

课程内容

- **研究主体：半导体中的电子**
- 第一部分：晶体结构
- 第二部分：能带结构
- **第三部分：热力学统计**
 - 研究半导体中载流子数目在不同温度下的行为
- 第四部分：载流子输运
- 第五部分：非平衡载流子

第三章： 大纲

- 回顾热力学里温度的概念（复习）
- **电子系统中温度和能量分布的关系**
 - 费米分布
 - 态密度（复习第二章）
 - 本征半导体中的载流子浓度
 - 掺杂半导体中的载流子浓度
- 霍耳效应（教材12.1）

半导体的载流子浓度

玻尔兹曼

导带C: 状态数 VN_C
 N_C : 导带等效状态浓度

施主D: 状态数 VN_D
 N_D : 施主浓度

受主A: 状态数 VN_A
 N_D : 受主浓度

价带V: 态密度 VN_V
 N_V : 价带等效状态浓度

导带电子浓度 $n = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{k_B T}}$

电子数 $VN_C f(E_C)$

电子数 $VN_D f_D(E_D)$

简并因子修正过的费米分布

电子数 $VN_A f_A(E_A)$
 空穴数 $VN_A (1 - f_A(E_A))$

电子数 $VN_V f(E_V)$
 空穴数 $VN_V (1 - f(E_V))$

V : 半导体体积

价带空穴浓度 $p = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{k_B T}}$ 玻尔兹曼

要求: 非简并 - E_C 、 E_V 和 E_F 足够远 ($>$ 几个 $k_B T$, “几”至少要有2.5)

小结：本征半导体

- 未掺杂（掺杂补偿）半导体

电子-空穴浓度乘积

$$np = n_i^2 = N_C N_V e^{-\frac{E_g}{k_B T}} = \frac{(m_{dn}^* m_{dp}^*)^{3/2}}{2\pi^3 \hbar^6} (k_B T)^3 e^{-\frac{E_g}{k_B T}}$$

- 本征载流子浓度 n_i 与材料和温度有关
- 同一材料，随温度升高而迅速增大
- 同一温度下， E_g 越大， n_i 越小

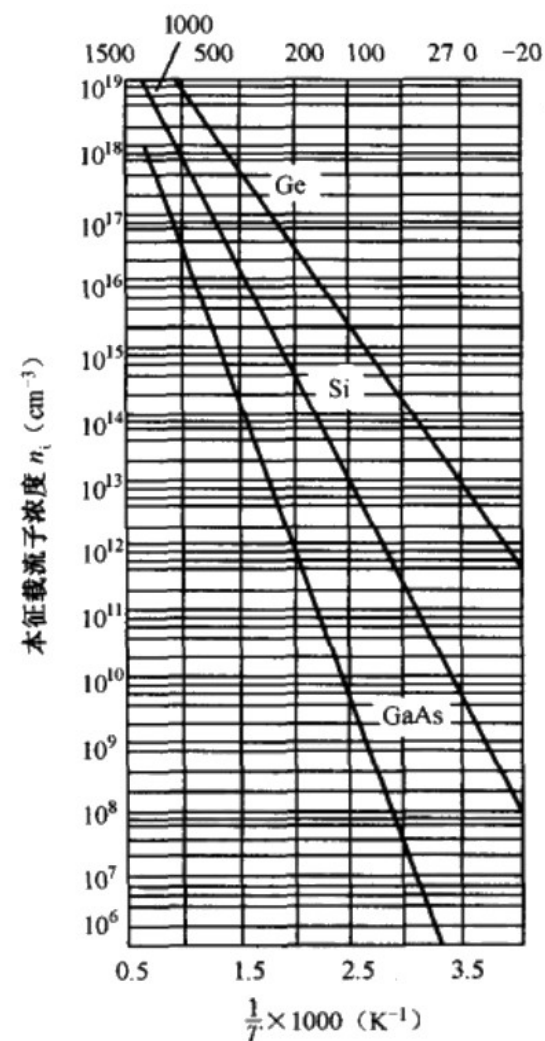


图 3-7 硅、锗、砷化镓的 $\ln n_i \sim 1/T$ 关系^[5]

小结：n型掺杂半导体

- 1. 低温弱电离区
- 2. 中间电离区
- 3. 强电离区（饱和）
- 4. 过渡区
- 5. 高温本征激发区
- 注意：空穴浓度在非简并条件下一直都可以用 $np=n_i^2$ 计算

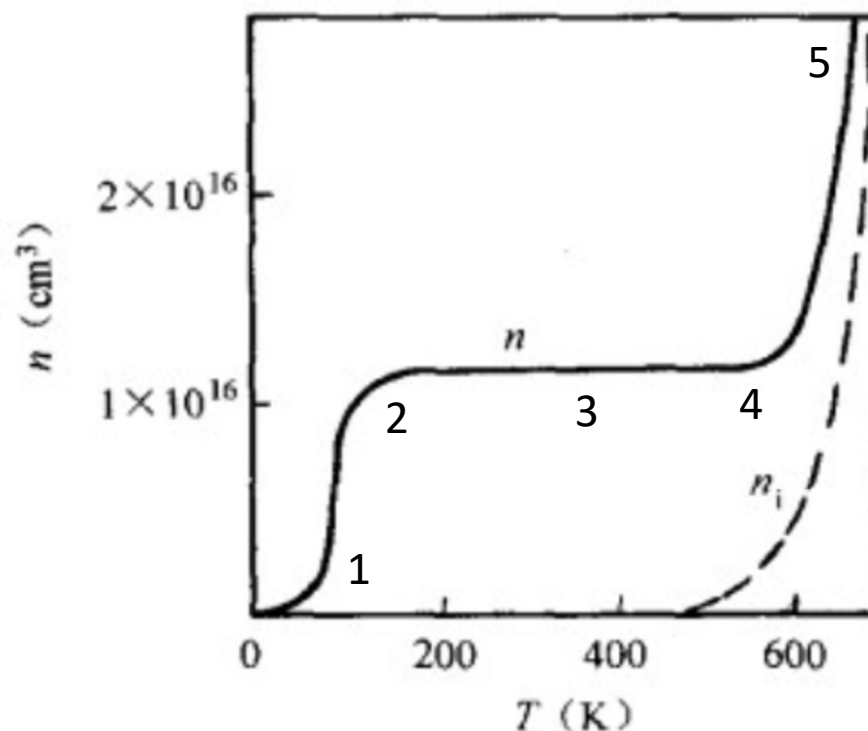
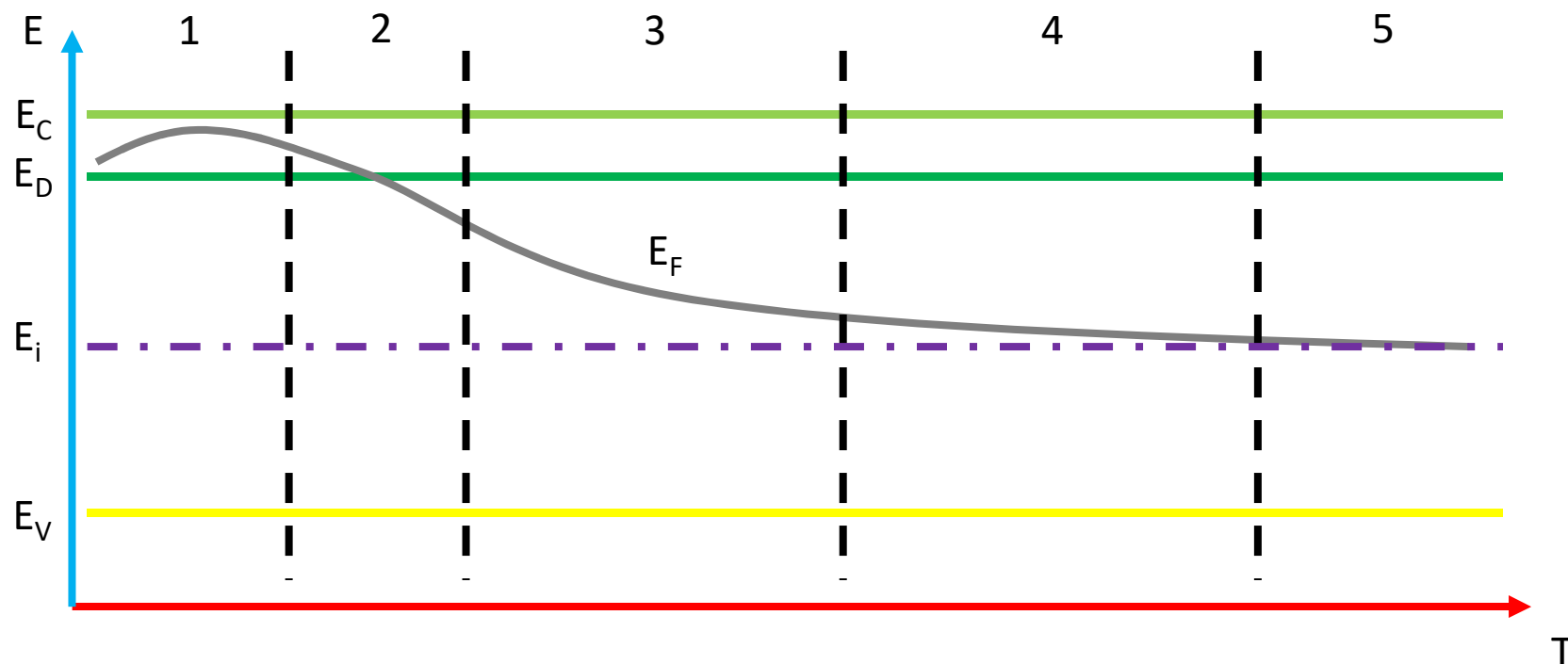


图 3-11 n 型硅的电子浓度与温度的关系^[8,9]曲线

n型半导体的费米能级

- 1. 低温弱电离区
- 2. 中间电离区
- 3. 强电离区
- 4. 过渡区
- 5. 高温本征激发区



p型半导体的载流子浓度

$$p = n + (N_A - p_A)$$

- 分情况讨论：温度从低到高
- $T=0$ ，无激发
- 低温，依照感性认识，受主容易激发，价带导带激发可忽略： $n \ll N_A - p_A$ ， $p = N_A - p_A$
 - 1. 低温弱电离区（杂质电离也很弱）
 - 2. 中间电离区
 - 3. 强电离区（杂质完全电离）
- 高温，价带导带激发不可忽略
 - 4. 过渡区（ $n \sim N_A - p_A$ ）
 - 5. 高温本征激发区（ $n \gg N_A - p_A$ ， $n = p$ ）

