

# Fundmental of Circuit Analysis

## 正弦稳态电路

## Sinusoidal Steay-State Analysis

中国科学技术大学  
信息科学技术学院  
安徽合肥 230027

# 题纲

本章重点介绍正弦电流电路。正弦电流电路在电子工程，电气工程等领域有着重要的理论和实践意义。

★ 正弦量

★ 正弦电流电路的向量分析法

★ 正弦电路功率相关定义和分析

## ■ 作业

P127 1 3 6 7 8 10 11 12 14 15 17 18 21 22 25 27 28 29 33 35

37

# 正弦电流

按照**正弦规律**变动的电流（电压）称之为**正弦电流**（**正弦电压**）。

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

★  $\omega = 2\pi f$  正弦函数的角频率  $rad/s$

$f$  : 波形在单位时间内的变动次数  $Hz$

★  $V_m(I_m)$  正弦电压（电流）的**最大值**（**振幅**）, amplitude

★  $\phi$  正弦电压（电流）的**初始相位**。 $(\omega t + \phi)$  是正弦电压（电流）的**瞬时相位**。 $\phi$  是瞬时相位在  $t = 0$  时的数值

正弦信号三要素：角频率 ( $\omega$ )，幅度 ( $V_m, I_m$ ) 和初始相位 ( $\phi$ )

**正弦信号相位是用 COS 计算的!!!**

# 正弦电流

按照**正弦规律**变动的电流（电压）称之为**正弦电流**（**正弦电压**）。

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

★  $\omega = 2\pi f$  正弦函数的角频率  $rad/s$

$f$  : 波形在单位时间内的变动次数  $Hz$

★  $V_m(I_m)$  正弦电压（电流）的**最大值**（**振幅**）, amplitude

★  $\phi$  正弦电压（电流）的**初始相位**。 $(\omega t + \phi)$  是正弦电压（电流）的**瞬时相位**。 $\phi$  是瞬时相位在  $t = 0$  时的数值

正弦信号三要素：角频率 ( $\omega$ )，幅度 ( $V_m, I_m$ ) 和初始相位 ( $\phi$ )

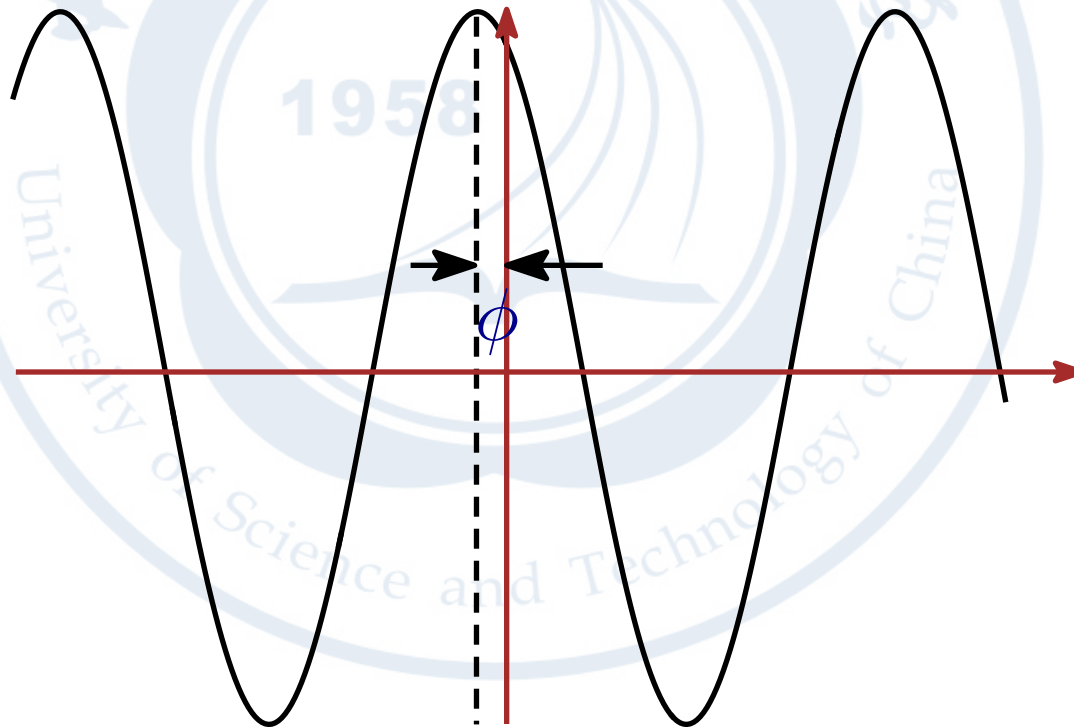
**正弦信号相位是用 COS 计算的!!!**

# 正弦电流

按照**正弦规律**变动的电流（电压）称之为**正弦电流**（**正弦电压**）。

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$



# 正弦电源

**均方根值:** 瞬时值的平方在一个周期内的平均值的算术平方根。RMS Value = root - mean-square-value

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt}$$

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} I_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt}$$



# 正弦电源

**均方根值**: 瞬时值的平方在一个周期内的平均值的算术平方根。RMS Value = root - mean-square-value

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt}$$

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} I_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt}$$

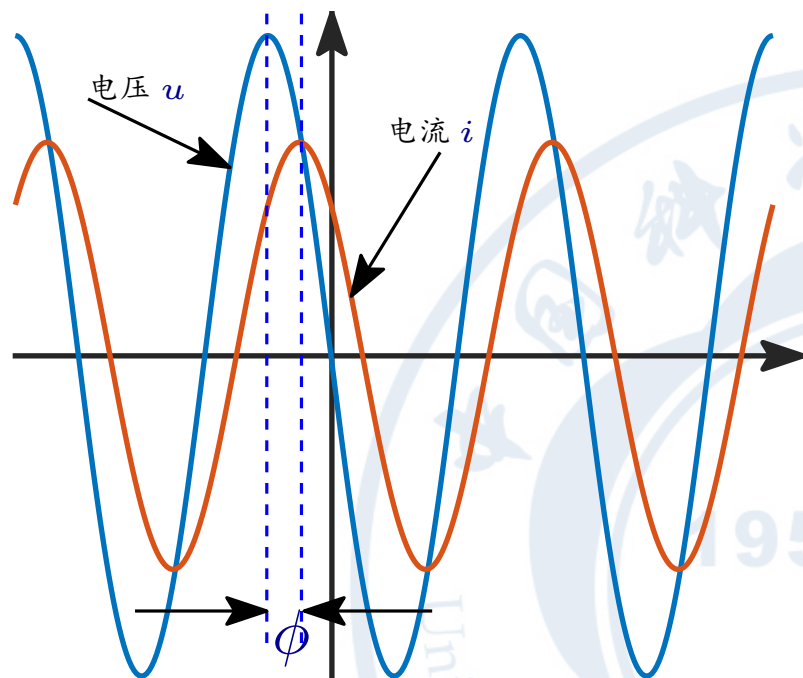
**均方根值**经常被称为正弦电压（电流）的**有效值**, **Effective Value**。对于一个给定的纯电阻负载  $R$ ，在一个周期  $T$  内，正弦电压（电流）的有效值表征对应电压（电流）的直流电压（电流）作用在该电阻上吸收的功率。

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

◇ 通常情况下，没有标志的电压（电流）均为 rms 值。

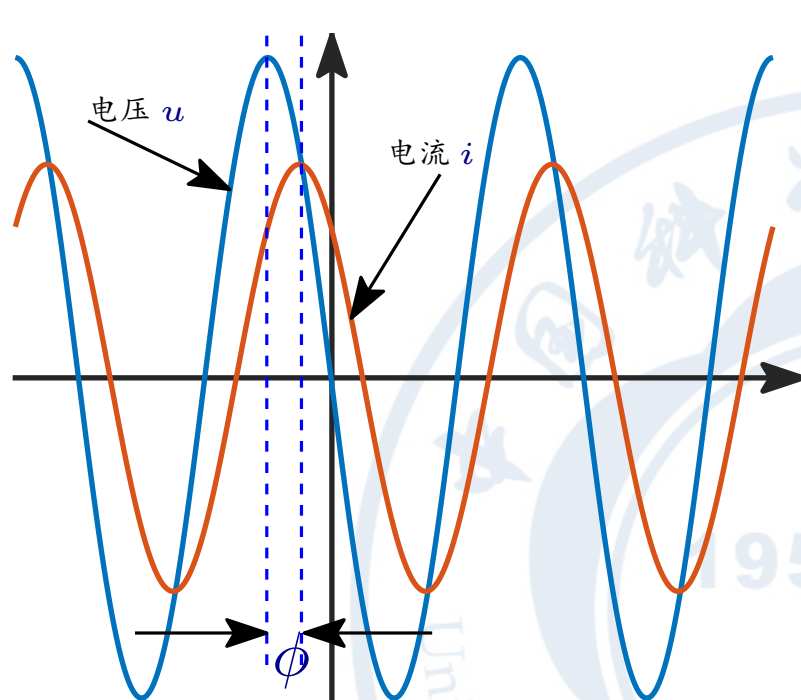
# 正弦信号相位关系



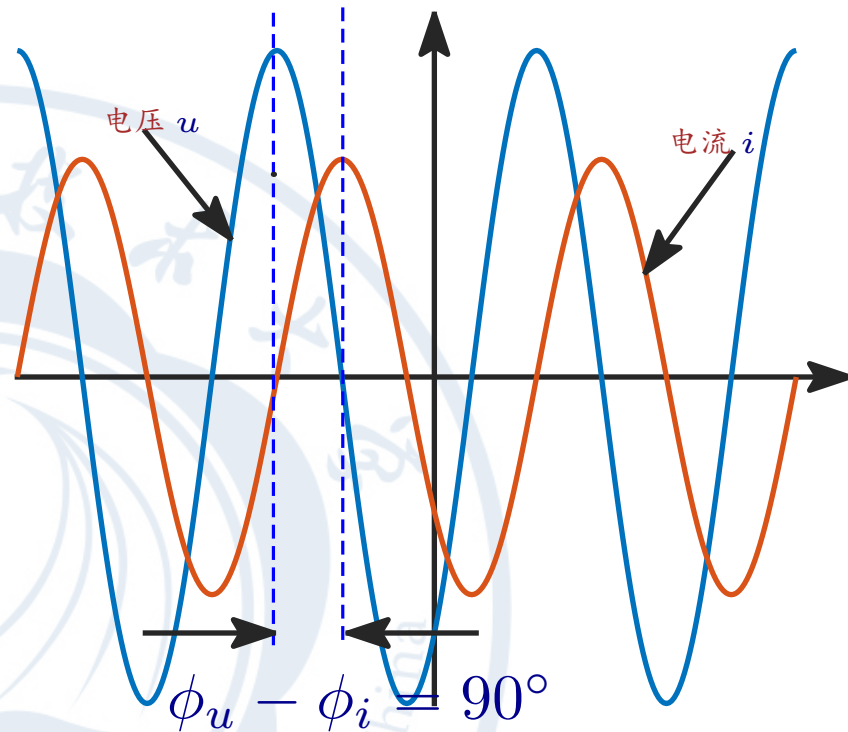
电压  $u$  超前电流  $i$



# 正弦信号相位关系

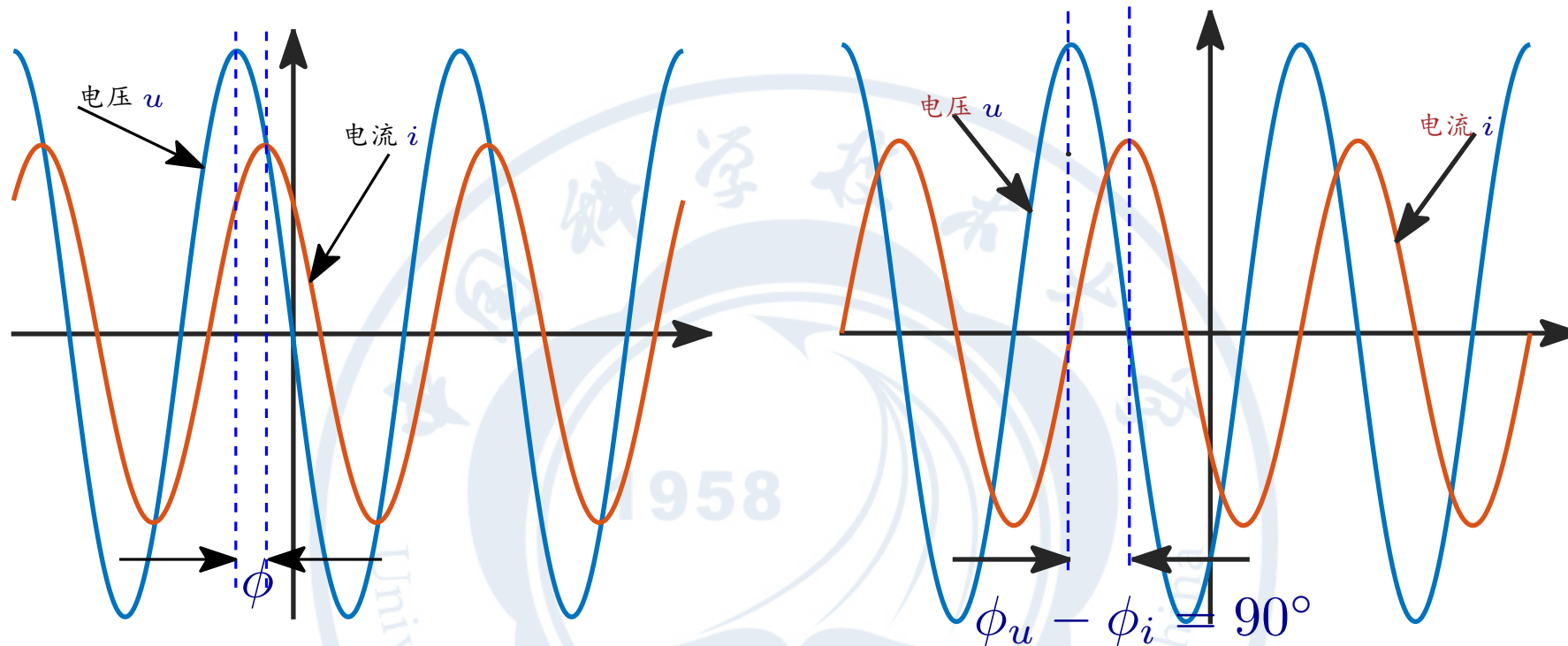


电压  $u$  超前电流  $i$



电压  $u$  和电流  $i$  正交, 即  $\phi_u - \phi_i = \frac{\pi}{2}$

# 正弦信号相位关系



电压  $u$  超前电流  $i$

电压  $u$  和电流  $i$  正交, 即  $\phi_u - \phi_i = \frac{\pi}{2}$

★ 电压和电流相位之间的关系: 超前, 滞后, 正交, 同相, 反相

# 正弦电路

电路中任何一处电压、电流均为**同频率正弦量**的电路成为**正弦电流电路**。简称为**正弦电路**。



# 正弦电路

电路中任何一处电压、电流均为**同频率正弦量**的电路成为**正弦电流电路**。简称为**正弦电路**。

## ■ 电路求解面临的挑战：

★ 储能元件上的充放电现象

# 正弦电路

电路中任何一处电压、电流均为**同频率正弦量**的电路成为**正弦电流电路**。简称为**正弦电路**。

## ■ 电路求解面临的挑战：

- ★ 储能元件上的充放电现象
- ★ 电流可以穿过电容

# 正弦电路

电路中任何一处电压、电流均为**同频率正弦量**的电路成为**正弦电流电路**。简称为**正弦电路**。

## ■ 电路求解面临的挑战：

- ★ 储能元件上的充放电现象
- ★ 电流可以穿过电容
- ★ 电感元件两端有电压降

# 正弦电路

电路中任何一处电压、电流均为**同频率正弦量**的电路成为**正弦电流电路**。简称为**正弦电路**。

## ■ 电路求解面临的挑战：

- ★ 储能元件上的充放电现象
- ★ 电流可以穿过电容
- ★ 电感元件两端有电压降



# 正弦电路

电路中任何一处电压、电流均为**同频率正弦量**的电路成为**正弦电流电路**。简称为**正弦电路**。

## ■ 电路求解面临的挑战：

- ★ 储能元件上的充放电现象
- ★ 电流可以穿过电容
- ★ 电感元件两端有电压降
- ★ 动态元件电压电流关系为差分方程

$$u = L \frac{di}{dt}, i = C \frac{du}{dt}$$

# 一些关于复数的预备知识

## ■ 复数的表示方法

### ★ 直角坐标表示方法

$$A = a_r + ja_i, \text{ where } a_r, a_i \in R, j = \sqrt{-1}$$

# 一些关于复数的预备知识

## ■ 复数的表示方法

### ★ 直角坐标表示方法

$$A = a_r + ja_i, \text{ where } a_r, a_i \in R, j = \sqrt{-1}$$

### ★ 极坐标表示方法

$$A = |A|e^{j\theta} = |A|\angle\theta$$

$|A|$ : 模 modulus;  $\theta$ : 幅角 argument

# 一些关于复数的预备知识

## ■ 复数的表示方法

### ★ 直角坐标表示方法

$$A = a_r + ja_i, \text{ where } a_r, a_i \in R, j = \sqrt{-1}$$

### ★ 极坐标表示方法

$$A = |A|e^{j\theta} = |A|\angle\theta$$

$|A|$ : 模 modulus;  $\theta$ : 幅角 argument

## ■ 直角坐标和极坐标关系

$$a_r = |A| \cos(\theta), a_i = |A| \sin(\theta)$$
$$|A| = \sqrt{a_r^2 + a_i^2}, \theta = \arctan2(a_r, a_i)$$

# 一些关于复数的预备知识

## ■ 复数的表示方法

### ★ 直角坐标表示方法

$$A = a_r + ja_i, \text{ where } a_r, a_i \in R, j = \sqrt{-1}$$

### ★ 极坐标表示方法

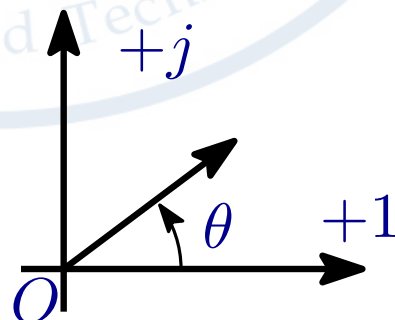
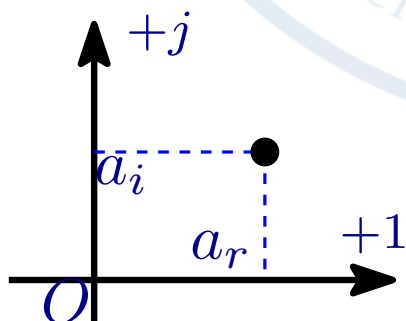
$$A = |A|e^{j\theta} = |A|\angle\theta$$

$|A|$ : 模 modulus;  $\theta$ : 幅角 argument

## ■ 直角坐标和极坐标关系

$$a_r = |A| \cos(\theta), a_i = |A| \sin(\theta)$$

$$|A| = \sqrt{a_r^2 + a_i^2}, \theta = \arctan2(a_i, a_r)$$



# 相量 (Phasor)

## ■ 正弦信号与复数的关系

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi_u) = U_m \operatorname{Re} \{ e^{j\omega t} e^{j\phi_u} \} = \operatorname{Re} \{ U_m e^{j\phi_u} e^{j\omega t} \}$$

## ■ 相量 (Phasor): 表征正弦量振幅和相位的复数。

$$\dot{U}_m = U_m \angle \phi_u = U_m e^{j\phi_u}$$

# 相量 (Phasor)

## ■ 正弦信号与复数的关系

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi_u) = U_m \operatorname{Re} \{ e^{j\omega t} e^{j\phi_u} \} = \operatorname{Re} \{ U_m e^{j\phi_u} e^{j\omega t} \}$$

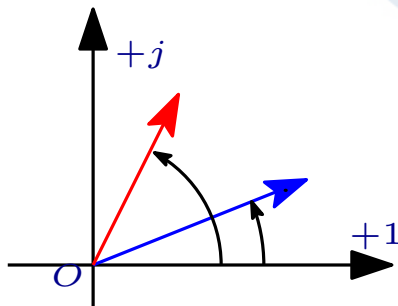
## ■ 相量 (Phasor): 表征正弦量**振幅**和**相位**的复数。

$$\dot{U}_m = U_m \angle \phi_u = U_m e^{j\phi_u}$$

## ■ Phasor 表征正弦量的收益

★ 正弦交流电路中，所有的激励均为同频率正弦量，对应的所有的响应（电压，电流）均为**同频率**的正弦量。

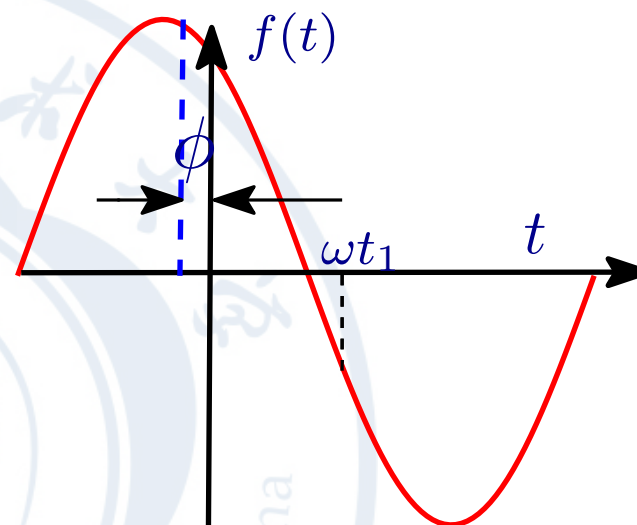
★ 根据相量可以唯一确定对应的正弦量。



Phase Diagram



# 相量 (Phasor)

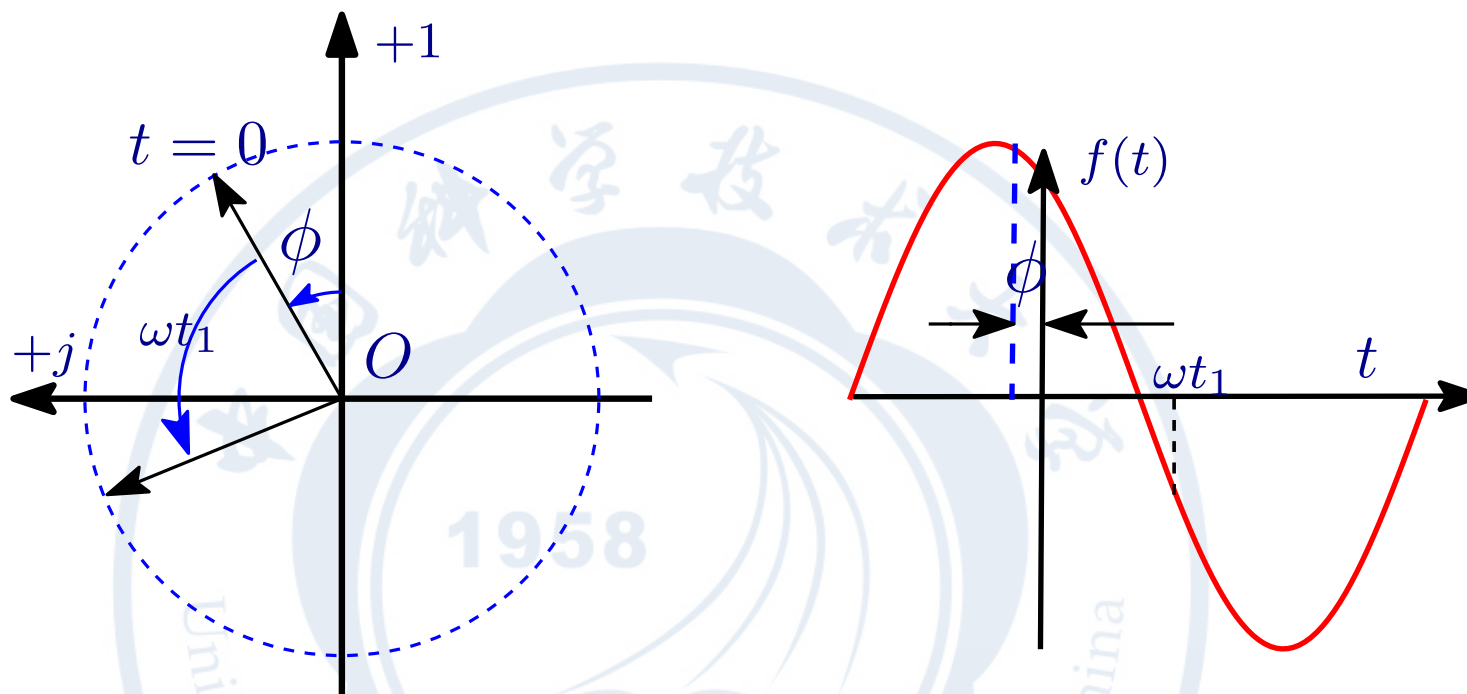


旋转相量:  $Ae^{j\omega t + \phi} = A_m e^{j\phi} e^{j\omega t} = \dot{A}_m e^{j\omega t}$

相量

旋转因子 (rotation factor)

# 相量 (Phasor)

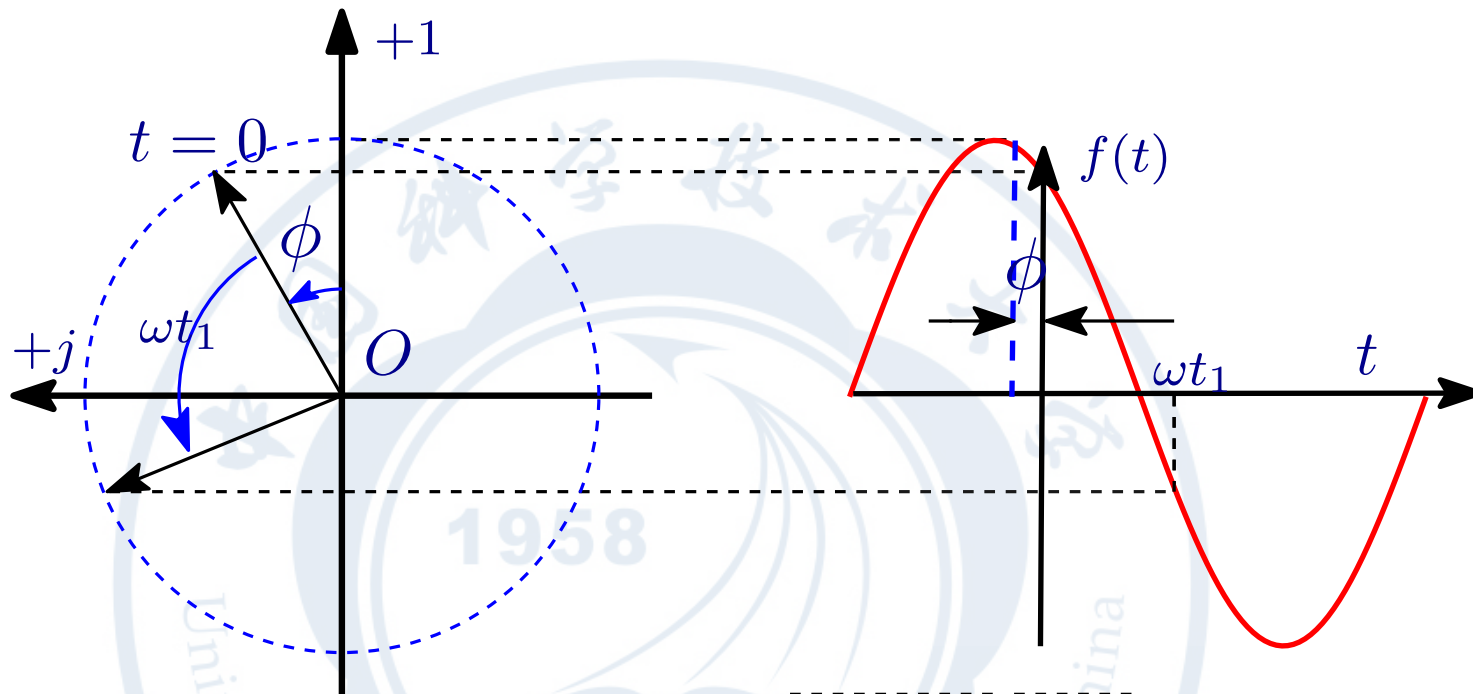


旋转相量:  $Ae^{j\omega t + \phi} = A_m e^{j\phi} e^{j\omega t} = \dot{A}_m e^{j\omega t}$

相量

旋转因子 (rotation factor)

# 相量 (Phasor)



旋转相量:  $Ae^{j\omega t + \phi} = A_m e^{j\phi} e^{j\omega t} = \dot{A}_m e^{j\omega t}$

相量

旋转因子 (rotation factor)

# 相量 (Phasor)

## ■ 一些注意事项

★ 相量的相位使用 **COSINE** 来计算的！



# 相量 (Phasor)

## ■ 一些注意事项

★ 相量的相位使用 **COSINE** 来计算的！

★ 振幅相量

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\phi_u} \quad \longleftarrow \text{m:magnitude, 振幅}$$

# 相量 (Phasor)

## ■ 一些注意事项

★ 相量的相位使用 **COSINE** 来计算的！

★ 振幅相量

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\phi_u} \quad \longleftarrow \text{m:magnitude, 振幅}$$

★ 有效值相量

$$\dot{U} = U e^{j\phi_u} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\phi_u}$$

# 相量 (Phasor)-典型例子

$$u(t) = 170 \cos(377t - 40^\circ) V$$

$$i(t) = 10 \sin(1000t + 20^\circ) A$$

$$\dot{U}_m = 18.6 \angle -54^\circ V$$

$$\dot{I} = (20 \angle -45^\circ - 50 \angle -30^\circ) mA$$



# 相量 (Phasor)-典型例子

$$u(t) = 170 \cos(377t - 40^\circ) V \longrightarrow \dot{U}_m = 170e^{-j40^\circ} V$$

$$i(t) = 10 \sin(1000t + 20^\circ) A \longrightarrow \dot{I} = 5\sqrt{2}e^{-j70^\circ} A$$

$$\dot{U}_m = 18.6 \angle -54^\circ V \longrightarrow u(t) = 18.6 \cos(\omega t - 54^\circ)$$

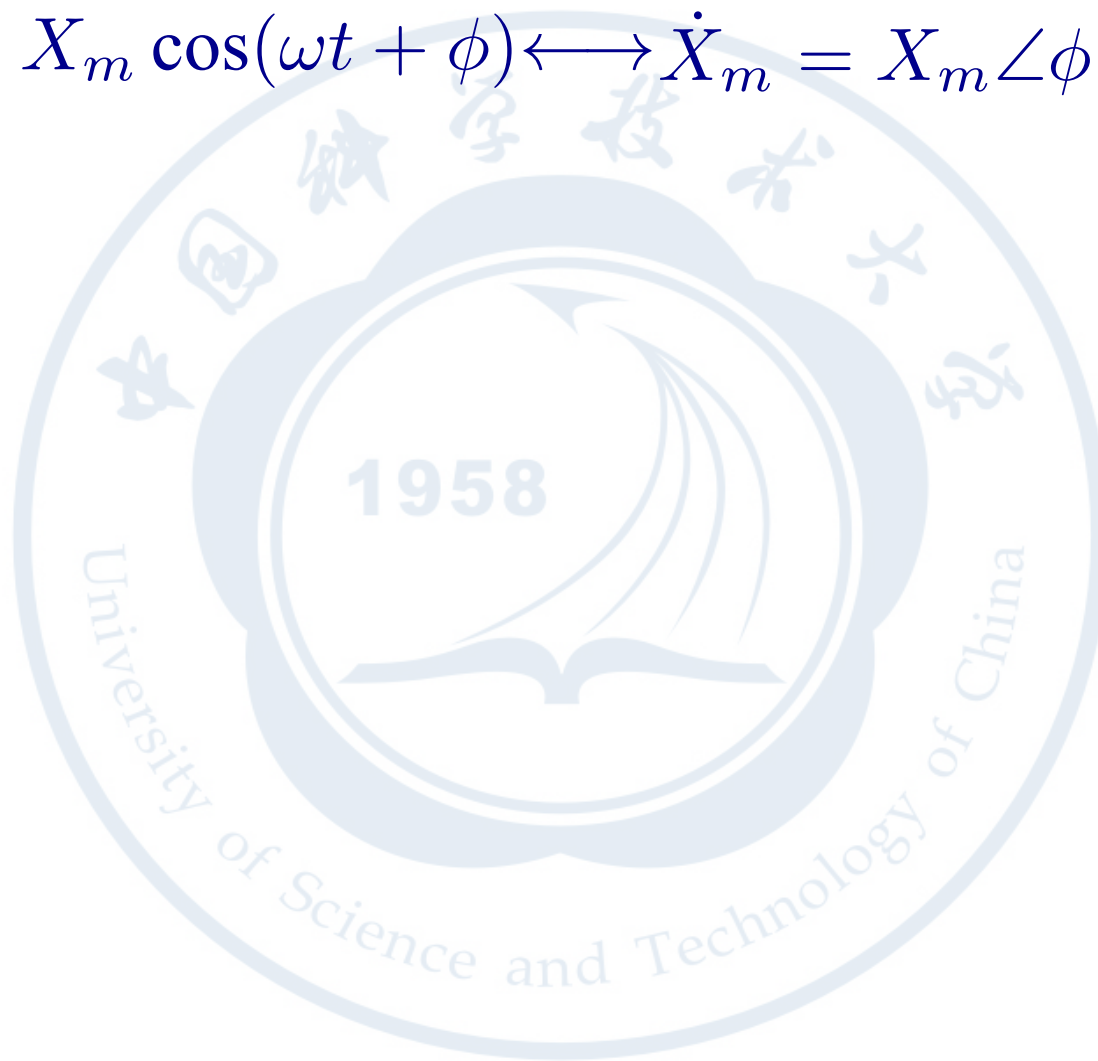
$$\dot{I} = (20 \angle -45^\circ - 50 \angle -30^\circ) mA \longrightarrow$$

$$i(t) = \{20\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ) - 50\sqrt{2} \cos(\omega t - 30^\circ)\} mA$$

