中国科学技术大学

4.17.

5. 已知一个体系的态矢空间维度是2，且在某个表象下，该体系的哈密顿算符为 $\hat{H}=\begin{bmatrix} 2E_0 & -iE_0 \\ iE_0 & 2E_0 \end{bmatrix}$，其中 E_0 为实数，请求解该体系的薛定谔方程：即

若在 $t=0$ 时刻，系统的态矢为 $|\psi\rangle=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$，其中 a 和 b 为任意复数，求系统在任意时刻 t 的态矢（列矢量形式）。

解：

首先求解 $\hat{H}$ 的本征方程（即定态薛定谔方程）。

$$\hat{H}|\psi_E\rangle=E|\psi_E\rangle \Rightarrow \det(\hat{H}-\lambda\hat{I})=\begin{vmatrix} 2E_0-E & -iE_0 \\ iE_0 & 2E_0-E \end{vmatrix}=0$$

$(2E_0-E)^2-E_0^2=0 \Rightarrow$ 两本征值分别为 $E_1=E_0$，$E_2=3E_0$。

代入本征方程，得到两本征态分别为（已归一）：

$$|\psi_{E_1}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad |\psi_{E_2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

系统初始态矢 $|\psi(t=0)\rangle=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=C_1^0|\psi_{E_1}\rangle+C_2^0|\psi_{E_2}\rangle$

其中，$C_1^0=\langle\psi_{E_1}|\psi(t=0)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad i)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+ib)$

$C_2^0=\langle\psi_{E_2}|\psi(t=0)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad -i)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a-ib)$

因为 $|\psi_{E_1}\rangle$ $|\psi_{E_2}\rangle$ 是正交归一的完备基，所以系统任意时刻的态矢 $|\psi(t)\rangle$ 可展开为 $|\psi(t)\rangle=C_1(t)|\psi_{E_1}\rangle+C_2(t)|\psi_{E_2}\rangle$

代入薛定谔方程 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle=\hat{H}|\psi(t)\rangle$，

得 $[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}C_1(t)]|\psi_{E_1}\rangle+[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}C_2(t)]|\psi_{E_2}\rangle=E_1C_1(t)|\psi_{E_1}\rangle+E_2C_2(t)|\psi_{E_2}\rangle$

用 $\langle\psi_{E_1}|$ 作用于上式，有 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}C_1(t)=E_1C_1(t) \Rightarrow C_1(t)=e^{-\frac{iE_1}{\hbar}t}\cdot C_1(0)=e^{-\frac{iE_1}{\hbar}t}\cdot C_1^0$

用 $\langle\psi_{E_2}|$ 作用于上式，有 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}C_2(t)=E_2C_2(t) \Rightarrow C_2(t)=e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t}C_2(0)=e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t}\cdot C_2^0$

$\therefore |\psi(t)\rangle = C_1(t)|\psi_{E_1}\rangle + C_2(t)|\psi_{E_2}\rangle$

$= e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\cdot C_1^0|\psi_{E_1}\rangle + e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\cdot C_2^0|\psi_{E_2}\rangle$

$= e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(a+ib)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} + e^{-i\frac{3E_0}{\hbar}t}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(a-ib)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a+ib}{2}\cdot e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} + \frac{a-ib}{2}\cdot e^{-i\frac{3E_0}{\hbar}t} \\ \underbrace{\frac{a+ib}{2}(-i)}_{b-ia} e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} + \underbrace{\frac{a-ib}{2}\cdot i}_{b+ia}\cdot e^{-i\frac{3E_0}{\hbar}t} \end{pmatrix}$$

4.19.

5. ① 由于 $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{p}_z$ 是相互对易的，所以应该有完备的共同本征基矢波函数，请写出这组基矢波函数

解：$\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot e^{\frac{i}{\hbar}p_z z}$.

② 假设一个粒子某时刻的波函数为 $\psi(x)=e^{-\alpha x^2}$，证明此时力学量 x^2 和 p^2 的期望值的乘积 $\langle x^2\rangle\langle p^2\rangle$ 是一个与 α 无关的常数

解：$\because \psi(x)=e^{-\alpha x^2}$

$$\therefore \langle x^2\rangle = \frac{\int x^2|\psi(x)|^2dx}{\int|\psi(x)|^2dx} = \frac{\int x^2\cdot e^{-2\alpha x^2}dx}{\int e^{-2\alpha x^2}dx} = \frac{1}{4\alpha}$$

$$\langle p^2\rangle = \frac{\int\psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi(x)\,dx}{\int\psi^*(x)\psi(x)\,dx}$$

$$= \frac{-\hbar^2\int e^{-\alpha x^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\cdot e^{-\alpha x^2}dx}{\int e^{-2\alpha x^2}dx} = \frac{2\alpha\hbar^2\int e^{-2\alpha x^2}dx - 4\alpha^2\hbar^2\cdot\overset{\int e^{-2\alpha x^2}\cdot x^2dx}{\cancel{\int e^{-2\alpha x^2}dx}}}{\int e^{-2\alpha x^2}dx}$$

$$= \frac{2\alpha\hbar^2\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} - 4\alpha^2\hbar^2\cdot\frac{1}{4\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}}{\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}} = \alpha\hbar^2$$

$\therefore \langle x^2\rangle\cdot\langle p^2\rangle = \frac{1}{4\alpha}\cdot\alpha\hbar^2 = \frac{\hbar^2}{4}$，与 α 无关，这反映了不确定性原理.

③ 若一自由粒子在 $t=0$ 时刻经历了位置测量，且测得位置为 $x=0$，此时立即进行一次动量测量，则这次动量测量的可能结果和对应的几率幅分别是什么？

解：

因为位置测量结果为 $x=0$，所以粒子波函数塌缩为 $\delta(x)$。

这时立即进行动量测量，对这一测量结果的预测需要将波函数用动量的本征函数（即平面波）展开，即

$\delta(x) = \int c(p)\,\psi_p(x)\,d\cancel{x}p$.

展开系数为 $c(p) = \int \psi_p^*(x)\,\delta(x)\,dx = \psi_p^*(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$

所以动量测量的可能结果为所有的 p，且具有相同的几率幅 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$.

④ 若一自由粒子在 $t=0$ 时刻经历了位置测量，测得 $x=0$，此后该粒子的状态依据薛定谔方程演化，且在 $t=\tau$ 时刻进行一个动量测量，则此动量测量的可能结果和对应的几率幅分别是什么？

解：

测量得 $x=0$ 后，粒子波函数塌缩为 $\delta(x)$，此后这一波函数自由演化。

由于平面波 $\psi_p(x)$ 是自由粒子的本征波函数，相应的本征值为 $E_p = \frac{p^2}{2m}$.

我们知道 $\psi(x, t=0) = \delta(x) = \int c(p)\,\psi_p(x)\,d\cancel{x}p = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \psi_p(x)\,d\cancel{x}p$.

经过一段时间 τ 后，演化为：

$\psi(x, t=\tau) = \int c(p) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E_p\tau}\,\psi_p(x)\,dp$.

$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}\tau}\,\psi_p(x)\,dp$

所以在 $t=\tau$ 时刻，进行动量测量的可能结果依然是所有可能的实数 p，且相应的几率幅为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot e^{-\frac{ip^2}{2m\hbar}\tau}$