1.2.3.低温受主激发区

$$p = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{k_B T}} \quad p_A = \frac{N_A}{\frac{1}{g_A} e^{\frac{E_F - E_A}{k_B T}} + 1} \quad \text{电中性条件} \quad p = N_A - p_A$$

$$N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{k_B T}} = p = N_A - p_A = \frac{N_A}{g_A e^{-\frac{E_F - E_A}{k_B T}} + 1}$$

1.2.3.三个区域的通解为 $E_F = -k_B T \log \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4g_A N_A}{N_V} e^{\frac{E_A - E_V}{k_B T}}} - 1}{2g_A} \right) + E_A$

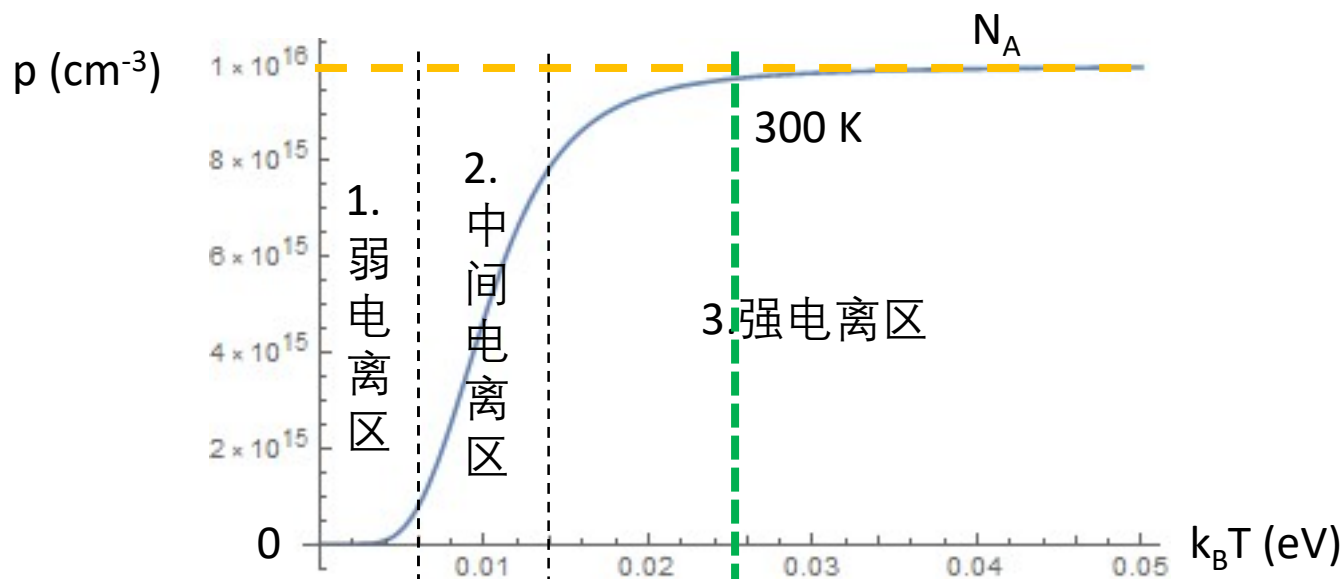
$$p = \frac{N_V}{2g_A} e^{-\frac{E_A - E_V}{k_B T}} \left(\sqrt{1 + \frac{4g_A N_A}{N_V} e^{\frac{E_A - E_V}{k_B T}}} - 1 \right)$$

1.2.3.低温受主激发区

表 3-2 300K 下锗、硅、砷化镓的本征载流子浓度

各项参数	E_g (eV)	m_n^* (m_{dn})	m_p^* (m_{dp})	N_c (cm^{-3})	N_v (cm^{-3})	n_i (cm^{-3}) (计算值)	n_i (cm^{-3}) (测量值)
Ge	0.67	$0.56m_0$	$0.29m_0$	1.05×10^{19}	3.9×10^{18}	1.7×10^{13}	2.33×10^{13}
Si	1.12	$1.062m_0$	$0.59m_0$	2.8×10^{19}	1.1×10^{19}	7.8×10^9	1.02×10^{10}
GaAs	1.428	$0.068m_0$	$0.47m_0$	4.5×10^{17}	8.1×10^{18}	2.3×10^6	1.1×10^7

- 对于硅，取 $N_A = 1 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ， N_V (300 K) = $1 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ， $E_A - E_V = 50 \text{ meV}$ ，可算得



1.2.3.低温受主激发区

表 3-2 300K 下锗、硅、砷化镓的本征载流子浓度

各项参数	E_g (eV)	m_n^* (m_{dn})	m_p^* (m_{dp})	N_c (cm^{-3})	N_v (cm^{-3})	n_i (cm^{-3}) (计算值)	n_i (cm^{-3}) (测量值)
Ge	0.67	$0.56m_0$	$0.29m_0$	1.05×10^{19}	3.9×10^{18}	1.7×10^{13}	2.33×10^{13}
Si	1.12	$1.062m_0$	$0.59m_0$	2.8×10^{19}	1.1×10^{19}	7.8×10^9	1.02×10^{10}
GaAs	1.428	$0.068m_0$	$0.47m_0$	4.5×10^{17}	8.1×10^{18}	2.3×10^6	1.1×10^7

在哪个区域的判定标准

$$p = \frac{N_V}{2g_A} e^{-\frac{E_A - E_V}{k_B T}} \left(\sqrt{1 + \frac{4g_A N_A}{N_V} e^{\frac{E_A - E_V}{k_B T}}} - 1 \right)$$

T 比较小, $\frac{4g_A N_A}{N_V} e^{\frac{E_A - E_V}{k_B T}} \gg 1$ $p \sim \left(\frac{N_V N_A}{g_A} \right)^{1/2} e^{-\frac{E_A - E_V}{2k_B T}}$ 为弱电离区

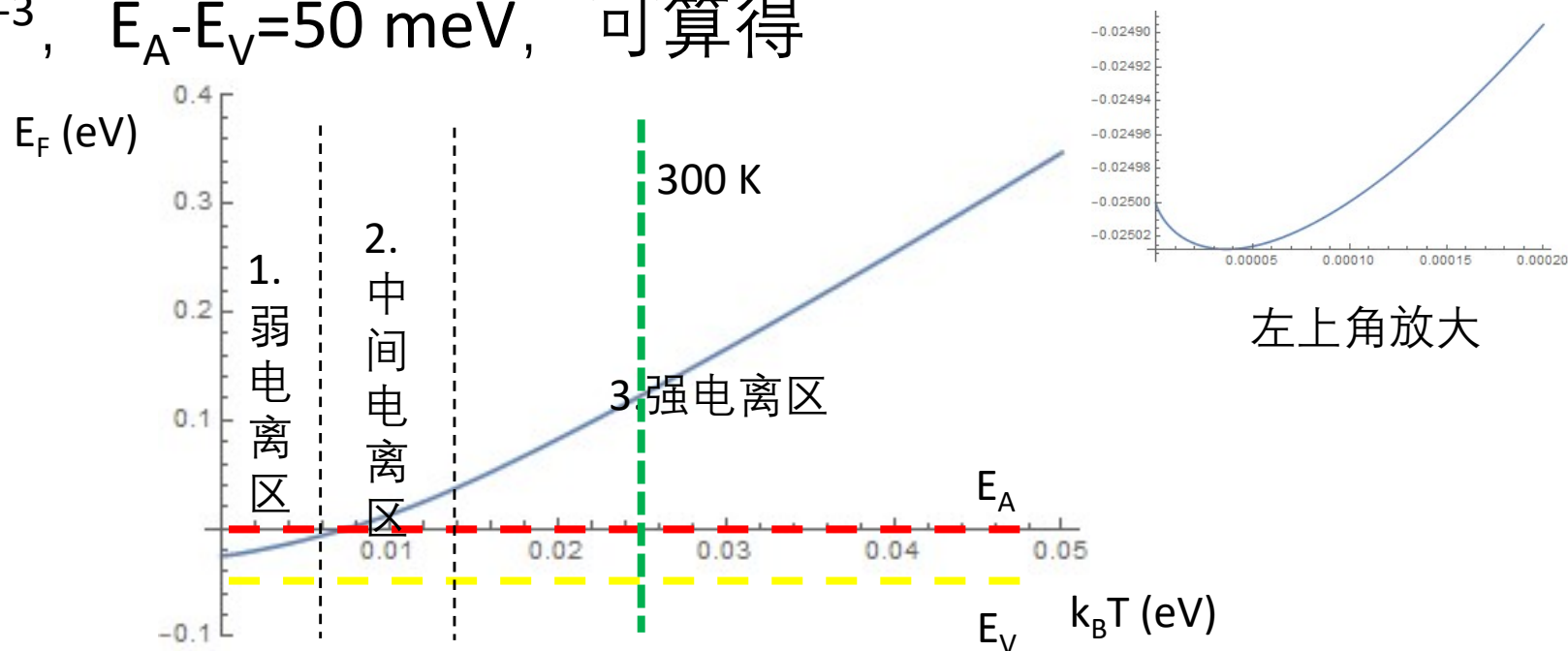
T 比较大, $\frac{4g_A N_A}{N_V} e^{\frac{E_A - E_V}{k_B T}} \ll 1$ $p \sim \frac{N_V}{2g_A} e^{-\frac{E_A - E_V}{k_B T}} \left(1 + \frac{2g_A N_A}{N_V} e^{\frac{E_A - E_V}{k_B T}} - 1 \right) = N_A$
为强电离区