# 相量运算性质

★ **一一映射**: 频率给定的前提下, 相量和正弦波形一一对应

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi) \longleftrightarrow \dot{X}_m = X_m \angle \phi = X_m e^{j\phi}$$



# 相量运算性质

★ **一一映射**: 频率给定的前提下, 相量和正弦波形一一对应

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi) \longleftrightarrow \dot{X}_m = X_m \angle \phi = X_m e^{j\phi}$$

★ **线性性质**: 若干个同频率正弦量的线性组合的相量等于各自相量的同样的线性组合

$$\begin{aligned} x_k(t) &= X_k \cos(\omega t + \phi_k) \rightarrow \dot{X}_{mk}, 1 \leq k \leq K \\ \longrightarrow x(t) &= \sum_{k=1}^K a_k x_k(t) \rightarrow \dot{X}_m = \sum_{k=1}^K a_k \dot{X}_{mk} \end{aligned}$$

# 相量运算性质

★ **一一映射:** 频率给定的前提下, 相量和正弦波形一一对应

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi) \longleftrightarrow \dot{X}_m = X_m \angle \phi = X_m e^{j\phi}$$

★ **线性性质:** 若干个同频率正弦量的线性组合的相量等于各自相量的同样的线性组合

$$\begin{aligned} x_k(t) &= X_k \cos(\omega t + \phi_k) \rightarrow \dot{X}_{mk}, 1 \leq k \leq K \\ \longrightarrow x(t) &= \sum_{k=1}^K a_k x_k(t) \rightarrow \dot{X}_m = \sum_{k=1}^K a_k \dot{X}_{mk} \end{aligned}$$

★ **微分性质:** 正弦量微分对应的相量等于自身的相量乘以  $j\omega$

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi) \rightarrow \dot{X}_m \xRightarrow{\text{微分}} y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow \dot{Y}_m = j\omega \dot{X}_m$$

# 相量运算性质

★ **一一映射:** 频率给定的前提下, 相量和正弦波形一一对应

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi) \longleftrightarrow \dot{X}_m = X_m \angle \phi = X_m e^{j\phi}$$

★ **线性性质:** 若干个同频率正弦量的线性组合的相量等于各自相量的同样的线性组合

$$\begin{aligned} x_k(t) &= X_k \cos(\omega t + \phi_k) \rightarrow \dot{X}_{mk}, 1 \leq k \leq K \\ \longrightarrow x(t) &= \sum_{k=1}^K a_k x_k(t) \rightarrow \dot{X}_m = \sum_{k=1}^K a_k \dot{X}_{mk} \end{aligned}$$

★ **微分性质:** 正弦量微分对应的相量等于自身的相量乘以  $j\omega$

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi) \rightarrow \dot{X}_m \Rightarrow y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow \dot{Y}_m = j\omega \dot{X}_m$$

★ **积分性质:** 正弦量积分对应的相量等于自身相量除以  $j\omega$

$$\begin{aligned} x(t) &= X_m \cos(\omega t + \phi) \rightarrow \dot{X}_m \\ \longrightarrow y(t) &= \int_{-\infty}^t x(t) dt \rightarrow \dot{Y}_m = \frac{1}{j\omega} \dot{X}_m \end{aligned}$$

# 基尔霍夫定律的相量形式

■ 基尔霍夫定律和元件电压电流关系是电路分析的理论基础。

- ★ 元件的电压电流线性关系是直流电路求解的物理因素
- ★ 线性代数方程组是电路分析的理论基础



# 基尔霍夫定律的相量形式

■ 基尔霍夫定律和元件电压电流关系是电路分析的理论基础。

★ 元件的电压电流线性关系是直流电路求解的物理因素

★ 线性代数方程组是电路分析的理论基础

■ 正弦电流电路求解的面临问题的挑战

★ 动态元件的电压电流的微分关系无法利用线性代数方程组表示。



# 基尔霍夫定律的相量形式

## ■ 基尔霍夫电流定律 (KCL) 的相量形式

在**集总参数正弦电流电路**中，流入（流出）任一个节点的**电流相量**的代数和为 0.

$$\sum \dot{I}_m = 0, \sum \dot{I} = 0.$$

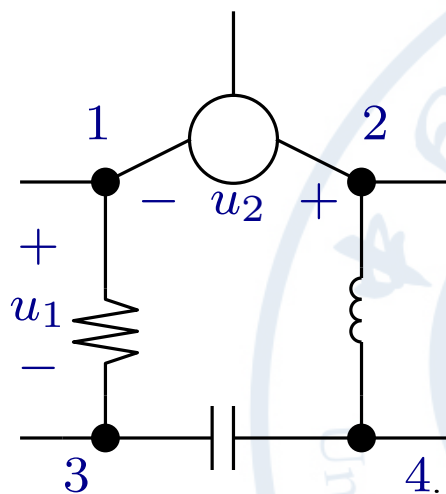
## ■ 基尔霍夫电压定律 (KVL) 的相量形式

在**集总参数正弦电流电路**中，任一个封闭回路的**电压相量**升（降）的代数和为 0.

$$\sum \dot{U}_m = 0, \sum \dot{U} = 0.$$

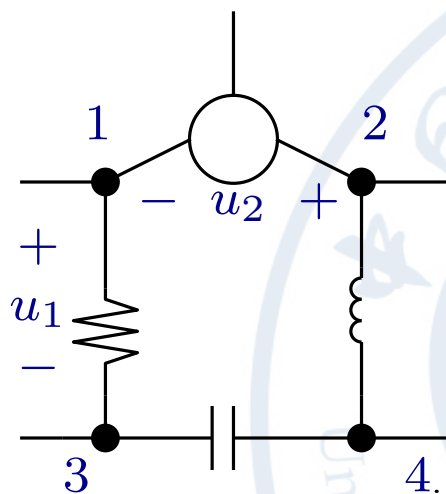
# 相量形式基尔霍夫定律举例

$u_1 = 6\sqrt{2}\cos(\omega t + 30^\circ)V, u_2 = 4\sqrt{2}\cos(\omega t + 60^\circ)V$ 。求节点 23 之间的电压  $u_{23}$ ，并画出电压相量图。



# 相量形式基尔霍夫定律举例

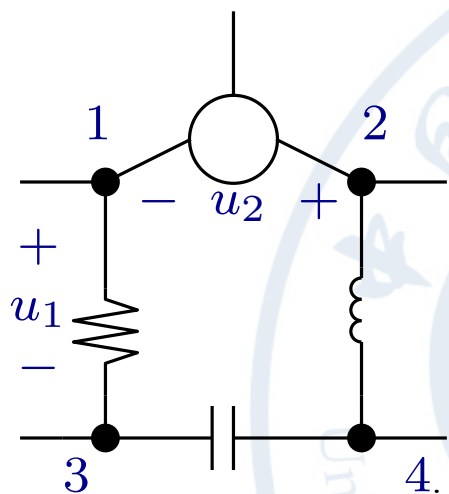
$u_1 = 6\sqrt{2}\cos(\omega t + 30^\circ)V, u_2 = 4\sqrt{2}\cos(\omega t + 60^\circ)V$ 。求节点 23 之间的电压  $u_{23}$ ，并画出电压相量图。



$$\begin{aligned} u_1, u_2, u_3 &\rightarrow \dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3 \\ \rightarrow \dot{U}_1 &= 6\angle 30^\circ, \dot{U}_2 = 4\angle 60^\circ \\ \rightarrow \dot{U}_{23} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 6\angle 30^\circ + 4\angle 60^\circ \\ &= (7.2 + j6.5) = 9.7\angle 42.1^\circ V \\ \rightarrow u_{23}(t) &= 9.7\sqrt{2}\cos(\omega t + 42.1^\circ)V \end{aligned}$$

# 相量形式基尔霍夫定律举例

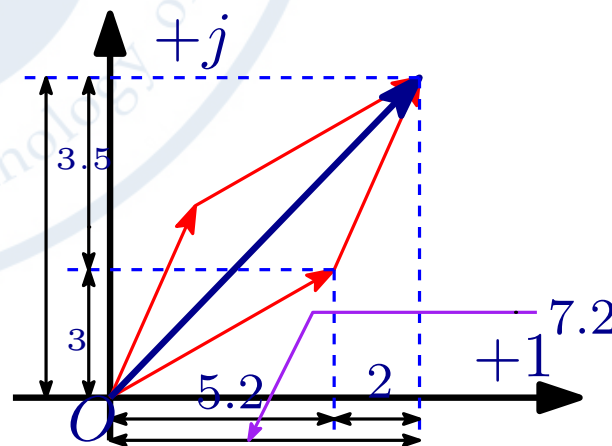
$u_1 = 6\sqrt{2}\cos(\omega t + 30^\circ)V, u_2 = 4\sqrt{2}\cos(\omega t + 60^\circ)V$ 。求节点23之间的电压  $u_{23}$ ，并画出电压相量图。



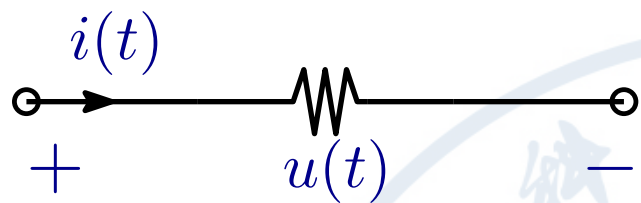
$$\begin{aligned} u_1, u_2, u_3 &\rightarrow \dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3 \\ \rightarrow \dot{U}_1 &= 6\angle 30^\circ, \dot{U}_2 = 4\angle 60^\circ \\ \rightarrow \dot{U}_{23} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 6\angle 30^\circ + 4\angle 60^\circ \\ &= (7.2 + j6.5) = 9.7\angle 42.1^\circ V \\ \rightarrow u_{23}(t) &= 9.7\sqrt{2}\cos(\omega t + 42.1^\circ)V \end{aligned}$$

问题要求的是 **Time Domain** 的电压结果，一定要记住根据 **Phasor** 写出时域形式的电压。

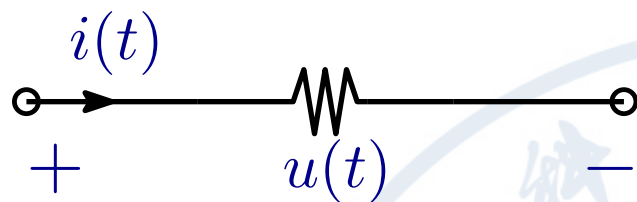
相量 (Phasor) 的运算类似于矢量运算



# 相量表达下的无源器件电压电流关系-电阻



# 相量表达下的无源器件电压电流关系-电阻

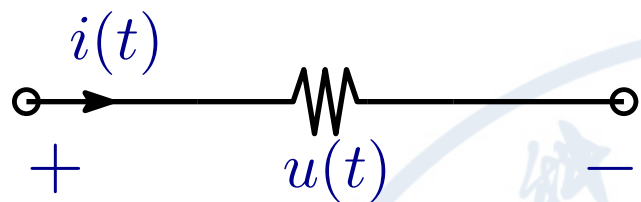


时域电压电流关系

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$$

$$i(t) = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t + \phi_u)$$

# 相量表达下的无源器件电压电流关系-电阻



时域电压电流关系

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$$

$$i(t) = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t + \phi_u)$$

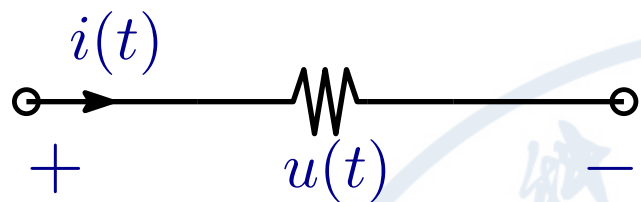
运用相量运算线性性质

$$u(t) = Ri(t), \begin{cases} u(t) \leftrightarrow \dot{U}_m, \dot{U} \\ i(t) \leftrightarrow \dot{I}_m, \dot{I} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \dot{U}_m = R\dot{I}_m, \dot{U} = R\dot{I}$$



# 相量表达下的无源器件电压电流关系-电阻



★ 正弦电流电路中，电阻元件电压和电流的相量形式仍然满足欧姆定律。

时域电压电流关系

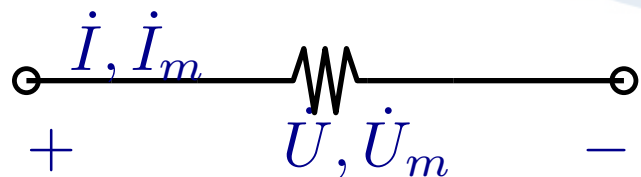
$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$$

$$i(t) = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t + \phi_u)$$

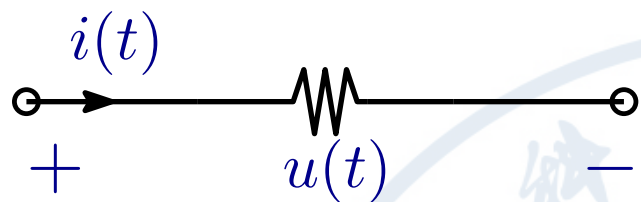
运用相量运算线性性质

$$u(t) = Ri(t), \begin{cases} u(t) \leftrightarrow \dot{U}_m, \dot{U} \\ i(t) \leftrightarrow \dot{I}_m, \dot{I} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \dot{U}_m = R\dot{I}_m, \dot{U} = R\dot{I}$$



# 相量表达下的无源器件电压电流关系-电阻

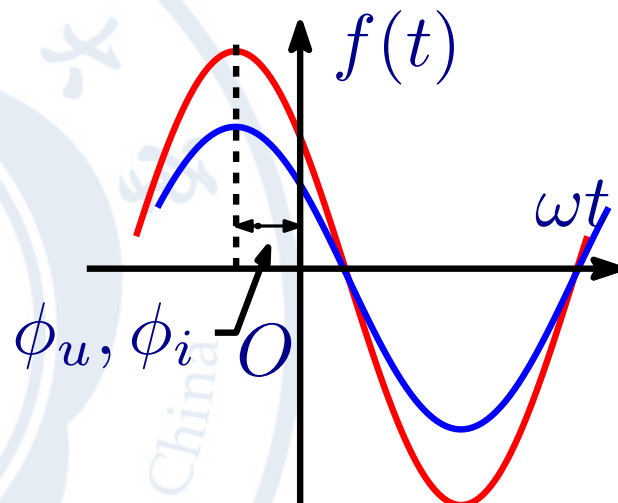


★ 正弦电流电路中，电阻元件电压和电流的相量形式仍然满足欧姆定律。

时域电压电流关系

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$$

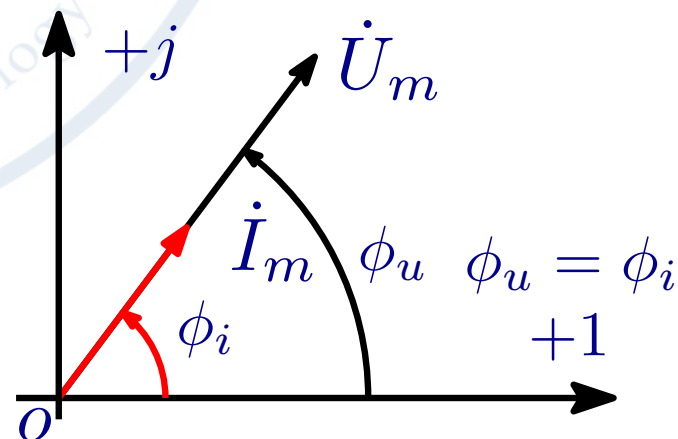
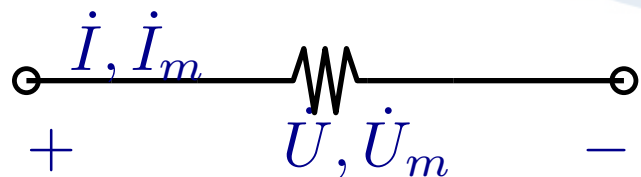
$$i(t) = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t + \phi_u)$$



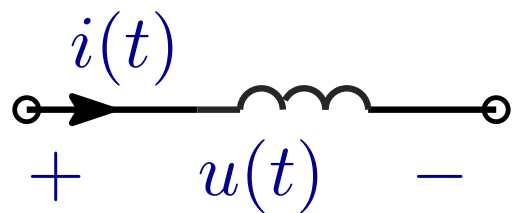
运用相量运算线性性质

$$u(t) = Ri(t), \begin{cases} u(t) \leftrightarrow \dot{U}_m, \dot{U} \\ i(t) \leftrightarrow \dot{I}_m, \dot{I} \end{cases}$$

$$\rightarrow \dot{U}_m = R\dot{I}_m, \dot{U} = R\dot{I}$$

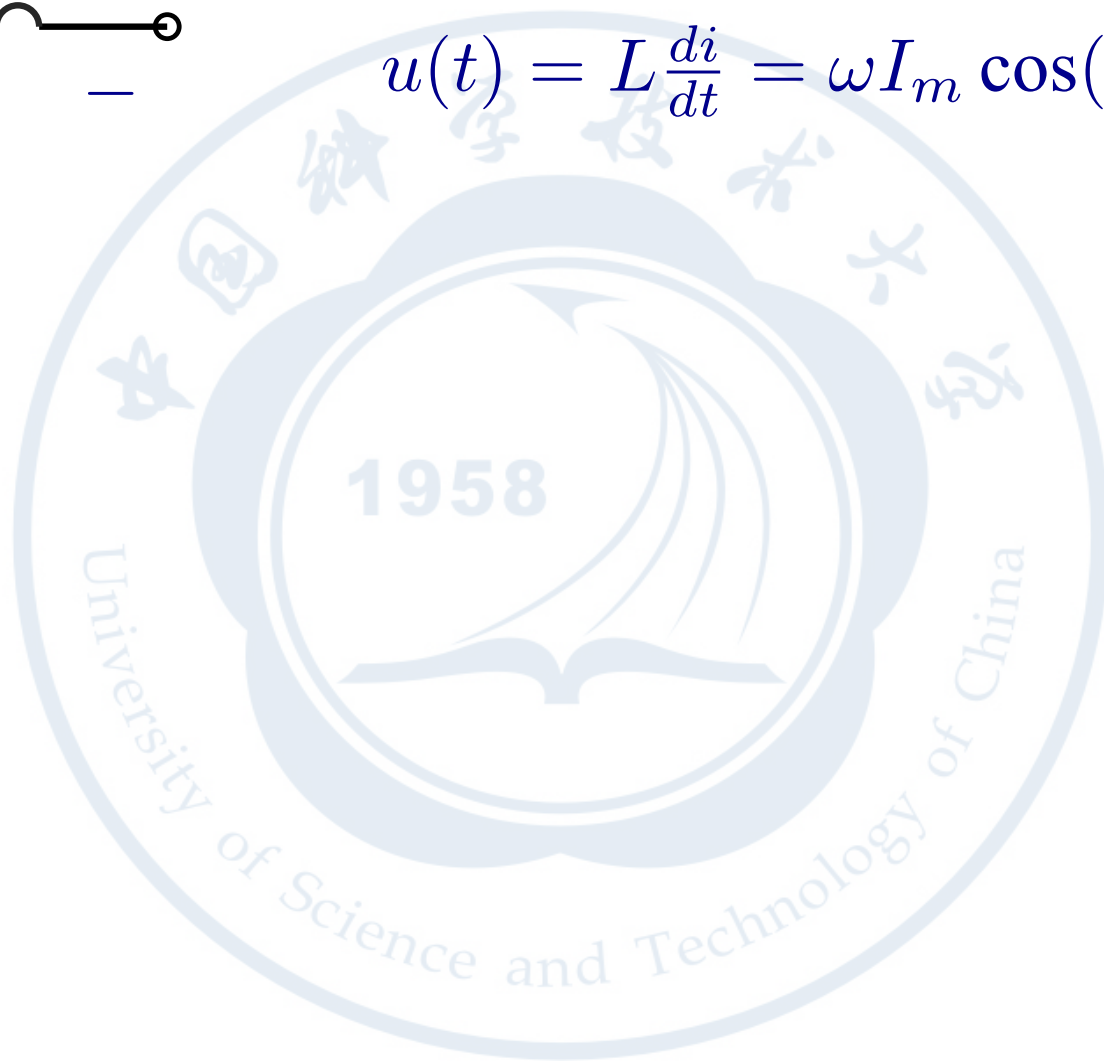


# 相量表达下的无源器件电压电流关系-电感

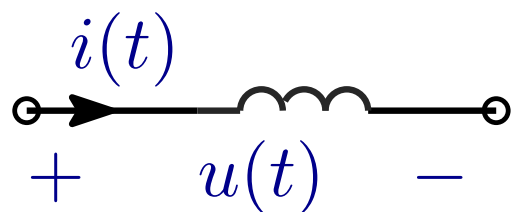


$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = \omega I_m \cos(\omega t + \phi_i + 90^\circ)$$

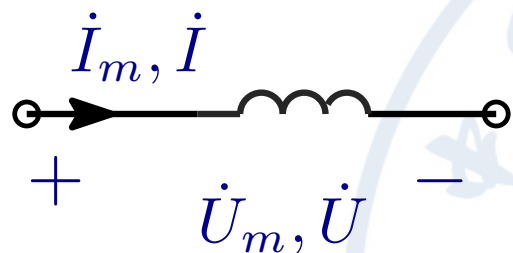


# 相量表达下的无源器件电压电流关系-电感



$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

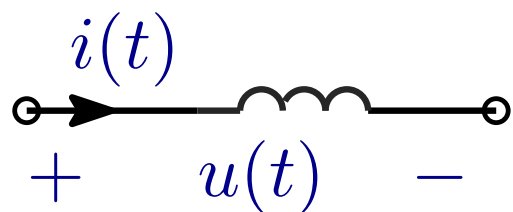
$$u(t) = L \frac{di}{dt} = \omega I_m \cos(\omega t + \phi_i + 90^\circ)$$



$$\dot{I}_m = I_m \angle \phi_i$$

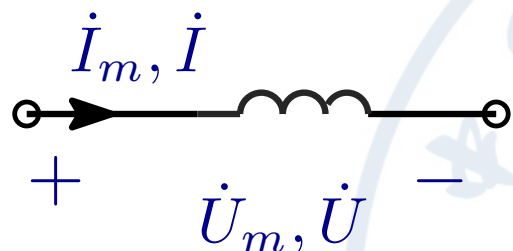
$$\dot{U}_m = j\omega L I_m e^{j\phi_i} = j\omega L \dot{I}_m$$

# 相量表达下的无源器件电压电流关系-电感



$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$$

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = \omega I_m \cos(\omega t + \phi_i + 90^\circ)$$

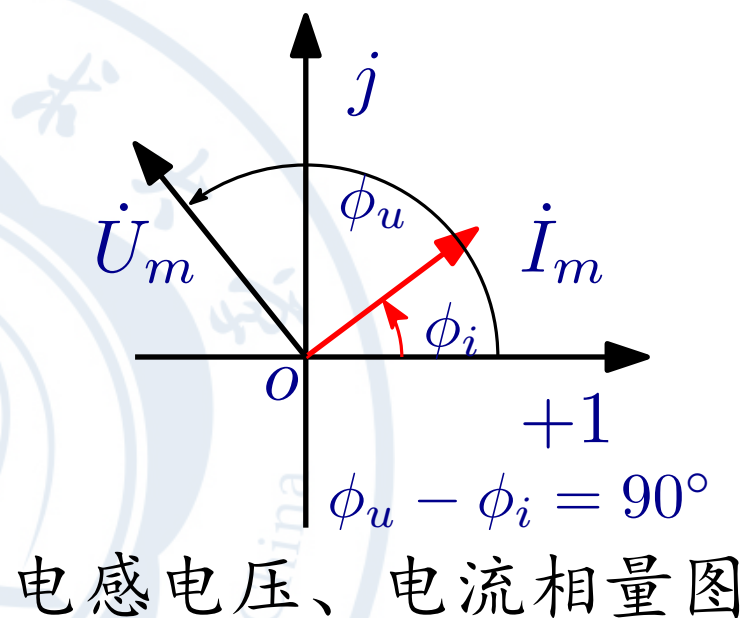
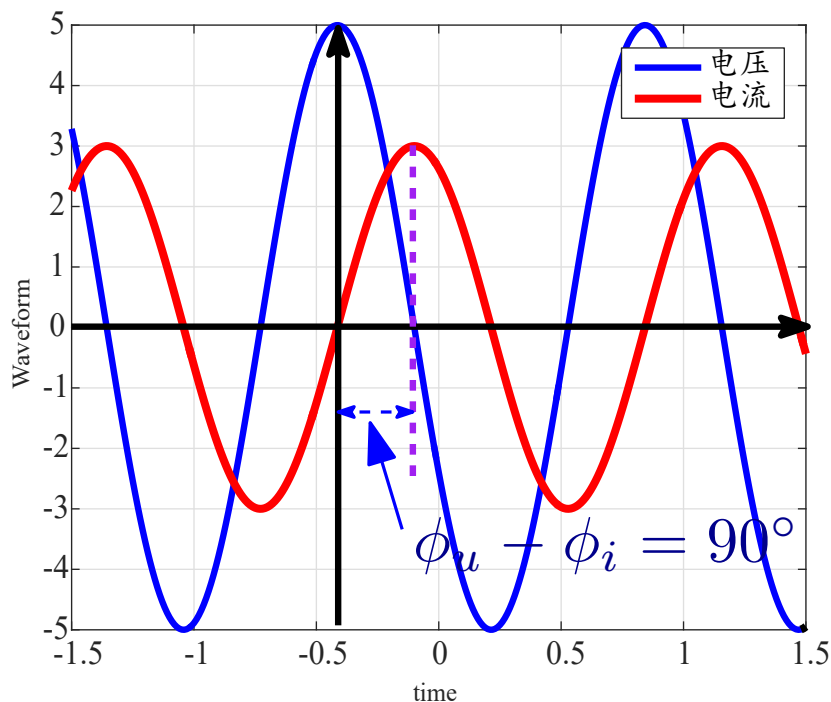


$$\dot{I}_m = I_m \angle \phi_i$$

$$\dot{U}_m = j\omega L I_m e^{j\phi_i} = j\omega L \dot{I}_m$$

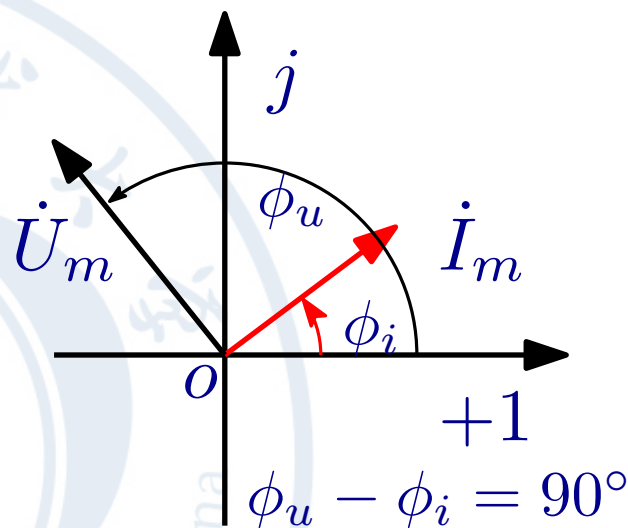
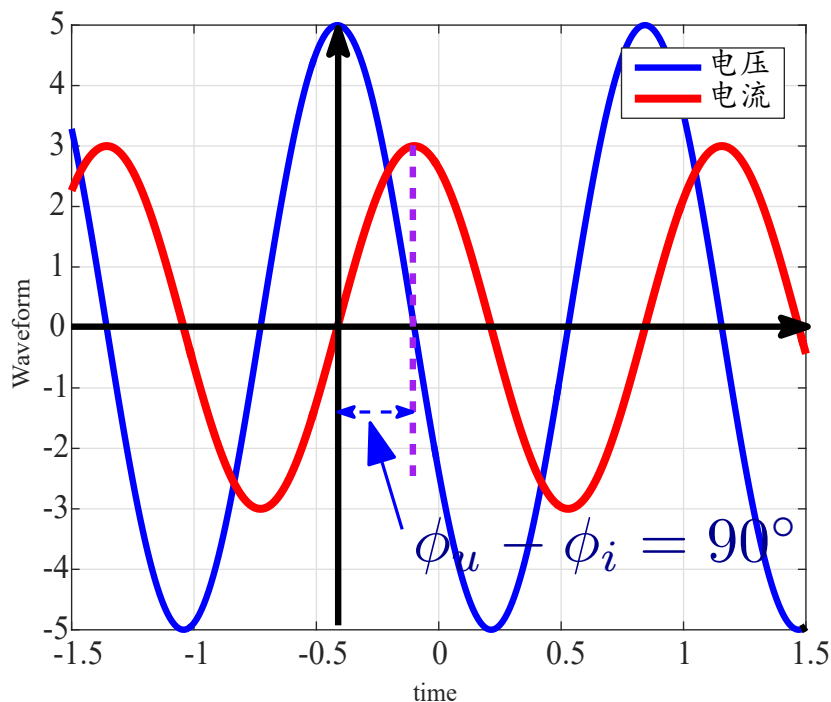
■ 感抗:  $X_L = \omega L, \quad \dot{U}_m = jX_L \dot{I}_m$

# 相量表达下的无源器件电压电流关系-电感



电感电压、电流相量图

# 相量表达下的无源器件电压电流关系-电感



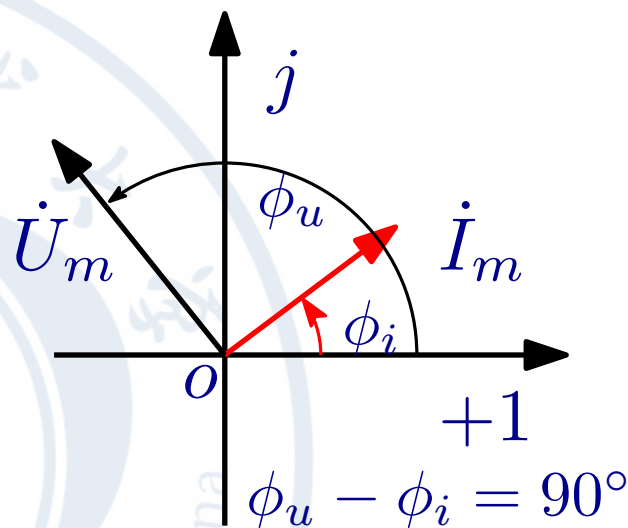
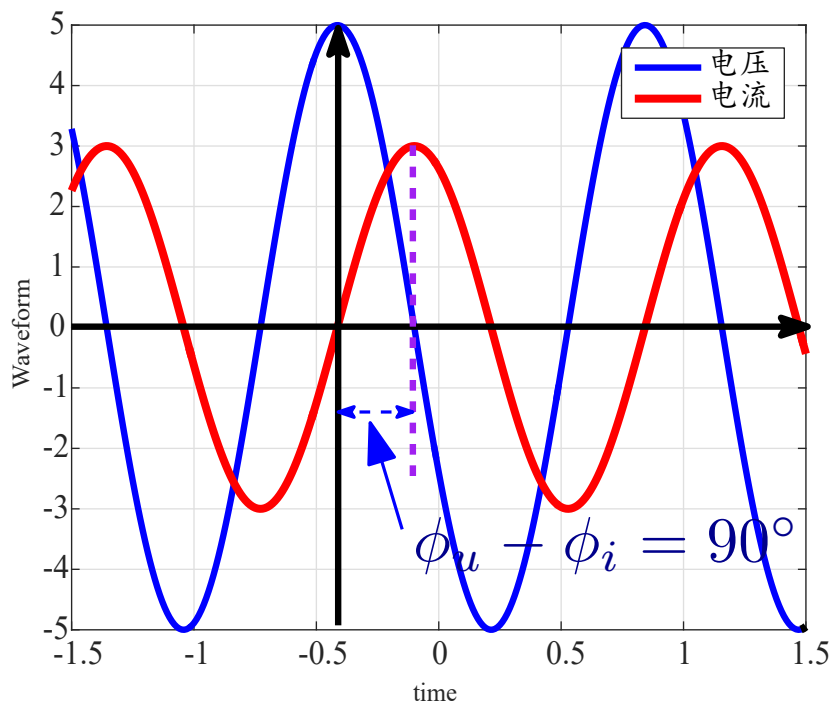
电感电压、电流相量图

- ★ 正弦稳态电路中，电感元件上的电压幅度相量（有效值相量）的模等于电流幅度相量（有效值相量）的模乘上感抗。

$$U_m = X_L I_m, U = X_L I$$



# 相量表达下的无源器件电压电流关系-电感



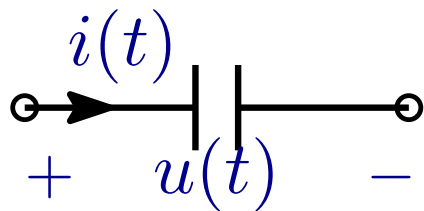
电感电压、电流相量图

- ★ 正弦稳态电路中，电感元件上的电压幅度相量（有效值相量）的模等于电流幅度相量（有效值相量）的模乘上感抗。

$$U_m = X_L I_m, U = X_L I$$

- ★ 电压相量相位超前电流  $90^\circ$ ，电流相位滞后于电压  $90^\circ$

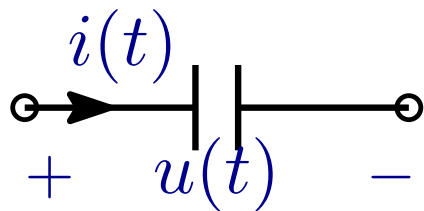
# 相量表达下的无源器件电压电流关系-电容



$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$$

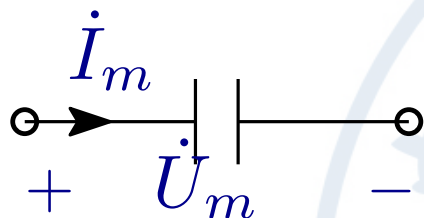
$$i(t) = C \frac{du}{dt} = \omega C \cos(\omega t + \phi_u + 90^\circ)$$

