第6章

第6章　无限冲激响应(IIR）数字滤波器设计

6.1 滤波器的基本概念

6.2 模拟低通滤波器设计

6.3 模拟高通、带通及带阻滤波器设计

6.4 用冲激响应不变法设计IIR数字低通滤波器

6.5 用双线性Z变换法设计IIR数字低通滤波器

6.6 数字高通、带通及带阻滤波器的设计

6.2 模拟低通滤波器的设计

一、概述

给定模拟低通滤波器的技术指标$\alpha_{\mathrm{p}},\Omega_{\mathrm{p}},\alpha_{\mathrm{s}},\Omega_{\mathrm{s}}$，设计低通滤波器$G(s)$，使其对数幅频响应$10\lg|G(\mathrm{j}\Omega)|^2$在$\Omega_{\mathrm{p}},\Omega_{\mathrm{s}}$处分别达到$\alpha_{\mathrm{p}},\alpha_{\mathrm{s}}$的要求。

$$\underbrace{\left(\alpha_p,\Omega_p,\alpha_s,\Omega_s\right) \Rightarrow |G(\mathrm{j}\Omega)|^2}_{\text{通过衰减函数}} \underbrace{\Rightarrow G(s)}_{\text{冲激响应实信号以及零极点分离}}$$

$$G(s)G(-s) = |G(\mathrm{j}\Omega)|^2\Big|_{\Omega^2=-s^2}$$

1. 巴特沃思(Butterworth)滤波器

$|G(\mathrm{j}\Omega)|^2 = \frac{1}{1+C^2(\Omega^2)^N}$，$C$为待定常数，$N$为待定的滤波器阶次

2. 切比雪夫I型(Chebyshev-I)滤波器

$|G(\mathrm{j}\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(\Omega)}$，$C_n^2(\Omega) = \cos^2(n\cos^{-1}\Omega)$

设计规范化

频率参数归一化

对于低通滤波器

归一化频率

$$\lambda = \Omega/\Omega_\mathrm{p}$$
$$\lambda_\mathrm{p} = \Omega_\mathrm{p}/\Omega_\mathrm{p} = 1$$
$$\lambda_\mathrm{s} = \Omega_\mathrm{s}/\Omega_\mathrm{p}$$

归一化复变量

$$p = \mathrm{j}\lambda = \mathrm{j}\Omega/\Omega_\mathrm{p} = s/\Omega_\mathrm{p}$$

α_p： Ω_p

一般定义3dB衰减频率：$\boxed{\alpha_\mathrm{p} = 3\mathrm{dB}\text{：}\ \Omega_\mathrm{c}}$

Ω_c： 3dB频率点

二、巴特沃思模拟低通滤波器的设计

$$\underbrace{(\alpha_p,\Omega_p,\alpha_s,\Omega_s) \Rightarrow |G(\mathrm{j}\Omega)|^2}_{\text{通过衰减函数}} \underbrace{\Rightarrow G(s)}_{\text{冲激响应实信号以及零极点分离}}$$

1. 将实际频率归一化，得归一化幅平方特性

$$|G(\mathrm{j}\lambda)|^2 = \frac{1}{1+C^2\lambda^{2N}}, \quad \lambda = \frac{\Omega}{\Omega_\mathrm{p}}$$

$\lambda_\mathrm{p} = 1$　　衰减参数维持不变

$$|G(\mathrm{j}\Omega)|^2 = \frac{1}{1+C^2(\Omega^2)^N}$$

C为待定常数

N为待定的滤波器阶次

2. 求C和N

由：

$$\alpha(\lambda) = 10\lg\frac{1}{|G(\mathrm{j}\lambda)|^2} = 10\lg[1+C^2\lambda^{2N}]$$

有：

$$C^2\lambda^{2N} = 10^{\alpha(\lambda)/10} - 1$$

$$\begin{cases} C^2\lambda_\mathrm{p}^{2N} = 10^{\alpha_\mathrm{p}/10} - 1 \\ C^2\lambda_\mathrm{s}^{2N} = 10^{\alpha_\mathrm{s}/10} - 1 \end{cases}$$

$$C^2 = 10^{\alpha_\mathrm{p}/10} - 1$$

再二式相比，以求N

$$N=\lg\sqrt{\frac{10^{\alpha_{\mathrm{s}}/10}-1}{10^{\alpha_{\mathrm{p}}/10}-1}}\Big/\lg\lambda_{\mathrm{s}}$$

重要公式 记住特点

对Butterworth滤波器，通常 $\alpha_{\mathrm{p}}=3\mathrm{dB}$，所以：

$$C^2=10^{\alpha_{\mathrm{p}}/10}-1=10^{0.3}-1=1$$

$$N=\lg\sqrt{10^{\alpha_{\mathrm{s}}/10}-1}\Big/\lg\lambda_{\mathrm{s}}$$

$$|G(\mathrm{j}\lambda)|^2=\frac{1}{1+\lambda^{2N}}=\frac{1}{1+(\Omega/\Omega_{\mathrm{p}})^{2N}}$$