1.2.3.低温受主激发区

表 3-2 300K 下锗、硅、砷化镓的本征载流子浓度

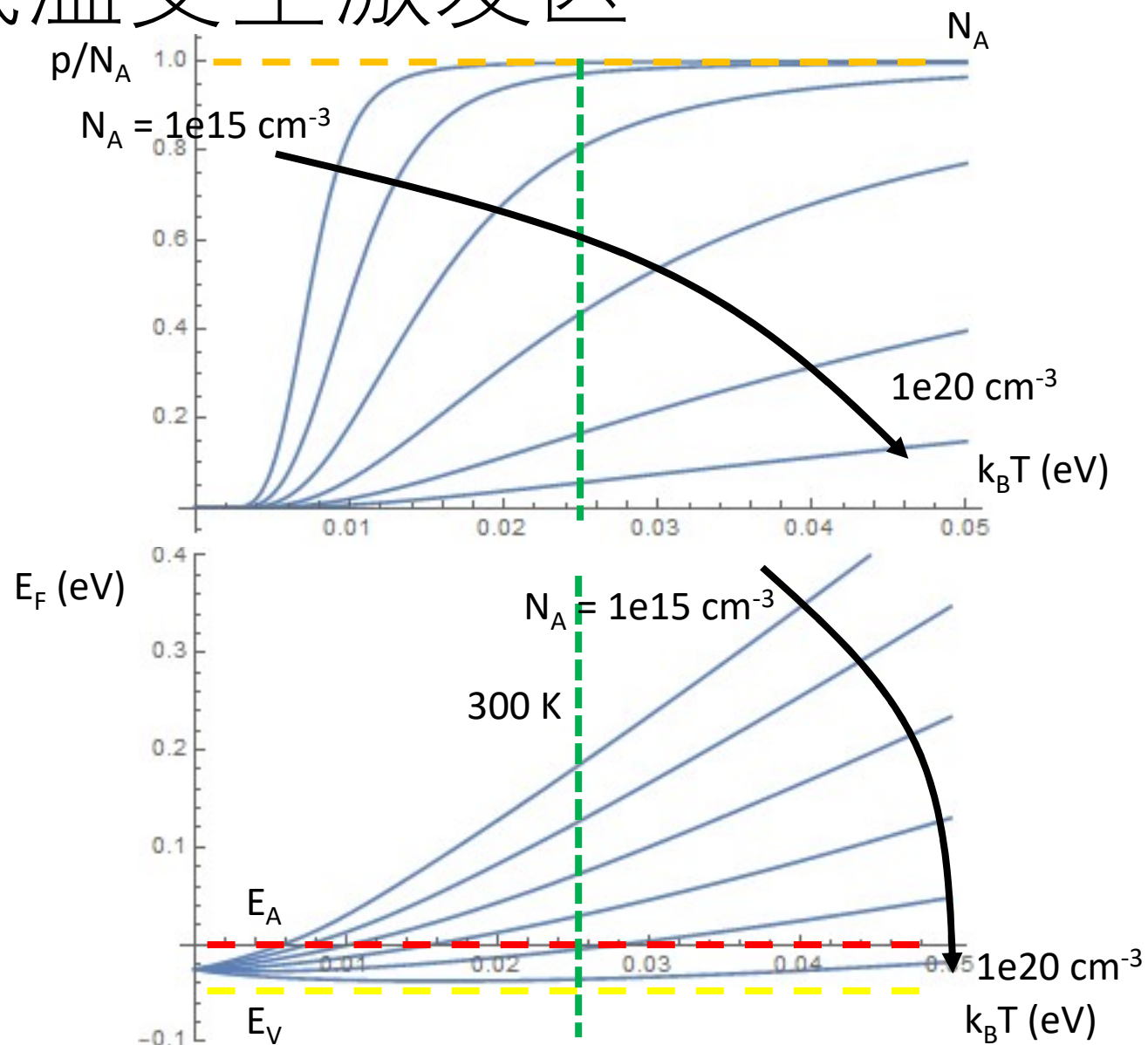
各项参数	E_g (eV)	m_n^* (m_{dn})	m_p^* (m_{dp})	N_c (cm^{-3})	N_v (cm^{-3})	n_i (cm^{-3}) (计算值)	n_i (cm^{-3}) (测量值)
Ge	0.67	$0.56m_0$	$0.29m_0$	1.05×10^{19}	3.9×10^{18}	1.7×10^{13}	2.33×10^{13}
Si	1.12	$1.062m_0$	$0.59m_0$	2.8×10^{19}	1.1×10^{19}	7.8×10^9	1.02×10^{10}
GaAs	1.428	$0.068m_0$	$0.47m_0$	4.5×10^{17}	8.1×10^{18}	2.3×10^6	1.1×10^7

- 对于硅，取 $N_A = 1 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ， $N_V(300 \text{ K}) = 1 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ， $E_A - E_V = 50 \text{ meV}$ ，可算得



1.2.3. 低温受主激发区

不同掺杂浓度下 p 和 E_F 的变化



4.5. 高温价带导带激发区

价带空穴浓度 $p = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{k_B T}}$ 受主能级空穴浓度 $p_A = 0$

导带电子浓度 $n = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{k_B T}}$

电中性条件 $p = (N_A - p_A) + n = N_A + n$

$$N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{k_B T}} = p = N_A + n = N_A + N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{k_B T}}$$

注意: $np = n_i^2 = N_C N_V e^{-\frac{E_C - E_V}{k_B T}}$ 还是成立

此时可直接解一元二次方程 $p = N_A + n_i^2/p$, 得到

$$p = \frac{N_A}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_A^2}} \right) \quad n = p - N_A = \frac{N_A}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_A^2}} \right)$$

也可算出 $E_F = E_i - k_B T \operatorname{arcsch} \frac{N_A}{2n_i} = \frac{1}{2} \left(E_C + E_V - k_B T \log \frac{N_C}{N_V} \right) - k_B T \operatorname{arcsch} \frac{N_A}{2n_i}$

4.5. 高温价带导带激发区

$$p = \frac{N_A}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_A^2}} \right) \quad n = p - N_A = \frac{N_A}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_A^2}} \right)$$

如果温度较低 $N_A \gg 2n_i$ ($n_i^2 = N_C N_V e^{-\frac{E_C - E_V}{k_B T}}$)

$$\text{则} \quad p \sim \frac{N_A}{2} \left(1 + 1 + \frac{2n_i^2}{N_A^2} \right) = N_A + \frac{n_i^2}{N_A} \quad n = p - N_A \sim \frac{n_i^2}{N_A}$$

即：电子浓度约等于施主浓度+本征激发浓度，空穴浓度约等于本征激发浓度→过渡区

如果温度较高 $N_A \ll 2n_i$

$$\text{则} \quad p = \frac{N_A}{2} \left(1 + \frac{2n_i}{N_A} \right) \sim \frac{N_A}{2} + n_i \quad n = p - N_A \sim -\frac{N_A}{2} + n_i$$

即：电子、空穴浓度约等于本征激发浓度→本征激发区

此时 $E_F = E_i - k_B T \operatorname{arcsch} \frac{N_A}{2n_i} \sim E_i$ 靠近本征费米能级 E_i

小结：p型掺杂半导体

- 1. 低温弱电离区
- 2. 中间电离区
- 3. 强电离区
- 4. 过渡区
- 5. 高温本征激发区
- 注意：电子浓度在非简并条件下一直都可以用 $np = n_i^2$ 计算

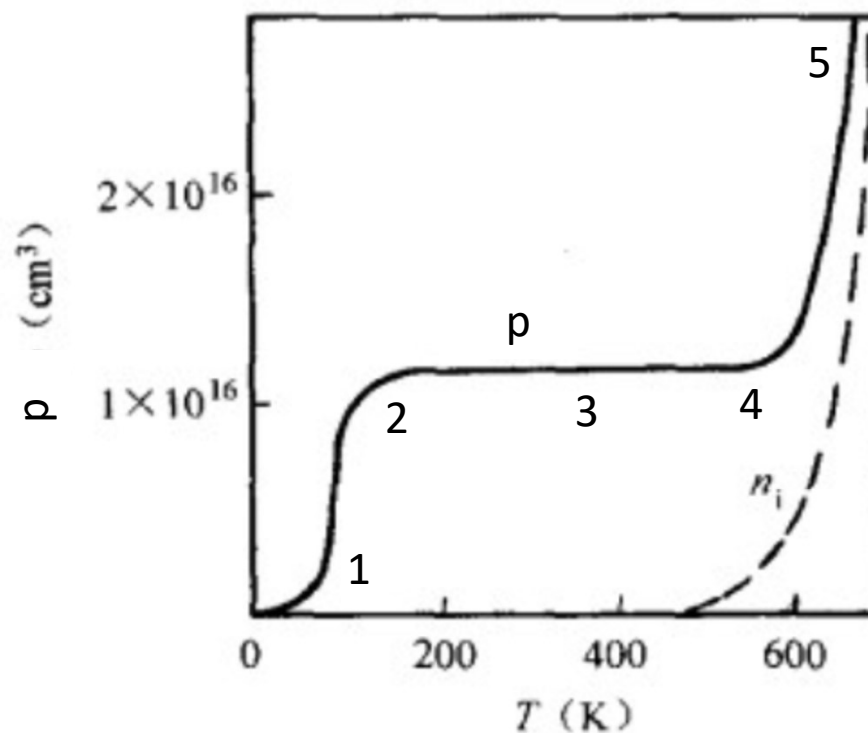
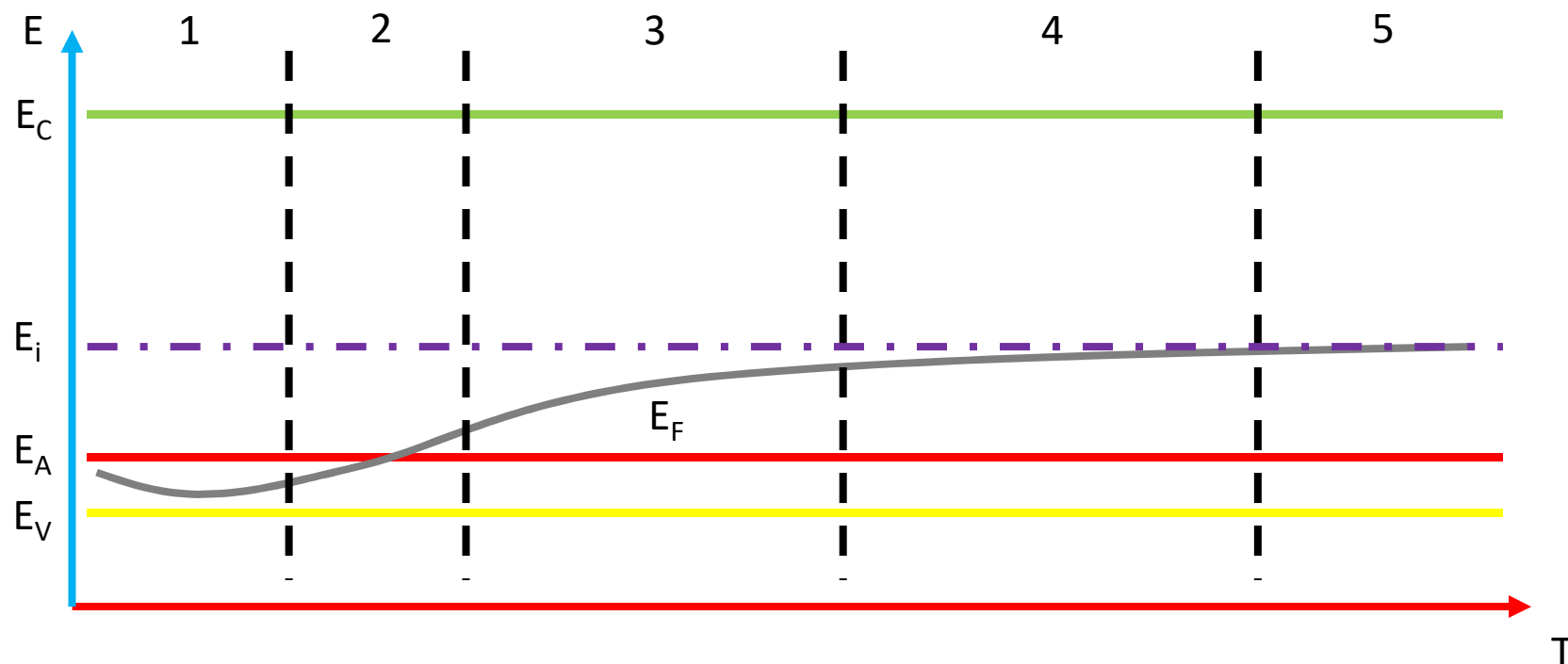