# 相量表达下的无源器件电压电流关系-电容



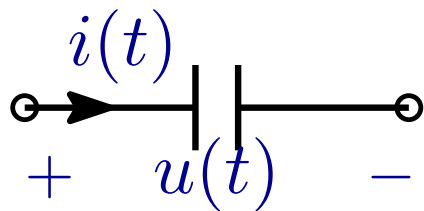
$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$$

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = \omega C \cos(\omega t + \phi_u + 90^\circ)$$



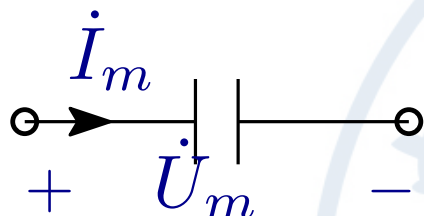
$$\dot{I}_m = j\omega C \dot{U}_m, \dot{U}_m = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m$$

# 相量表达下的无源器件电压电流关系-电容



$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi_u)$$

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = \omega C \cos(\omega t + \phi_u + 90^\circ)$$

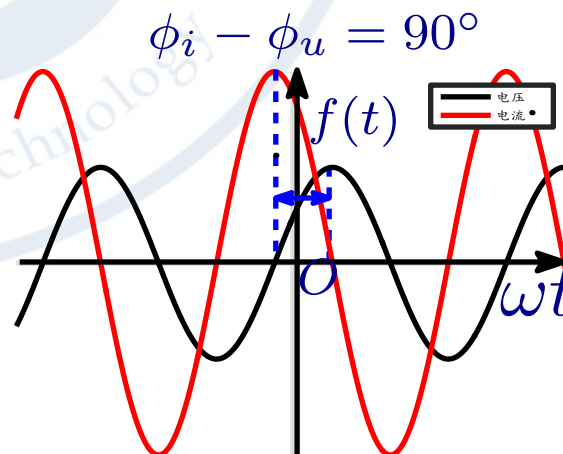
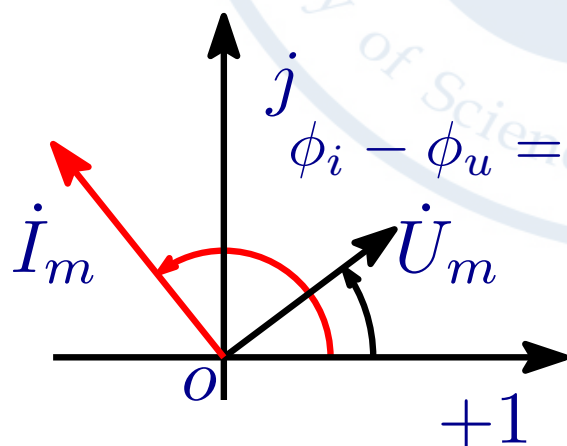


$$\dot{I}_m = j\omega C \dot{U}_m, \dot{U}_m = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m$$

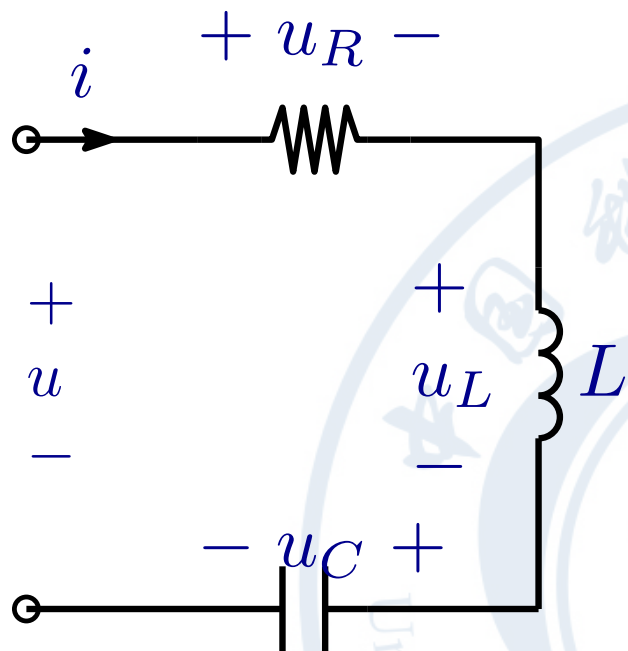
■ 容抗:  $X_C = -\frac{1}{\omega C}$

★ 有效值（幅度）电压相量的模等于电流相量的模乘以容抗绝对值

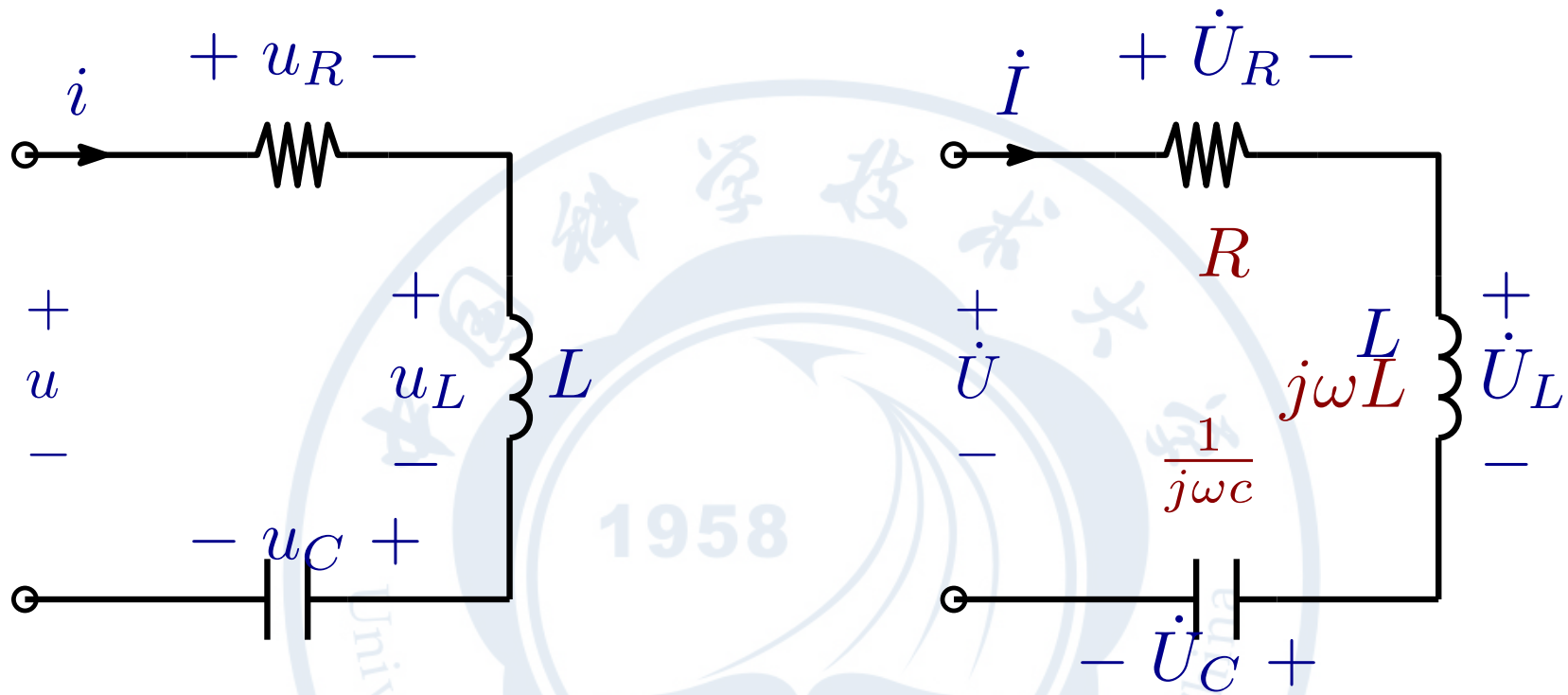
★ 电压滞后电流  $90^\circ$ ，电流超前电压  $90^\circ$



# 串联 RLC 电路



# 串联 RLC 电路



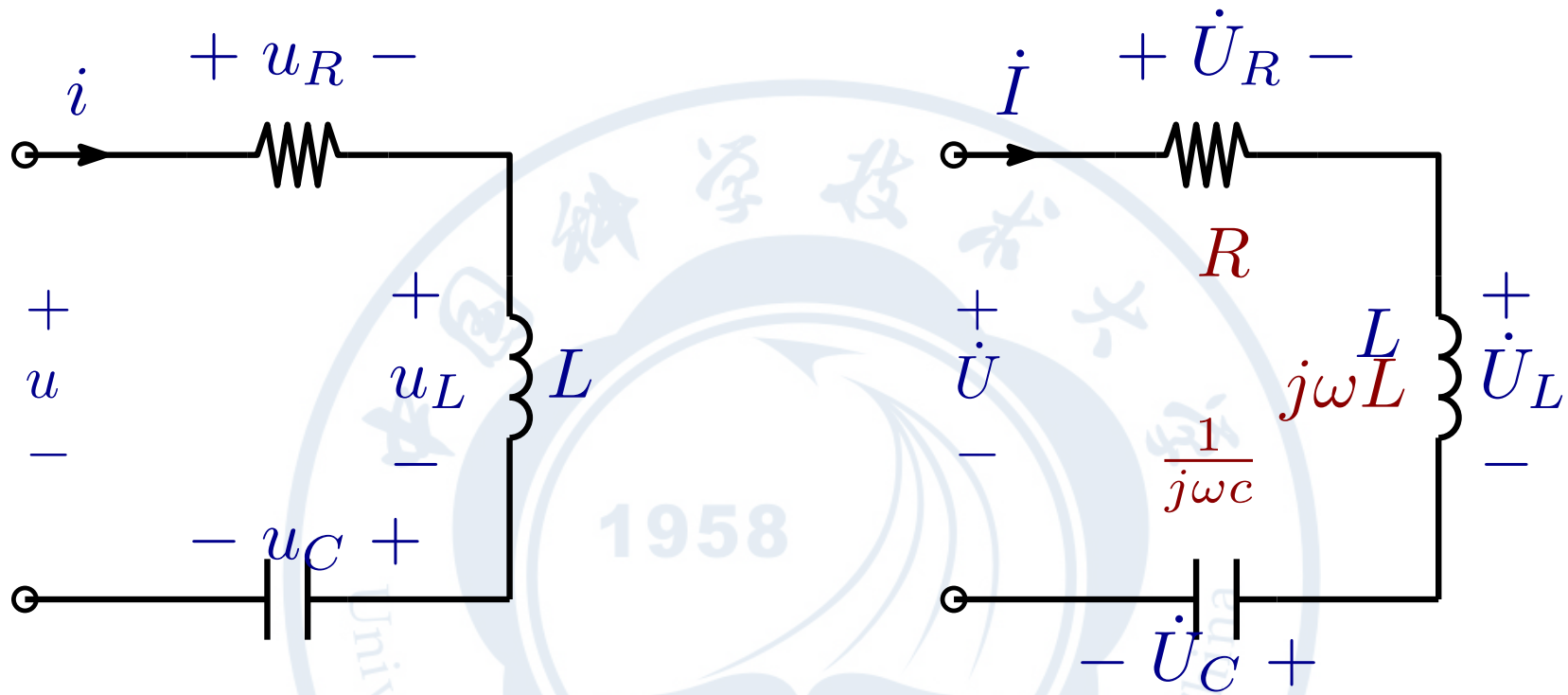
$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

$$\dot{U}_R = R\dot{I}$$

$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

# 串联 RLC 电路



$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

$$\dot{U} = (R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) \dot{I}$$

$$\dot{U}_R = R \dot{I}$$

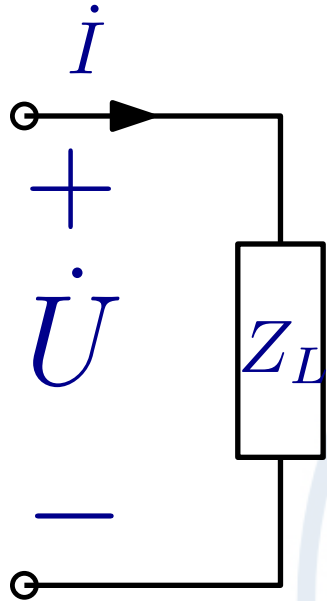
$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}$$

$$\dot{U} = [R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})] \dot{I}$$



# 串联 RLC电路



$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX = |Z|\angle\phi$$

$Z$ : 复阻抗

$X = X_L + X_C$ : 电抗

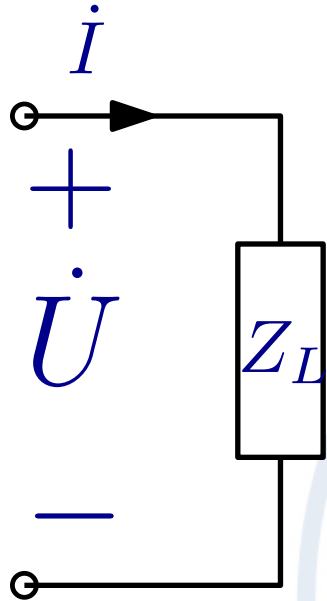
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}$$

$$\phi = \arctan \frac{X_L + X_C}{R}$$

$$\dot{U} = Z\dot{I}$$

相量形式的欧姆定律

# 串联 RLC 电路



$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX = |Z|\angle\phi$$

$Z$ : 复阻抗

$X = X_L + X_C$ : 电抗

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}$$

$$\phi = \arctan \frac{X_L + X_C}{R}$$

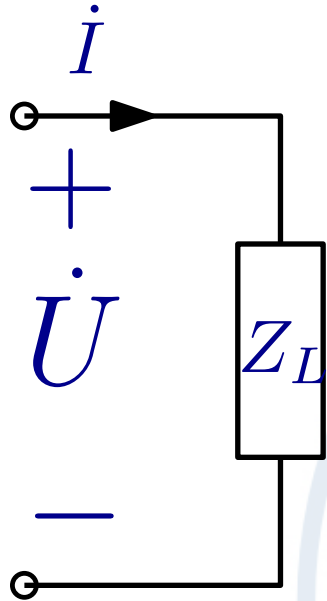
$$\dot{U} = Z\dot{I}$$

相量形式的欧姆定律

■  $U = |Z|I, U_m = |Z|I_m$ : 电压相量（有效值，最大值）的模等于电流相量（有效值，最大值）乘以阻抗模，相位差为阻抗的阻抗角

■ 电压电流的超前滞后由  $\phi = \phi_u - \phi_i$  决定

# 串联 RLC 电路



$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX = |Z|\angle\phi$$

$Z$ : 复阻抗

$X = X_L + X_C$ : 电抗

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}$$

$$\phi = \arctan \frac{X_L + X_C}{R}$$

$$\dot{U} = Z\dot{I}$$

相量形式的欧姆定律

■  $U = |Z|I, U_m = |Z|I_m$ : 电压相量（有效值，最大值）的模等于电流相量（有效值，最大值）乘以阻抗模，相位差为阻抗的阻抗角

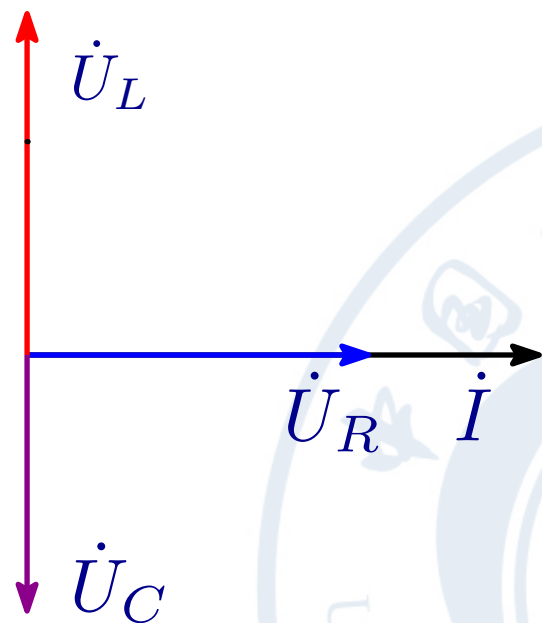
■ 电压电流的超前滞后由  $\phi = \phi_u - \phi_i$  决定

$\phi > 0, X_L + X_C > 0 \rightarrow$ 感性

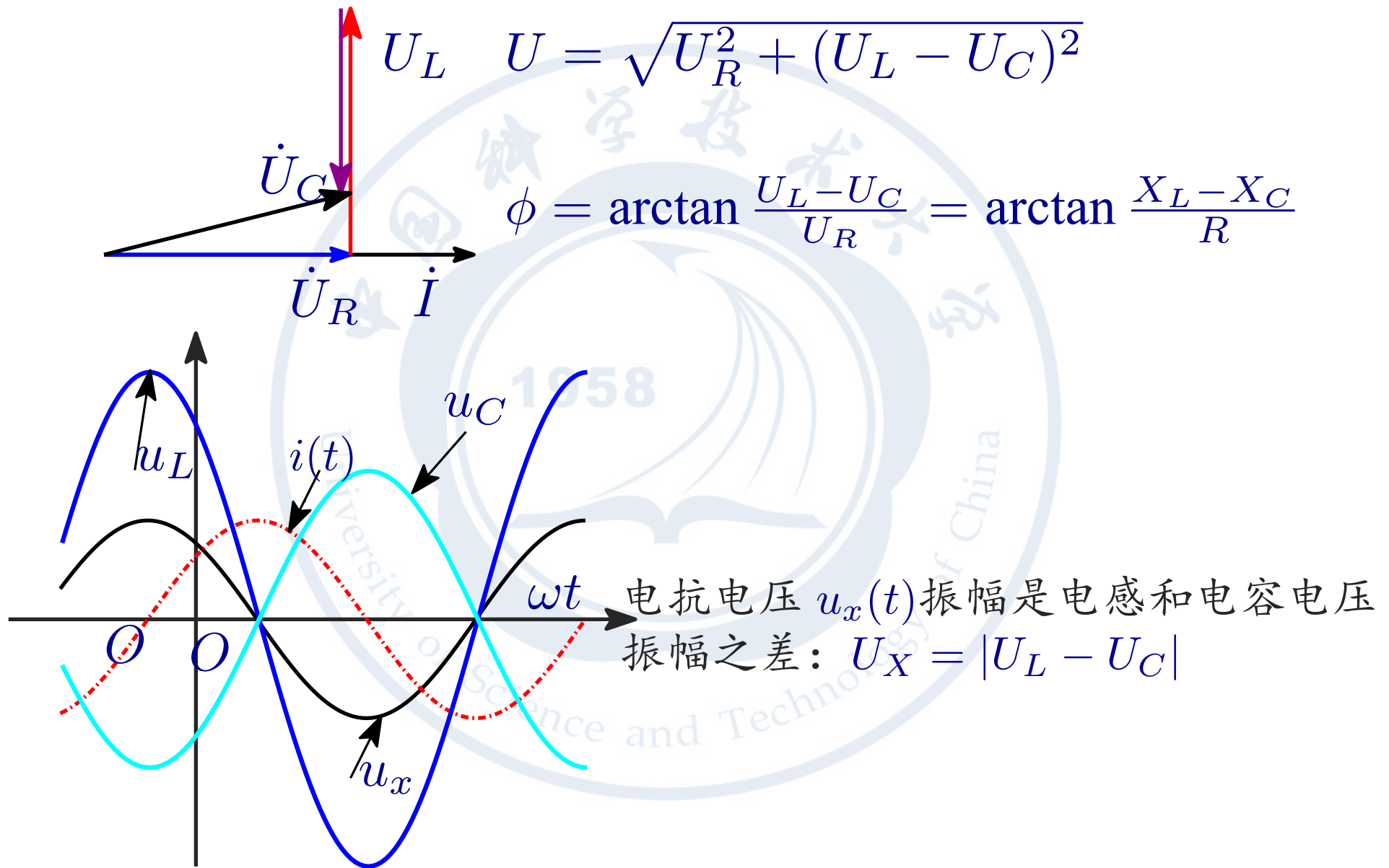
$\phi < 0, X_L + X_C < 0 \rightarrow$ 容性

$\phi = 0, X_L + X_C = 0 \rightarrow$ 纯电阻特性

# 串联 RLC 电路

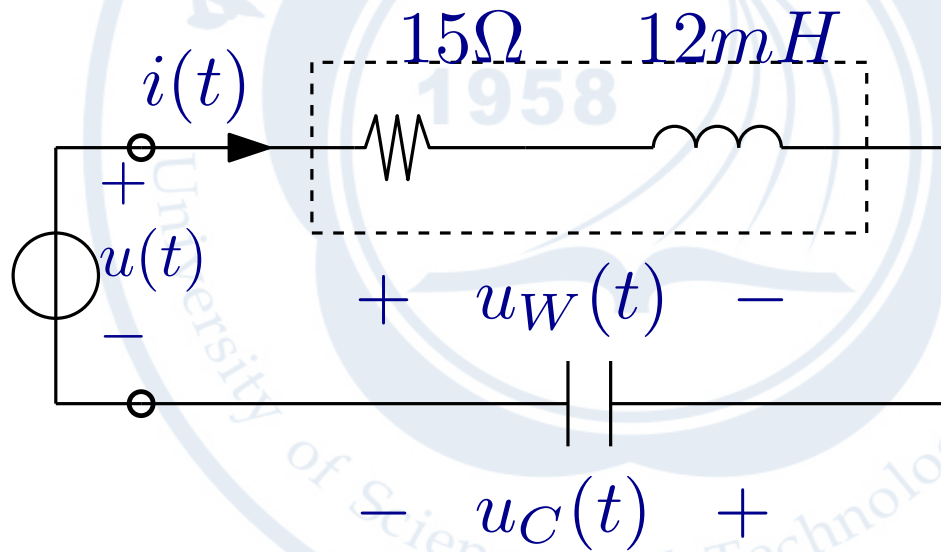


# 串联 RLC 电路



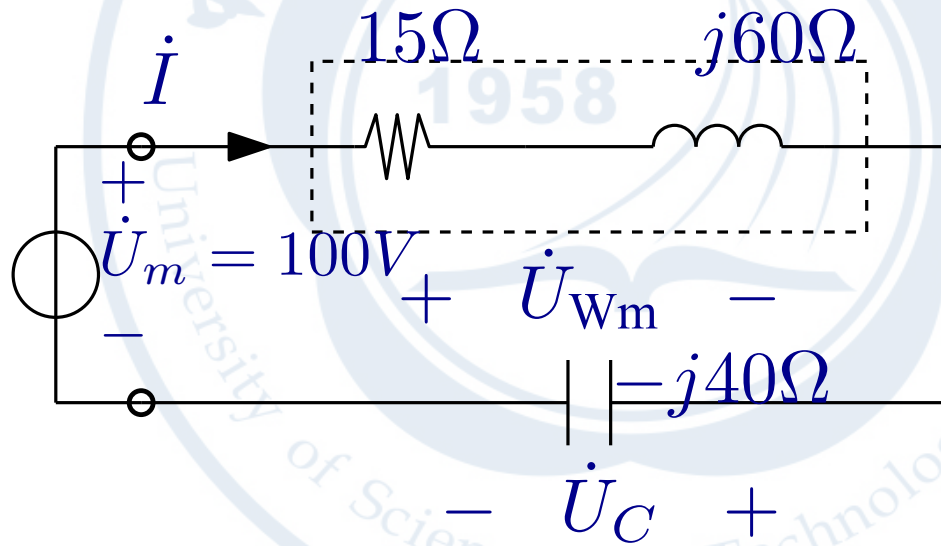
# 串联 RLC 电路

一个内阻为  $15\Omega$ ，电感值为  $15mH$  的线圈和一个  $C = 5\mu F$  的电容串联，  
用一个正弦电压源驱动电压源电压  $u(t) = 100 \cos(\omega t)$ ,  $\omega = 5000 \text{ rad/s}$ .  
计算电流  $i$ , 分别计算电容电压  $u_C$  和线圈上的电压  $u_W$ .



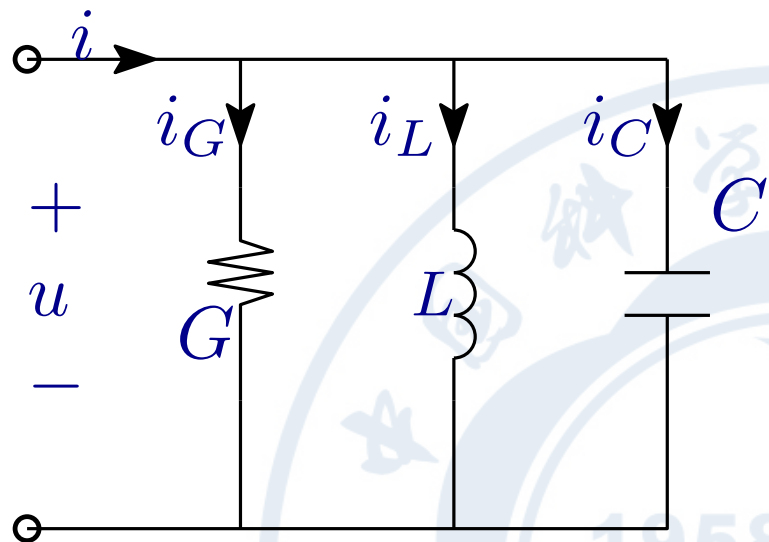
# 串联 RLC 电路

一个内阻为  $15\Omega$ ，电感值为  $15mH$  的线圈和一个  $C = 5\mu F$  的电容串联，用一个正弦电压源驱动电压源电压  $u(t) = 100 \cos(\omega t)$ ,  $\omega = 5000 \text{ rad/s}$ . 计算电流  $i$ , 分别计算电容电压  $u_C$  和线圈上的电压  $u_W$ .

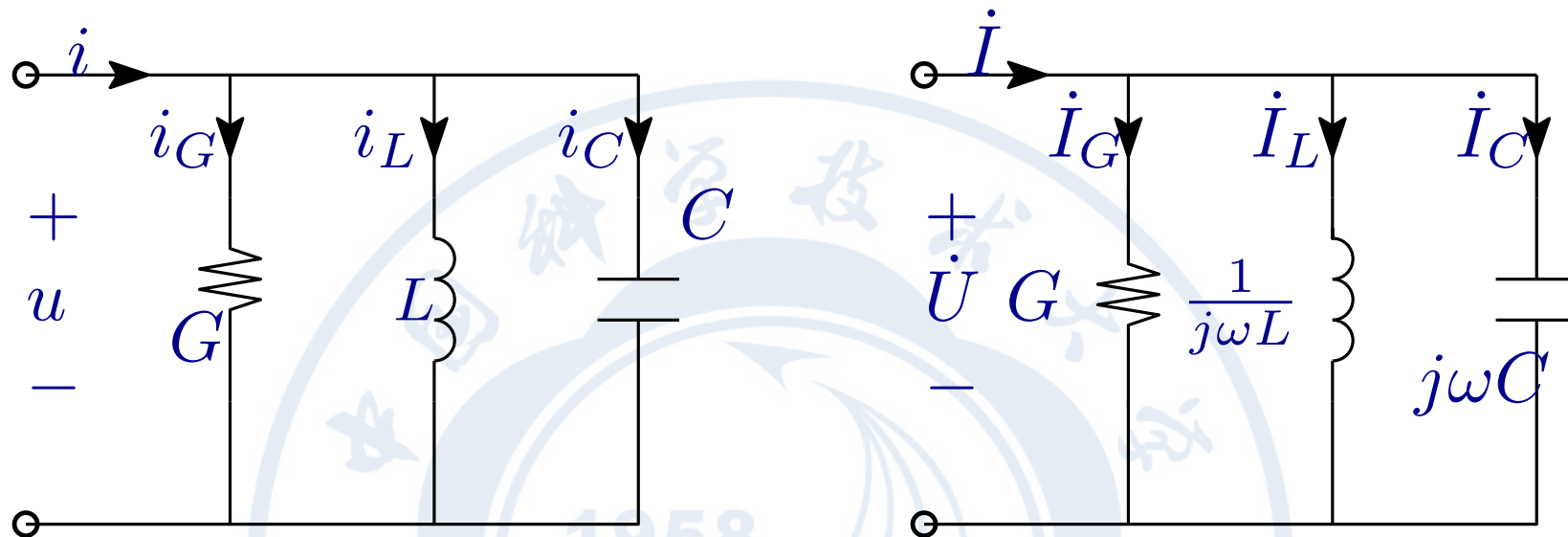




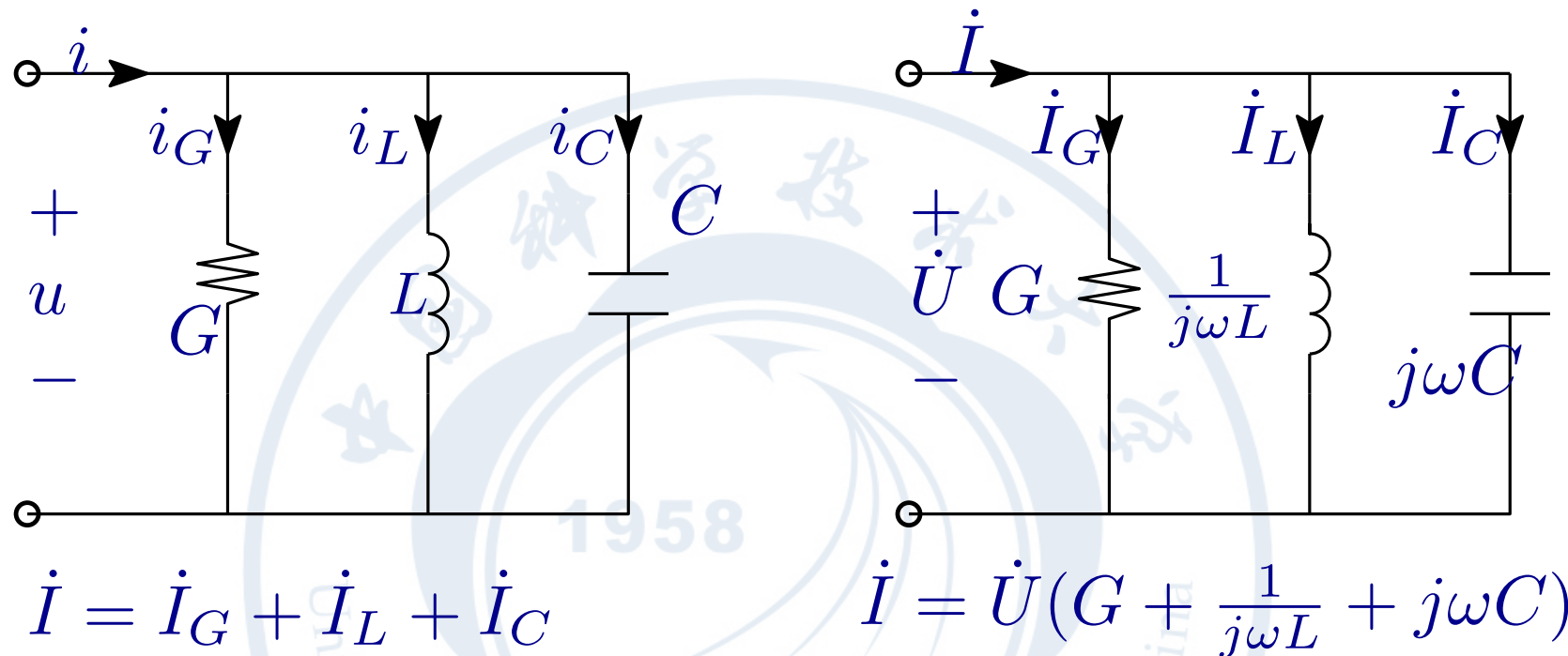
# 并联 GCL 电路



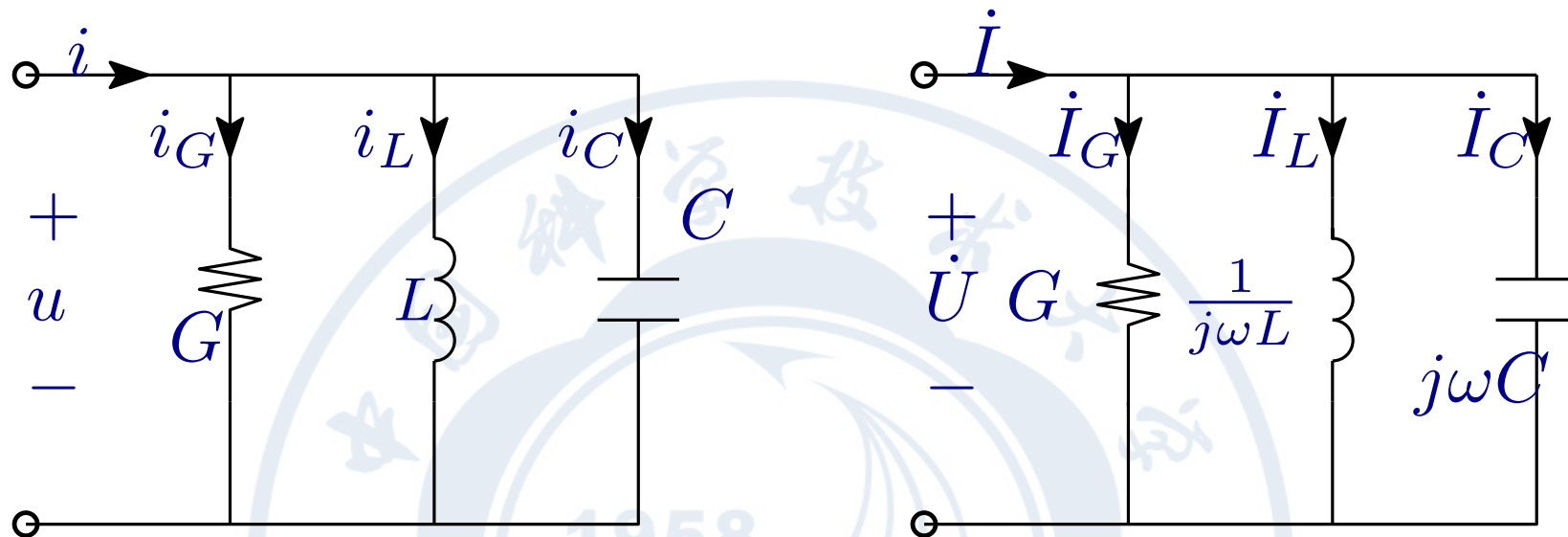
# 并联 GCL 电路



# 并联 GCL 电路



# 并联 GCL 电路



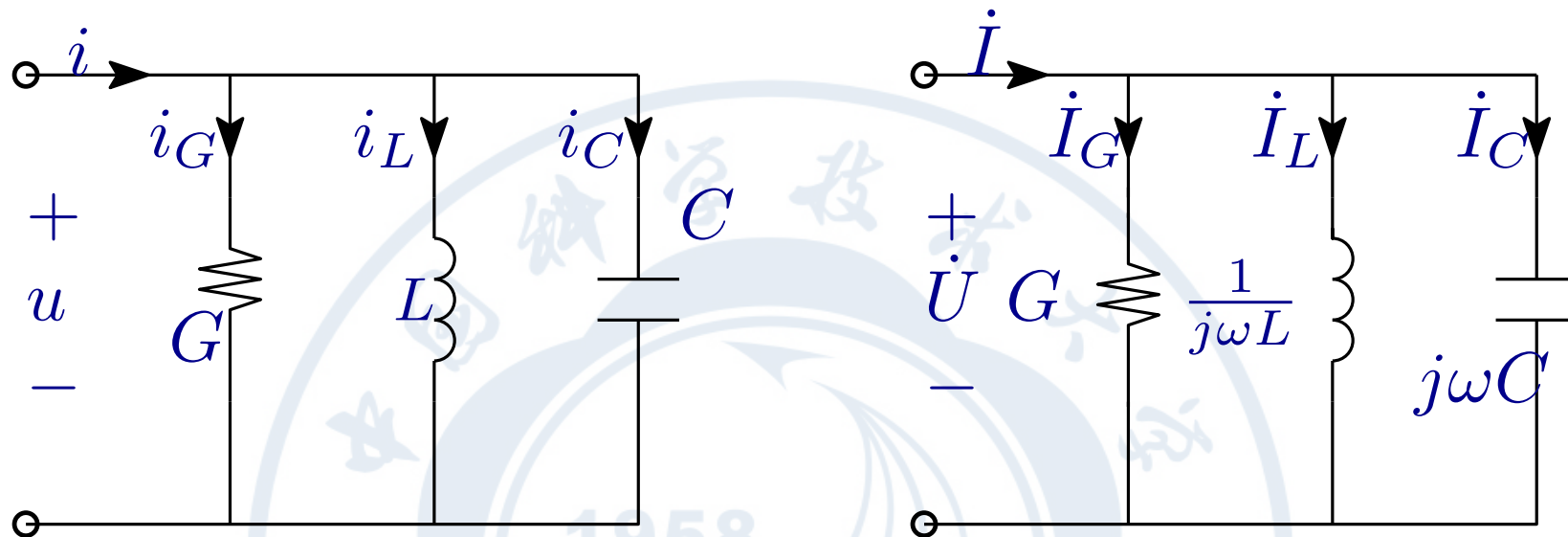
$$\dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_L + \dot{I}_C$$

$$\dot{I} = \dot{U} \left( G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right)$$