如何由上述的归一化频率幅平方特性$|G(\mathrm{j}\lambda)|^2$得到系统的归一化复变量转移函数$G(p)$ 以及系统函数$G(s)$ ？

3. 确定$G(p)$和$G(s)$

$$\left.\begin{aligned} s &= \mathrm{j}\Omega \\ p &= \mathrm{j}\lambda \\ \lambda &= \Omega/\Omega_{\mathrm{p}} \end{aligned}\right\} \qquad p = \mathrm{j}\lambda = \mathrm{j}\Omega/\Omega_{\mathrm{p}} = s/\Omega_{\mathrm{p}}$$

$$\boxed{p = s/\Omega_{\mathrm{p}}}$$

$$|G(\mathrm{j}\lambda)|^2 = \frac{1}{1+\lambda^{2N}}$$

$$\boxed{\lambda = p/\mathrm{j}}$$

$$G(p)G(-p) = \frac{1}{1+(p/\mathrm{j})^{2N}} = \frac{1}{1+(-1)^N p^{2N}}$$

$$1+(-1)^N p^{2N} = 0$$

$$(-1)^N p^{2N} = -1$$

$$\boxed{-1\text{：}\ e^{-\mathrm{j}\pi},\quad e^{\mathrm{j}(2k-1)\pi}}$$

$$p_k = \exp\left[\mathrm{j}\,\frac{2k+N-1}{2N}\pi\right]$$

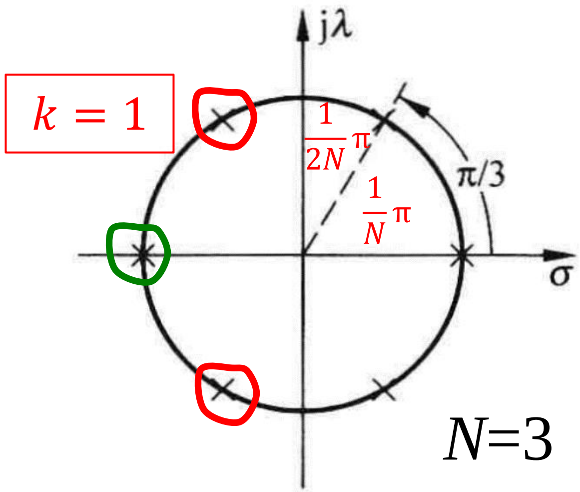
备用：$s_k = \Omega_{\mathrm{p}} e^{\mathrm{j}\left(\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$

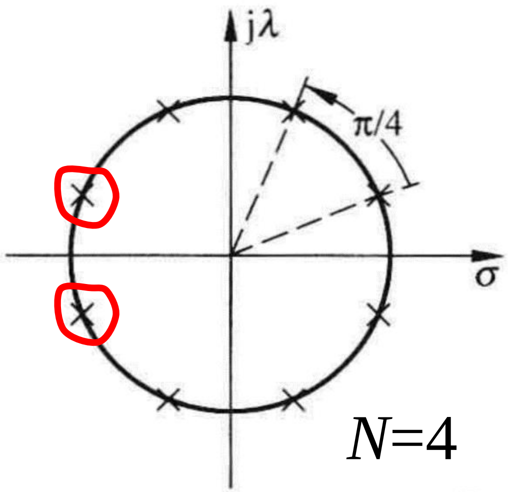
$$k = 1,2,\cdots,2N$$

$\frac{2k+N-1}{2N}, k = 1$: $90^{\mathrm{o}} + \frac{1}{2N}\pi$

$G(p)G(-p)$

极点分布：





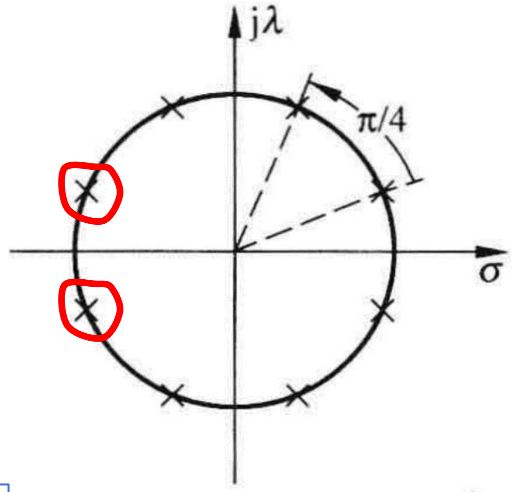
即$2N$个极点均匀分布在p平面半径为1的圆上，应取左半平面的N个赋予$G(p)$，$k = 1,2,\cdots,N$；右半平面的N个赋予$G(-p)$。

$$p_k = \exp\left[\mathrm{j}\frac{2k+N-1}{2N}\pi\right] \qquad k = 1,2,\cdots,N$$