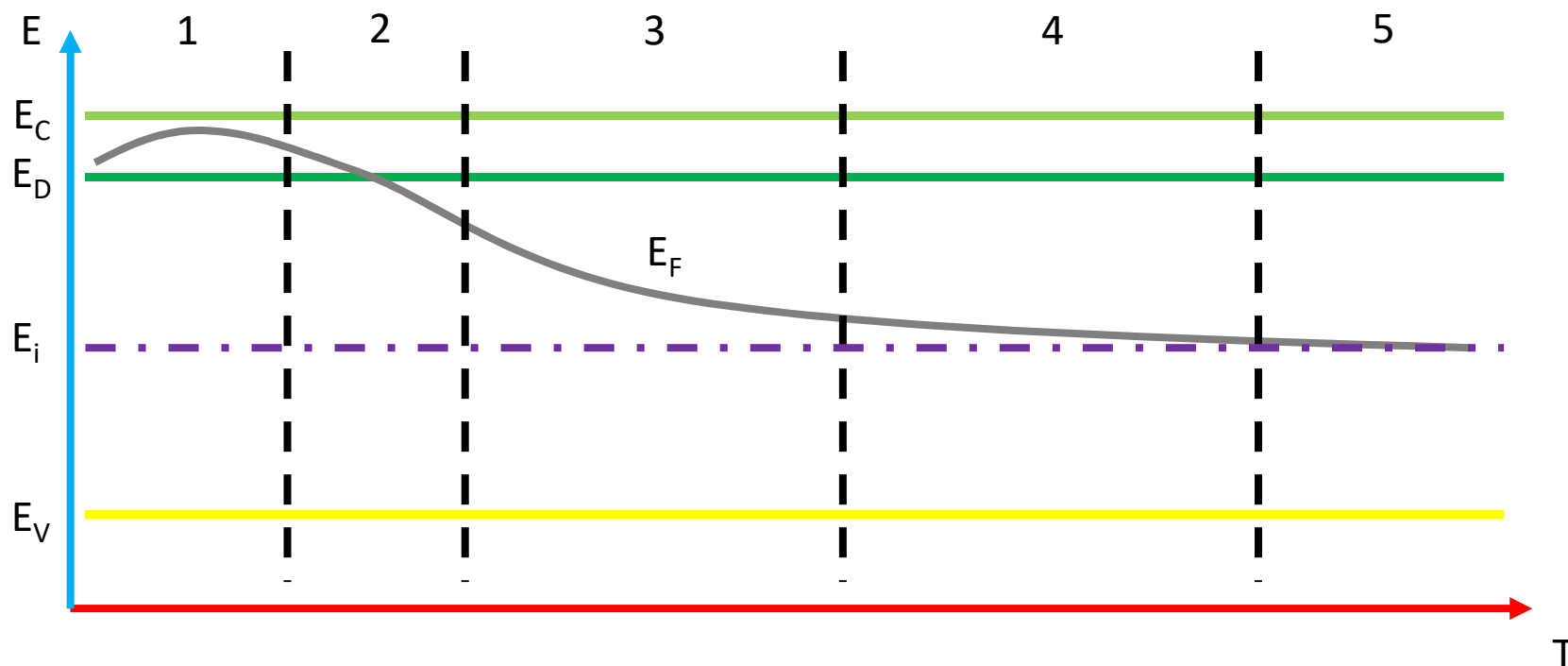
图 3-11 p 型硅的电子浓度与温度的关系^[8,9]曲线

p型半导体的费米能级

- 1. 低温弱电离区
- 2. 中间电离区
- 3. 强电离区
- 4. 过渡区
- 5. 高温本征激发区



掺杂半导体的非简并条件



非简并条件：导带、价带费米分布能近似为玻尔兹曼分布，便于积分

$$E_C - E_F > 2.5k_B T \quad E_V - E_F < -2.5k_B T$$

对常见半导体，在3.饱和区、4.过渡区、5本征激发区能满足非简并条件

在室温下，通常半导体能满足非简并条件，但重掺杂半导体不满足，称为简并半导体

简并半导体

- 如果掺杂浓度很高， E_F 将非常靠近带边，甚至进入能带；此时必须应用费米分布函数。相应的半导体称为简并半导体
- 非简并半导体：可应用玻尔兹曼近似
 - $E_C - E_F > 2.5k_B T$
 - $E_F - E_V > 2.5k_B T$
- 弱简并： $2.5k_B T \geq E_C - E_F$ ($E_F - E_V > 0$)
- 简并： $E_C - E_F$ ($E_F - E_V \leq 0$)