★ 并联导纳:  $Y = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$

$$Y = G + j(B_C - B_L) = G + jB = |Y| \angle \phi_Y$$

# 并联 GCL 电路



$$\dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_L + \dot{I}_C$$

$$\dot{I} = \dot{U} \left( G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right)$$

★ 并联导纳:  $Y = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$

$$Y = G + j(B_C - B_L) = G + jB = |Y| \angle \phi_Y$$

■ 容纳:  $B_C = \omega C$

■ 感纳:  $B_L = -(\omega L)^{-1}$

■ 导纳:  $B = B_C + B_L$

# 正弦电路求解思路

★ 相量表达下 KCL 仍然成立:

$$i_k \rightarrow \dot{I}_k \longrightarrow \sum_k i_k \rightarrow \sum_k \dot{I}_k = 0$$

# 正弦电路求解思路

★ 相量表达下 **KCL** 仍然成立:

$$i_k \rightarrow \dot{I}_k \longrightarrow \sum_k i_k \rightarrow \sum_k \dot{I}_k = 0$$

★ 相量表达下 **KVL** 仍然成立

$$u_k \rightarrow \dot{U}_k \longrightarrow \sum_k u_k \rightarrow \sum_k \dot{U}_k = 0$$



# 正弦电路求解思路

★ 相量表达下 **KCL** 仍然成立:

$$i_k \rightarrow \dot{I}_k \longrightarrow \sum_k i_k \rightarrow \sum_k \dot{I}_k = 0$$

★ 相量表达下 **KVL** 仍然成立

$$u_k \rightarrow \dot{U}_k \longrightarrow \sum_k u_k \rightarrow \sum_k \dot{U}_k = 0$$

★ 相量表达下的电压电流关系

$$\dot{U} = R\dot{I} \quad \dot{U} = j\omega L\dot{I} \quad \dot{U} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

# 正弦电路求解思路

★ 相量表达下 KCL 仍然成立:

$$i_k \rightarrow \dot{I}_k \longrightarrow \sum_k i_k \rightarrow \sum_k \dot{I}_k = 0$$

★ 相量表达下 KVL 仍然成立

$$u_k \rightarrow \dot{U}_k \longrightarrow \sum_k u_k \rightarrow \sum_k \dot{U}_k = 0$$

★ 相量表达下的电压电流关系

$$\dot{U} = R\dot{I} \quad \dot{U} = j\omega L\dot{I} \quad \dot{U} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

■ **正弦电流电路**中, 利用相量表达电路变量后, 电阻、电感、电容的电压电流关系均呈现**线性比例关系**, 比例关系可认为是**复常数**, 元件可以等效为**复电阻**, 电阻值分别为  $j\omega L, R, \frac{1}{j\omega C}$ .

# 正弦电路求解思路

★ 相量表达下 KCL 仍然成立:

$$i_k \rightarrow \dot{I}_k \longrightarrow \sum_k i_k \rightarrow \sum_k \dot{I}_k = 0$$

★ 相量表达下 KVL 仍然成立

$$u_k \rightarrow \dot{U}_k \longrightarrow \sum_k u_k \rightarrow \sum_k \dot{U}_k = 0$$

★ 相量表达下的电压电流关系

$$\dot{U} = R\dot{I} \quad \dot{U} = j\omega L\dot{I} \quad \dot{U} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

■ 利用复系数代数方程描述正弦电路:

[1].  $n - 1$  个 KCL 方程-线性代数方程

[2].  $b - n + 1$  个 KVL 方程-线性代数方程

[3].  $b$  个频域的电压电流关系方程-线性代数方程

# 正弦电路求解思路

★ 相量表达下 KCL 仍然成立:

$$i_k \rightarrow \dot{I}_k \longrightarrow \sum_k i_k \rightarrow \sum_k \dot{I}_k = 0$$

★ 相量表达下 KVL 仍然成立

$$u_k \rightarrow \dot{U}_k \longrightarrow \sum_k u_k \rightarrow \sum_k \dot{U}_k = 0$$

★ 相量表达下的电压电流关系

$$\dot{U} = R\dot{I} \quad \dot{U} = j\omega L\dot{I} \quad \dot{U} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

■ 利用复系数代数方程描述正弦电路:

[1].  $n - 1$  个 KCL 方程-线性代数方程

[2].  $b - n + 1$  个 KVL 方程-线性代数方程

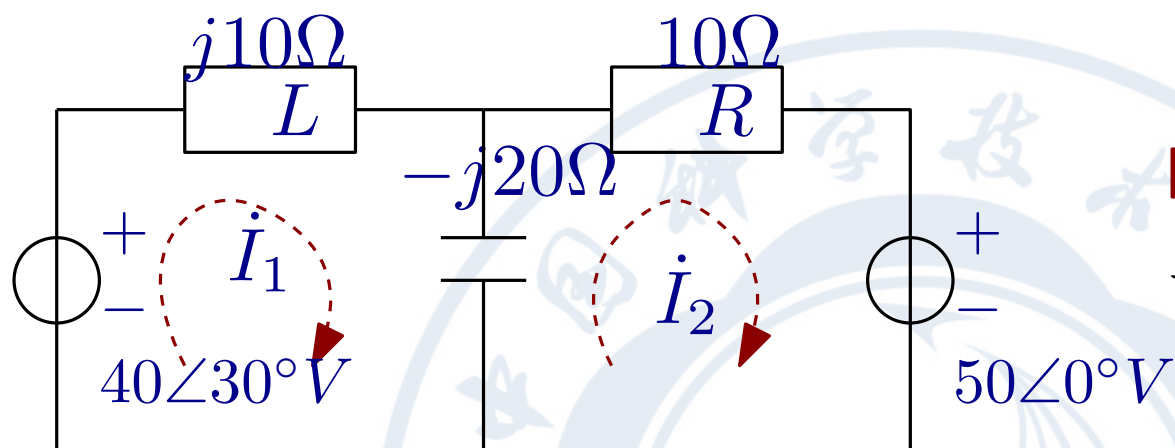
[3].  $b$  个频域的电压电流关系方程-线性代数方程

在正弦电路分析中, 将电路变量利用相量表达后, 直流分析方法可以用于正弦电路行为分析

# 正弦电路相量分析流程

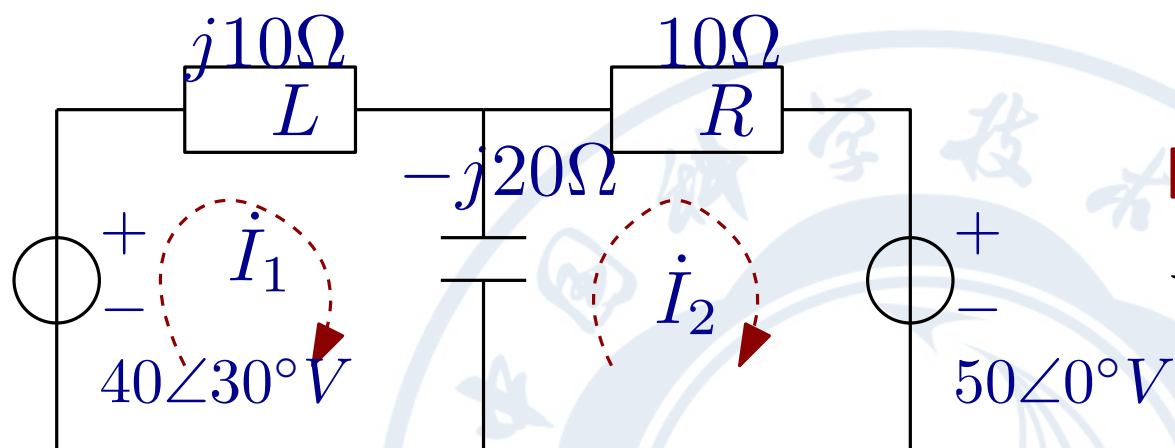
- ★ 将所有电路变量  $u, i$  映射为相量形式  $\dot{U}, \dot{I}(\dot{U}_m, \dot{I}_m)$
- ★ 利用直流分析方法求解相量表示的电路，与直流分析的不同在于线性代数方程组的系数为**复数**
- ★ 根据电路变量的相量表达形式  $\dot{U}_m, \dot{I}_m(\dot{U}, \dot{I})$  写出时域形式结果  $u, i!!$

# 正弦电流电路分析举例



■ 利用回路电流法计算回路电流  $\dot{I}_1$  和  $\dot{I}_2$

# 正弦电流电路分析举例

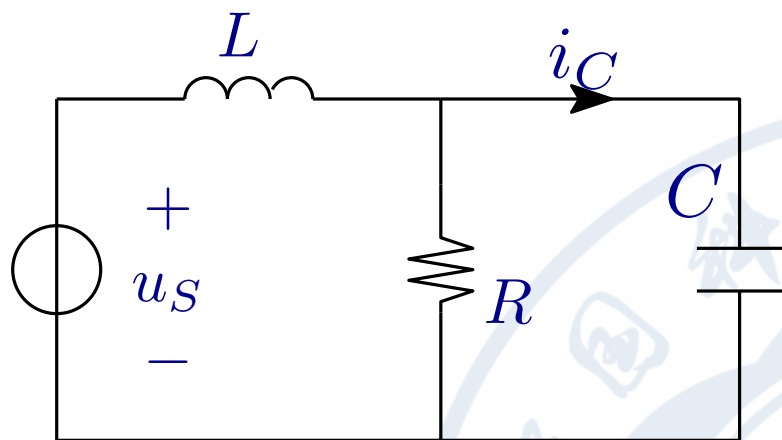


■ 利用回路电流法计算回路电流  $\dot{I}_1$  和  $\dot{I}_2$

$$\begin{bmatrix} j10\Omega - j20\Omega & j20\Omega \\ j20\Omega & -j20\Omega + 10\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40e^{j30^\circ} \\ 50e^{j0^\circ} \end{bmatrix}$$

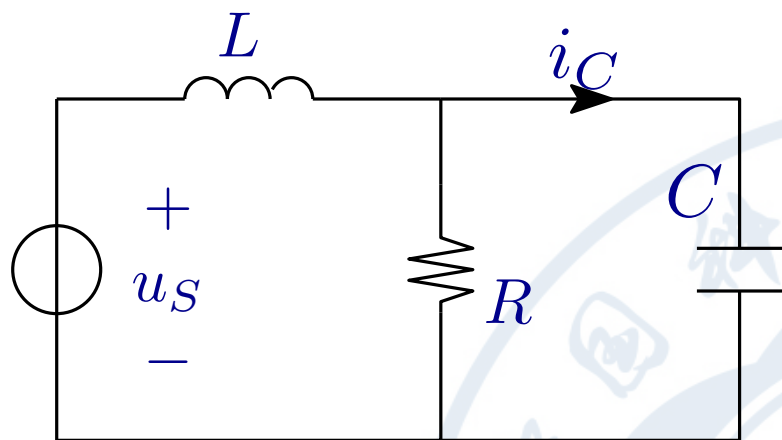


# 正弦电流电路分析



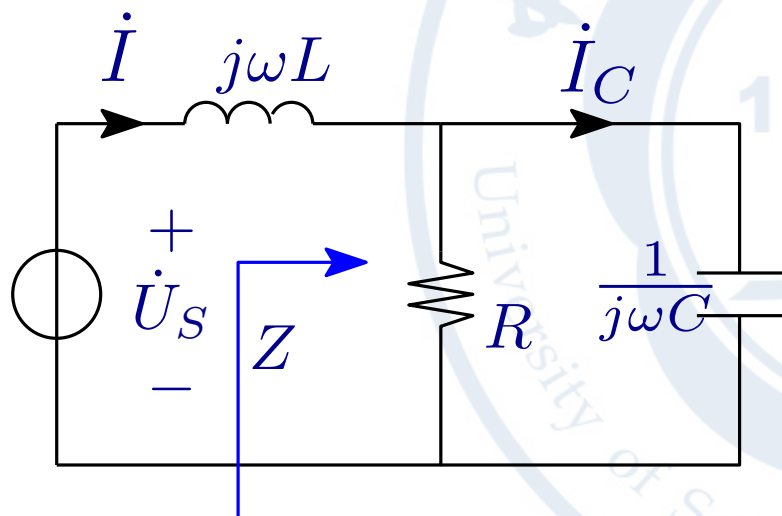
电路中  $u_S = 60\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ) V$ ,  
 $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 0.1 H$ ,  $C = 10^{-3} F$ 。求电流  $i_C$

# 正弦电流电路分析



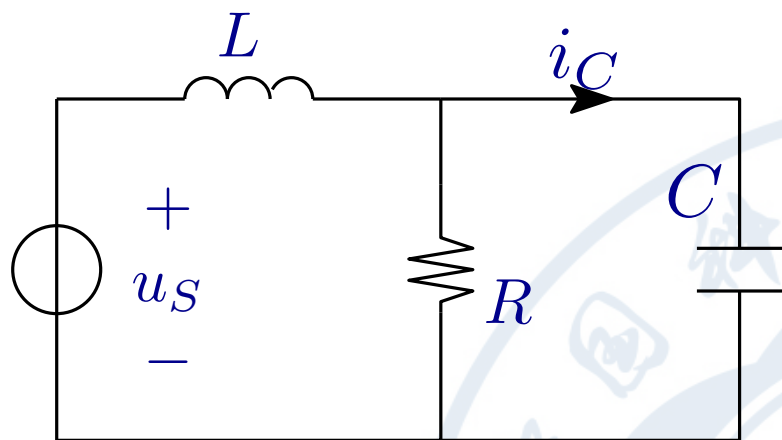
电路中  $u_S = 60\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ) V$ ,  
 $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 0.1 H$ ,  $C = 10^{-3} F$ 。求电流  $i_C$

1. 将各变量映射为相量形式



$$u_s(t) \rightarrow \dot{U}_S = 60 \angle 45^\circ$$

# 正弦电流电路分析



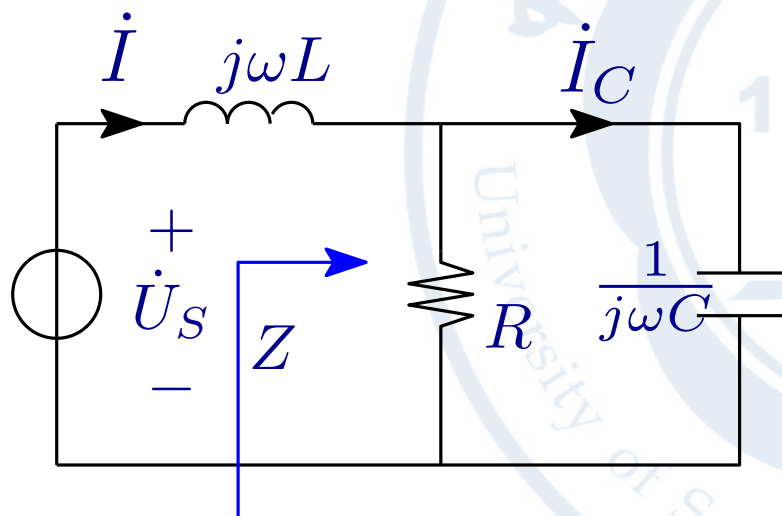
电路中  $u_S = 60\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ) V$ ,  
 $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 0.1 H$ ,  $C = 10^{-3} F$ 。求电流  $i_C$

1. 将各变量映射为相量形式

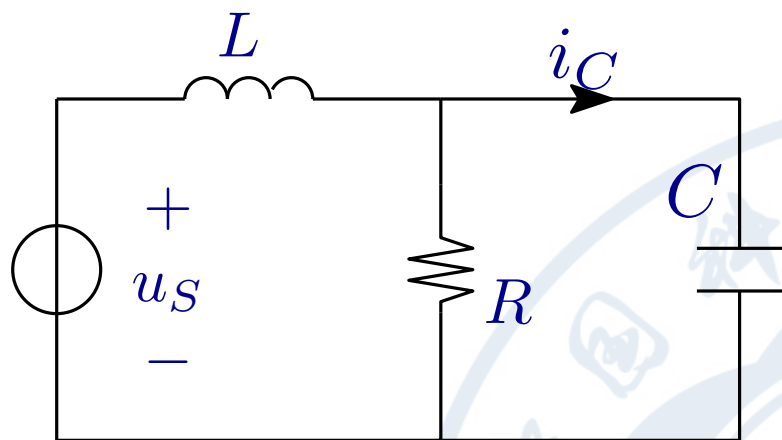
$$u_s(t) \rightarrow \dot{U}_S = 60 \angle 45^\circ$$

2. 写出正弦电流电路元件参数

$$R \rightarrow R, L \rightarrow j\omega L, C \rightarrow \frac{1}{j\omega C}$$



# 正弦电流电路分析



电路中  $u_S = 60\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ) V$ ,  
 $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 0.1 H$ ,  $C = 10^{-3} F$ 。求电流  $i_C$

1. 将各变量映射为相量形式

$$u_S(t) \rightarrow \dot{U}_S = 60 \angle 45^\circ$$

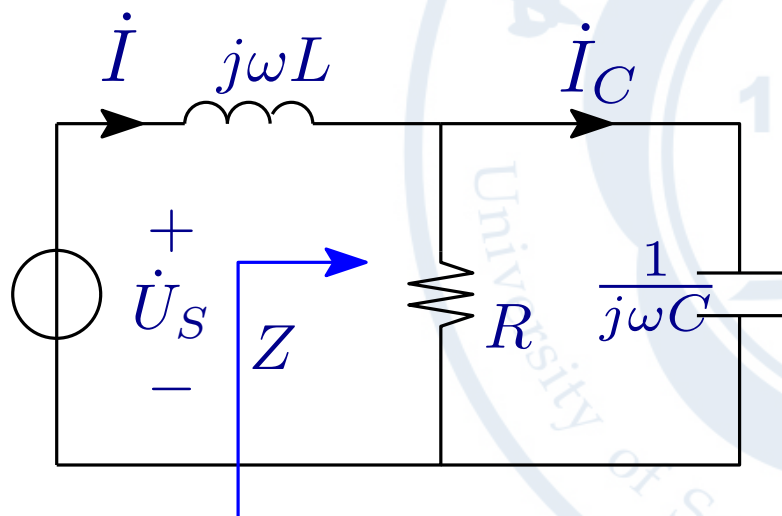
2. 写出正弦电流电路元件参数

$$R \rightarrow R, L \rightarrow j\omega L, C \rightarrow \frac{1}{j\omega C}$$

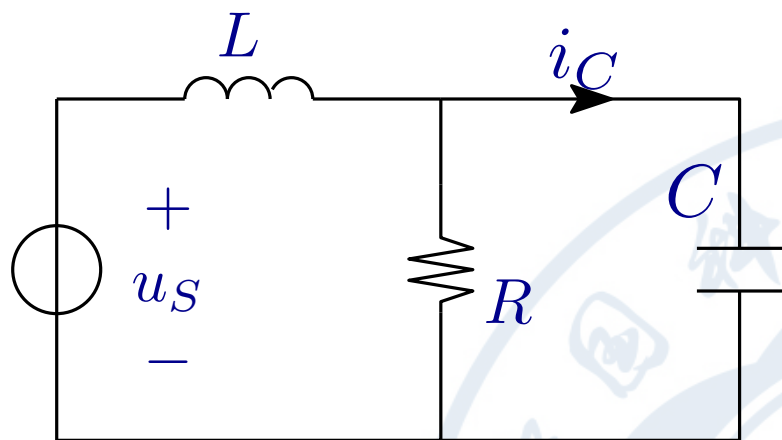
3. 利用直流分析方法获取待求量的相量形式

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z + j\omega L}, Z = R // (1/j\omega C) = 6\sqrt{2} A$$

$$\dot{I}_C = \frac{R}{R + 1/(j\omega C)} \dot{I} = 6 \angle 45^\circ A.$$



# 正弦电流电路分析



电路中  $u_S = 60\sqrt{2}\cos(\omega t + 45^\circ)V$ ,  
 $\omega = 100\text{rad/s}$ ,  $R = 10\Omega$ ,  $L = 0.1H$ ,  $C = 10^{-3}F$ 。求电流  $i_C$

1. 将各变量映射为相量形式

$$u_S(t) \rightarrow \dot{U}_S = 60\angle 45^\circ$$

2. 写出正弦电流电路元件参数

$$R \rightarrow R, L \rightarrow j\omega L, C \rightarrow \frac{1}{j\omega C}$$

3. 利用直流分析方法获取待求量的相量形式

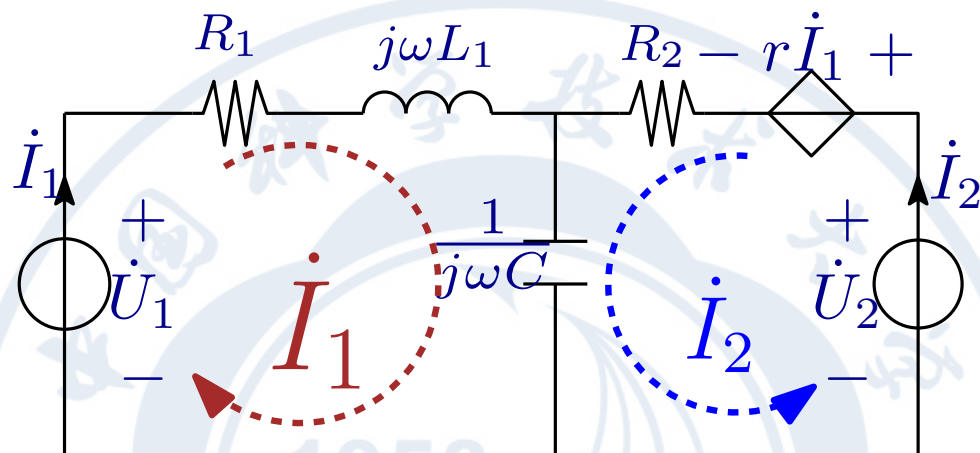
4. 根据相量形式写出结果

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z + j\omega L}, Z = R // (1/j\omega C) = 6\sqrt{2}A$$

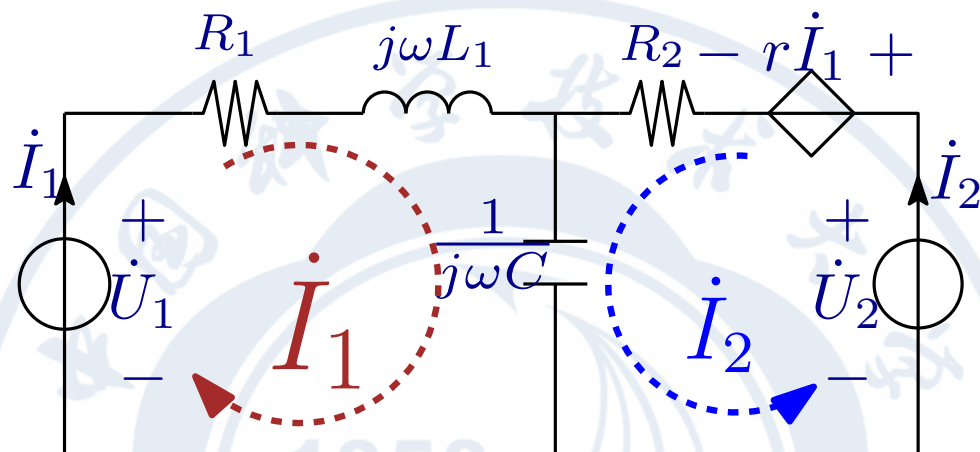
$$i_C(t) = 6\sqrt{2}\cos(100t + 45^\circ)V$$

$$\dot{I}_C = \frac{R}{R + 1/(j\omega C)} \dot{I} = 6\angle 45^\circ A.$$

# 相量形式回路电流方程



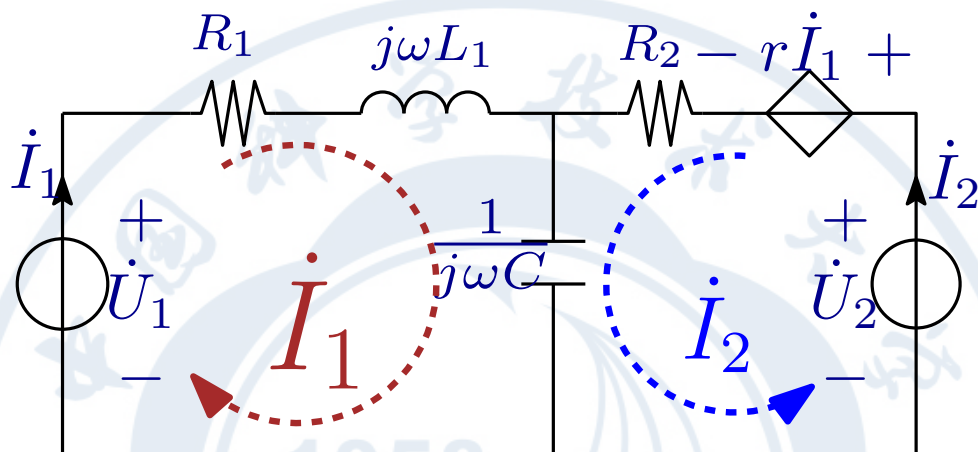
# 相量形式回路电流方程



$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} & +\frac{1}{j\omega C} \\ +\frac{1}{j\omega C} & R_2 + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 - r\dot{I}_1 \end{bmatrix}$$



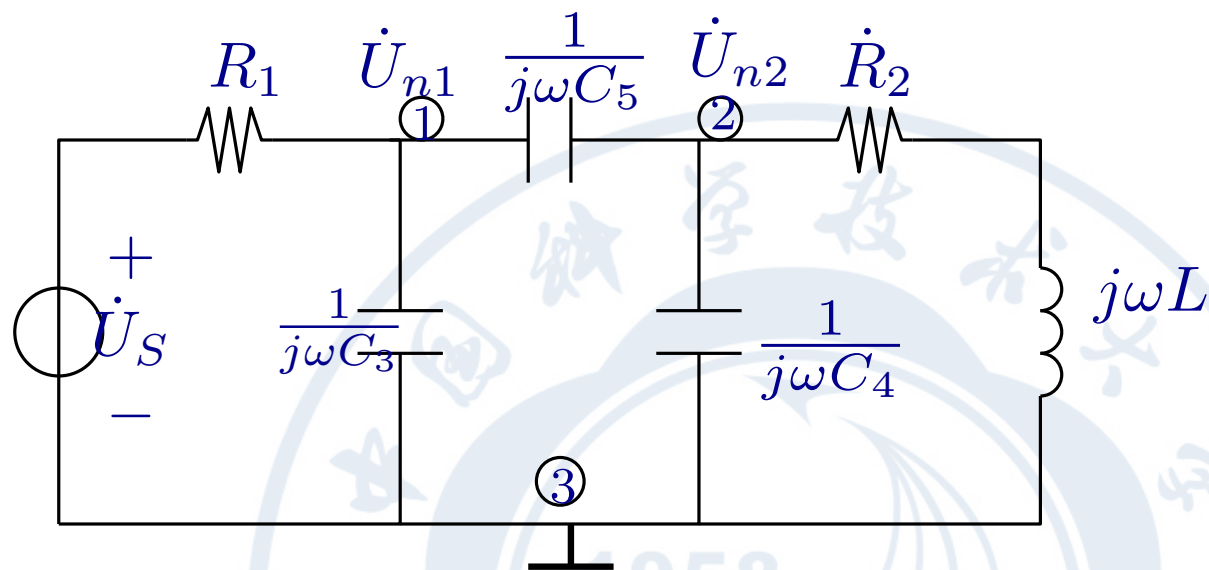
# 相量形式回路电流方程



$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} & +\frac{1}{j\omega C} \\ +\frac{1}{j\omega C} & R_2 + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 - r\dot{I}_1 \end{bmatrix}$$

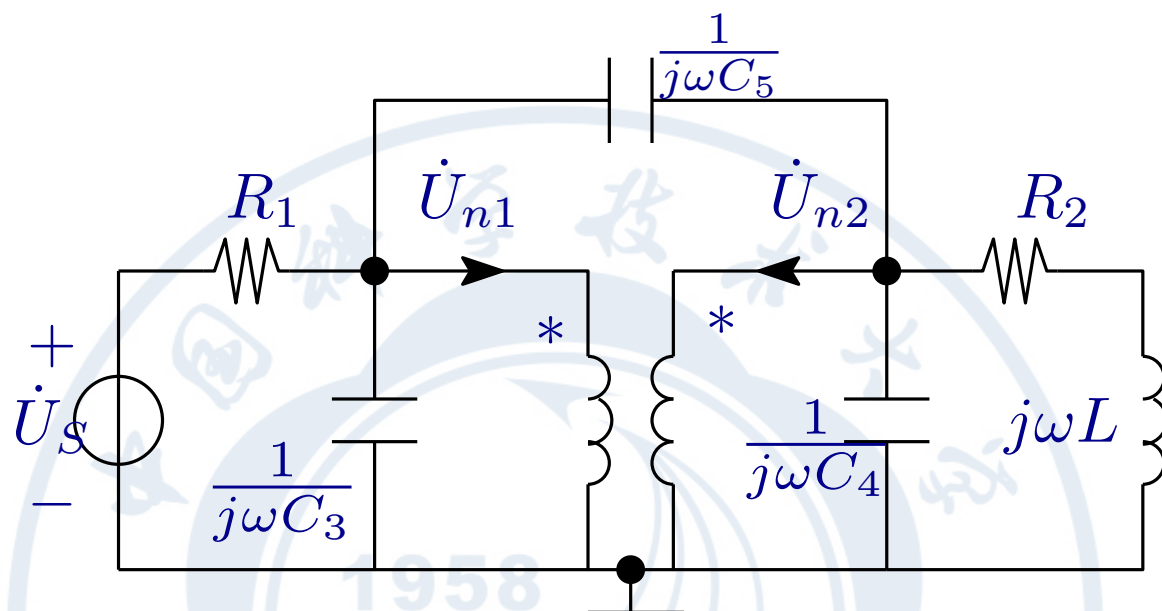
$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ r + \frac{1}{j\omega C} & R_2 + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

# 相量形式节点电压方程



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + j\omega(C_3 + C_5) & -j\omega C_5 \\ -j\omega C_5 & \frac{1}{R_2 + j\omega L} + j\omega(C_4 + C_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{n1} \\ \dot{U}_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\dot{U}_s} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

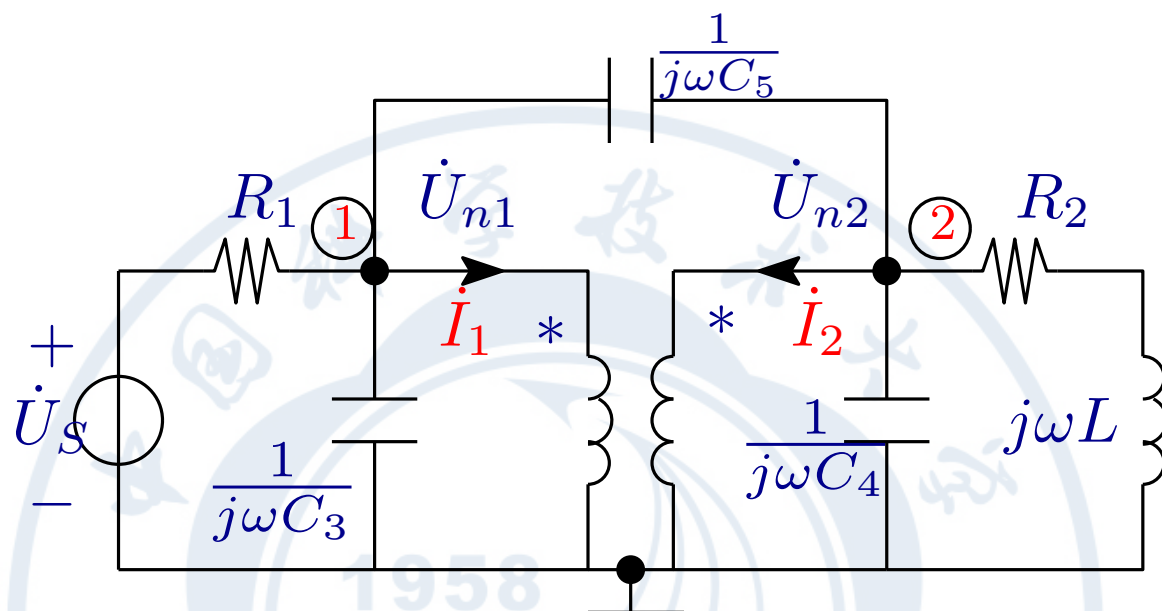
# 正弦电流电路相量分析举例



该题目的解决面临两个问题，选择节点电压法还是回路电流法？

变压器的存在使得电路分析倾向于选择节点电压法，对应节点电压法需要知道从变压器流入节点 1,2 的电流，我们需要假设这 2 个点的电流为  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ .

# 正弦电流电路相量分析举例

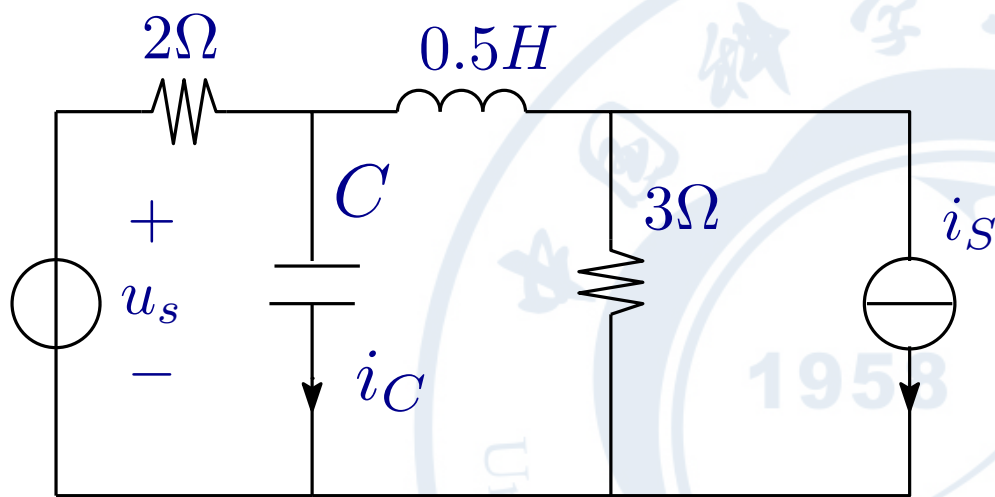


该题目的解决面临两个问题，选择节点电压法还是回路电流法？

变压器的存在使得电路分析倾向于选择节点电压法，对应节点电压法需要知道从变压器流入节点 1,2 的电流，我们需要假设这 2 个点的电流为  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$ 。

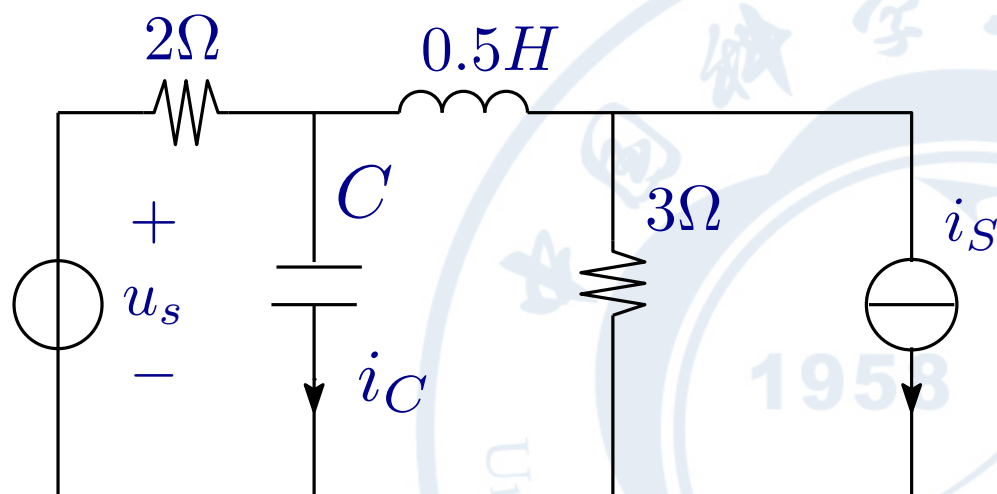
# 正弦电流电路相量分析举例

当  $C = 0.05F$ ，电流  $i_C = 5\sqrt{2}\cos(10t - 60^\circ)A$ 。求当  $C = 0.25F$  的电流  $i_C$



# 正弦电流电路相量分析举例

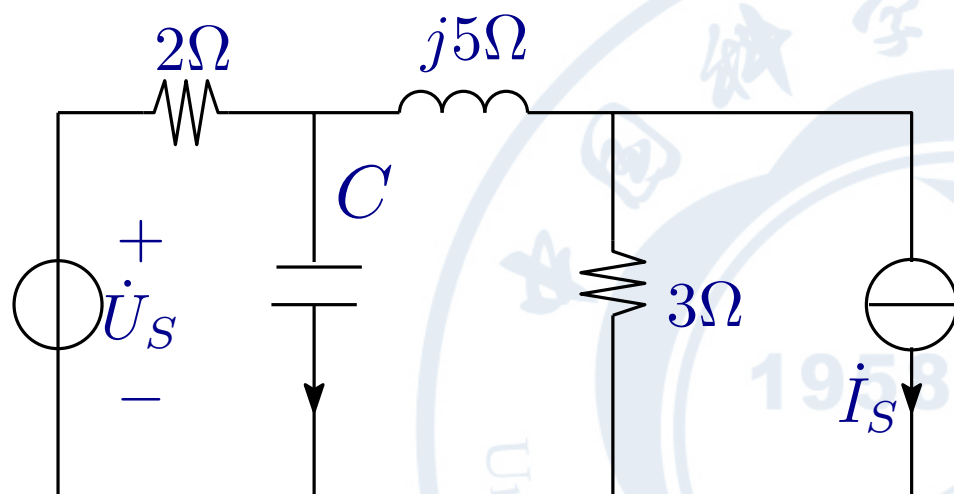
当  $C = 0.05F$ ，电流  $i_C = 5\sqrt{2} \cos(10t - 60^\circ)A$ 。求当  $C = 0.25F$  的电流  $i_C$



1 将时域电路变量映射为相量表达，电路元件参数转换为相量形式下的参数；

# 正弦电流电路相量分析举例

当  $C = 0.05F$ ，电流  $i_C = 5\sqrt{2}\cos(10t - 60^\circ)A$ 。求当  $C = 0.25F$  的电流  $i_C$

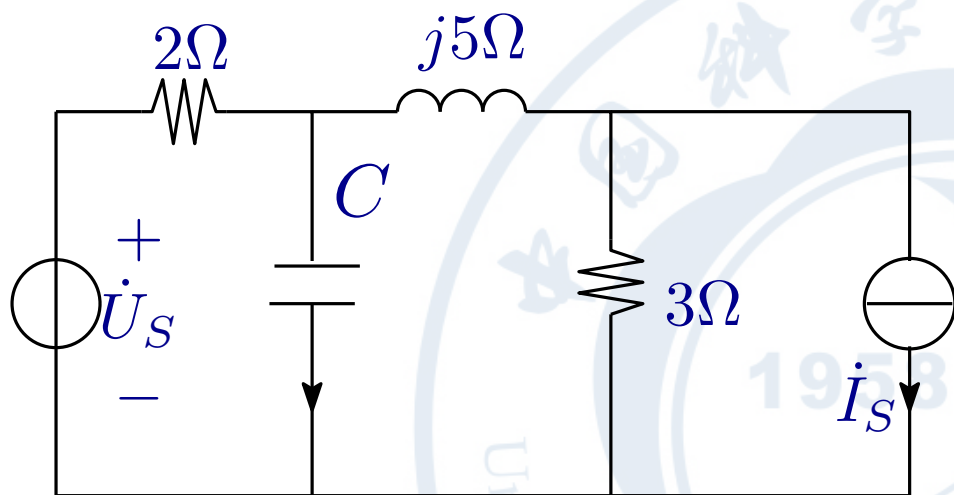


1 将时域电路变量映射为相量表达，电路元件参数转换为相量形式下的参数；



# 正弦电流电路相量分析举例

当  $C = 0.05F$ ，电流  $i_C = 5\sqrt{2} \cos(10t - 60^\circ)A$ 。求当  $C = 0.25F$  的电流  $i_C$

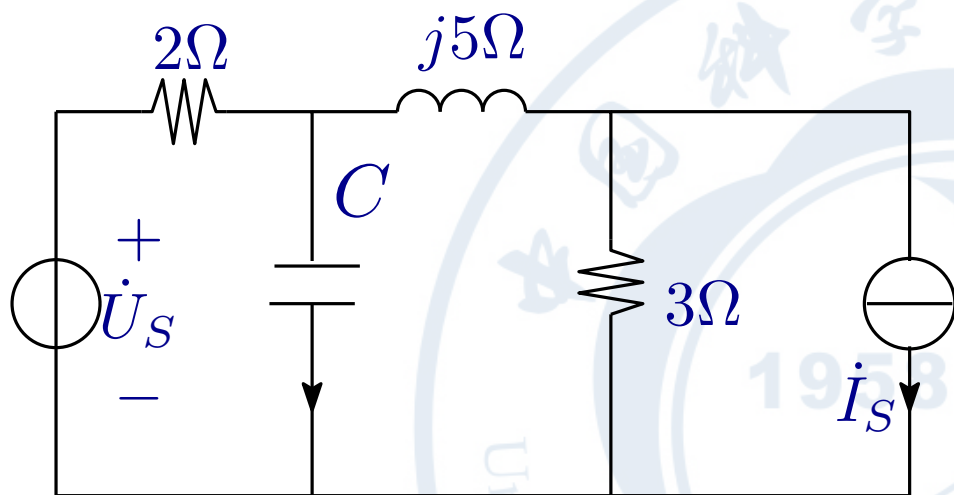


1 将时域电路变量映射为相量表达，电路元件参数转换为相量形式下的参数；

2. 问题转换为当所加电容对应容抗为  $-2j\Omega$ ，电流  $\dot{I}_S = 5\angle -60^\circ$ ，求对应容抗为  $-j0.8\Omega$  对应的电流

# 正弦电流电路相量分析举例

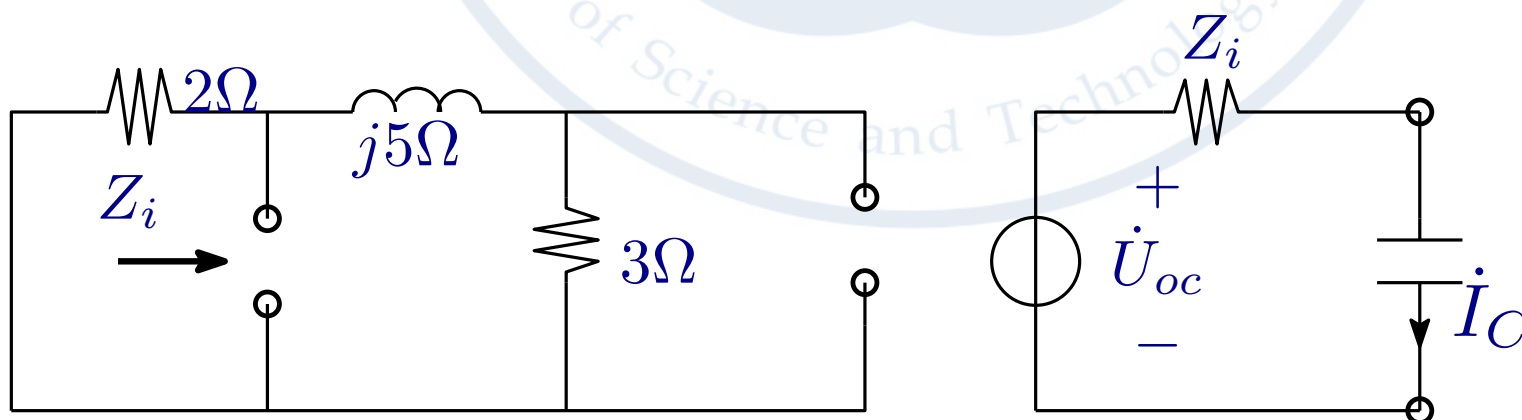
当  $C = 0.05F$ ，电流  $i_C = 5\sqrt{2}\cos(10t - 60^\circ)A$ 。求当  $C = 0.25F$  的电流  $i_C$



1 将时域电路变量映射为相量表达，电路元件参数转换为相量形式下的参数；

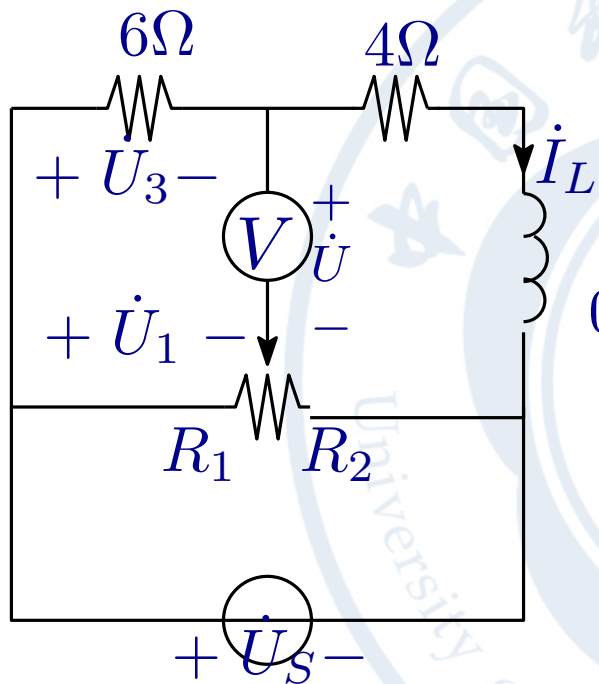
2. 问题转换为当所加电容对应容抗为  $-2j\Omega$ ，电流  $\dot{I}_S = 5\angle -60^\circ$ ，求对应容抗为  $-j0.8\Omega$  对应的电流

3. 注意到相量形势下正弦交流电路与直流电路分析过程完全一致，仅仅方程系数为复系数。由此知道所有电路定理继续成立，因为我们可以利用 Thevenin 定理求解该问题。



## 正弦电流电路相量分析举例

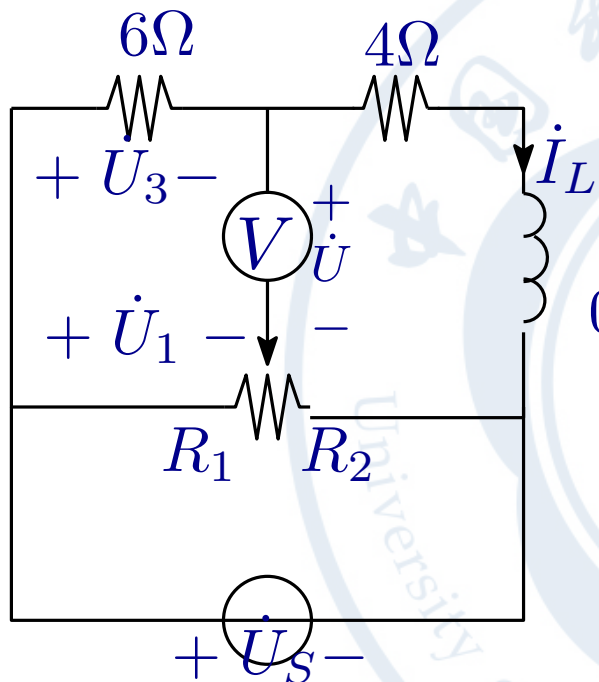
■ 正弦信号角频率  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ , 电压表为理想电压表。  
求  $R_1/R_2$  为何值时, 电压表读数最小?



1. 何为理想电压表？
2. 电压表读数最小意味着什么？
  1. 内阻为  $\infty$  的电压表为理想电压表
  2. 电压表读读数最小意味着正弦信号的模最小

# 正弦电流电路相量分析举例

■ 正弦信号角频率  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ , 电压表为理想电压表。  
求  $R_1/R_2$  为何值时, 电压表读数最小?



1. 何为理想电压表?

2. 电压表读数最小意味着什么?

1. 内阻为  $\infty$  的电压表为理想电压表

2. 电压表读数最小意味着正弦信号的模最小

$$\dot{U} = (\dot{U}_S - \dot{U}_3) - (\dot{U}_S - \dot{U}_1) = \dot{U}_1 - \dot{U}_3$$

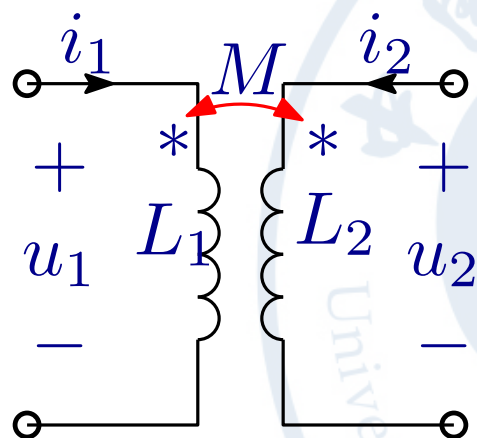
$$\dot{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \dot{U}_S - \frac{6}{10 + j\omega L} \dot{U}_S = \left( \frac{r}{r+1} - 0.3 + j0.3 \right) \dot{U}_S$$

→  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{7}$ ,  $\dot{U}_S$  模最小, 电压表读数最小

# 含互感元件的正弦电流电路

## ■ 互感电路电压电流关系的时域方程：

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$$
$$u_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

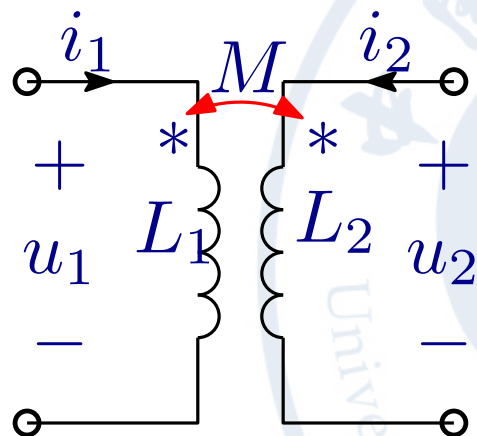


V-I in Time Domain

# 含互感元件的正弦电流电路

## ■ 互感电路电压电流关系的时域方程：

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$



V-I in Time Domain

## ■ 正弦电流电路中互感电路电压电流关系的相量表达：

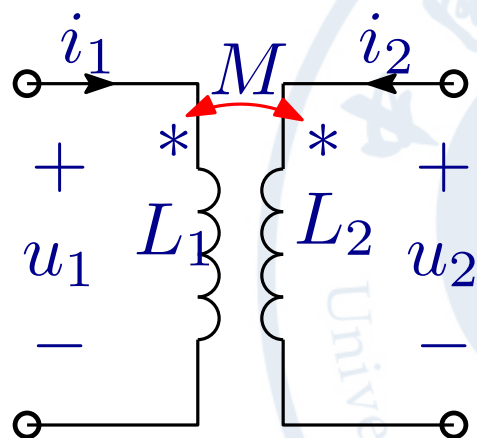
$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= \pm j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{aligned}$$



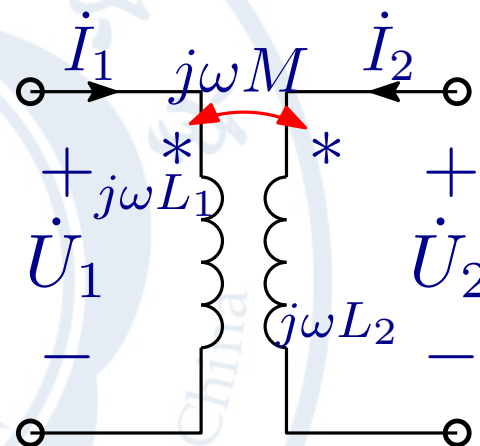
# 含互感元件的正弦电流电路

## ■ 互感电路电压电流关系的时域方程：

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$



V-I in Time Domain



V-I in Frequency Domain

## ■ 正弦电流电路中互感电路电压电流关系的相量表达：

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= \pm j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{aligned}$$



# 含互感元件的正弦电流电路

## ■ 互感电路电压电流关系的时域方程：

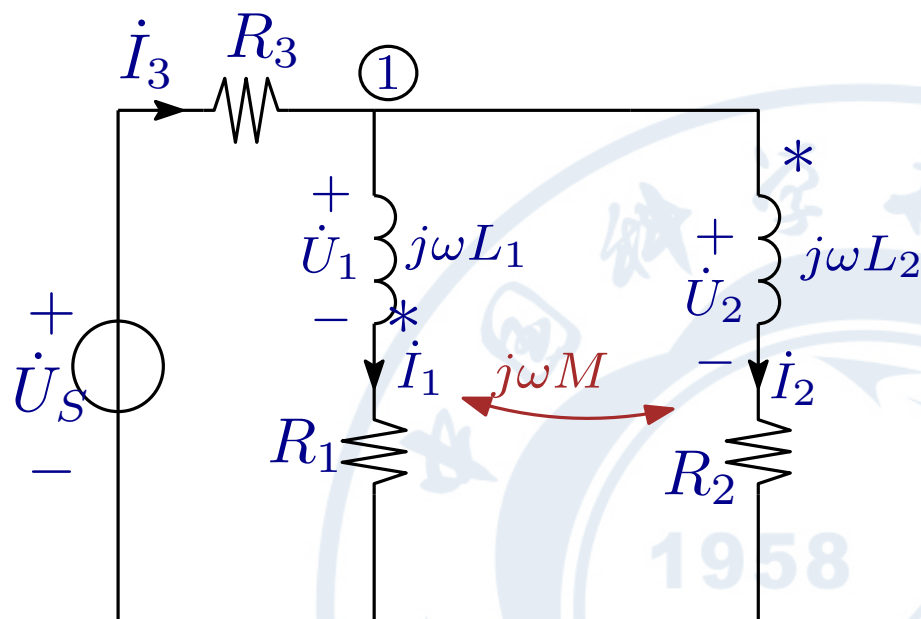
$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

电压电流**关联参考方向**前提下，都从同名端电流流入(流出)，取  $+$ ，否则取  $-$ ！

## ■ 正弦电流电路中互感电路电压电流关系的相量表达：

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= \pm j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{aligned}$$

# 含互感元件的正弦电流电路



$$\begin{aligned} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 &= 0 \\ \dot{U}_1 + R_1 \dot{I}_1 + \dot{I}_3 R_3 &= \dot{U}_S \\ \dot{U}_2 + R_2 \dot{I}_2 + \dot{I}_3 R_3 &= \dot{U}_S \end{aligned}$$

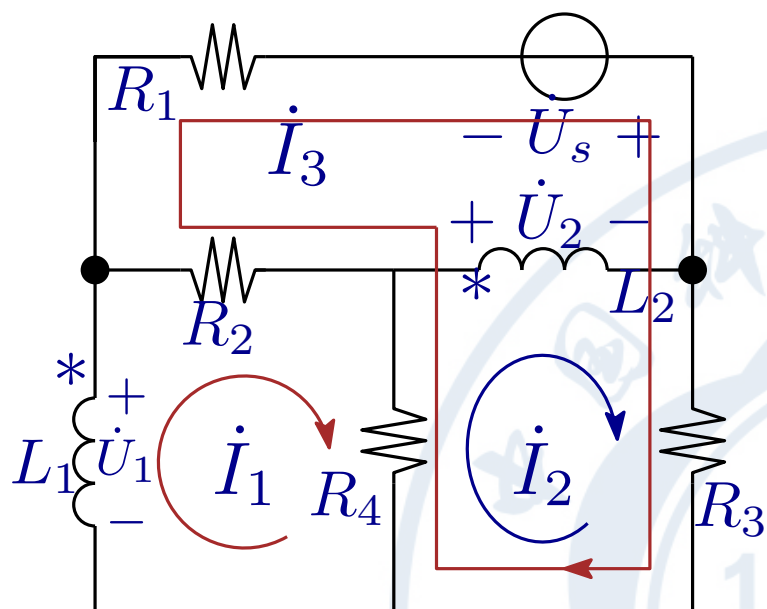
未知数:  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{U}_1, \dot{U}_2$

■ 利用相量形式的互感线圈电压电流关系，特别注意同名端的电流流向与  $M$  的符号关系！

★ 注意电流从端口 1 同名端流出，从端口 2 同名端流入，因此  $M$  选负号。前提是  $\dot{U}_1, \dot{I}_1, \dot{U}_2, \dot{I}_2$  是关联参考方向。

$$\diamond \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2, \dot{U}_2 = -j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2$$

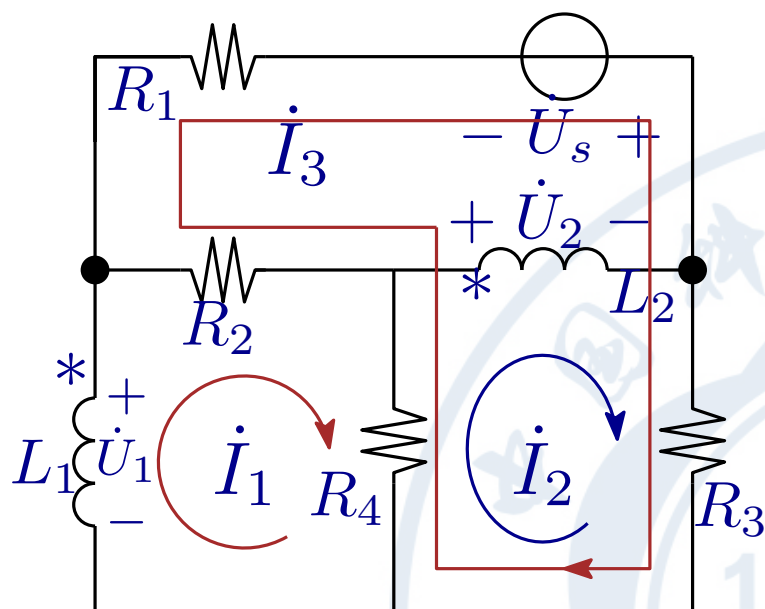
# 含互感元件的正弦电流电路



★ 对含有互感元件的电路，采用回路电流法比节点电压法为好。

原因：互感元件电流表示电压比较容易，电压表征电流相对困难。

# 含互感元件的正弦电流电路

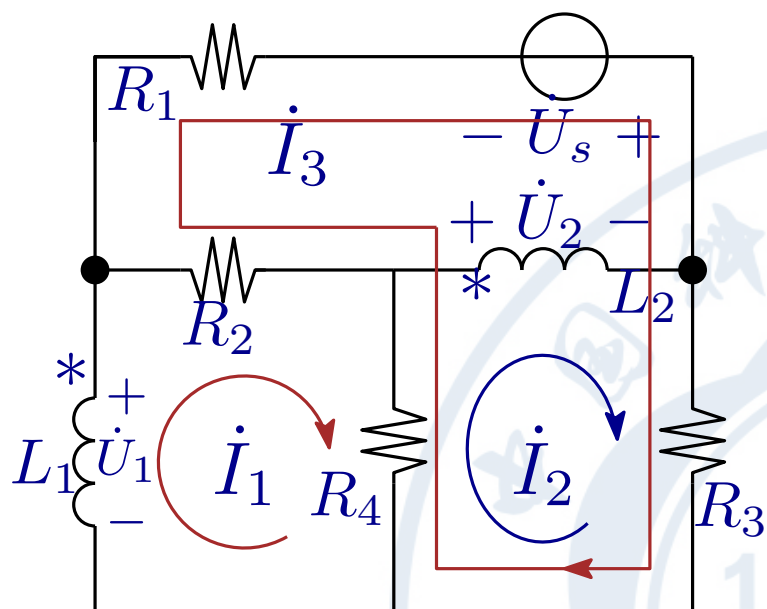


★ 对含有互感元件的电路，采用回路电流法比节点电压法为好。

原因：互感元件电流表示电压比较容易，电压表征电流相对困难。

$$\text{回路 1: } (R_2 + R_4)\dot{I}_1 - R_4\dot{I}_2 - (R_2 + R_4)\dot{I}_3 = \dot{U}_1$$

# 含互感元件的正弦电流电路



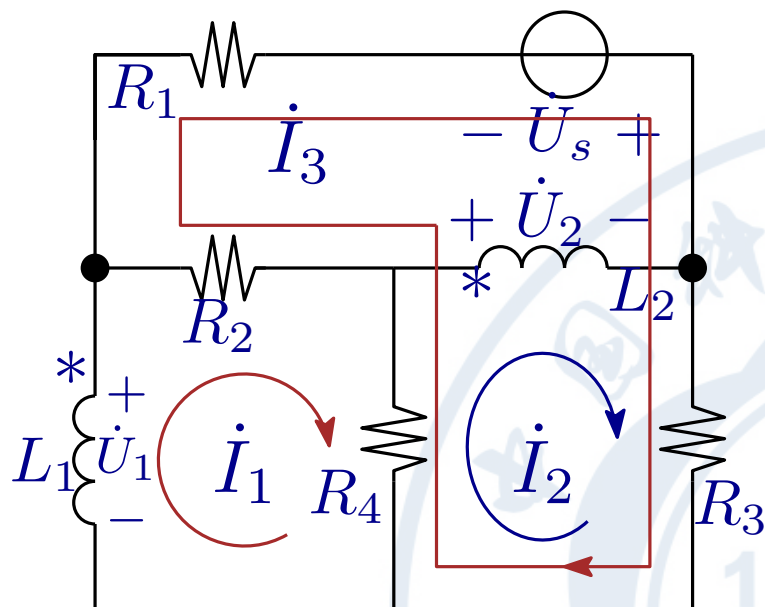
★ 对含有互感元件的电路，采用回路电流法比节点电压法为好。

原因：互感元件电流表示电压比较容易，电压表征电流相对困难。

$$\text{回路 1: } (R_2 + R_4)\dot{I}_1 - R_4\dot{I}_2 - (R_2 + R_4)\dot{I}_3 = \dot{U}_1$$

$$\text{回路 2: } -R_4\dot{I}_1 + (R_3 + R_4)\dot{I}_2 + (R_3 + R_4)\dot{I}_3 = -\dot{U}_2$$

# 含互感元件的正弦电流电路



★ 对含有互感元件的电路，采用回路电流法比节点电压法为好。

**原因：**互感元件电流表示电压比较容易，电压表征电流相对困难。

回路 1:  $(R_2 + R_4)\dot{I}_1 - R_4\dot{I}_2 - (R_2 + R_4)\dot{I}_3 = \dot{U}_1$

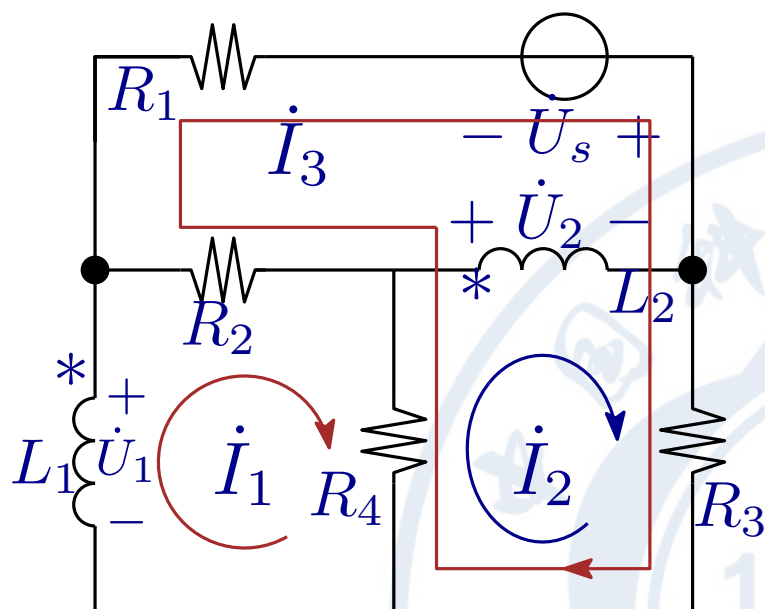
回路 2:  $-R_4\dot{I}_1 + (R_3 + R_4)\dot{I}_2 + (R_3 + R_4)\dot{I}_3 = -\dot{U}_2$