则：
$$G(p) = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_N)}$$

若N为偶数， p_k及p_{N+1-k}这对共轭极点构成一个二阶系统：

$$G_k(p) = \frac{1}{(p-p_k)(p-p_{N+1-k})}$$
$$= \frac{1}{p^2 - 2p\cos(\frac{2k+N-1}{2N}\pi) + 1}$$



$$\boxed{G(p) = \prod_{k=1}^{N/2} G_k(p)}$$

N为偶数

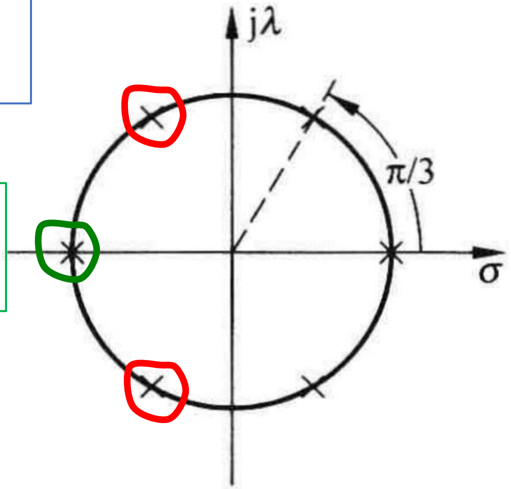
若N为奇数，$G(p)$由一个一阶系统和$(N-1)/2$个二阶系统相级联：

$$G(p)=\frac{1}{p+1}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}G_k(p)$$

N为奇数

$$\frac{2k+N-1}{2N},k=\frac{N+1}{2}:\pi$$

$$k=\frac{N+1}{2}$$



确定$G(s)$

得到$G(p)$后，又因为

$$p=\mathrm{j}\lambda=\mathrm{j}\Omega/\Omega_{\mathrm{p}}=s/\Omega_{\mathrm{p}}$$

去归一化

用s/Ω_{p}代替p，即得到实际需要的$G(s)$：

$$G(s)=G(p)\Big|_{p=s/\Omega_{\mathrm{p}}}$$

Ω_{p}反映了实际频率

4. 巴特沃思滤波器幅频响应的特点

(1) 当$\Omega = 0$时，$\lambda = 0$，$|G(\mathrm{j}\lambda)|^2 = 1$，$\alpha(0) = 0$，即在$\Omega = 0$处无衰减。

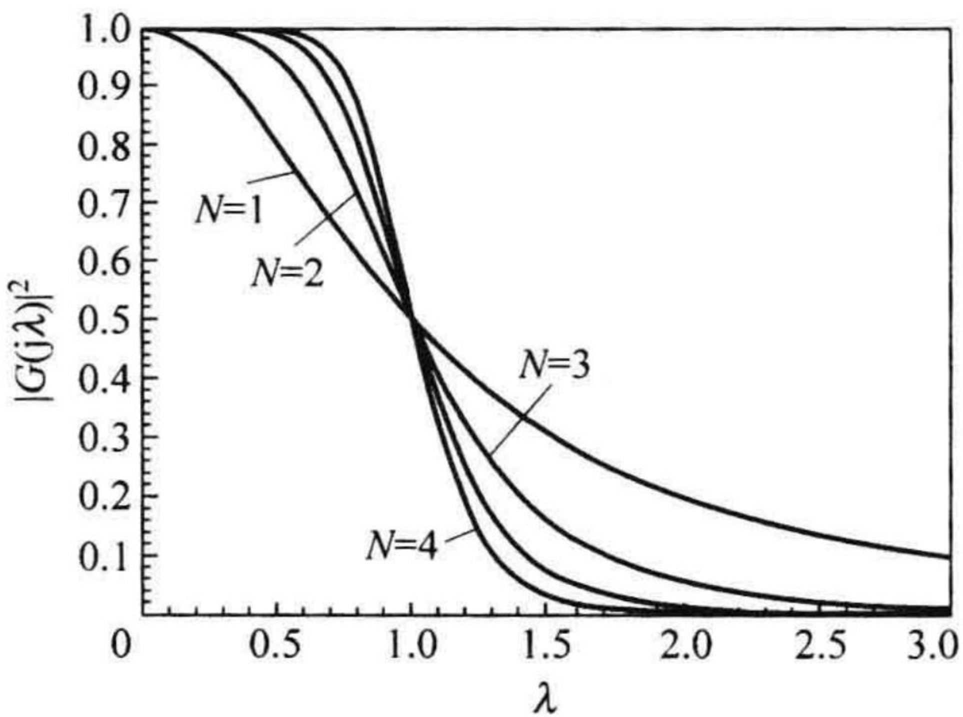
(2) 当$\Omega = \Omega_\mathrm{p}$，即$\lambda_\mathrm{p} = 1$时，$|G(\mathrm{j}\lambda_\mathrm{p})|^2 = 0.5$，$\left|G\left(\mathrm{j}\lambda_\mathrm{p}\right)\right| = 0.707$，$\alpha_\mathrm{p} = 3\mathrm{dB}$。

(3) 当λ由零增加到 1 时，$|G(\mathrm{j}\lambda)|^2$单调减小，$\alpha(\Omega)$单调增加，N越大，$|G(\mathrm{j}\lambda)|^2$减小得越慢，即在通带内$|G(\mathrm{j}\lambda)|^2$ 越平。