简并半导体：重掺杂

- 类氢原子波函数交叠，形成能带

氢原子



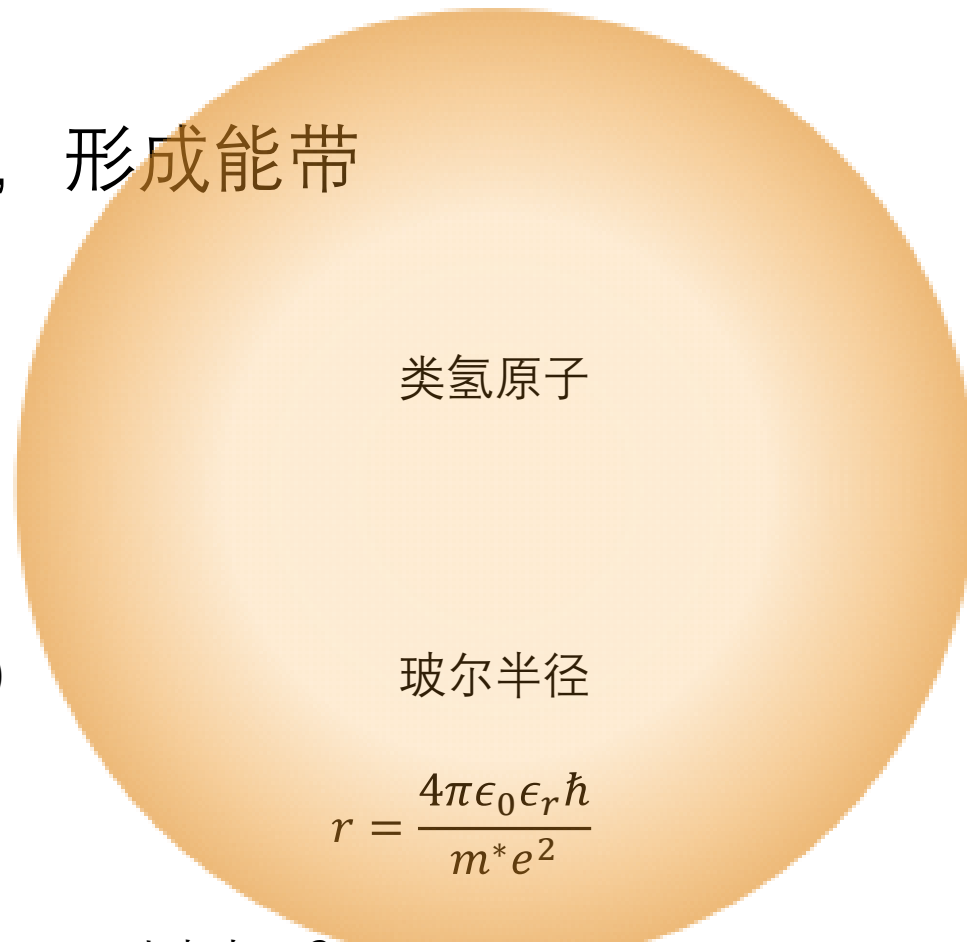
1s

玻尔半径（波函数大致的延展半径）

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar}{me^2}$$

53 pm

类氢原子



玻尔半径

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r\hbar}{m^*e^2}$$

硅中电子？ ~ 2000 pm

杂质很多时，类氢原子的波函数会重叠

简并半导体：重掺杂

- 类氢原子波函数交叠，形成能带

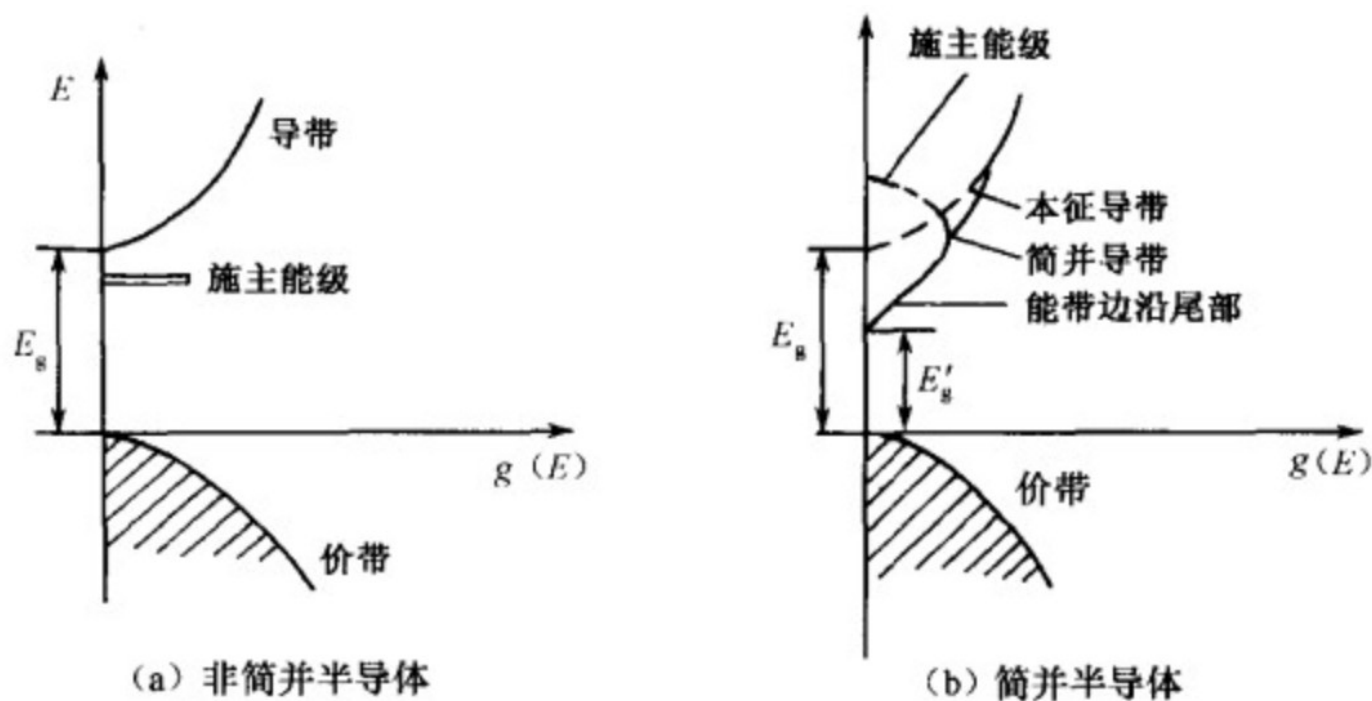


图 3-19 状态密度 $g(E)$ 与能量 E 的关系

禁带变窄； E_F 进入能带中

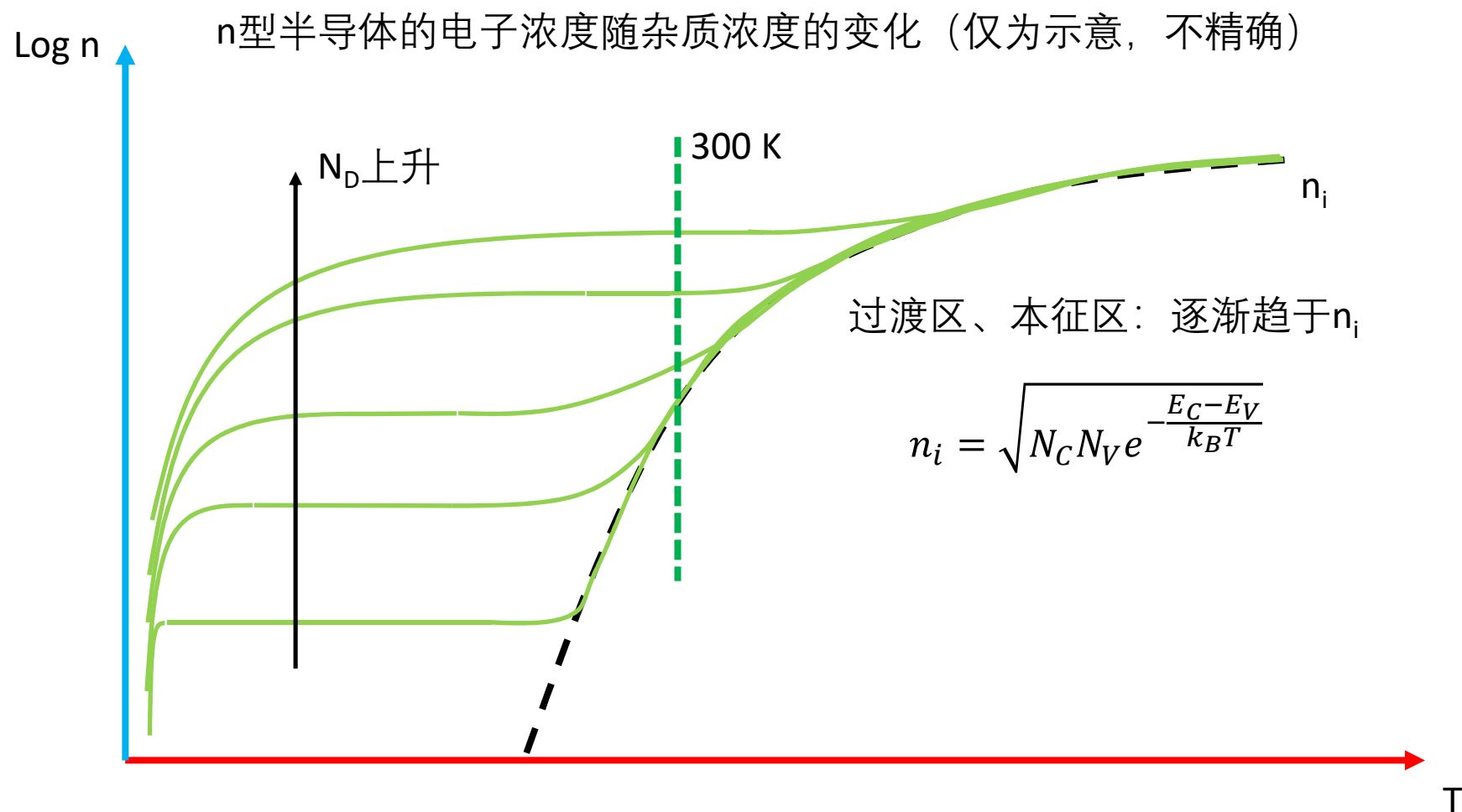
简并半导体：重掺杂

- 掺杂浓度很高时，虽然按照非简并条件，半导体室温时理应处于中间电离区或弱电离区
- 但由于形成杂质能带和导带/价带相连，因此杂质能级上的电子/空穴也能运动，也是载流子
- 因此，不管轻掺杂或者重掺杂，室温时，常见半导体（如硅、砷化镓），只要不进入本征区（过渡区），载流子浓度都比较接近于 N_D 或 N_A

n 、 p 和 E_F 随杂质浓度的变化

- 掺有某种杂质的半导体，其载流子浓度和 E_F 由温度和掺杂浓度所决定。
- 前面主要讨论了随温度的变化
- 一确定的半导体，在一定温度下（如300 K），载流子浓度和 E_F 由杂质浓度决定：
 - 载流子浓度随掺杂浓度的变化：掺杂浓度较高时，掺杂越多，载流子浓度越高，但难达到饱和；掺杂浓度较低则进入本征区
 - E_F 随掺杂浓度的变化：掺杂浓度越高， E_F 越靠近带边

n随杂质浓度的变化示意图



n、p和 E_F 随杂质浓度的变化

室温时的n、p和 N_D 、 N_A 的关系

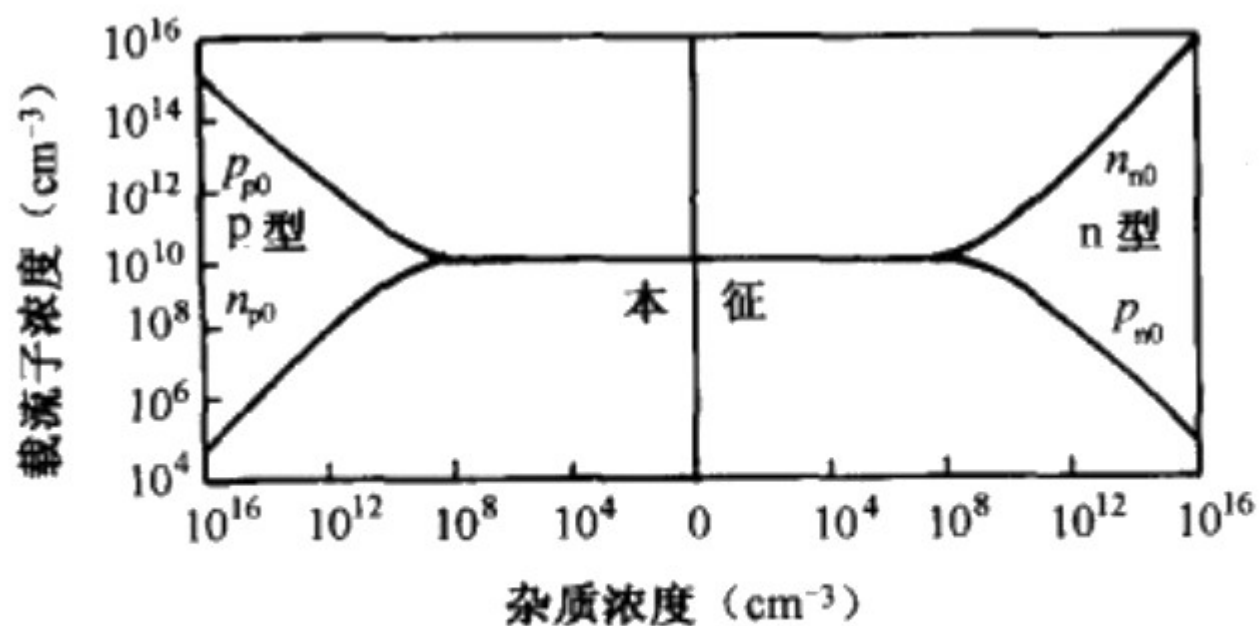


图 3-14 硅中载流子浓度与杂质浓度的关系

掺杂在一开始不影响载流子浓度。超过本征浓度之后，掺得越多载流子浓度越高

n 、 p 和 E_F 随杂质浓度的变化

- 掺有某种杂质的半导体，其载流子浓度和 E_F 由温度和掺杂浓度所决定。
- 前面主要讨论了随温度的变化
- 一确定的半导体，在一定温度下（如300 K），载流子浓度和 E_F 由杂质浓度决定：
 - 载流子浓度随掺杂浓度的变化：掺杂浓度较高时，掺杂越多，载流子浓度越高，但难达到饱和；掺杂浓度较低则进入本征区
 - E_F 随掺杂浓度的变化：掺杂浓度越高， E_F 越靠近带边