回路 3:

$$-(R_2 + R_4)\dot{I}_1 + (R_3 + R_4)\dot{I}_2 + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)\dot{I}_3 = \dot{U}_S$$



# 含互感元件的正弦电流电路



★ 对含有互感元件的电路，采用回路电流法比节点电压法为好。

原因：互感元件电流表示电压比较容易，电压表征电流相对困难。

$$\text{回路 1: } (R_2 + R_4)\dot{I}_1 - R_4\dot{I}_2 - (R_2 + R_4)\dot{I}_3 = \dot{U}_1$$

$$\text{回路 2: } -R_4\dot{I}_1 + (R_3 + R_4)\dot{I}_2 + (R_3 + R_4)\dot{I}_3 = -\dot{U}_2$$

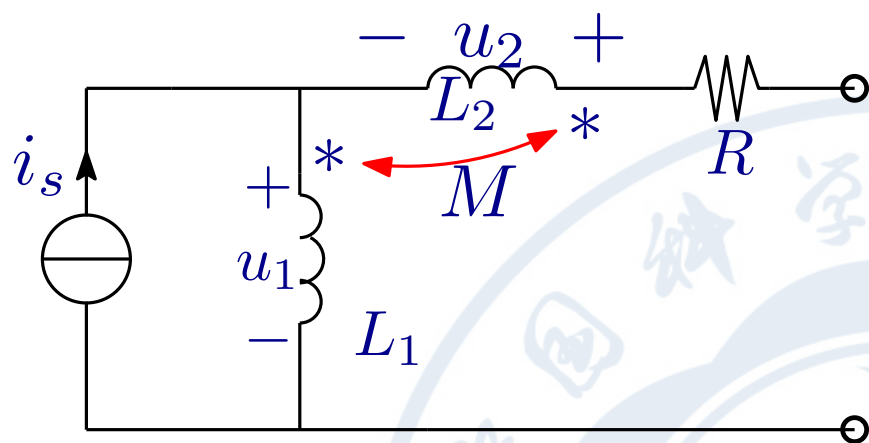
回路 3:

$$-(R_2 + R_4)\dot{I}_1 + (R_3 + R_4)\dot{I}_2 + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)\dot{I}_3 = \dot{U}_S$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = -(j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2) \\ \dot{U}_2 = -j\omega M\dot{I}_1 + j\omega L_2\dot{I}_2 \end{cases}$$

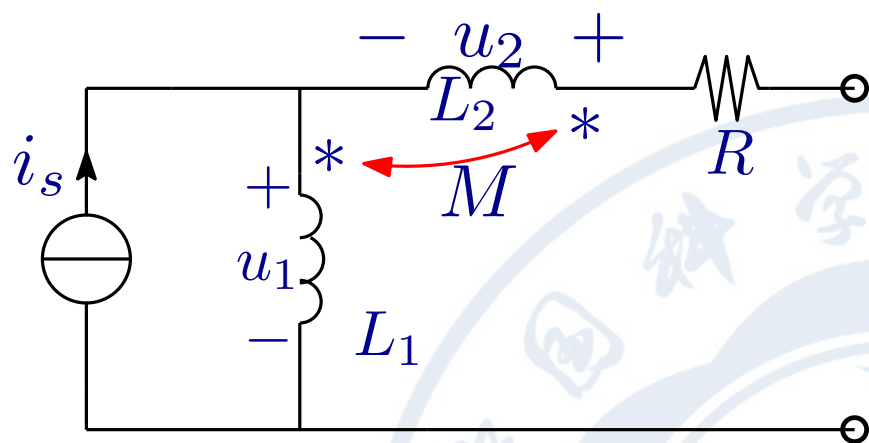


# 含互感元件的正弦电流电路

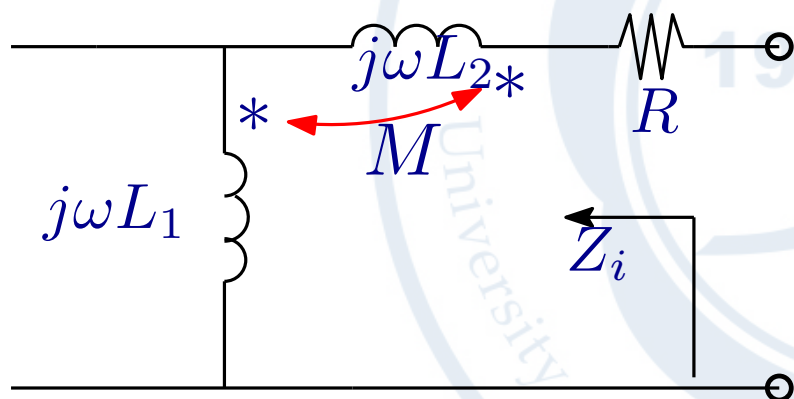


已知  $R = 20\Omega$ ,  $L_1 = 0.1H$ ,  
 $L_2 = 0.4H$ , 耦合系数  $k = 0.85$ ,  
 $i_s = 3\sqrt{2}\cos(100t)A$ 。求该一端口的  
等效电路。

# 含互感元件的正弦电流电路

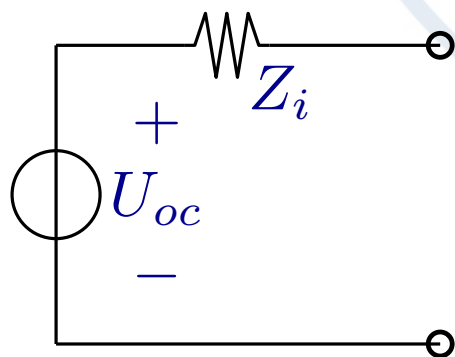


已知  $R = 20\Omega$ ,  $L_1 = 0.1H$ ,  
 $L_2 = 0.4H$ , 耦合系数  $k = 0.85$ ,  
 $i_s = 3\sqrt{2}\cos(100t)A$ 。求该一端口的  
 等效电路。



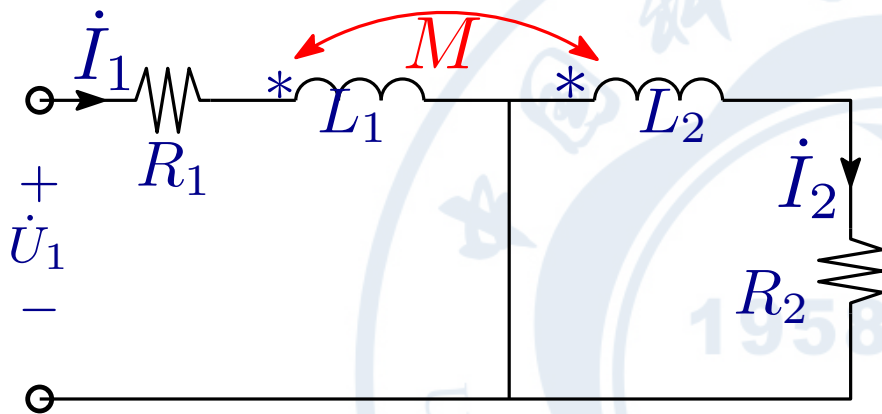
$$Z_i = R + j\omega(L_1 + L_2 + 2k\sqrt{L_1L_2})$$

$$\dot{U}_{oc} = j\omega L_1 \dot{I}_s + j\omega k\sqrt{L_1L_2} \dot{I}_s$$



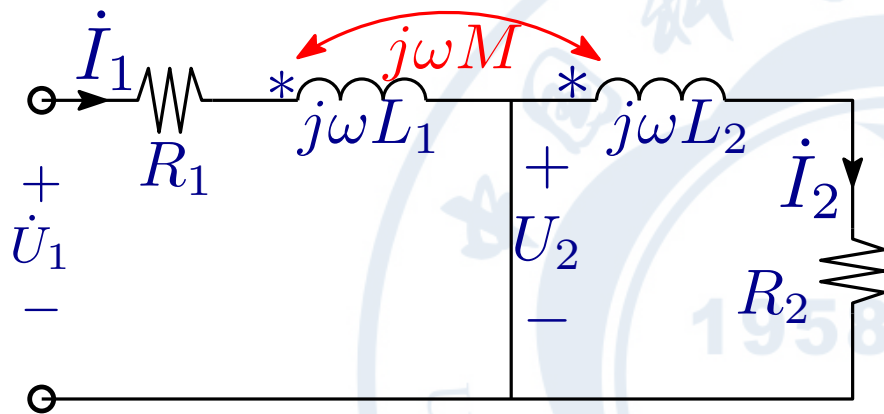
# 含互感元件的正弦电流电路

$\dot{U}_1 = 20\angle 0^\circ \text{V}$ ,  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ ,  $\omega L_1 = 2\Omega$ ,  $\omega L_2 = 4\Omega$ ,  $\omega M = 1\Omega$ 。求电流  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$



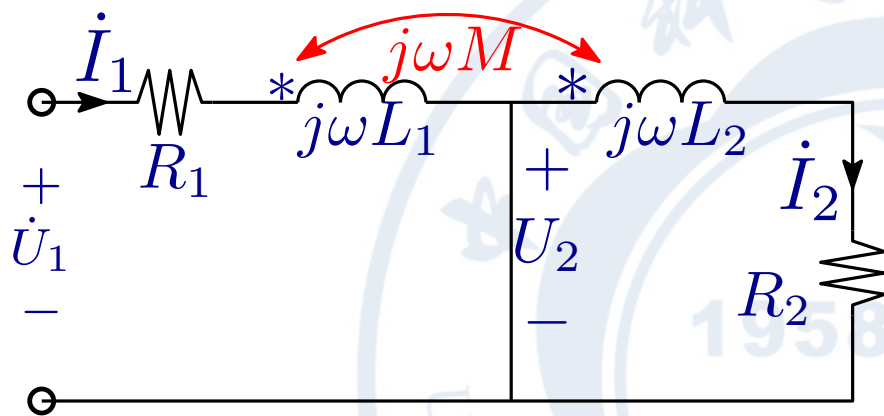
# 含互感元件的正弦电流电路

$\dot{U}_1 = 20\angle 0^\circ \text{V}$ ,  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ ,  $\omega L_1 = 2\Omega$ ,  $\omega L_2 = 4\Omega$ ,  $\omega M = 1\Omega$ 。求电流  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$



# 含互感元件的正弦电流电路

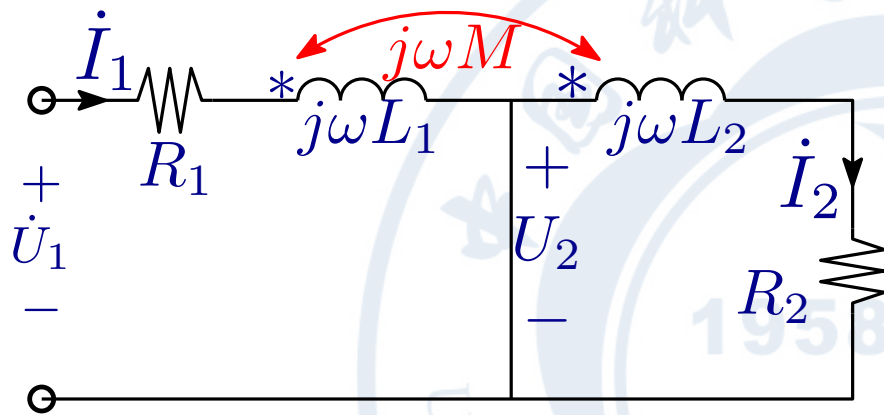
$\dot{U}_1 = 20\angle 0^\circ \text{V}$ ,  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ ,  $\omega L_1 = 2\Omega$ ,  $\omega L_2 = 4\Omega$ ,  $\omega M = 1\Omega$ 。求电流  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$



核心思想:  $\dot{U}_2 = 0, \dot{I}_2 \neq 0$

# 含互感元件的正弦电流电路

$\dot{U}_1 = 20\angle 0^\circ \text{V}$ ,  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ ,  $\omega L_1 = 2\Omega$ ,  $\omega L_2 = 4\Omega$ ,  $\omega M = 1\Omega$ 。求电流  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$

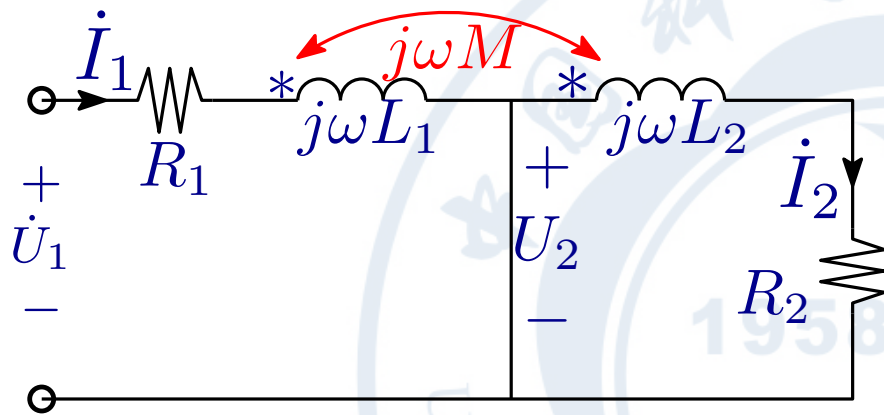


核心思想:  $\dot{U}_2 = 0, \dot{I}_2 \neq 0$

$$\begin{cases} (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 = \dot{U}_1 \\ j\omega M\dot{I}_1 + (j\omega L_2 + R_2)\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

# 含互感元件的正弦电流电路

$\dot{U}_1 = 20\angle 0^\circ \text{V}$ ,  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ ,  $\omega L_1 = 2\Omega$ ,  $\omega L_2 = 4\Omega$ ,  $\omega M = 1\Omega$ 。求电流  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$



核心思想:  $\dot{U}_2 = 0, \dot{I}_2 \neq 0$

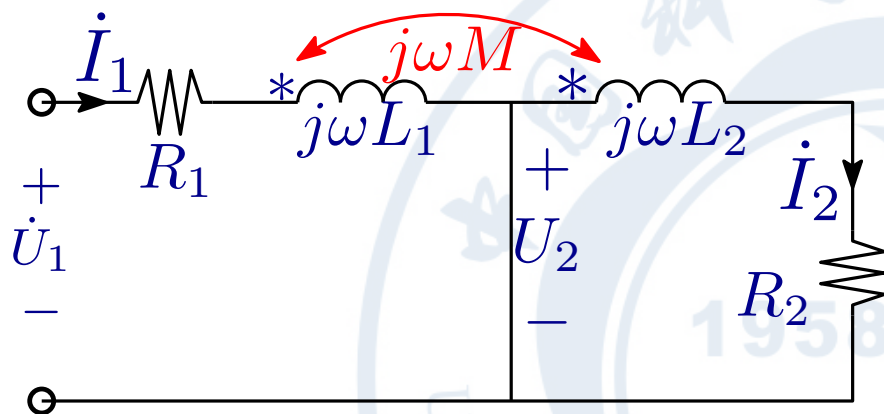
$$\begin{cases} (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 = \dot{U}_1 \\ j\omega M\dot{I}_1 + (j\omega L_2 + R_2)\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + j\omega L_1 - \frac{j\omega M}{j\omega L_2 + R_2} \times j\omega M}$$



# 含互感元件的正弦电流电路

$\dot{U}_1 = 20\angle 0^\circ \text{V}$ ,  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ ,  $\omega L_1 = 2\Omega$ ,  $\omega L_2 = 4\Omega$ ,  $\omega M = 1\Omega$ 。求电流  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$



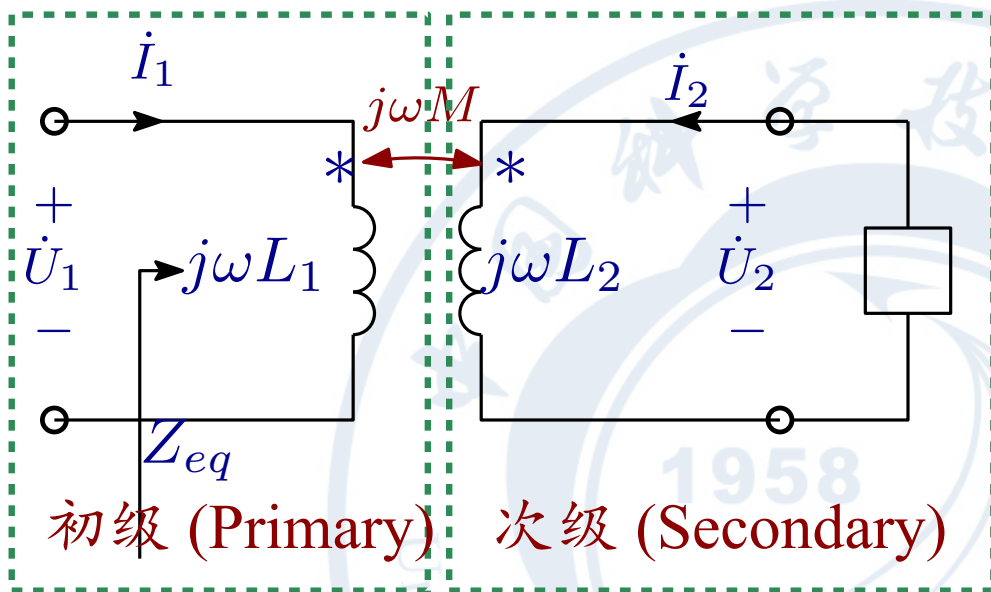
核心思想:  $\dot{U}_2 = 0, \dot{I}_2 \neq 0$

$$\begin{cases} (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 = \dot{U}_1 \\ j\omega M\dot{I}_1 + (j\omega L_2 + R_2)\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

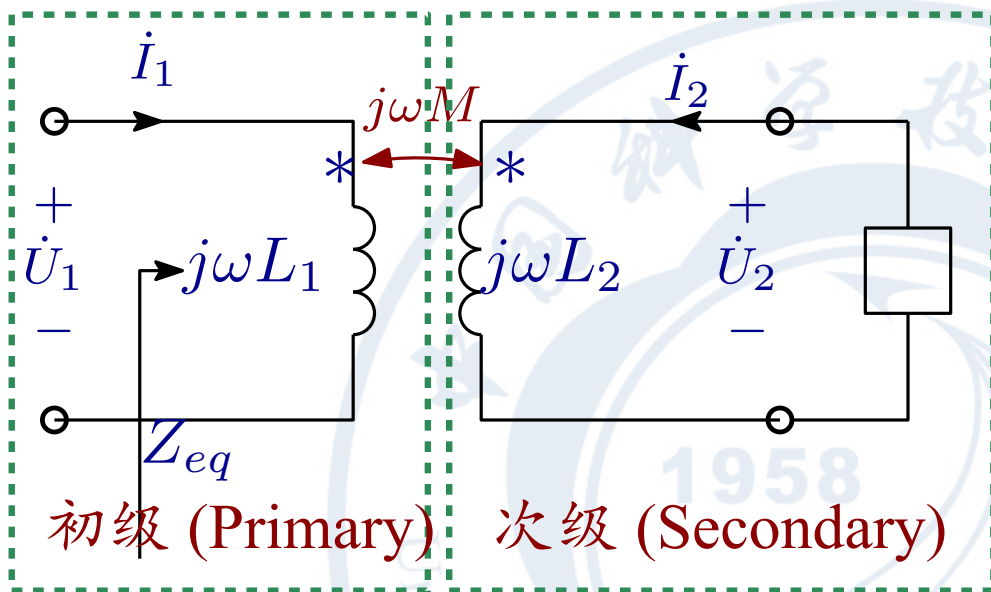
$$\longrightarrow \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{R_1 + j\omega L_1 - \frac{j\omega M}{j\omega L_2 + R_2} \times j\omega M}$$

$$\longrightarrow \dot{I}_2 = \dot{I}_1 \times \frac{-j\omega M}{j\omega L_2 + R_2}$$

# 含互感元件的正弦电流电路-阻抗变换



# 含互感元件的正弦电流电路-阻抗变换



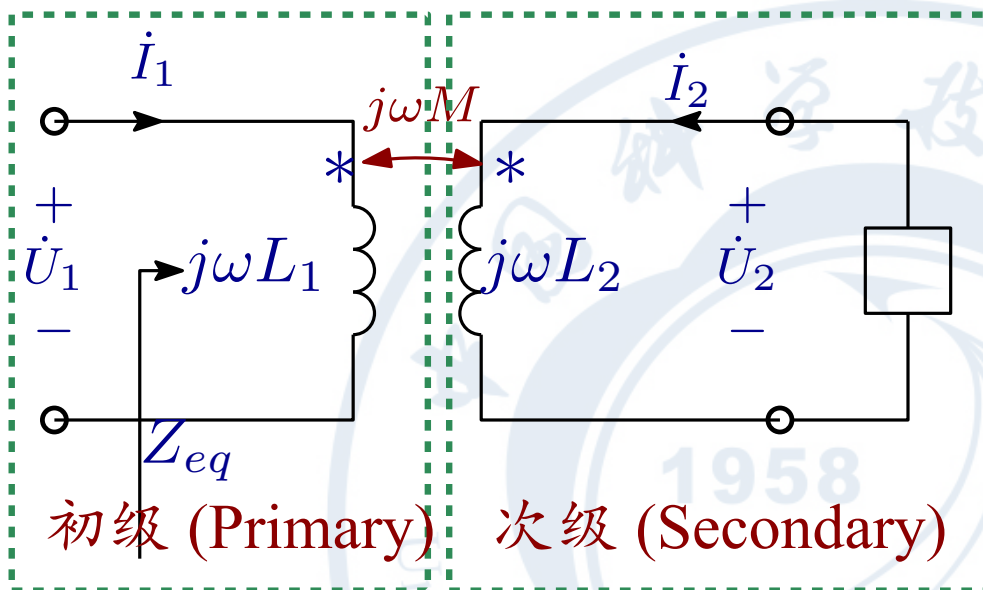
1) 初级 KVL:

$$j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_1$$

2) 次级 KVL:

$$(j\omega L_2 + Z_2) \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = 0$$

# 含互感元件的正弦电流电路-阻抗变换



1) 初级 KVL:

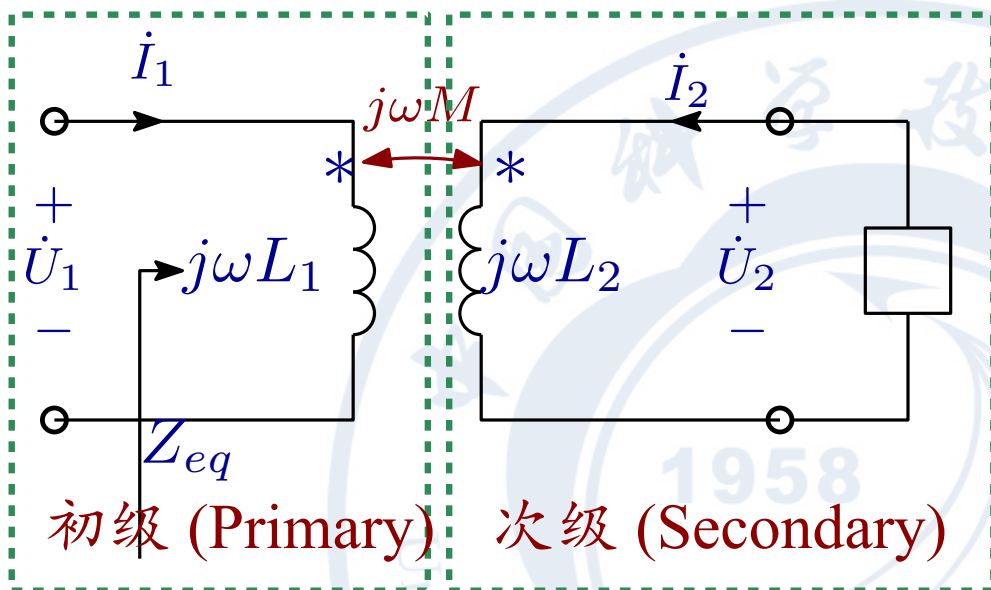
$$j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_1$$

2) 次级 KVL:

$$(j\omega L_2 + Z_2) \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = 0$$

$$Z_{eq} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2 + Z_2}$$

# 含互感元件的正弦电流电路-阻抗变换



1) 初级 KVL:

$$j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_1$$

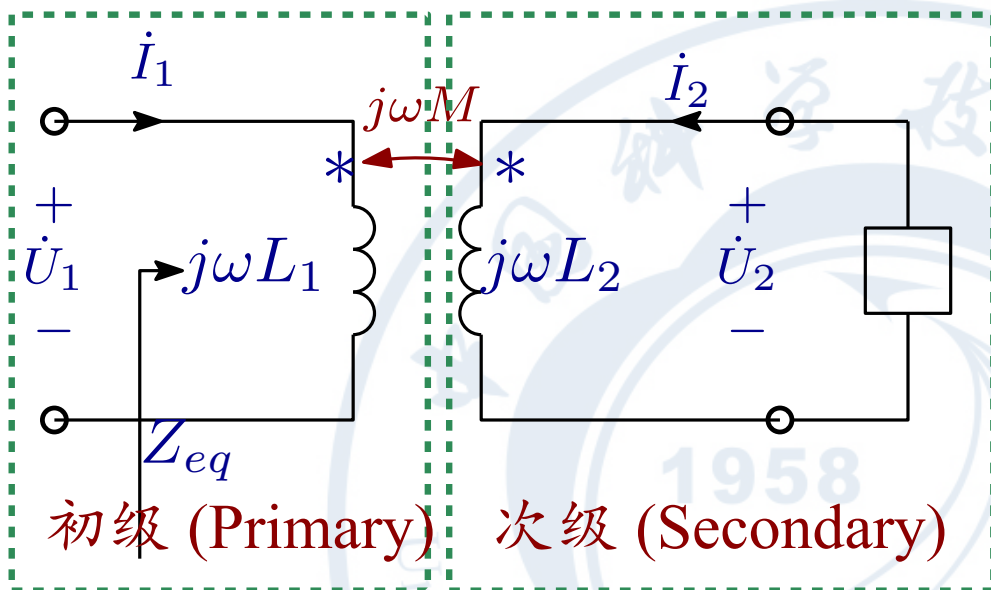
2) 次级 KVL:

$$(j\omega L_2 + Z_2) \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = 0$$

$$Z_{eq} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = j\omega L_1 + \boxed{\frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2 + Z_2}}$$

引入阻抗:  $Z_r = \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + j\omega L_2} = R_r + jX_r$

# 含互感元件的正弦电流电路-阻抗变换



1) 初级 KVL:

$$j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_1$$

2) 次级 KVL:

$$(j\omega L_2 + Z_2) \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = 0$$

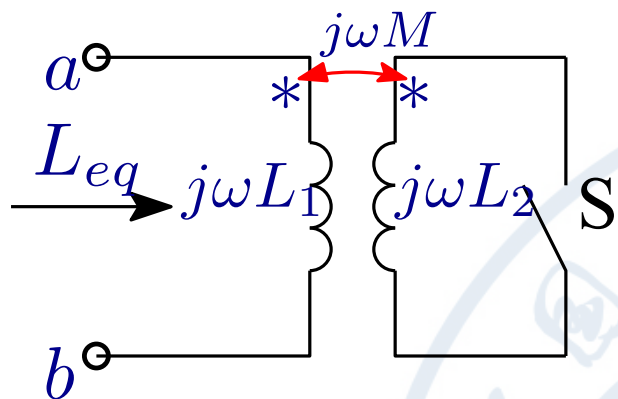
$$Z_{eq} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = j\omega L_1 + \boxed{\frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2 + Z_2}}$$

引入阻抗:  $Z_r = \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + j\omega L_2} = R_r + jX_r$

引入电阻

引入电抗

# 含互感元件的正弦电流电路-耦合系数



■ S 断开时,  $L_{eq} = L_{oc} = L_1$

当 S 闭合时, 等效阻抗可以表示为:

$$Z_{eq} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2} = j\omega L_{sc}$$

$$\rightarrow L_{sc} = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$$
$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \rightarrow k = \sqrt{1 - \frac{L_{sc}}{L_{oc}}}$$



# 相量形式下的电路定理

■ **线性定理**：多个**同频率**电源  $x_k, 1 \leq k \leq K$  激励的正弦稳态电路，电源  $x_k$  对应的相量形式为  $\dot{X}_k$ ，则某个相应  $y_l$  对应的相量形式可以表达为：

$$\dot{Y}_l = \sum_{k=1}^K a_k \dot{X}_k, a_k \in C, \forall 1 \leq k \leq K$$

■ **Thevenin 定理**：一个含源一端口网络，电源均为**同频率**正弦电源，则在相量形式下，该一端口可以用一个电压源串联一个复阻抗  $Z_{eq}$  表示，其中电压源相量等于开路电压相量  $\dot{U}_{oc}$ ，复阻抗  $Z_{eq}$  为内部独立源置 0 后，端口外加该频率正弦电源时的等效阻抗  $Z_{eq}$

■ **Norton 定理**：一个含源一端口网络，电源均为**同频率**正弦电源，则在相量形式下，该一端口可以用一个电流源并联一个复阻抗  $Z_{eq}$  表示，其中电流源相量等于短路电流相量  $\dot{I}_{sc}$ ，复阻抗  $Z_{eq}$  为内部独立源置 0 后，端口外加该频率正弦电源时的等效阻抗  $Z_{eq}$

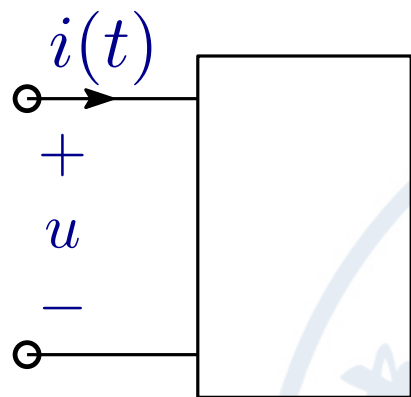
# 相量形式下的电路定理

■ 特勒根定理：对于具有相同电路结构的正弦稳态电路  $N$ ,  $\tilde{N}$ , 所有电源均为同频率正弦电源，对所有的支路取相同的关联参考方向，得到  $u_k, i_k, \tilde{u}_k, \tilde{i}_k$ , 对应的相量形式有  $\dot{U}_k, \dot{I}_k, \dot{\tilde{U}}_k, \dot{\tilde{I}}_k$ , 则下述表达式成立：

$$\sum_k \dot{U}_k \dot{\tilde{I}}_k = 0, \sum_k \dot{\tilde{U}}_k \dot{I}_k = 0,$$

■ 互易定理：对于仅仅包含  $R, L, C$  的二端口网络，对于端口激励为同频率的电压源（电流源），写成相量形式后互易定理依然成立！

# 正弦电流电路功率分析

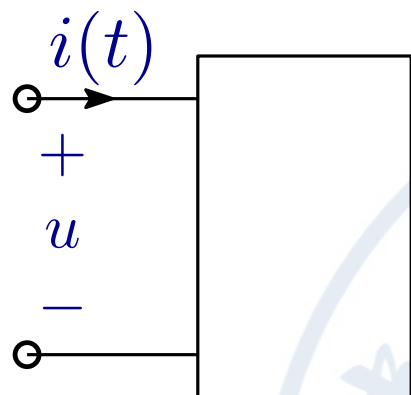


正弦一端口

$$u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \phi_u)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \phi_i)$$

# 正弦电流电路功率分析



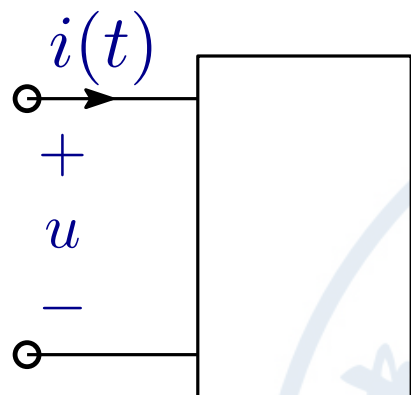
正弦一端口

$$u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \phi_u)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \phi_i)$$

$$p(t) = u(t)i(t) = UI \cos(\phi_u - \phi_i) + UI \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)$$

# 正弦电流电路功率分析

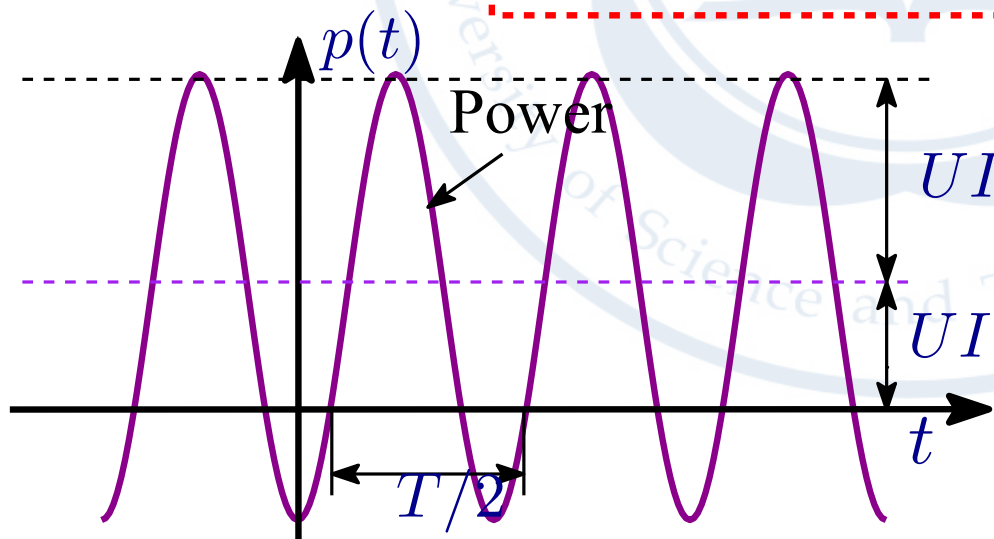


正弦一端口

$$u(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \phi_u)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \phi_i)$$

$$p(t) = u(t)i(t) = UI \cos(\phi_u - \phi_i) + UI \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)$$