(4) 当$\Omega > \Omega_\mathrm{p}$，即$\lambda_\mathrm{p} > 1$时，$|G(\mathrm{j}\lambda)|^2$也是随着$\lambda$的增加而单调减少；但因$\lambda > 1$，所以这时比通带内衰减速度加快，$N$越大，衰减速度越大。

(5) $|G(\mathrm{j}\Omega)|^2$在$\Omega = 0$处对Ω^2的一阶、二阶直至$N-1$阶导数皆为零。

"最平"幅频响应滤波器



例6.2.1 给定如下技术指标，设计模拟低通Butterworth滤波器

$$f_{\mathrm{p}} = 5000\mathrm{Hz}, f_{\mathrm{s}} = 10000\mathrm{Hz}, \alpha_{\mathrm{p}} = 3\mathrm{dB}, \alpha_{\mathrm{s}} = 30\mathrm{dB}$$

解：

$$\Omega_{\mathrm{p}} = 2\pi f_{\mathrm{p}} = 2\pi \cdot 5000\mathrm{Hz}$$

$$\boxed{N = \lg\sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}} / \lg\lambda_s}$$

Step1. $\lambda_{\mathrm{p}} = 1,\ \lambda_{\mathrm{s}} = 2,\ \alpha_{\mathrm{p}} = 3\mathrm{dB},\ \alpha_{\mathrm{s}} = 30\mathrm{dB}$

Step2. $C = 1\,;\quad N = \dfrac{\lg\sqrt{10^{30/10}-1}}{\lg 2} = 5$

$$\boxed{p_k = \exp\left[\mathrm{j}\frac{2k+N-1}{2N}\pi\right]}$$

Step3. $p_k = \exp[\,\mathrm{j}(k+2)\dfrac{\pi}{5}],\quad k = 1,2,3,4,5$

$$\boxed{(p+1)}$$

Step4. $G(p) = \dfrac{1}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p-p_4)(p-p_5)}$

Step5. $G(s) = G(p)\Big|_{p=\frac{s}{2\pi\times 5000}} = \dfrac{10^{20}\pi^5}{(s+10^4\pi)(s+\cdots)(s+\cdots)}$

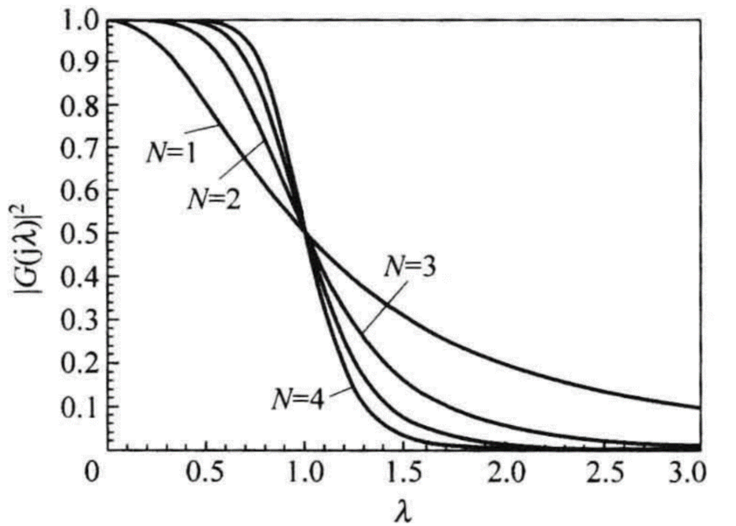
三、切比雪夫I型模拟低通滤波器设计

$$(\Omega_{\mathrm{p}}, \Omega_{\mathrm{s}}, \alpha_{\mathrm{p}}, \alpha_{\mathrm{s}}) \rightarrow |G(\mathrm{j}\Omega)|^2 \rightarrow G(s)G(-s) \rightarrow G(s)$$

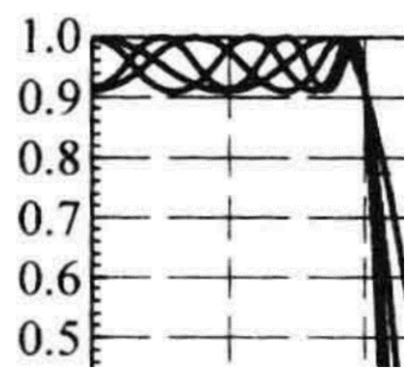
巴特沃思滤波器缺点分析

1. 达到指定的衰减技术指标，系统的阶次一般取得较大。

2. 它在通带边缘满足了设计要求，但在通带内是有富裕量的，即通带内超过指标要求。这在实现上是不经济的。



把指标的精度要求均匀地分布在通带内或阻带内，或同时分布在通带和阻带内，用具有等波纹特性的逼近函数来实现，可设计出阶次较低的滤波器。



切比雪夫I型模拟低通滤波器幅平方特性

$$\boxed{|G(\mathrm{j}\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(\Omega)}}$$