n、p和 E_F 随杂质浓度的变化

掺杂浓度越高，载流子浓度越高

掺杂浓度越高， E_F 越靠近带边

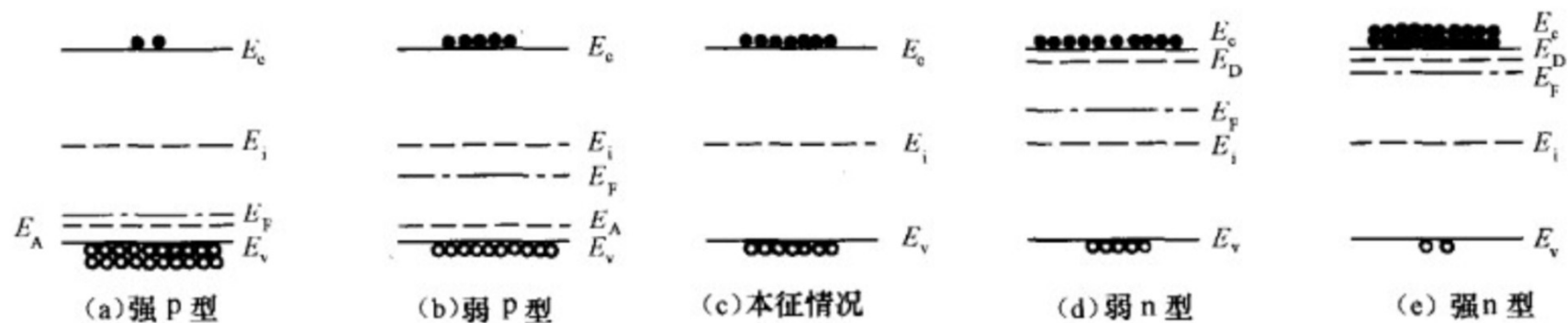


图 3-13 不同掺杂情况下的半导体的费米能级

小结：掺杂半导体

- 载流子浓度受到温度和掺杂浓度共同影响
- 随温度变化，主要分为五个区域
 - 1. 低温弱电离区（杂质电离也很弱）
 - 2. 中间电离区
 - 3. 强电离区（饱和，杂质完全电离）
 - 4. 过渡区
 - 5. 高温本征激发区
- 随掺杂浓度变化
 - 超过本征载流子浓度时，掺杂浓度越高，载流子浓度越高， E_F 越靠近带边
 - 室温通常处于强电离区，载流子浓度=掺杂浓度

多子和少子

- 弱电离区、中间电离区、强电离区、过渡区 $n \neq p$
- 一种载流子多，一种载流子少
- 多的称为多数载流子/多子，少的称为少数载流子/少子
- 多子是载流的主要部分

强电离区少子浓度

- 多子浓度=掺杂浓度
- 少子浓度= n_i^2 /掺杂浓度
 - 在饱和区的温度范围内, 由于多子浓度基本不变, 因此少子浓度将随着温度的升高而迅速增大

n_i^2 的表达式为

$$np = n_i^2 = N_C N_V e^{-\frac{E_g}{k_B T}} = \frac{(m_n^* m_p^*)^{3/2}}{2\pi^3 \hbar^6} (k_B T)^3 e^{-\frac{E_g}{k_B T}}$$

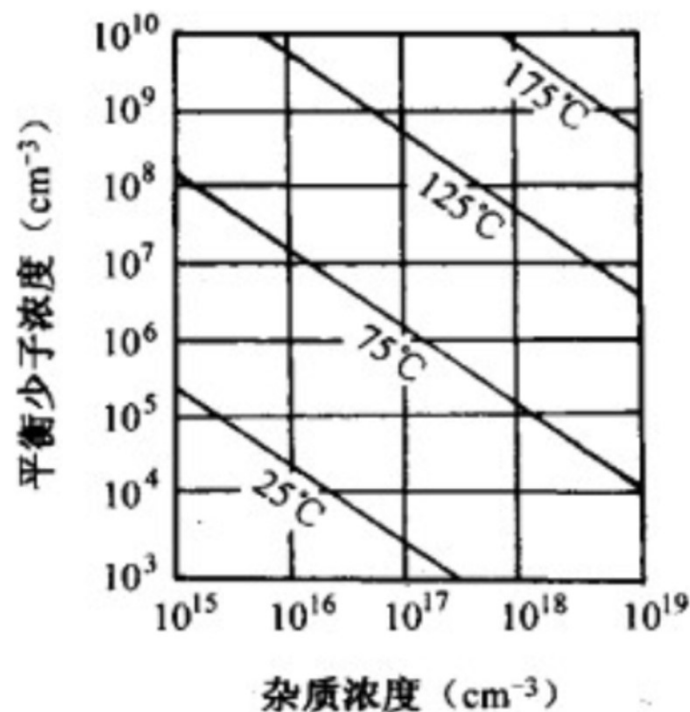


图 3-15 不同温度下, 平衡少子浓度与杂质浓度的关系

例题： 半导体的少子浓度

表 3-2 300K 下锗、硅、砷化镓的本征载流子浓度

各项参数	E_g (eV)	m_n^* (m_{dn})	m_p^* (m_{dp})	N_c (cm^{-3})	N_v (cm^{-3})	n_i (cm^{-3}) (计算值)	n_i (cm^{-3}) (测量值)
Ge	0.67	$0.56m_0$	$0.29m_0$	1.05×10^{19}	3.9×10^{18}	1.7×10^{13}	2.33×10^{13}
Si	1.12	$1.062m_0$	$0.59m_0$	2.8×10^{19}	1.1×10^{19}	7.8×10^9	1.02×10^{10}
GaAs	1.428	$0.068m_0$	$0.47m_0$	4.5×10^{17}	8.1×10^{18}	2.3×10^6	1.1×10^7

- 求多子浓度为 10^{15} cm^{-3} 时， Ge、 Si、 GaAs 的少子浓度。

半导体带隙随温度的变化

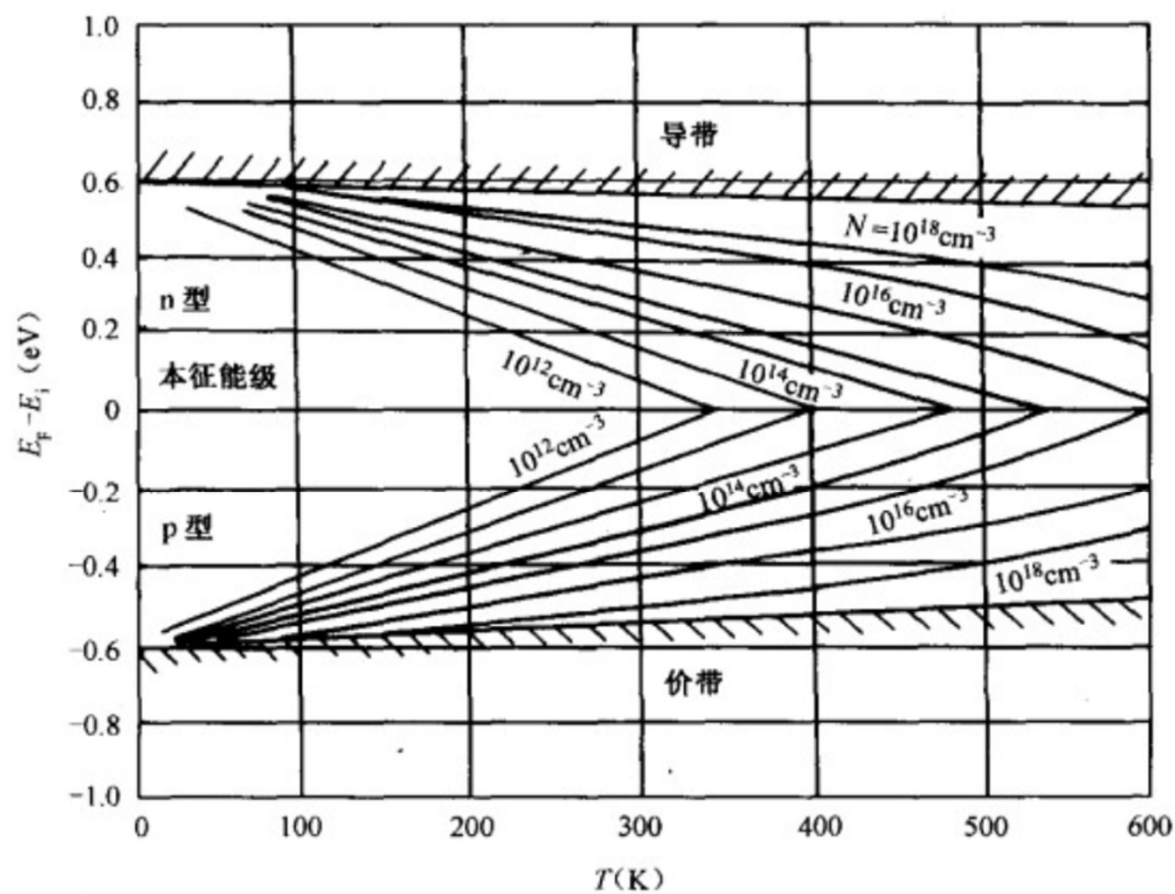


图 3-10 硅的费米能级与温度及杂质浓度的关系^[5]