平均功率, Average Power

# 正弦电流电路功率分析

## ■ 平均功率:

$$P = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T p(t) dt$$
$$P = UI \cos(\phi_u - \phi_i) = UI \cos \phi = UI \lambda$$

# 正弦电流电路功率分析

## ■ 平均功率:

$$P = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T p(t) dt$$

$$P = UI \cos(\phi_u - \phi_i) = UI \cos \phi = UI \lambda$$

## ■ 功率因数: $\lambda = \cos(\phi) = \cos(\phi_u - \phi_i)$

正弦电流电路平均功率不等于电压和电流的有效值的乘积，还取决于功率因数，即电压电流之间的**相位差**。



# 正弦电流电路功率分析

## ■ 平均功率:

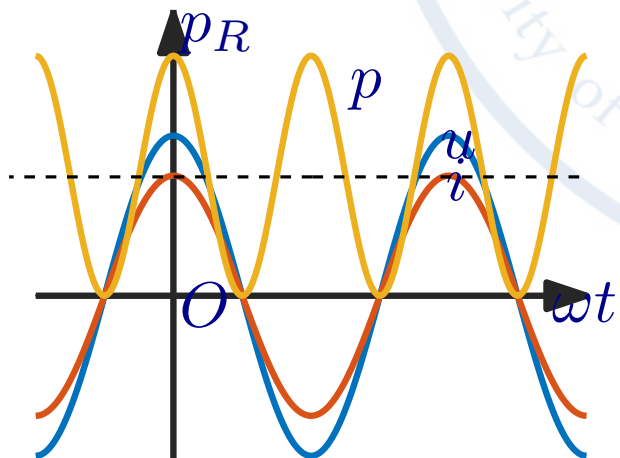
$$P = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T p(t) dt$$

$$P = UI \cos(\phi_u - \phi_i) = UI \cos \phi = UI \lambda$$

## ■ 功率因数: $\lambda = \cos(\phi) = \cos(\phi_u - \phi_i)$

正弦电流电路平均功率不等于电压和电流的有效值的乘积，还取决于功率因数，即电压电流之间的**相位差**。

$$\lambda = \cos(\phi_u - \phi_i) = 1$$



# 正弦电流电路功率分析

## ■ 平均功率:

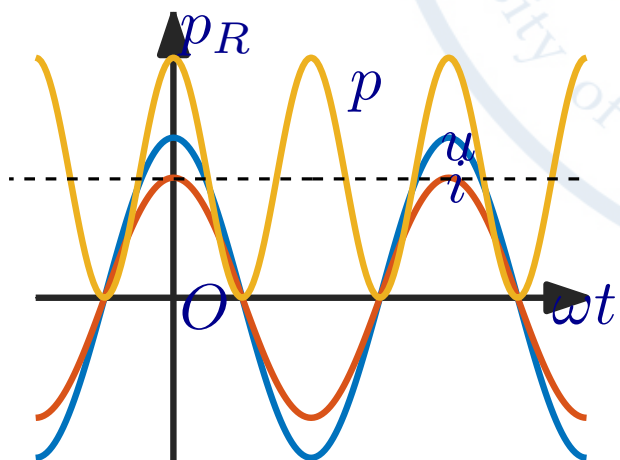
$$P = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T p(t) dt$$

$$P = UI \cos(\phi_u - \phi_i) = UI \cos \phi = UI \lambda$$

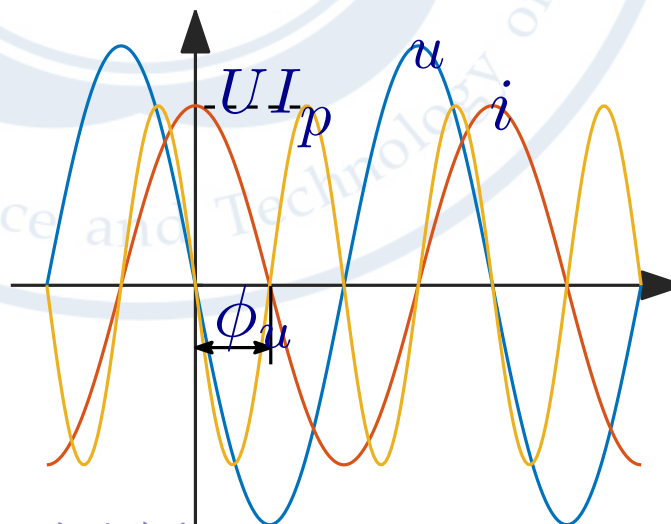
## ■ 功率因数: $\lambda = \cos(\phi) = \cos(\phi_u - \phi_i)$

正弦电流电路平均功率不等于电压和电流的有效值的乘积，还取决于功率因数，即电压电流之间的**相位差**。

$$\lambda = \cos(\phi_u - \phi_i) = 1$$



$$\lambda = \cos(\phi_u - \phi_i) = 0$$



# 正弦电流电路功率分析

★ 电阻:  $\lambda = \cos(\phi_u - \phi_i) = 1, p_R = I^2 R$

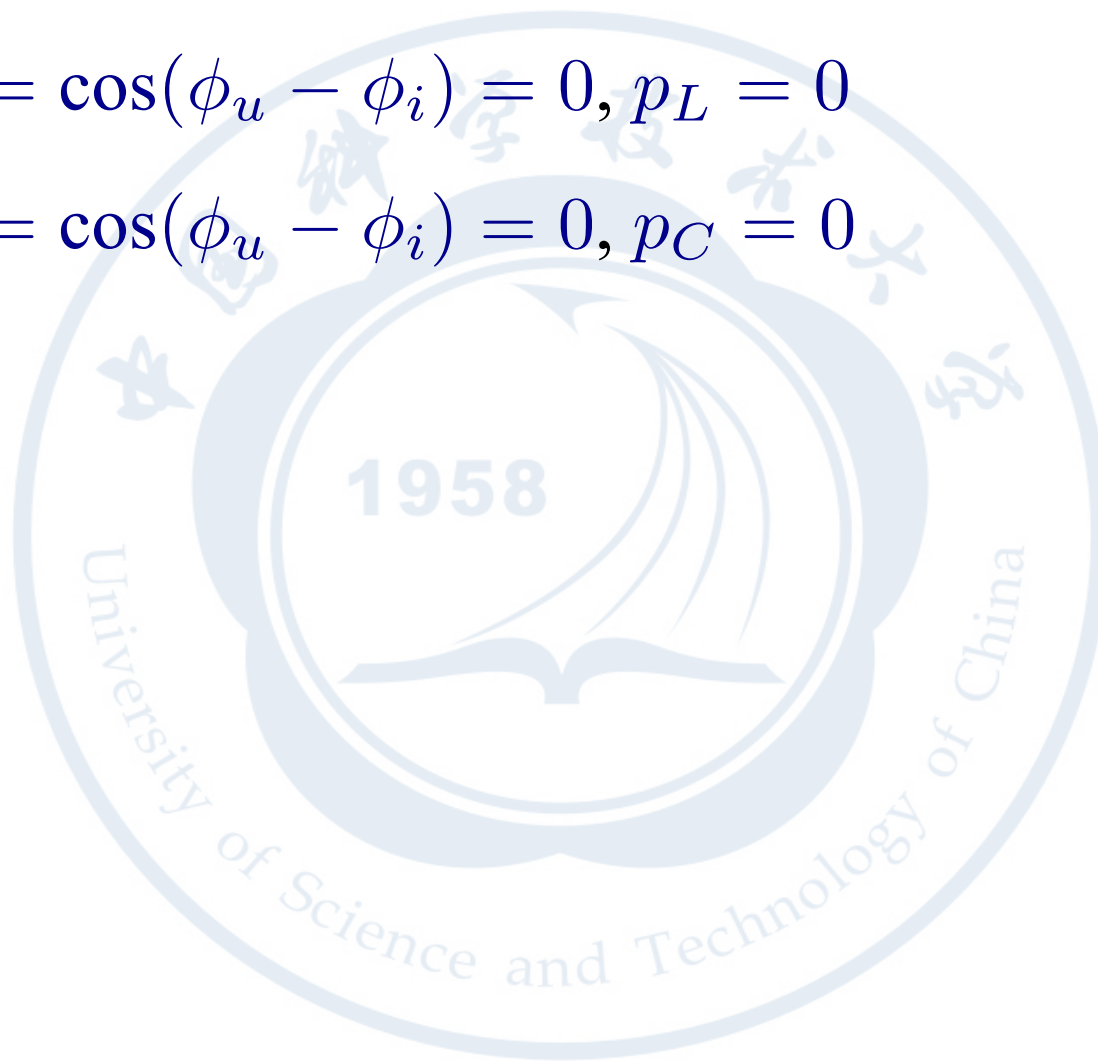


# 正弦电流电路功率分析

★ 电阻:  $\lambda = \cos(\phi_u - \phi_i) = 1, p_R = I^2 R$

★ 电感:  $\lambda = \cos(\phi_u - \phi_i) = 0, p_L = 0$

★ 电容:  $\lambda = \cos(\phi_u - \phi_i) = 0, p_C = 0$

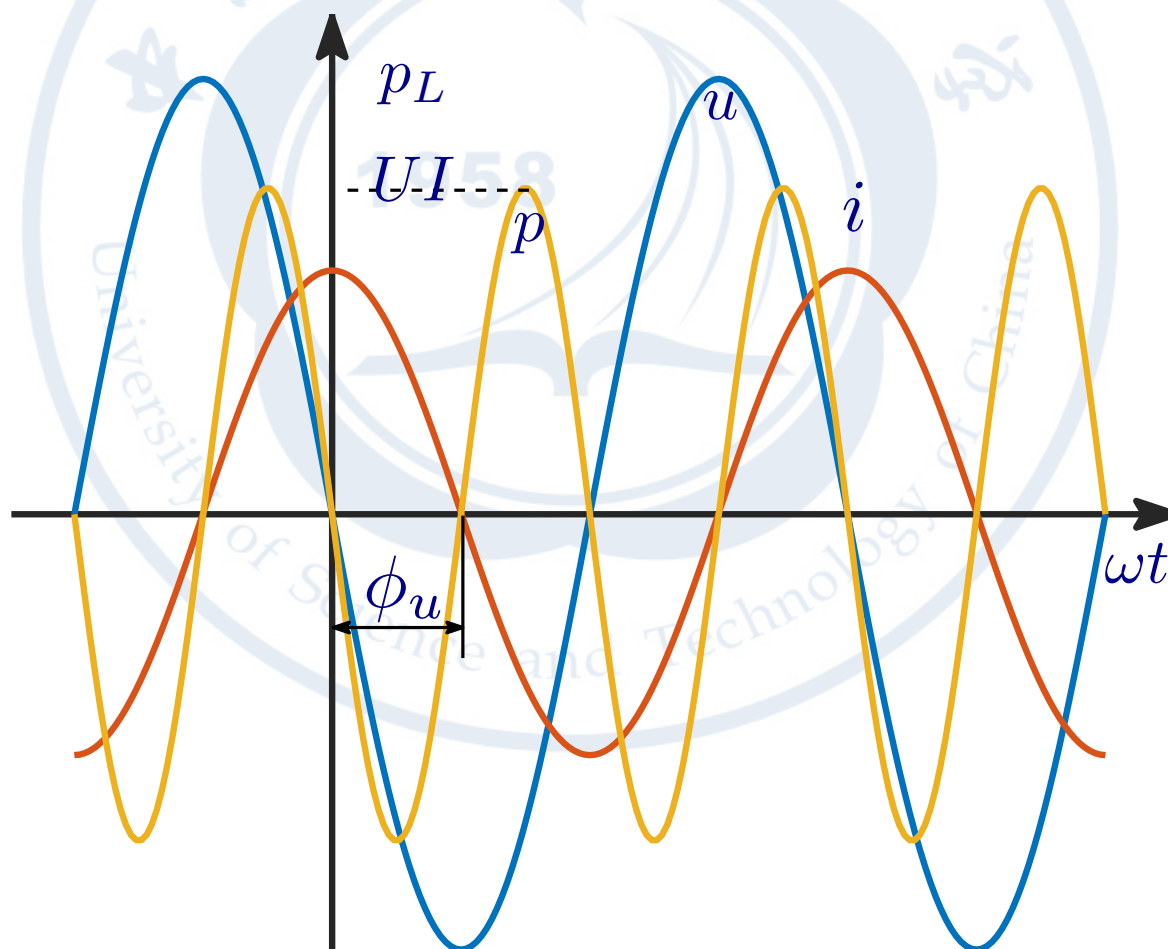


# 正弦电流电路功率分析

★ 电阻:  $\lambda = \cos(\phi_u - \phi_i) = 1, p_R = I^2 R$

★ 电感:  $\lambda = \cos(\phi_u - \phi_i) = 0, p_L = 0$

★ 电容:  $\lambda = \cos(\phi_u - \phi_i) = 0, p_C = 0$



# 正弦电流电路功率分析

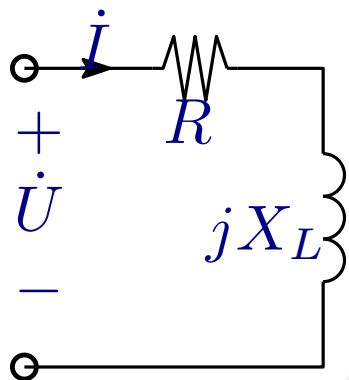
★ 电阻:  $\lambda = \cos(\phi_u - \phi_i) = 1, p_R = I^2 R$

★ 电感:  $\lambda = \cos(\phi_u - \phi_i) = 0, p_L = 0$

★ 电容:  $\lambda = \cos(\phi_u - \phi_i) = 0, p_C = 0$

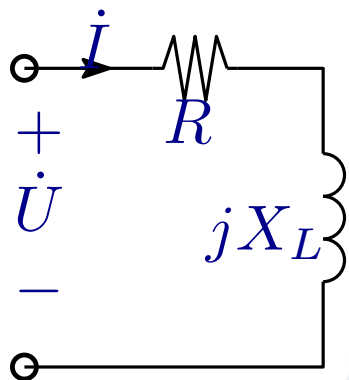
正弦电流电路中，**同相位**的电压和电流产生**平均功率**，且等于有效值的乘积；**相位正交**的电压和电流**不产生平均功率**。

# 正弦电流电路功率分析



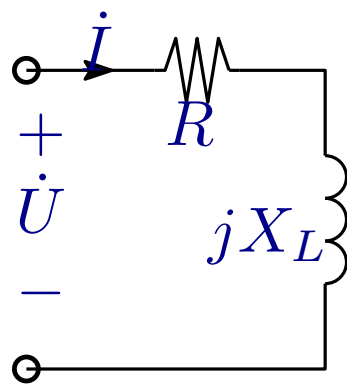


# 正弦电流电路功率分析



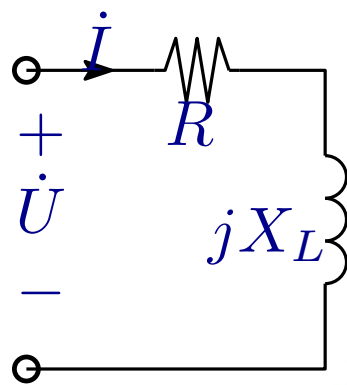
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + jX_L} = \frac{\dot{U}R}{R^2 + X_L^2} - j \frac{\dot{U}X_L}{R^2 + X_L^2}$$

# 正弦电流电路功率分析


$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + jX_L} = \boxed{\frac{\dot{U}R}{R^2 + X_L^2}} - j \frac{\dot{U}X_L}{R^2 + X_L^2}$$

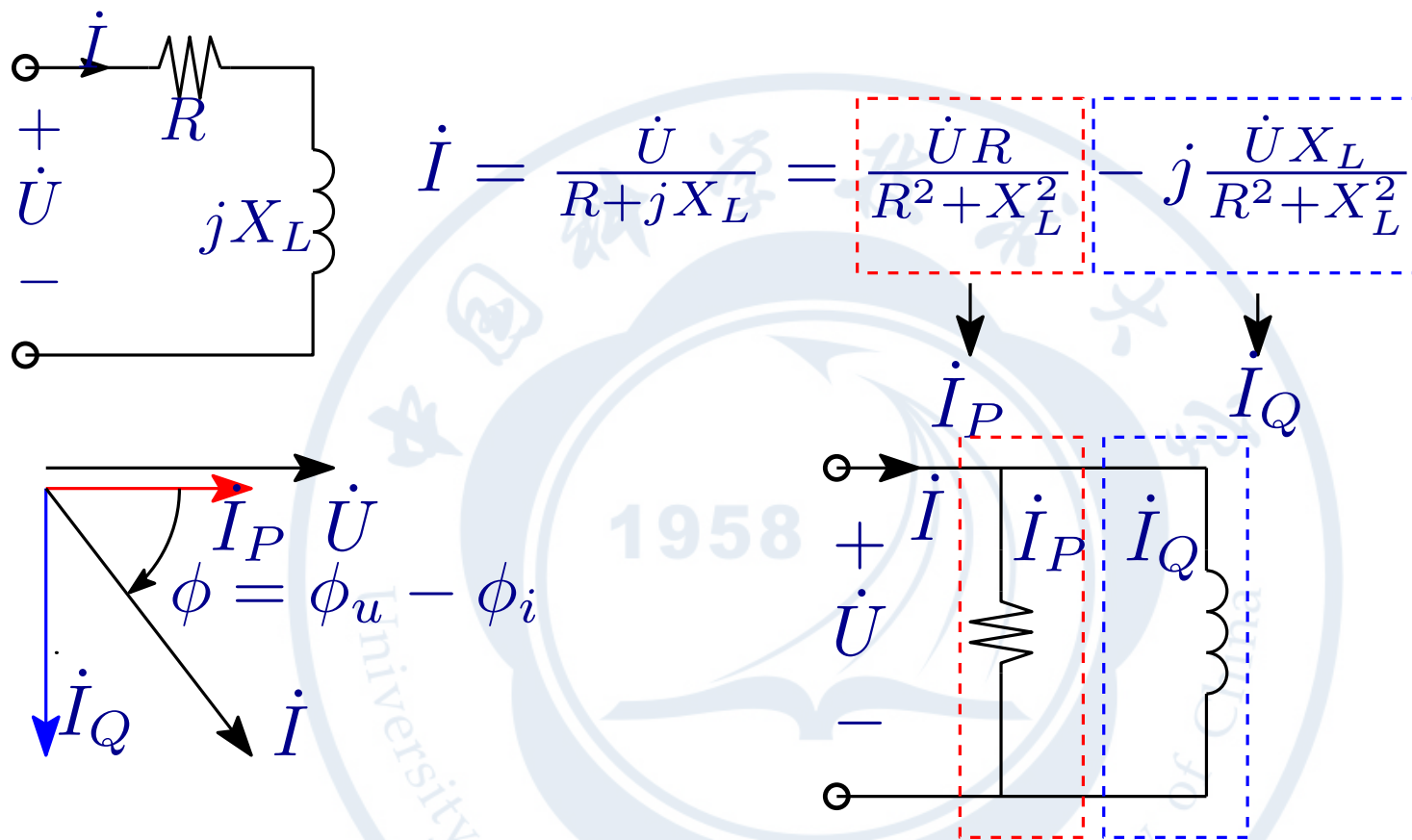
$\downarrow$   
 $\dot{I}_P$

# 正弦电流电路功率分析

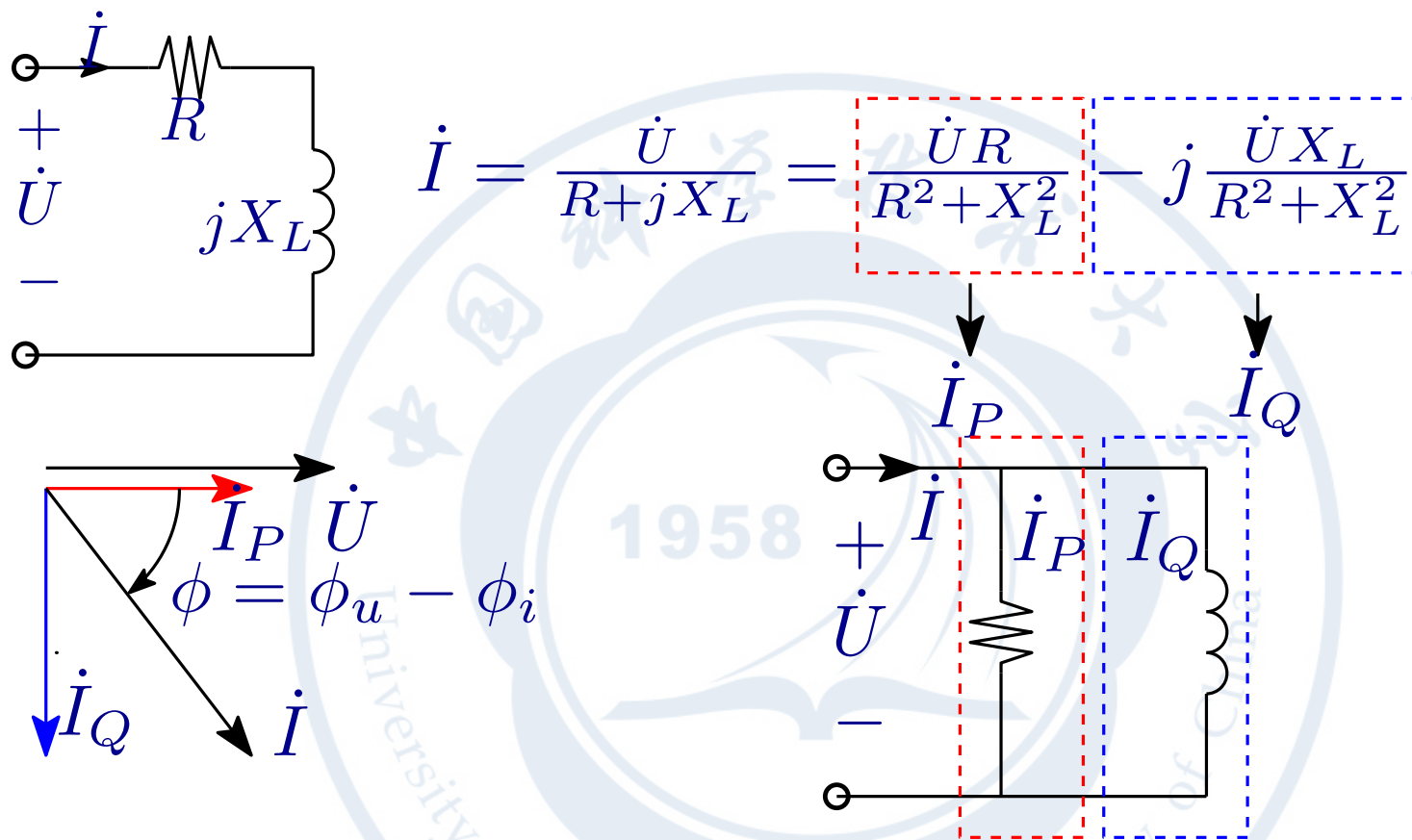

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + jX_L} = \underbrace{\frac{\dot{U}R}{R^2 + X_L^2}}_{\dot{I}_P} - j \underbrace{\frac{\dot{U}X_L}{R^2 + X_L^2}}_{\dot{I}_Q}$$

The diagram shows an AC circuit with a voltage source  $\dot{U}$  and a current  $\dot{I}$  flowing through a resistor  $R$  and an inductor  $jX_L$  in series. The current is decomposed into its active component  $\dot{I}_P$  (indicated by a red dashed box) and its reactive component  $\dot{I}_Q$  (indicated by a blue dashed box).

# 正弦电流电路功率分析

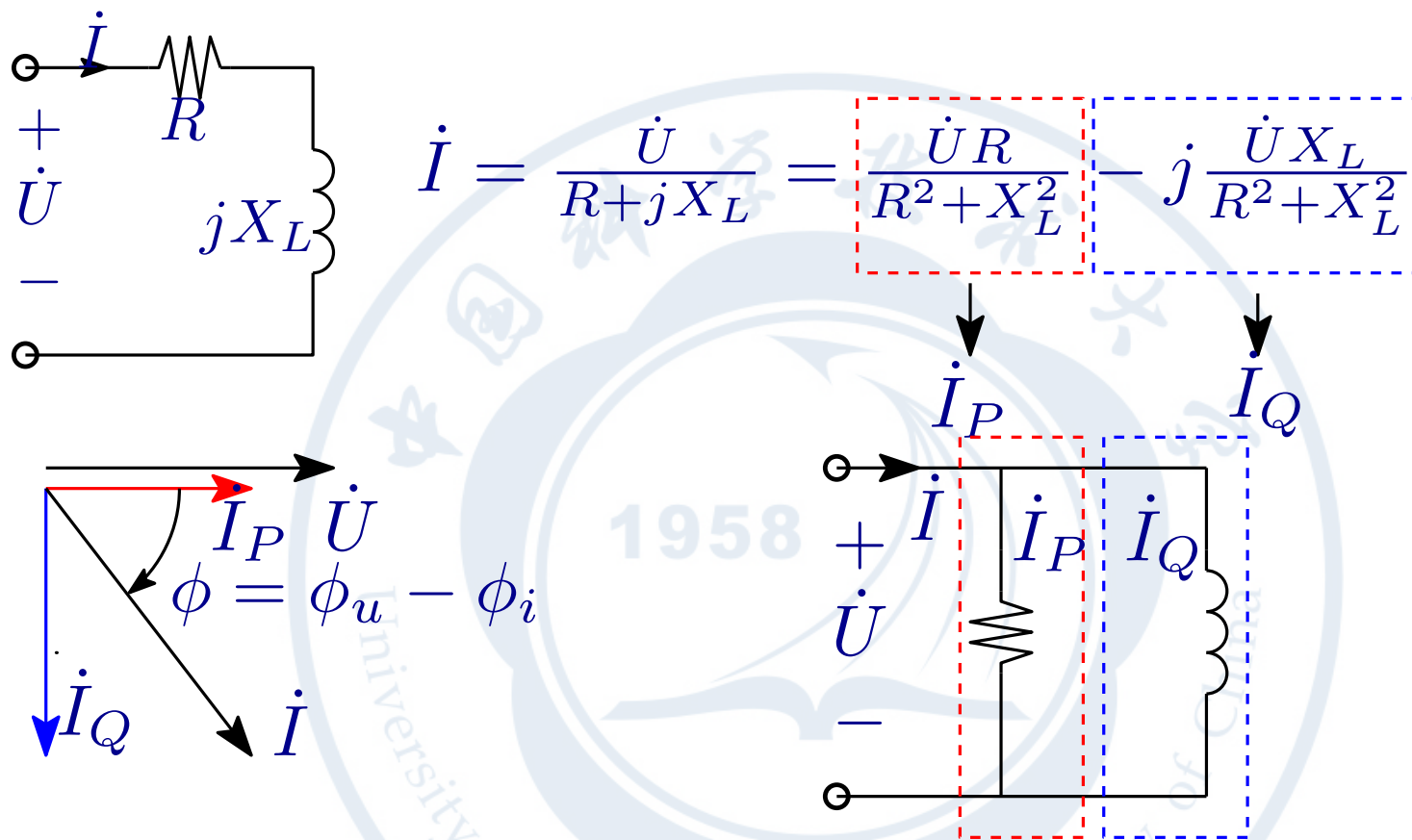


# 正弦电流电路功率分析



★  $\dot{I}_P$  与  $\dot{U}$  同相，贡献平均功率，称为有功分量

# 正弦电流电路功率分析



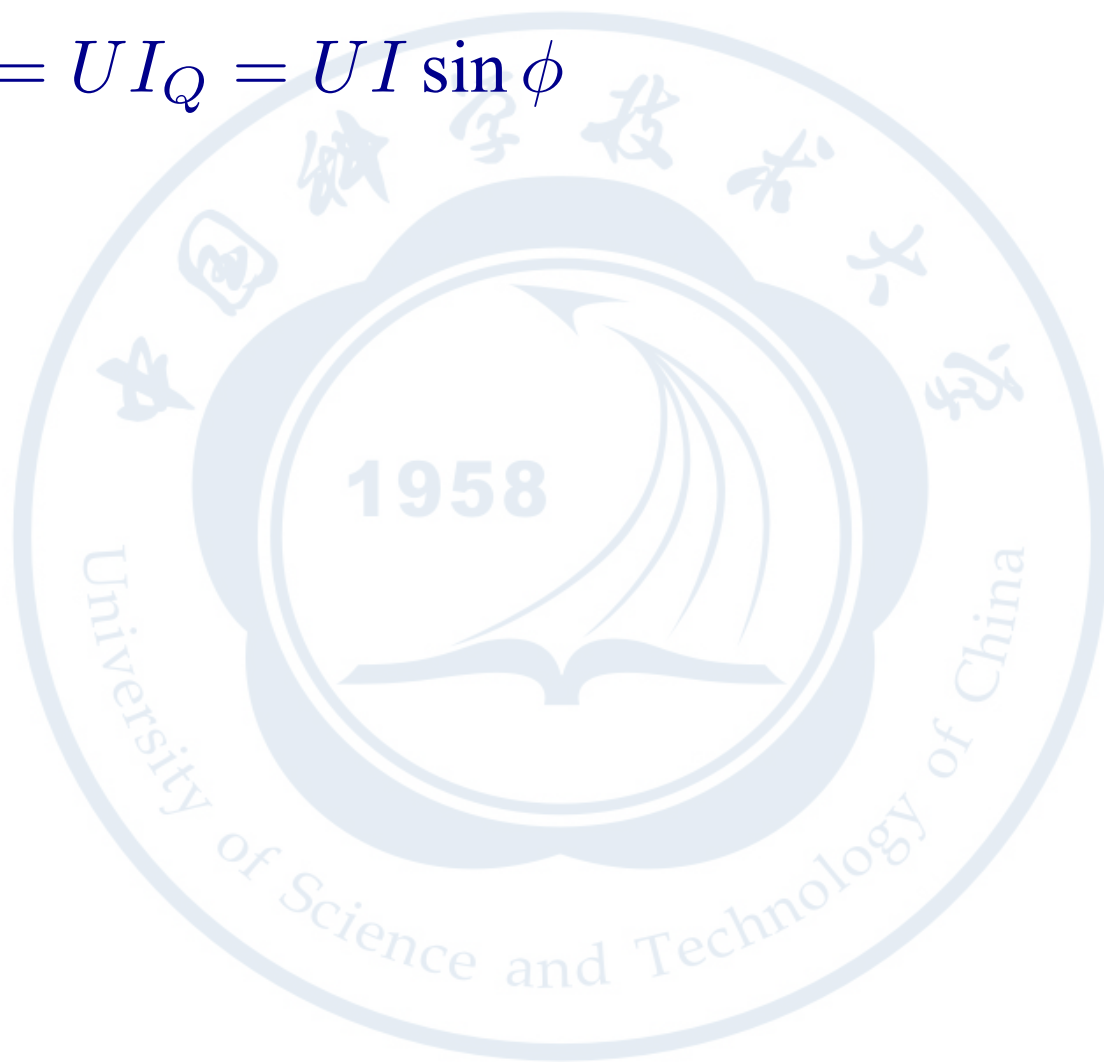
★  $\dot{I}_P$  与  $\dot{U}$  **同相**，贡献平均功率，称为**有功分量**

★  $\dot{I}_Q$  与  $\dot{U}$  **正交**，不贡献平均功率，称为**无功分量**，但是仍然占据设备容量。

# 正弦电流电路功率分析

★ **无功功率：** 电流中的无功分量引入的功率称为无功功率。

$$Q = UI_Q = UI \sin \phi$$





# 正弦电流电路功率分析

★ **无功功率**：电流中的无功分量引入的功率称为无功功率。

$$Q = UI_Q = UI \sin \phi$$

◇ 感性无功功率： $\phi > 0, Q > 0$

$$Q_L = UI \sin 90^\circ = UI = I^2 \omega L = U^2 / (\omega L)$$

◇ 容性无功功率： $\phi < 0, Q < 0$

$$Q_C = UI \sin(-90)^\circ = -UI = -I^2 / (\omega C) = -U^2 \omega C$$

无功功率单位：乏 (VAR)

# 正弦电流电路功率分析

★ **无功功率**：电流中的无功分量引入的功率称为无功功率。

$$Q = UI_Q = UI \sin \phi$$

◇ 感性无功功率： $\phi > 0, Q > 0$

$$Q_L = UI \sin 90^\circ = UI = I^2 \omega L = U^2 / (\omega L)$$

◇ 容性无功功率： $\phi < 0, Q < 0$

$$Q_C = UI \sin(-90)^\circ = -UI = -I^2 / (\omega C) = -U^2 \omega C$$

无功功率单位：乏 (VAR)

★ **有功功率**：平均功率 P，单位瓦特 (W)

# 正弦电流电路功率分析

★ **无功功率**：电流中的无功分量引入的功率称为无功功率。

$$Q = UI_Q = UI \sin \phi$$

◇ 感性无功功率： $\phi > 0, Q > 0$

$$Q_L = UI \sin 90^\circ = UI = I^2 \omega L = U^2 / (\omega L)$$

◇ 容性无功功率： $\phi < 0, Q < 0$

$$Q_C = UI \sin(-90)^\circ = -UI = -I^2 / (\omega C) = -U^2 \omega C$$

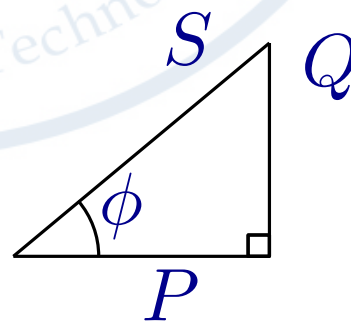
无功功率单位：乏 (VAR)