ε：控制通带波动幅度的参数；n：滤波器的阶次

切比雪夫多项式的特点

$$C_n(\Omega) = \cos(n \arccos \Omega)$$

$$C_n^2(\Omega) = \cos^2(n \cos^{-1} \Omega) \qquad |\Omega| \le 1$$

令 $\cos^{-1} \Omega = \varphi$

$\Rightarrow \quad \cos\varphi = \Omega$

$\Rightarrow \quad C_n(\Omega) = \cos(n\varphi)$

$$\boxed{C_n(\Omega) = \cos(n\varphi)}$$

$$
\begin{aligned}
C_{n+1}(\Omega) &= \cos(n+1)\varphi \\
&= \cos(n\varphi)\cos(\varphi) - \sin(n\varphi)\sin(\varphi) \\
C_{n-1}(\Omega) &= \cos(n-1)\varphi \\
&= \cos(n\varphi)\cos(\varphi) + \sin(n\varphi)\sin(\varphi)
\end{aligned}
$$

两式相加，得到

$$
\left.
\begin{aligned}
C_{n+1}(\Omega) &= 2C_n(\Omega)\Omega - C_{n-1}(\Omega) \\
C_n(\Omega) \quad &= 2C_{n-1}(\Omega)\Omega - C_{n-2}(\Omega)
\end{aligned}
\right\}
$$

Ω的多项式 ?

$$C_0(\Omega) = \cos(0) = 1$$

$$C_1(\Omega) = \cos(\varphi) = \Omega$$

$$C_2(\Omega) = 2\Omega C_1(\Omega) - C_0(\Omega) = 2\Omega^2 - 1$$

$$C_3(\Omega) = 2\Omega C_2(\Omega) - C_1(\Omega) = 4\Omega^3 - 3\Omega$$

$$C_4(\Omega) = 2\Omega C_3(\Omega) - C_2(\Omega) = 8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1$$

的确是Ω的多项式

切比雪夫多项式，以俄国著名数学家切比雪夫(Tschebyscheff)的名字命名的函数，有第一类切比雪夫多项式$T_n(x)$、第二类切比雪夫多项式$U_n(x)$（简称切比雪夫多项式）。

源自于多倍角的余弦函数和正弦函数的展开式，是与棣美弗定理有关、以递归方式定义的多项式序列，是计算数学中的一类特殊函数；对于连续函数逼近问题、阻抗变换问题等等的数学、物理学、技术科学中的近似计算有着非常重要的作用。

多项式特点小结

- 当n为偶数时，偶函数，且$C_{2m}(0)=(-1)^m$
- 当n为奇数时，奇函数，且$C_{2m+1}(0)=0$
- 对所有n，$C_n(1)=1$
- 首项系数为2^{n-1}
- 且有，在$|\Omega|\le 1$的区间内是正交多项式

$$\int_{-1}^{1}\frac{C_n(\Omega)C_m(\Omega)}{\sqrt{1-\Omega^2}}d\Omega=\begin{cases}0 & n\ne m\\ \pi/2 & n=m\ne 0\\ \pi & n=m=0\end{cases}$$

权函数

$$\rho(\Omega)=\frac{1}{\sqrt{1-\Omega^2}}$$

即切比雪夫多项式在区间[-1，1]上带权正交

归一化频率λ上的表现

$C_n(\lambda)$在±1范围内等波纹振荡，有n个根

$$\lambda_k=\cos\big((2k-1)\,\pi/2N\big),\quad k=1,2,\cdots,n$$

对比 巴特沃斯低通：

$$p_k=\exp\left[\mathrm{j}\frac{2k+N-1}{2N}\pi\right]$$

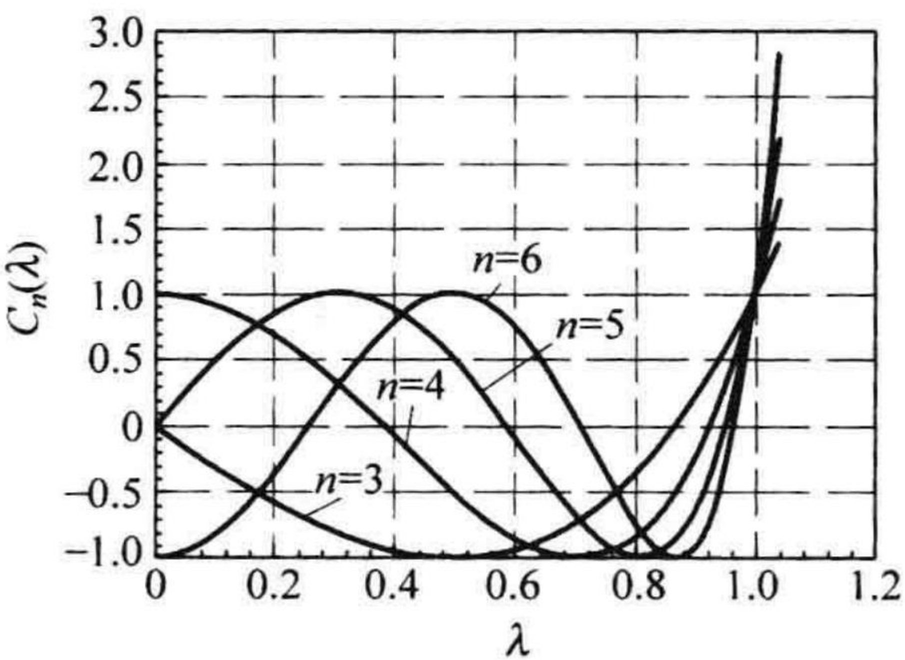
$\Omega > \Omega_p$，$\lambda > \lambda_p = 1$时，切比雪夫多项式按如下定义