半导体带隙随温度的变化

最后指出，硅、锗的禁带宽度是随温度变化的。在 $T=0\text{K}$ 时，硅、锗的禁带宽度 E_g 分别趋近于 1.170eV 和 0.7437eV 。随着温度升高， E_g 按如下规律减小

$$E_g(T) = E_g(0) - \frac{\alpha T^2}{T + \beta} \quad (1-66)$$

式中， $E_g(T)$ 和 $E_g(0)$ 分别表示温度为 T 和 0K 时的禁带宽度。温度系数 α 和 β 分别为

硅： $\alpha = 4.73 \times 10^{-4} \text{ eV/K}$

$\beta = 636\text{K}$

锗： $\alpha = 4.774 \times 10^{-4} \text{ eV/K}$

$\beta = 235\text{K}$

原因：晶格振动导致周期势发生变化

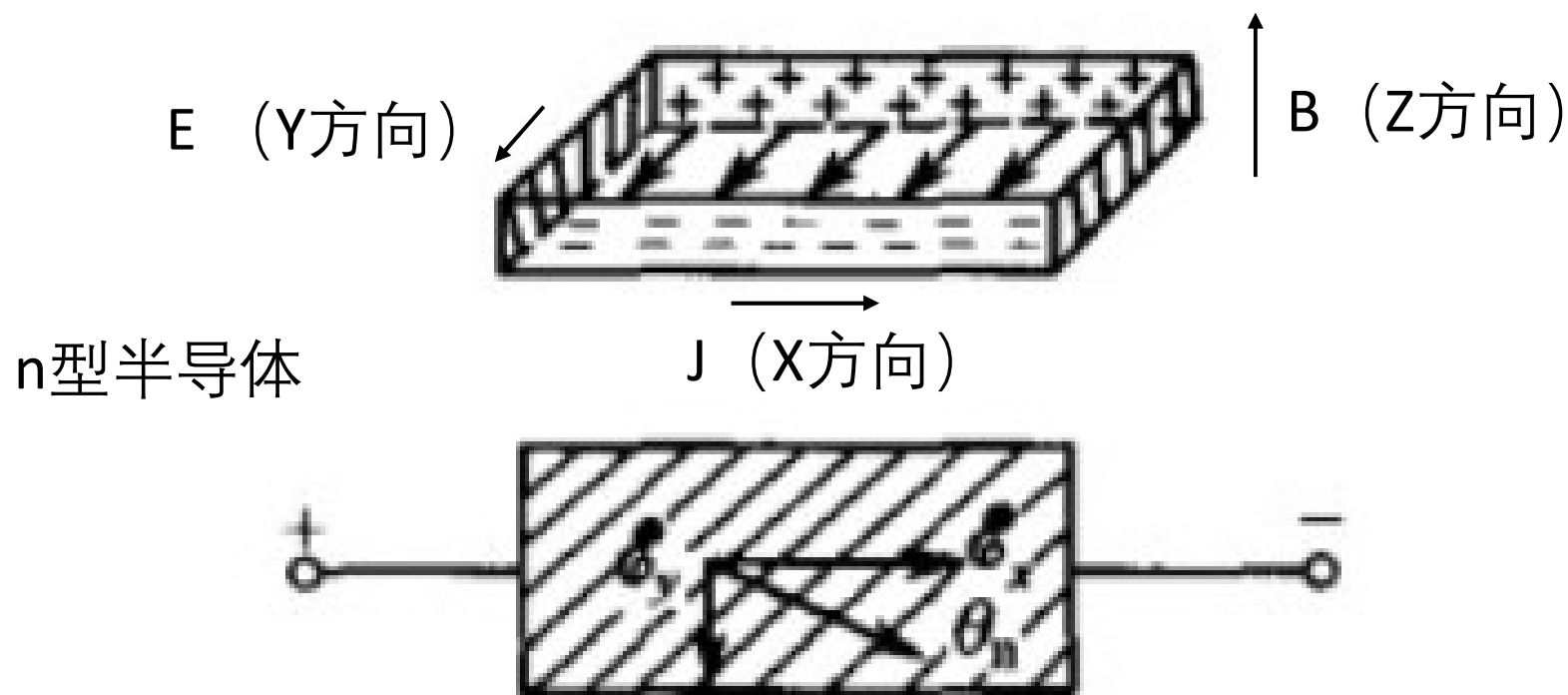
这些理论如何用实验
验证？

第三章： 大纲

- 回顾热力学里温度的概念（复习）
- 电子系统中温度和能量分布的关系
 - 费米分布
 - 态密度（复习第二章）
 - 本征半导体中的载流子浓度
 - 掺杂半导体中的载流子浓度
- **霍耳效应（教材12.1）**

霍耳效应：现象

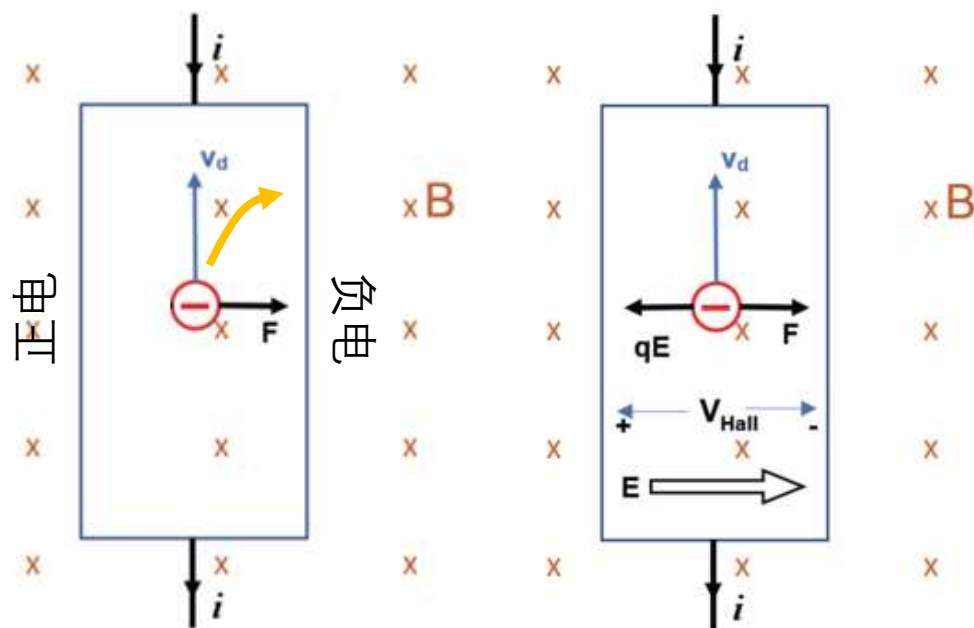
- 通有电流的半导体，置于均匀磁场中，磁场方向与电流方向垂直，则半导体中将产生一横向电场，即霍耳电场。



霍耳效应：产生原因

• 简化模型

- 载流子受到洛伦兹力而发生偏转，从而在横向造成电荷积累，形成横向电场/电压



$$\text{洛伦兹力} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

注意：对于电子， q 是负值

- 根本原因：和费米能级对应的等能面（费米面）形状有关，Berry相位（略）

不同载流子的霍尔效应

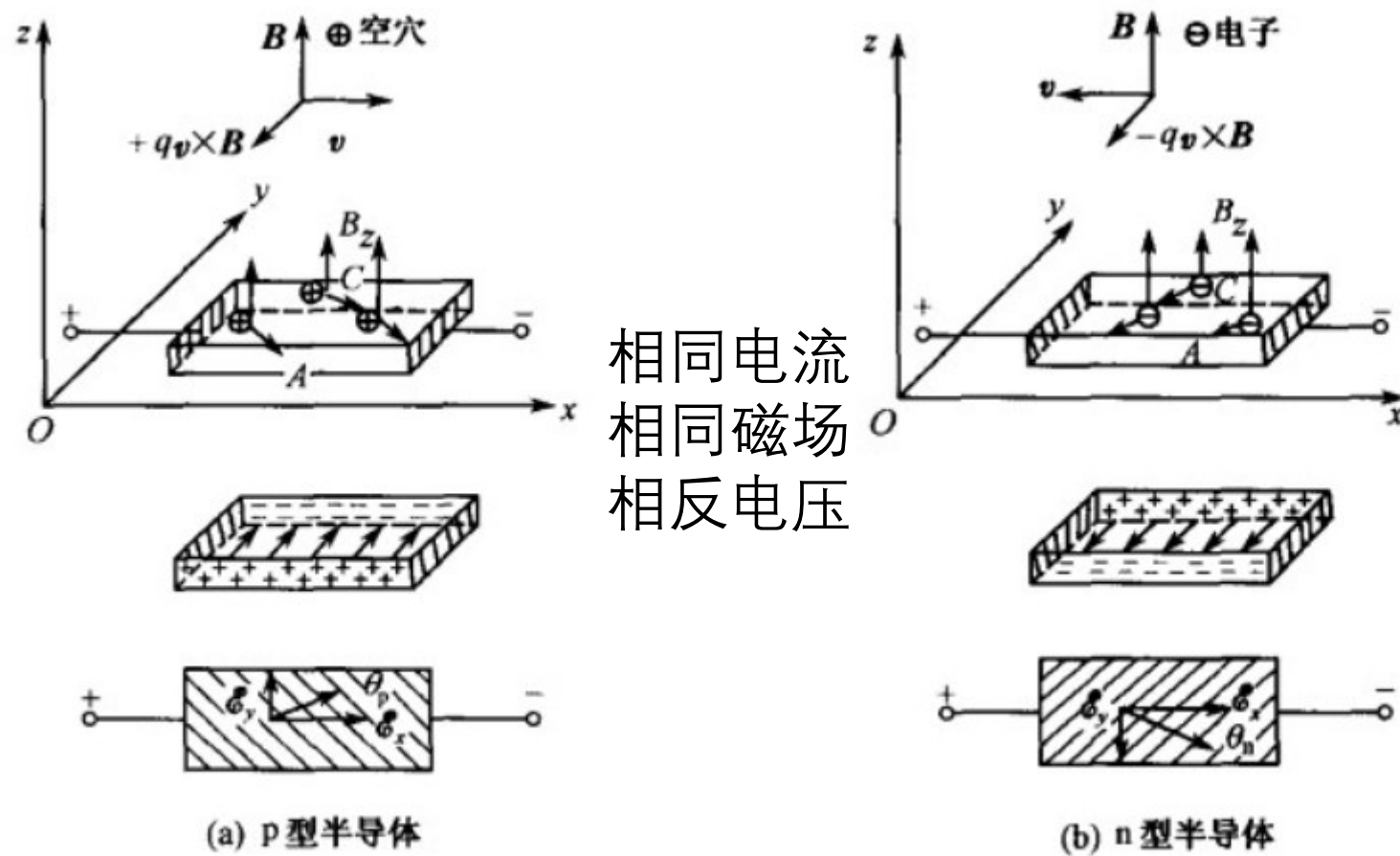
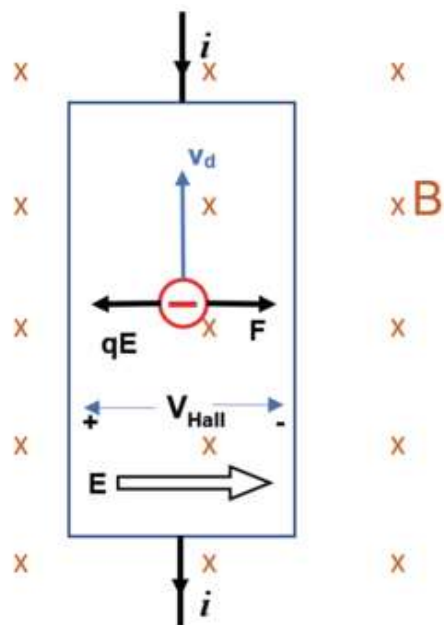