★ **有功功率**：平均功率  $P$ ，单位瓦特 (W)

★ **视在功率**： $S = UI$ ，单位：伏安 (VA)

$$★ P = S \cos \phi$$

$$★ Q = S \sin \phi$$

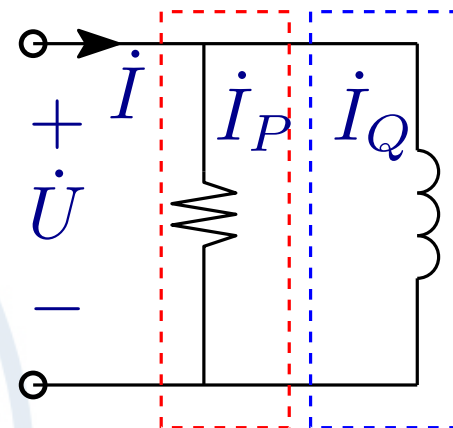
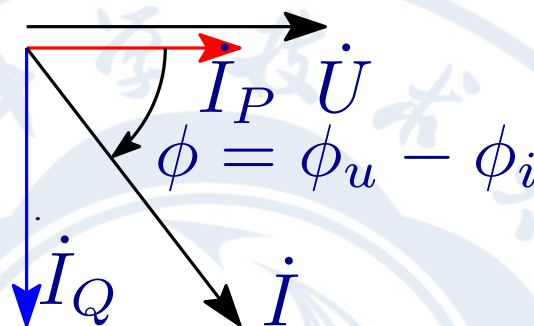
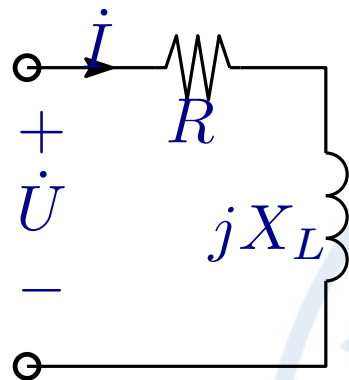


# 正弦电流电路功率分析

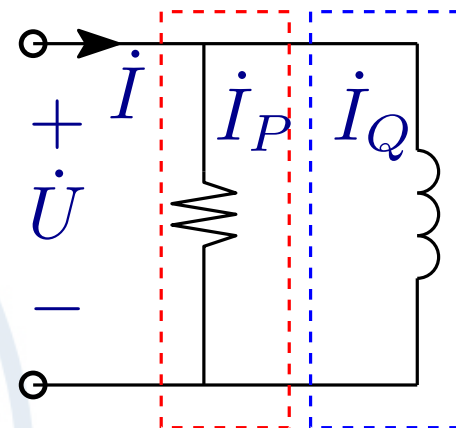
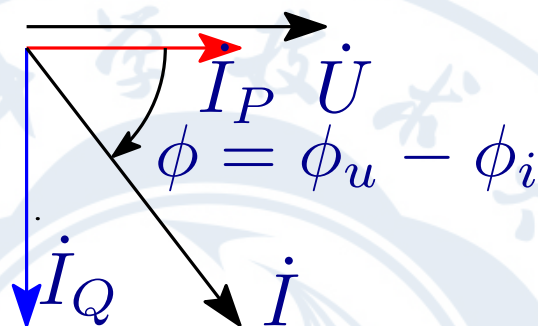
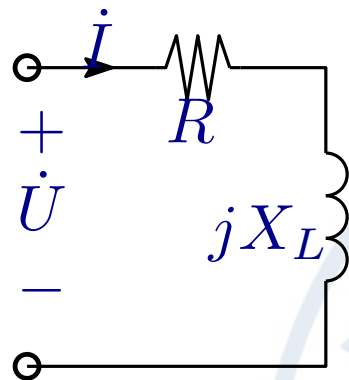
■ 供电设备能力判定标准为视在功率  $S$ ，无功功率  $Q$  越高，系统供电能力浪费越大

- ★ 降低系统负载引入的无功功率  $Q$  在视在功率中的占比是提升系统供电能力效率的关键
- ★ 工程负载具有广泛的感性特征是我们进行无功功率优化必须考虑的前提条件
- ★ 如何保持电流中有功分量的大小的同时降低无功分量这是我们解决问题的基本出发点

# 正弦电流电路功率分析-功率因数提升

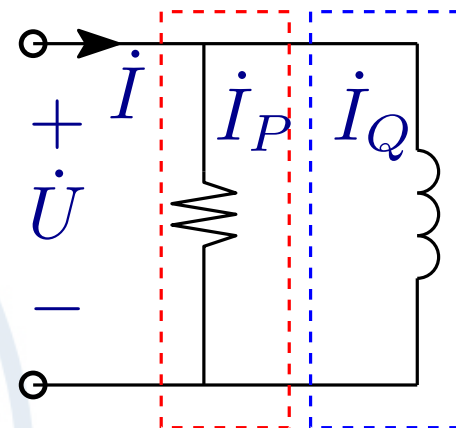
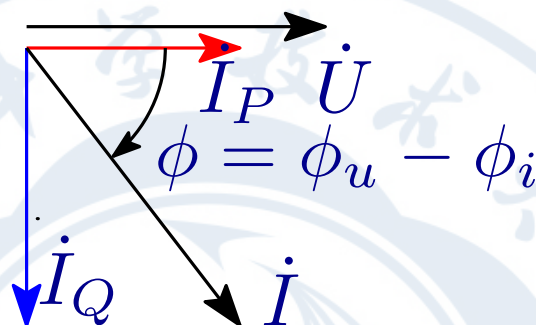
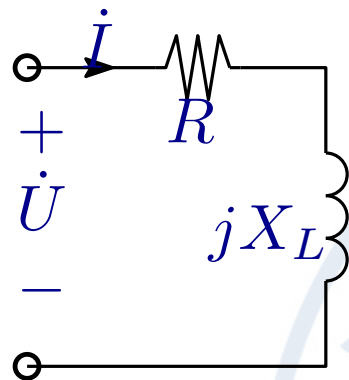


# 正弦电流电路功率分析-功率因数提升



$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + jX_L} = \frac{\dot{U}R}{R^2 + X_L^2} - j \frac{\dot{U}X_L}{R^2 + X_L^2}$$

# 正弦电流电路功率分析-功率因数提升

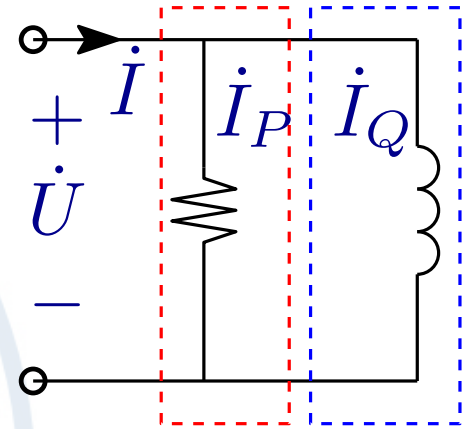
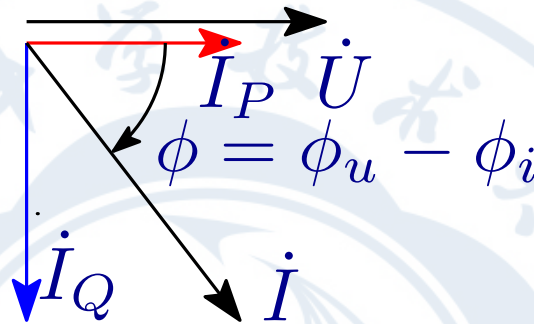
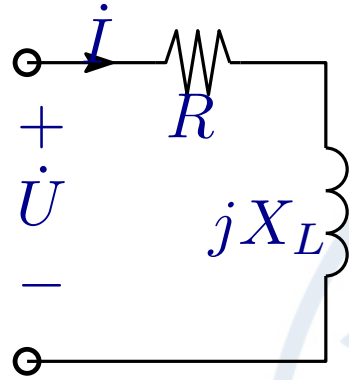


$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + jX_L} = \frac{\dot{U}R}{R^2 + X_L^2} - j \frac{\dot{U}X_L}{R^2 + X_L^2}$$

★ 在原电路中**串联**一个电容  $C$ , 即可降低贡献无功分量的  $X_L$



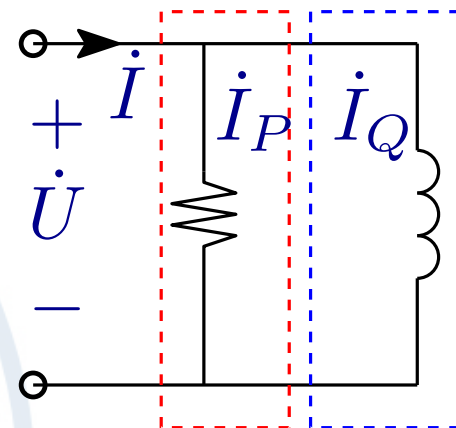
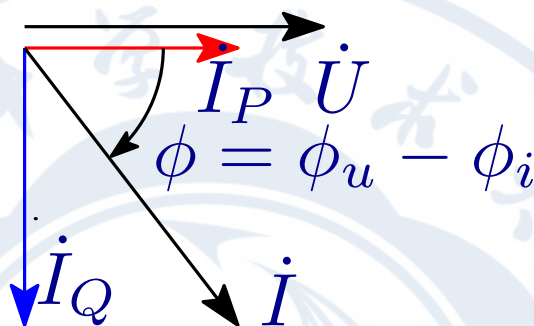
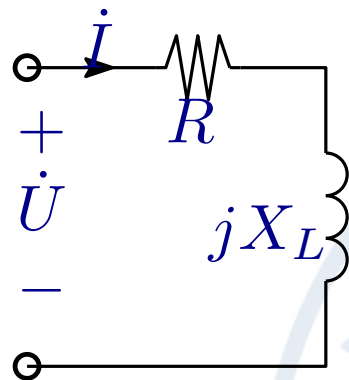
# 正弦电流电路功率分析-功率因数提升



$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + jX_L} = \frac{\dot{U}R}{R^2 + X_L^2} - j \frac{\dot{U}X_L}{R^2 + X_L^2}$$

- ★ 在原电路中**串联**一个电容 C, 即可降低贡献无功分量的  $X_L$
- ★ 在原负载**并联**一个电容 C, 也可抵消原负载在端口引入的无功电流  $\dot{I}_Q$

# 正弦电流电路功率分析-功率因数提升

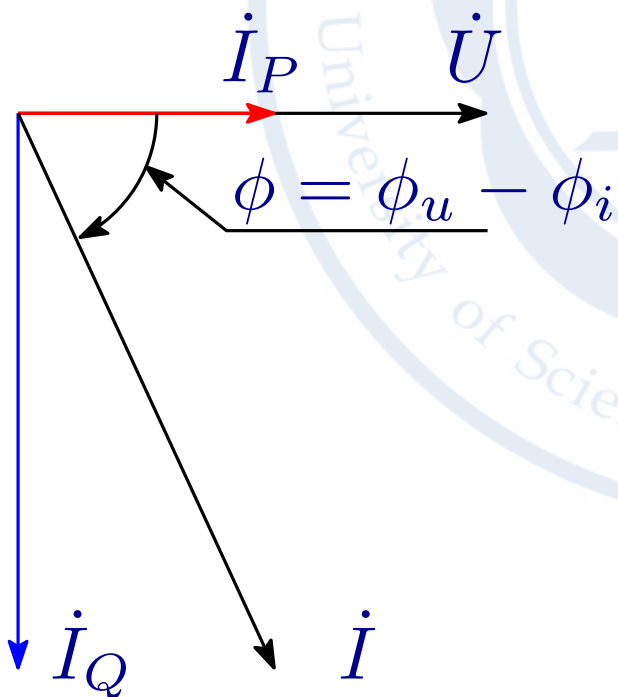
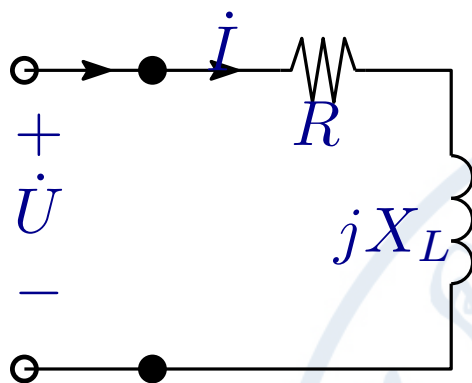


$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R+jX_L} = \frac{\dot{U}R}{R^2+X_L^2} - j \frac{\dot{U}X_L}{R^2+X_L^2}$$

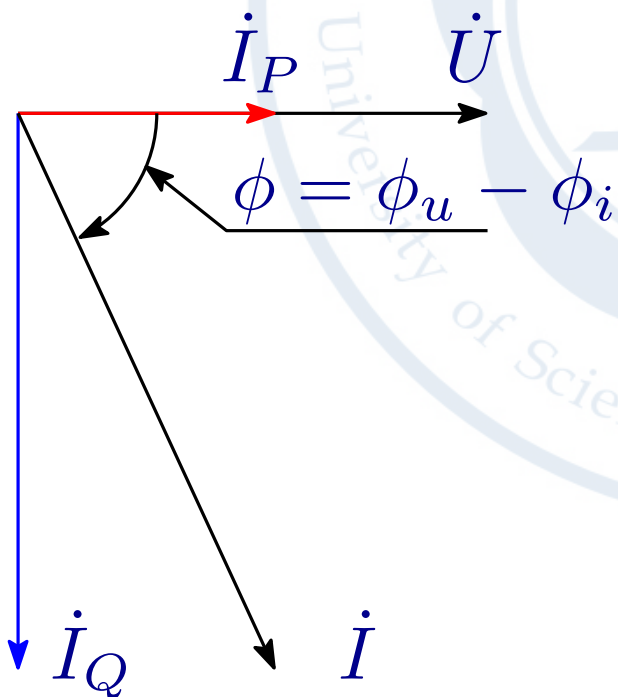
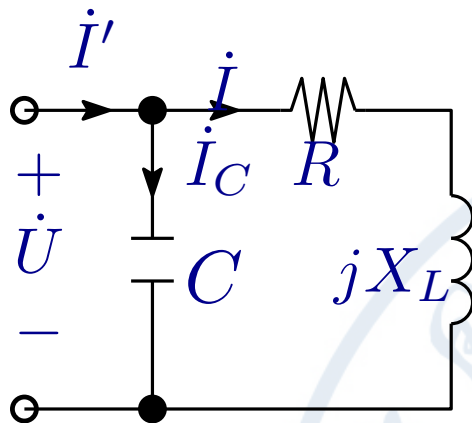
- ★ 在原电路中**串联**一个电容 C, 即可降低贡献无功分量的  $X_L$
- ★ 在原负载**并联**一个电容 C, 也可抵消原负载在端口引入的无功电流  $\dot{I}_Q$

在工程上何种技术方案更具有现实性?

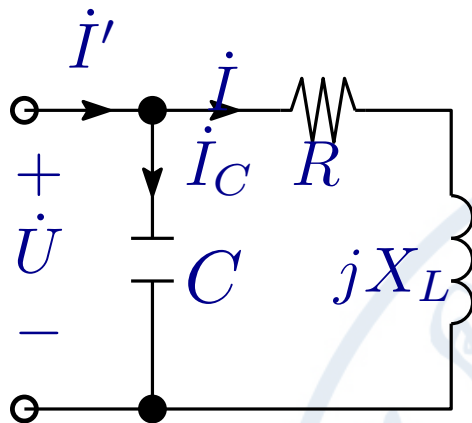
# 正弦电流电路功率分析-功率补偿



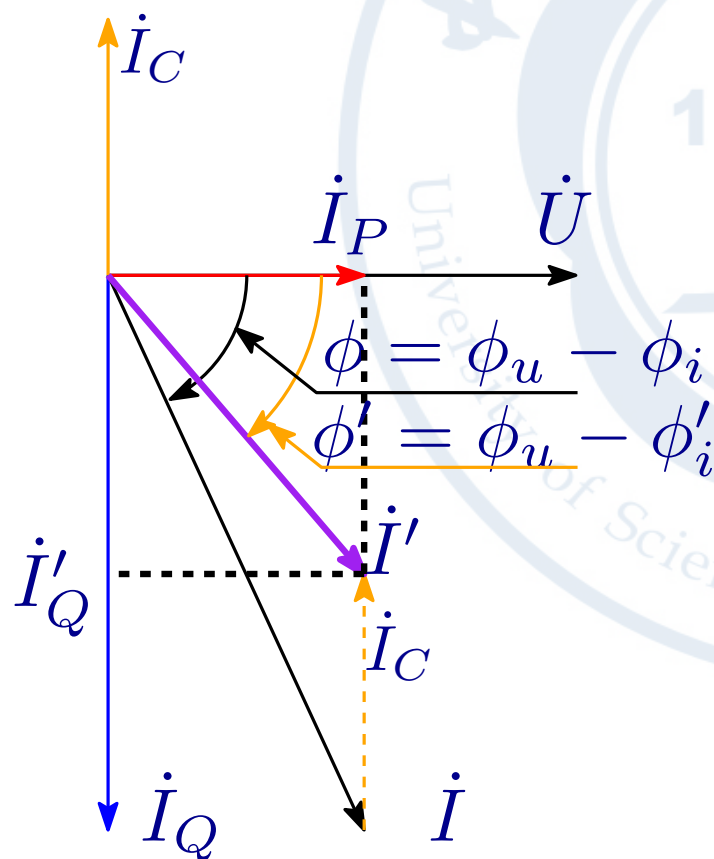
# 正弦电流电路功率分析-功率补偿



# 正弦电流电路功率分析-功率补偿



$$\dot{I}'_Q = I_Q - I_C$$



无功功率  $Q' = U(I_Q - I_C) = Q + Q_C$ ,  
 注意到感性负载  $Q > 0$ , 电容无功功率  $Q_C < 0$ , 因此  $|Q'| < |Q|$ , 功率因数得到了提高。该方法称之为**无功补偿**

# 正弦电流电路功率分析-功率补偿举例

**工频条件**下测得某线圈的端口电压、电流和功率分别为  $100V$ ,  $5A$  和  $300W$ . 求此线圈的功率因数, 等效电阻和等效电感。



# 正弦电流电路功率分析-功率补偿举例

**工频条件**下测得某线圈的端口电压、电流和功率分别为  $100V$ ,  $5A$  和  $300W$ . 求此线圈的功率因数, 等效电阻和等效电感。

$$\star \lambda = P/S = 0.6$$



# 正弦电流电路功率分析-功率补偿举例

**工频条件**下测得某线圈的端口电压、电流和功率分别为  $100V$ ,  $5A$  和  $300W$ . 求此线圈的功率因数, 等效电阻和等效电感。

$$\star \lambda = P/S = 0.6$$

$$\star \sqrt{R^2 + X_L^2} \times 5A = 100V \rightarrow |Z| = 20\Omega$$

# 正弦电流电路功率分析-功率补偿举例

**工频条件**下测得某线圈的端口电压、电流和功率分别为  $100V$ ,  $5A$  和  $300W$ . 求此线圈的功率因数, 等效电阻和等效电感。

$$\star \lambda = P/S = 0.6$$

$$\star \sqrt{R^2 + X_L^2} \times 5A = 100V \rightarrow |Z| = 20\Omega$$

$$\star R = \lambda|Z| = 12\Omega$$

# 正弦电流电路功率分析-功率补偿举例

**工频条件**下测得某线圈的端口电压、电流和功率分别为  $100V$ ,  $5A$  和  $300W$ . 求此线圈的功率因数, 等效电阻和等效电感。

$$\star \lambda = P/S = 0.6$$

$$\star \sqrt{R^2 + X_L^2} \times 5A = 100V \rightarrow |Z| = 20\Omega$$

$$\star R = \lambda|Z| = 12\Omega$$

$$\star X_L = |Z|\sqrt{1 - \lambda^2} = 16\Omega$$

# 正弦电流电路功率分析-功率补偿举例

**工频条件**下测得某线圈的端口电压、电流和功率分别为  $100V$ ,  $5A$  和  $300W$ . 求此线圈的功率因数, 等效电阻和等效电感。

$$\star \lambda = P/S = 0.6$$

$$\star \sqrt{R^2 + X_L^2} \times 5A = 100V \rightarrow |Z| = 20\Omega$$

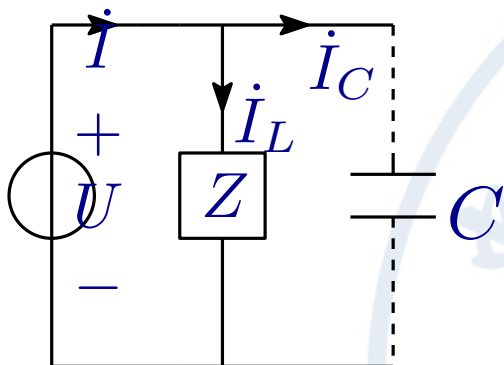
$$\star R = \lambda|Z| = 12\Omega$$

$$\star X_L = |Z|\sqrt{1 - \lambda^2} = 16\Omega$$

$$\star \omega = 100\pi rad/s \rightarrow L = X_L/\omega = 0.051H$$

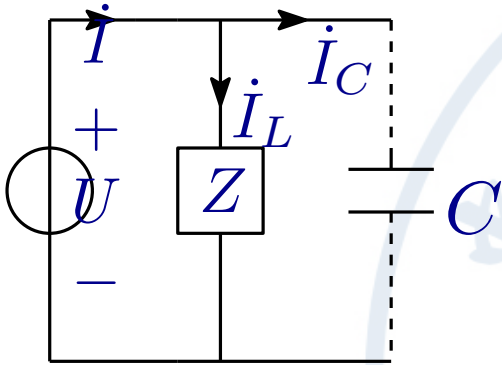
# 正弦电流电路功率分析-功率补偿举例

一个感性负载  $Z$  接于  $220V, 50Hz$  的正弦电源上, 负载平均功率为  $2200W$ , 功率因数为  $0.8$ .



# 正弦电流电路功率分析-功率补偿举例

一个感性负载  $Z$  接于  $220V, 50Hz$  的正弦电源上, 负载平均功率为  $2200W$ , 功率因数为  $0.8$ .



$$P = UI_L \lambda \Rightarrow I_L = 2200W / 0.8 / 220V = 12.5A$$

$$Q = UI_L \sqrt{1 - \lambda^2} = 220V \times 12.5A \times 0.6 = 1650Var$$

$$S = UI_L = 2200V \times 12.5V = 2750VA$$

$$\lambda' = 0.95 \Rightarrow Q' = \frac{P\sqrt{1-\lambda'^2}}{\lambda'} = 723.11Var$$

$$Q'_C = Q' - Q = 723.11 - 1650 = -927Var$$

$$C = -\frac{Q'_C}{\omega U^2} = 63.32\mu F$$

$$S' = \sqrt{P^2 + Q_C'^2} = 2387.26VA$$

$$I' = \frac{S'/U}{=} 10.85A$$

# 复功率

$$\tilde{S} = P + jQ = UI \cos \phi + jUI \sin \phi = UI e^{j(\phi_u - \phi_i)} = UI^*$$





# 复功率

$$\tilde{S} = P + jQ = UI \cos \phi + jUI \sin \phi = UI e^{j(\phi_u - \phi_i)} = UI^*$$

★ 复功率等于电压相量与电流相量共轭的乘积



# 复功率

$$\tilde{S} = P + jQ = UI \cos \phi + jUI \sin \phi = UI e^{j(\phi_u - \phi_i)} = UI^*$$

★ 复功率等于电压相量与电流相量共轭的乘积

$$\begin{aligned} \star \quad |\tilde{S}| &= \sqrt{P^2 + Q^2} = S \\ \arg \left\{ \tilde{S} \right\} &= \arctan\left(\frac{Q}{P}\right) = \phi \end{aligned}$$

# 复功率

$$\tilde{S} = P + jQ = UI \cos \phi + jUI \sin \phi = UI e^{j(\phi_u - \phi_i)} = UI^*$$

★ 复功率等于电压相量与电流相量共轭的乘积

$$\begin{aligned} \star \quad |\tilde{S}| &= \sqrt{P^2 + Q^2} = S \\ \arg \left\{ \tilde{S} \right\} &= \arctan\left(\frac{Q}{P}\right) = \phi \end{aligned}$$

## ■ 复功率守恒定理:

$\dot{U}_k, \dot{I}_k$  分别为正弦电流电路第  $k$  条支路对应的电压、电流相量, 则:

$$\sum_{k=1}^b \dot{U}_k \dot{I}_k^* = \sum_{k=1}^b P_k + j \sum_{k=1}^b Q_k = 0$$

# 复功率

$$\tilde{S} = P + jQ = UI \cos \phi + jUI \sin \phi = UI e^{j(\phi_u - \phi_i)} = UI^*$$

★ 复功率等于电压相量与电流相量共轭的乘积

$$\begin{aligned} \star \quad |\tilde{S}| &= \sqrt{P^2 + Q^2} = S \\ \arg \left\{ \tilde{S} \right\} &= \arctan\left(\frac{Q}{P}\right) = \phi \end{aligned}$$

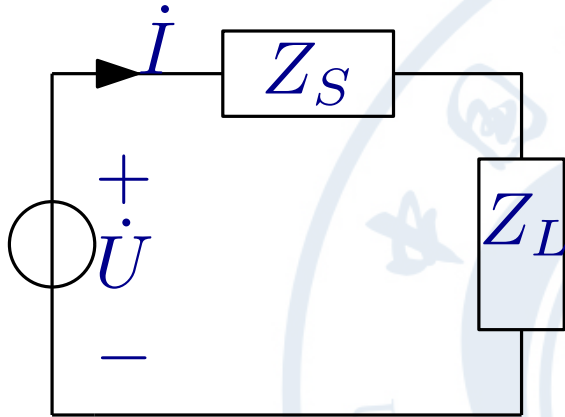
## ■ 复功率守恒定理:

$\dot{U}_k, \dot{I}_k$  分别为正弦电流电路第  $k$  条支路对应的电压、电流相量, 则:

$$\sum_{k=1}^b \dot{U}_k \dot{I}_k^* = \boxed{\sum_{k=1}^b P_k} + j \boxed{\sum_{k=1}^b Q_k} = 0$$

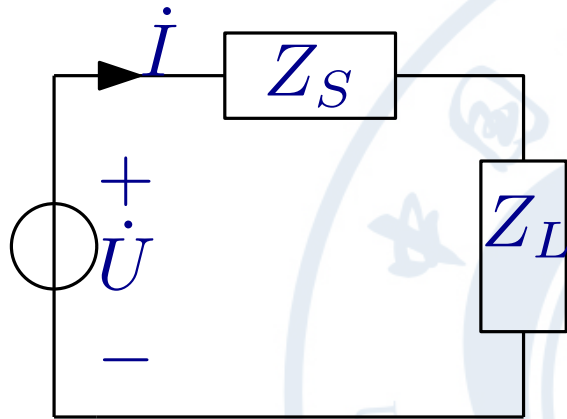
# 复功率-最大功率传输定理

■ 直流电路中对于一个含源电阻网络的负载  $R_L = R_{in}$  获得最大功率。对于正弦电流电路应该如何的解决路径？



# 复功率-最大功率传输定理

■ 直流电路中对于一个含源电阻网络的负载  $R_L = R_{in}$  获得最大功率。对于正弦电流电路应该如何的解决路径？

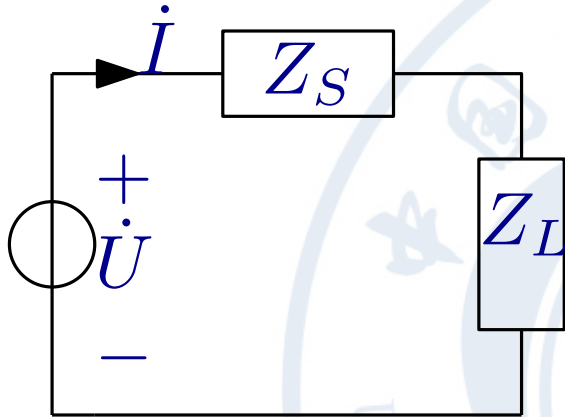


$$Z_S = R_S + jX_S$$

$$Z_L = R_L + jX_L$$

# 复功率-最大功率传输定理

■ 直流电路中对于一个含源电阻网络的负载  $R_L = R_{in}$  获得最大功率。对于正弦电流电路应该是如何的解决路径？



$$Z_S = R_S + jX_S$$

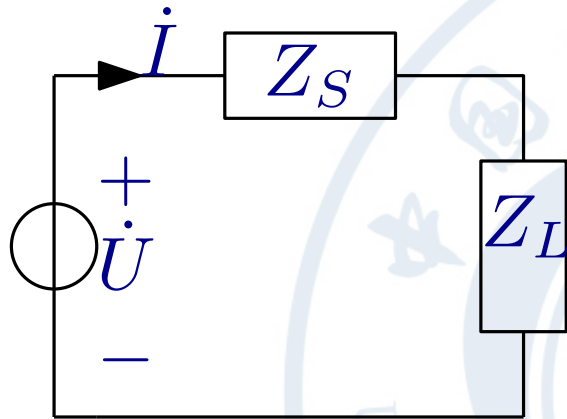
$$Z_L = R_L + jX_L$$

$$P_L = |\dot{I}|^2 R_L = \frac{U^2 R_L}{[(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2]}$$



# 复功率-最大功率传输定理

■ 直流电路中对于一个含源电阻网络的负载  $R_L = R_{in}$  获得最大功率。对于正弦电流电路应该是如何的解决路径？



$$Z_S = R_S + jX_S$$

$$Z_L = R_L + jX_L$$

$$P_L = |\dot{I}|^2 R_L = \frac{U^2 R_L}{[(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2]}$$

■  $X_S = -X_L, P_S = P_L$  可获得最大的传输功率。即  $Z_L = Z_S^*$

# 复功率-最大功率传输定理

## ■ 对于相位不可改变的负载:

$$P_L = \frac{U_2 |Z_L| \cos \phi_L}{(Z_S \cos \phi_S + Z_L \cos \phi_L)^2 + (Z_S \sin \phi_S + Z_L \sin \phi_L)^2}$$

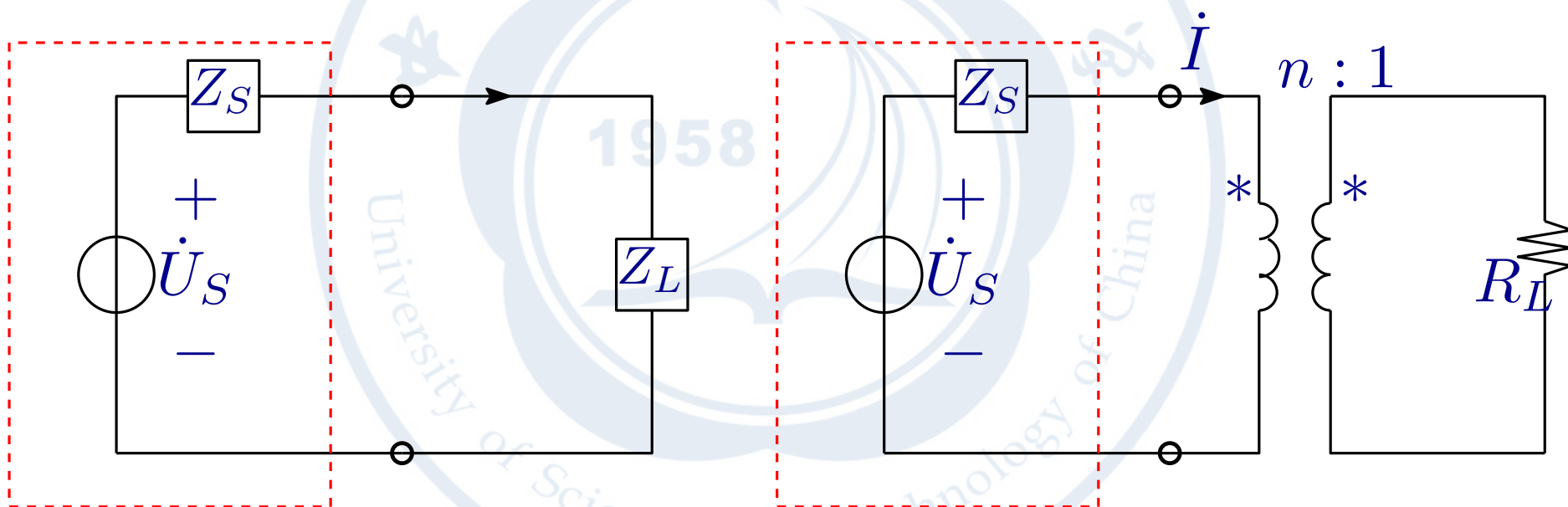
$$P_L = \frac{U^2 \cos \phi_L}{|Z_S|^2 / |Z_L| + |Z_L| + 2|Z_S| \cos(\phi_L - \phi_S)}$$

对于相位改变的负载，负载获得最大功率条件为模匹配，即负载的模和源的内部阻抗的模相等  $|Z_L| = |Z_S|$ 。

# 复功率-最大功率传输定理举例

对一个实际的电源模型，源电压  $12\angle 0^\circ$ ，内阻抗为  $(3 + j4)\Omega$ 。

- 1) 负载阻抗  $Z_L$  可以任意改变时，求电源可发出的最大功率
- 2)  $R_L = 20\Omega$  时，问变比  $n$  为多大时，此电源可发出最大功率。



$$Z_L = Z_S^* = (3 - j4)\Omega$$

$$P = \frac{U_S^2}{12\Omega} = 12W$$

$$n^2 R_L = |Z_S| \Rightarrow n = 0.5$$

$$\dot{I}_1 = \frac{U_S}{Z_S + R_L} = 1.34\angle -26.6^\circ$$

$$P_{\max} = I_1^2 n^2 R_L = 9W$$