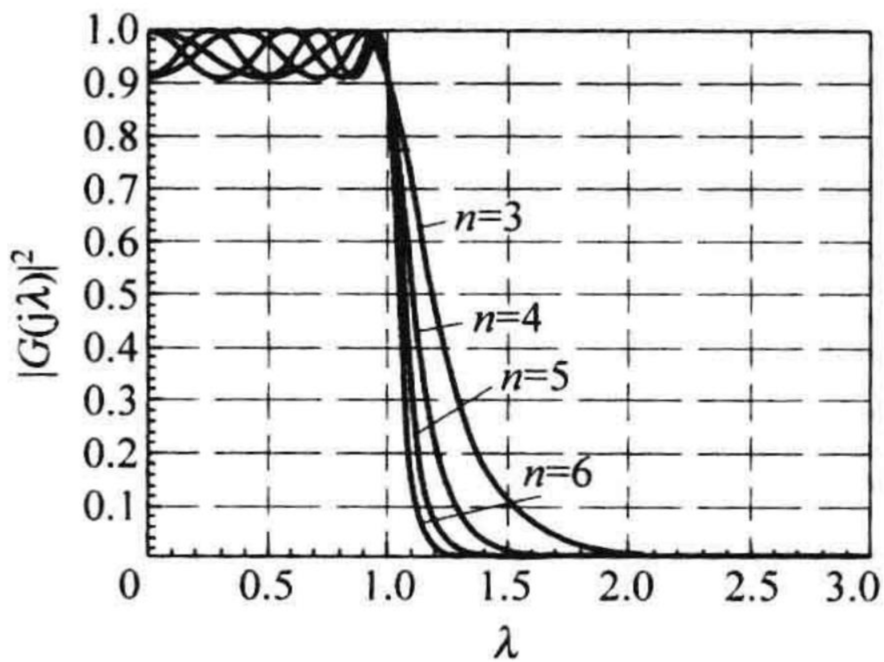
$$C_n(\lambda) = \cosh(n\operatorname{arcosh}(\lambda)), \lambda > 1$$
$$\varphi = \operatorname{arcosh}(\lambda), \lambda = \cosh(\varphi)$$
$$\cosh(\varphi) = (e^{\varphi} + e^{-\varphi})/2$$

双曲余弦

反双曲余弦

λ从$1 \to \infty$，$C_n(\lambda)$单调$\to \infty$，$G(\mathrm{j}\lambda)$单调下降，故幅频特性在通带内等波纹振荡，通带外单调下降。





检查$\lambda = 0$点时的取值

$\lambda \leq 1$时，

$$1 \leq 1 + \varepsilon^2 C_n^2(\lambda) \leq 1 + \varepsilon^2$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2} \leq \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(\lambda)} \leq 1$$

当n为奇数时

$$|G(\mathrm{j}0)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(0)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \cdot 0}} = 1$$

当n为偶数时

$$|G(\mathrm{j}0)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(0)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

设计步骤

$$|G(\mathrm{j}\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(\Omega)}$$

1. 将频率归一化，得归一化的幅平方特性，即

$$|G(\mathrm{j}\lambda)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(\lambda)}$$

衰减参数不变

2. 求ε和n

衰减函数定义

$$\alpha(\lambda) = 10\lg\frac{1}{|G(\mathrm{j}\lambda)|^2}$$

$$\alpha(\lambda) = 10\lg[1+\varepsilon^2 C_n^2(\lambda)]$$

$$\varepsilon^2 C_n^2(1) = 10^{\alpha_{\mathrm{p}}/10} - 1$$

$$\because C_n^2(1) = 1 \qquad \therefore \varepsilon^2 = 10^{\alpha_{\mathrm{p}}/10} - 1$$

对比巴特沃思中C的求解！

一样的表达式

ε参数求解：由通带衰减参数得到；3dB → $\varepsilon = 1$

$$\boxed{C_n(\lambda) = \cos(n\cos^{-1}\lambda)\text{ ,}\lambda\text{必须不大于1}}$$

为求滤波器的阶次n，还要利用另外的条件：

$$\lambda_s,\ \alpha_s \quad Note:\ \lambda_s > 1$$

$\lambda > 1$时，切比雪夫多项式要重新定义，采用双曲函数：

$$\boxed{\alpha(\lambda) = 10\lg\frac{1}{|G(j\lambda)|^2}}$$

衰减函数定义

$$\varepsilon^2 C_n^2(\lambda_s) = 10^{\alpha_s/10} - 1$$
$$= \varepsilon^2 \cosh^2(n\cosh^{-1}(\lambda_s)]$$