图 12-1 霍尔效应

霍耳效应：定量描述



稳态时有力平衡方程

$$q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

考虑 \mathbf{E} 、 \mathbf{v} 、 \mathbf{B} 均垂直，故

$$E = vB$$

又有

$$J = \pm nqv \quad n \text{ 为载流子浓度}$$

因此

$$E = \frac{JB}{\pm nq} = R_H JB$$

其中 $R_H = 1/\pm nq$ ，称为霍耳系数

载流子为空穴时取正号， $R_H > 0$ ；为电子时 $R_H < 0$

霍耳效应：实验测量

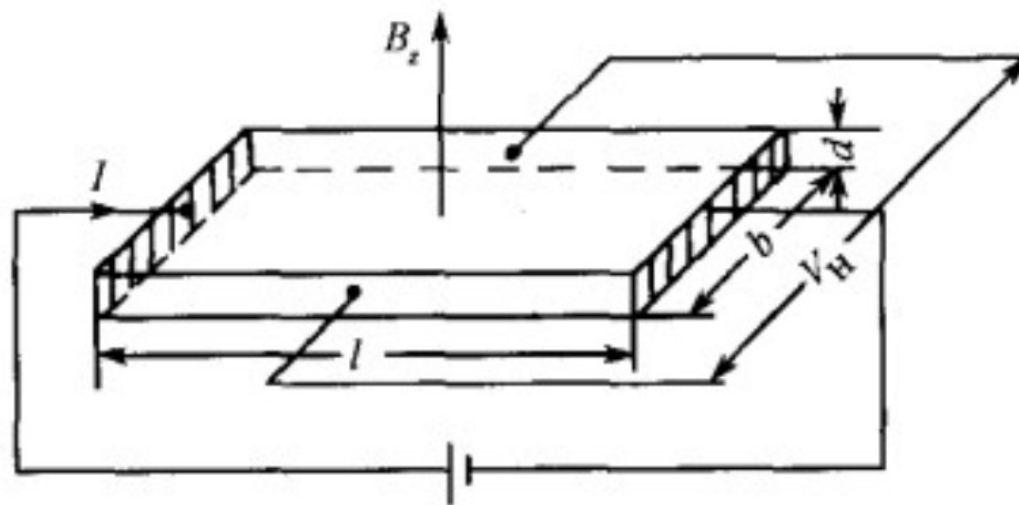
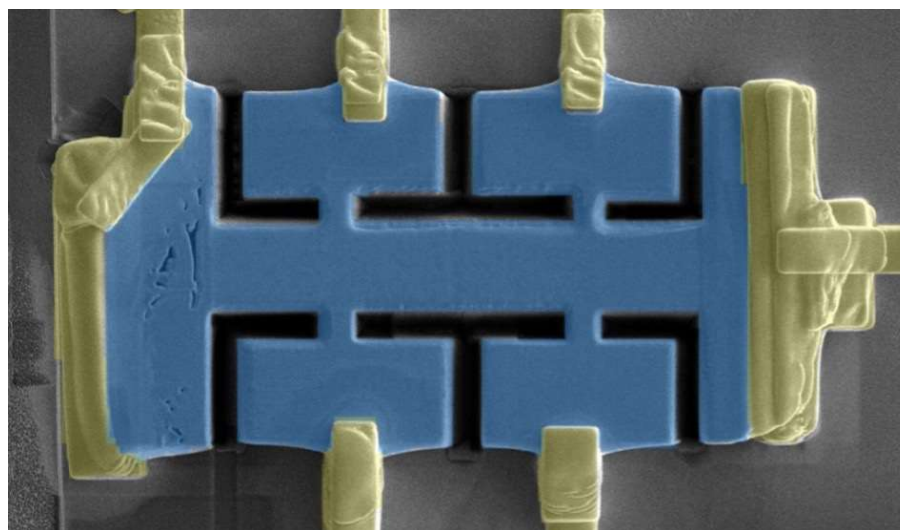
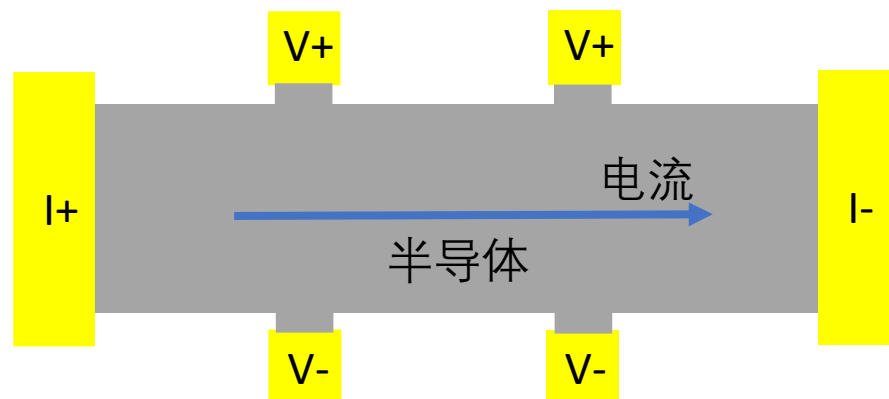


图 12-2 测量霍耳系数的示意图

$$R_H = \frac{E}{jB} = \frac{V_H/b}{IB/bd} = \frac{V_H d}{IB}$$

霍尔效应：实验测量

霍尔棒(Hall bar)测量法

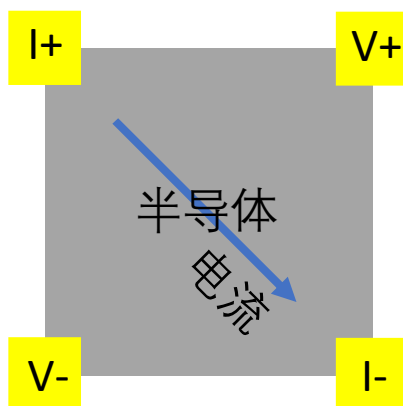


霍尔效应：实验测量

范德坡(van der Pauw)测量法

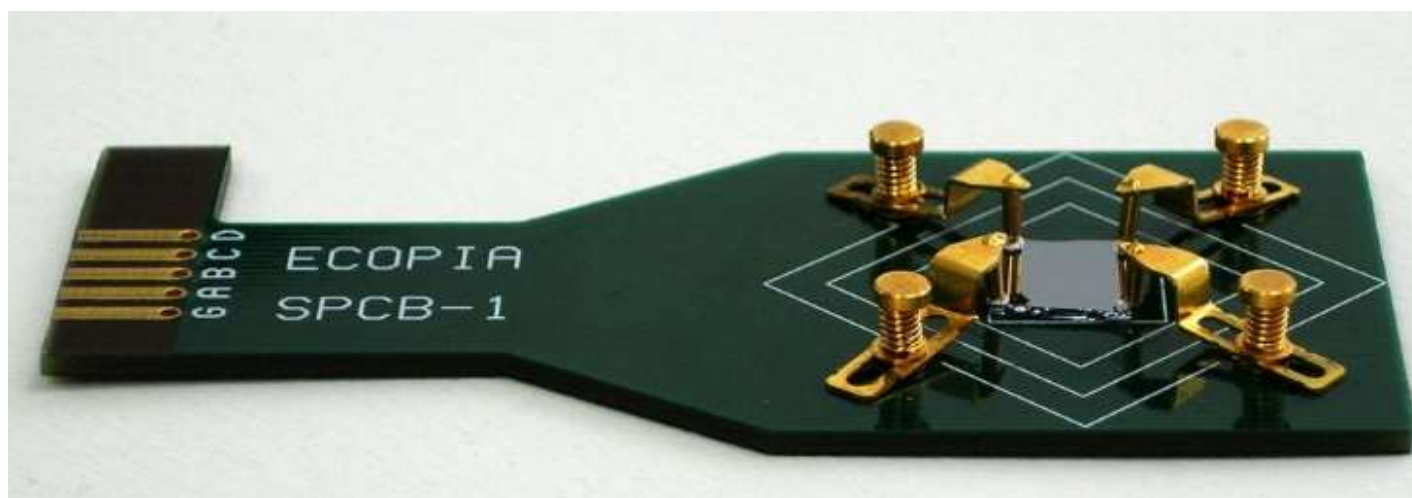
金属电极

金属电极



金属电极

金属电极



霍尔效应的应用

- 直接测量载流子类型和浓度

$$E = \frac{JB}{\pm nq} = R_H JB = \frac{V_H d}{IB}$$

- 已知载流子类型和浓度，可用于测量未知磁感强度
 - “高斯计”：磁场传感器

习题

- 1. 推出锗导带、价带的态密度表达式。请利用电子纵向、横向有效质量，重空穴、轻空穴有效质量表示。
- 2. 假设硅中施主浓度为 N_D 、受主浓度为 N_A ， $N_D=N_A$ ，两者能级差为 ΔE 。求在温度 T 时能级的占据情况。只考虑施主能级、受主能级，不考虑价带导带。请使用简并因子、非简并条件。
- 3. 题设如第二题。假设 ΔE 约等于1 eV，求300 K时杂质的补偿率（即，有百分之多少的杂质被补偿了）。如果想要明显偏离完全补偿（例如补偿率99%以下），需要多高的温度？

习题

- 4. 如果想在300 K时得到电子浓度为 10^{17} cm^{-3} 的锗，可以怎样掺磷？施主能级取10 meV。
- 5. 在p型硅中掺入B， $N_A=10^{15} \text{ cm}^{-3}$ 。求在50 K、300 K、350 K时空穴和电子的浓度。这些情况都对应什么区？受主能级取50 meV。
- 6. 考虑p型硅的中间电离区。当 $E_A=E_F$ 时，受主电离率是多少？说明理由。

习题

- 7. 室温300 K下，本征GaAs、n型GaAs ($N_D=10^{16} \text{ cm}^{-3}$)、p型GaAs ($N_A=10^{16} \text{ cm}^{-3}$) 的费米能级各在哪里？
- 8. 有一片未知半导体（200 μm 厚度），加上向右的电流 $I=1 \text{ mA}$ 和垂直于纸面向里的磁场 $\mathbf{B}=2000 \text{ Oe}$ 后，观察到上正下负的电电压1.6 mV。求载流子类型和数目。

