\times10^{-19}J=1.86eV$

②第一激发态能量

$E_{211}=E_{121}=E_{112}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\times6=2E_{111}=3.72eV$

$\therefore \Delta E=E_{112}-E_{111}=1.86eV$

对应光波长$\lambda=\frac{hc}{\Delta E}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{2.97\times10^{-19}}=6.7\times10^{-7}m=670nm$.

中国科学技术大学

5.17.

1.① 分别求一维谐振子处在第一和第二激发态时概率最大的位置

解:

一维谐振子波函数为 $\psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2^n\cdot n!}}\cdot\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\cdot\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)\cdot H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$

令 $\xi=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\cdot x$, $A=\frac{1}{\sqrt{2^n\cdot n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$

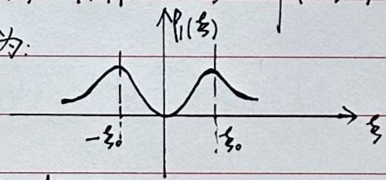
• 第一激发态 $\psi_1(x)=A_1\cdot\exp(-\frac{\xi^2}{2})\cdot H_1(\xi)$ $\quad (H_1(\xi)=-\exp(\xi^2)\cdot\frac{d}{d\xi}\exp(-\xi^2))$

$=2\xi$

$=A_1'\cdot\xi\cdot\exp(-\frac{\xi^2}{2})$

$\rho_1(\xi)=|\psi_1|^2\sim\xi^2\cdot\exp(-\xi^2)$

定性画出其曲线为:



几率最大处应满足 $\frac{d\rho_1(\xi)}{d\xi}=0$, 即 $2\xi\cdot\exp(-\xi^2)-2\xi^3\cdot\exp(-\xi^2)=0$

解得, $\xi_0^2=1$. 即 $\xi_0=\pm1$.

故 $x_0=\pm\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

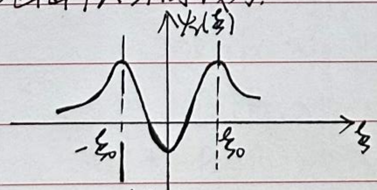
• 第二激发态 $\psi_2(x)=A_2\cdot\exp(-\frac{\xi^2}{2})\cdot H_2(\xi)$ $\quad (H_2(\xi)=-\exp(\xi^2)\cdot\frac{d^2}{d\xi^2}\exp(-\xi^2))$

$=4\xi^2-2$

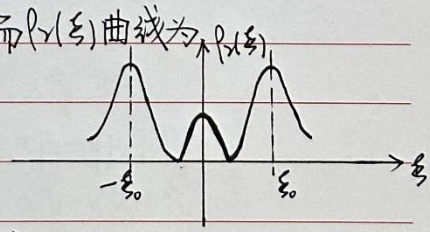
$=A_2(4\xi^2-2)\cdot\exp(-\frac{\xi^2}{2})$

$\rho_2(\xi)=|\psi_2|^2\sim[\psi_2(\xi)]^2$

定性画出 $\psi_2(\xi)$ 曲线为:



从而 $\rho_2(\xi)$ 曲线为:



ξ_0 点应满足 $\frac{d\psi_2(\xi)}{d\xi}=0$, 即 $8\xi\cdot\exp(-\frac{\xi^2}{2})-\xi(4\xi^2\cdot\exp(-\frac{\xi^2}{2})-2\exp(-\frac{\xi^2}{2}))=0$

解得 $\xi_0^2=\frac{5}{2}$, 即 $\xi_0=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

1101-77-03-04

故 $x_0=\pm\sqrt{\frac{5\hbar}{2m\omega}}$ 处几率max.

验证: $\psi_2(\pm\xi_0)=A_2(4\times\frac{5}{2}-2)\times e^{-\frac{5}{4}}\sim2.29$

$|\psi_2(0)|=A_2(4\times0-2)\sim2<\psi_2(\pm\xi_0)$

中国科学技术大学

② 分别计算一维谐振子处于基态时动能和势能的期望值.

解:

基态 $\psi_0(x) = (\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{1/4} \cdot e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ (已归一化), $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi_0(x)|^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 \cdot (\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \cdot [\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx]_{\alpha=\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\frac{m\omega}{\hbar})^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\hbar\omega.$$

$$\langle T \rangle = \langle H \rangle - \langle V \rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega - \frac{1}{4}\hbar\omega = \frac{1}{4}\hbar\omega.$$

5.24.

1. 证明氢原子的哈密顿量与 $\hat{L}^2$ 和 $\hat{L}_z$ 均对易

证明:

氢原子哈密顿量为 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(r)$, 其中 $V(r) \sim -\frac{1}{r}$, 与 θ, φ 无关.

而 $\hat{L}_z$ 和 $\hat{L}^2$ 均是仅关于 θ, φ 的微分算符. 因此,

$[\hat{V}(r), \hat{L}_z] = 0$, $[\hat{V}(r), \hat{L}^2] = 0$.

而 $[\hat{p}^2, \hat{L}_z] = [p_x p_x + p_y p_y + p_z p_z, xp_y - yp_x]$

$= [p_x p_x + p_y p_y, xp_y - yp_x]$ $\qquad [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$

$= [p_x p_x, xp_y - yp_x] + [p_y p_y, xp_y - yp_x]$

$= p_x[p_x, xp_y - yp_x] + [p_x, xp_y - yp_x] \cdot p_x$

$+ \; p_y[p_y, xp_y - yp_x] + [p_y, xp_y - yp_x] p_y$

$= p_x[p_x, x]p_y + [p_x, x]p_y p_x - p_y[p_y, y]p_x - [p_y, y]p_x p_y$

$= -i\hbar p_x p_y - i\hbar p_y p_x + i\hbar p_y p_x + i\hbar p_x p_y$

$= 0$

由 $\hat{L}_z, \hat{L}_x, \hat{L}_y$ 的平等性, 可知 $[\hat{p}^2, \hat{L}_x] = [\hat{p}^2, \hat{L}_y] = 0$.

$$\Rightarrow [\hat{p}^2, \hat{L}^2] = [\hat{p}^2, \hat{L}_x\hat{L}_x + \hat{L}_y\hat{L}_y + \hat{L}_z\hat{L}_z] = 0$$

$$\Rightarrow [\hat{H}, \hat{L}^2] = 0$$

$$[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0.$$