即有：

$$\varepsilon^2 C_n^2(\lambda_s) = \varepsilon^2\cosh^2(n\operatorname{arcosh}(\lambda_s)) = 10^{\alpha_s/10} - 1$$

$$\boxed{\cosh x = [e^x + e^{-x}]/2,\ \sinh x = [e^x - e^{-x}]/2}$$

$$\begin{cases}\varepsilon^2 C_n^2(\lambda_s) = \varepsilon^2\cosh^2(n\operatorname{arcosh}(\lambda_s)) = 10^{\alpha_s/10} - 1 \\ \varepsilon^2 C_n^2(\lambda_p) = \varepsilon^2 C_n^2(1) = \varepsilon^2 = 10^{\alpha_p/10} - 1\end{cases}$$

二式相比，得到：

$$\cosh^2(n\operatorname{arcosh}(\lambda_s)) = \frac{10^{\alpha_s/10} - 1}{10^{\alpha_p/10} - 1}$$

令： $$\frac{10^{\alpha_s/10} - 1}{10^{\alpha_p/10} - 1} = a^2$$

则 $$n = \frac{\cosh^{-1}(a)}{\cosh^{-1}(\lambda_s)}$$

$$\boxed{\operatorname{arcosh}(z) = \log[z + (z^2 - 1)^{1/2}]}$$

对比巴特沃思中的阶次的求解：
$N = \lg\sqrt{\dfrac{10^{\alpha_s/10} - 1}{10^{\alpha_p/10} - 1}} / \lg\lambda_s$

3. 确定$G(s)$

基本思路：先求$G(p)$，再求$G(s)$。步骤：

$G(p)G(-p)$的极点

$G(p)$的极点

$G(p)$的表示（考虑首项系数）

$\Rightarrow G(s)$的表示

注意：$\lambda \le 1$

目的：找到想要的极点

$\lambda = p/\mathrm{j}$

求极点

$$G(p)G(-p) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_n^2(p/\mathrm{j})}$$

p_k

求根

$$\left\{ \begin{aligned} &1+\varepsilon^2 \underline{C_n^2(p/\mathrm{j})} = 0 \\ &\underline{\cos[n\arccos(-\mathrm{j}p)]} = \pm\mathrm{j}\frac{1}{\varepsilon} \end{aligned} \right.$$

定义: $\varphi = \arccos(-\mathrm{j}p)$ 有: $p = \mathrm{j}\cos(\varphi)$

φ是复数

令: $\varphi = \varphi_1 + \mathrm{j}\varphi_2$ 有: $p = \mathrm{j}\cos(\varphi_1 + \mathrm{j}\varphi_2)$

因为: $$\cos(\mathrm{j}\varphi_2) = \frac{e^{\mathrm{jj}\varphi_2} + e^{-\mathrm{jj}\varphi_2}}{2} = \frac{e^{-\varphi_2} + e^{\varphi_2}}{2} = \cosh(\varphi_2)$$

$$\sin(\mathrm{j}\varphi_2) = \frac{e^{\mathrm{jj}\varphi_2} - e^{-\mathrm{jj}\varphi_2}}{2\mathrm{j}} = \frac{e^{-\varphi_2} - e^{\varphi_2}}{2\mathrm{j}} = \mathrm{j}\sinh(\varphi_2)$$

所以: $$\cos(n\varphi) = \cos(n(\varphi_1 + j\varphi_2))$$

求根

$$= \cos(n\varphi_1)\cosh(n\varphi_2) - \mathrm{j}\sin(n\varphi_1)\sinh(n\varphi_2)$$
$$= \pm\mathrm{j}\frac{1}{\varepsilon}$$

令上式两端的实部和虚部分别相等，则有：

$$\cos(n\varphi_1) = 0, \qquad \sin(n\varphi_1) = \pm 1$$

$$\varphi_1 = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{n}\operatorname{arsinh}\frac{1}{\varepsilon}$$

间接求出

φ_1 φ_2

定义: $\varphi = \arccos(-\mathrm{j}p)$ 有: $p = \mathrm{j}\cos(\varphi)$ φ是复数

令: $\varphi = \varphi_1 + \mathrm{j}\varphi_2$ 有: $p = \mathrm{j}\cos(\varphi_1 + \mathrm{j}\varphi_2)$

$$\varphi_1 = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{n}\operatorname{arsinh}\frac{1}{\varepsilon}$$

间接求出

φ_1 φ_2

代入极点计算式:

$$p = \mathrm{j}\cos(\varphi_1 + \mathrm{j}\varphi_2) = \sin(\varphi_1)\sinh(\varphi_2) + \mathrm{j}\cos(\varphi_1)\cosh(\varphi_2)$$

最后得到极点为:

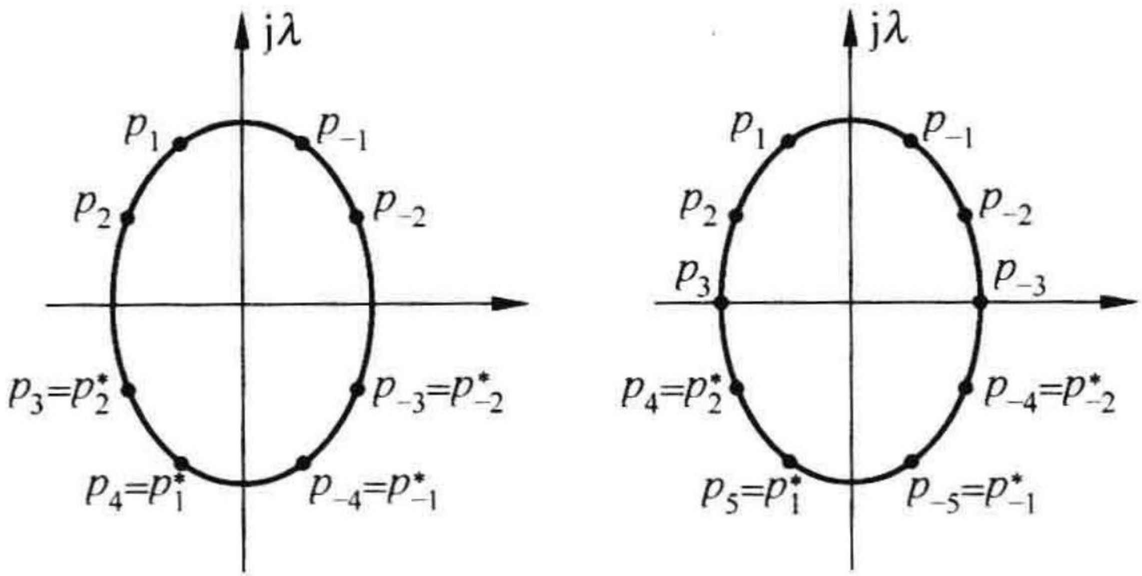
$$p_k = \sin[\frac{(2k-1)\pi}{2n}]\sinh(\varphi_2) + \mathrm{j}\cos[\frac{(2k-1)\pi}{2n}]\cosh(\varphi_2)$$

$$k = 1,2,\cdots,2n$$

令 $p_k = \sigma_k + \mathrm{j}\lambda_k$，有：
$$\left(\frac{\sigma_k}{\sinh(\varphi_2)}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_k}{\cosh(\varphi_2)}\right)^2 = 1$$

即实部、实部满足椭圆方程，如下图所示：

切比雪夫滤波器的极点分布



求出的$2n$个极点p_k，一半属于$G(p)$，一半属于$G(-p)$，把左半平面的极点赋于$G(p)$，即$k = 1,2,\cdots,n$。

$$p_k = -\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]\sinh(\varphi_2) + \mathrm{j}\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]\cosh(\varphi_2)$$

$k = 1,2,\cdots,n;\quad \varphi_2 > 0$

得到:

$$G(p)=\frac{1}{\varepsilon\times 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(p-p_k)}$$

考虑首项系数

2^{n-1}

实际转移函数为:

去归一化

$$\boxed{G(s)=G(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_\mathrm{p}}}=\frac{\Omega_\mathrm{p}^n}{\varepsilon\times 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(s-p_k\Omega_\mathrm{p})}}$$

Ω_p反映了实际频率

$$\boxed{p=\frac{s}{\Omega_\mathrm{p}}}$$

例 6.2.2 给定通带最高频率 $f_p=3\text{MHz}$，阻带起始频率 $f_s=12\text{MHz}$，通带衰减要求小于 0.1dB，阻带衰减要大于 60dB，试用切比雪夫滤波器实现。

解 ① 将频率归一化，得 $\lambda_p=1$，$\lambda_s=4$。

② 求阶次 n 和常数 ε。由(6.2.30a)式，得 $\varepsilon^2=10^{0.1/10}-1=0.023\,292\,992$，$\varepsilon=0.152\,62$；由(6.2.30b)式，得 $n=\text{arcosh}a/\text{arcosh}\lambda_s=4.6$，取 $n=5$。

③ 求 $G(p)$。由(6.2.32)式～(6.2.34)式可求得极点 p_k，此处不再计算，直接给出结果，即

$$G(p)=\frac{1}{2^4\varepsilon(p+0.538\,9)(p^2+0.333\,1p+1.194\,9)(p^2+0.871\,98p+0.635\,92)}$$

④ 最后求 $G(s)$，得

$$\Omega=2\pi f,\quad \Omega_{\mathrm{p}}=2\pi f_{\mathrm{p}}=2\pi\cdot 3\cdot 10^6$$

$$G(s)=G(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}}$$

$$=\frac{0.974\,852\times 10^{36}}{(s+1.015\,80\times 10^7)(s^2+6.278\,79\times 10^6 s+4.245\,9\times 10^{14})}$$

$$\times\frac{1}{(s^2+1.643\,68\times 10^7 s+2.259\,46\times 10^{14})}$$

通带衰减不等于3dB；用切比雪夫设计，通带衰减可以做到更小，阻带衰减可以更大。