实验报告

PB21511897　　李霄奕

实验名称

切变模量的测量

实验目的

利用扭摆测量金属丝的切变模量

实验原理

实验对象是一根上下均匀而细长的钢丝，从几何上说就是一个如图 5.3.2-1 所示的细长的圆柱体，其半径为 R，长度为 L。将其上端固定，而使其下端面发生扭转。扭转力矩使圆柱体各截面小体积元均发生切应变。在弹性限度内，切应变 γ 正比于切应力 τ:

$$\tau = G\gamma \tag{1}$$

这就是剪切胡克定律，比例系数 G 即为材料的切变模量。

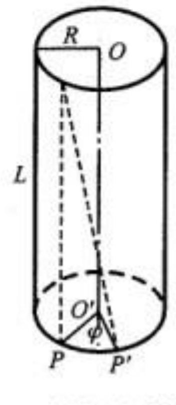

图 5.3.2－1　金属丝扭转形变示意图

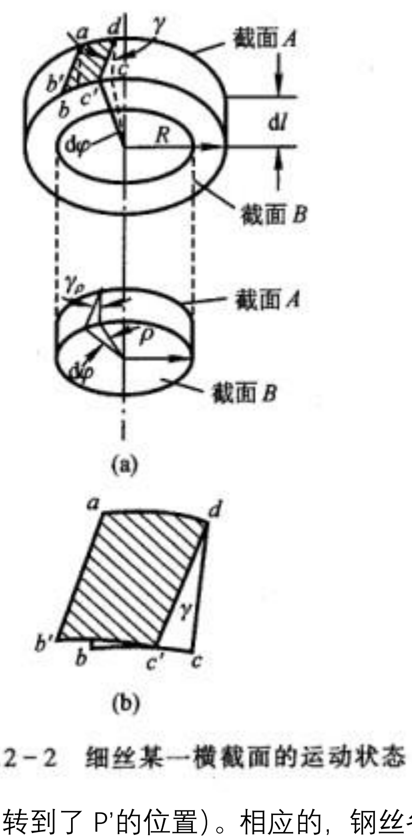

图 5.3.2－2　细丝某一横截面的运动状态

钢丝下端面绕中心轴线 OO'转过 φ 角（即 P 点转到了 P'的位置）。相应的，钢丝各横截面都发生转动，其单位长度的转角 。分析这细圆柱中长为 的一小段，其上截面为 A，下截面为 B（如图 5.3.2-2 所示）。由于发生切变，其侧面上的线 ab 的下端移至 b'，即 ab 转动了一个角度 γ，即切应变

$$\gamma = R\frac{d\phi}{dl} \tag{2}$$

在钢丝内部半径为ρ的位置，其切应变为

$$\gamma_\rho = \rho\frac{d\phi}{dl} \tag{3}$$

由剪切胡克定律$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho\frac{d\phi}{dl}$ 可得横截面上距轴线 OO'为 ρ 处的切应力。这个切应力产生的恢复力矩为

$$\tau_\rho \cdot \rho \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho = 2\pi G\rho^3\frac{d\phi}{dl} \cdot d\rho$$

截面 A、B 之间的圆柱体，其上下截面相对切变引起的恢复力矩 M 为

$$M = \int_0^R 2\pi G\rho^3 d\rho \cdot \frac{d\phi}{dl} = \frac{\pi}{2}GR^4\frac{d\phi}{dl} \tag{4}$$

因钢丝总长为 L，总扭转角 $\phi = L\frac{d\phi}{dl}$， 所以

$$G = \frac{2ML}{\pi R^4\phi} \tag{6}$$

于是，求切变模量 G 的问题就转化成求钢丝的扭矩（即其恢复力矩）的问题。为此，在钢丝下端悬挂一圆盘，它可绕中心线自由扭动，成为扭摆。摆扭过的角度 φ 正比于所受的扭力矩，D 为金属丝的扭转模量

$$M = D\phi \tag{7}$$

由转动定律$M = I_0\frac{d^2\phi}{dt^2}$，$I_0$为摆的转动惯量，再由式（6）、（7）和（9）可得

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{D}{I_0}\phi = 0 \tag{10}$$

这是一个简谐运动微分方程，其周期

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}} \tag{11}$$

作为扭摆的圆盘上带有一个夹具，这给测量或计算 I_0带来困难。为此，可将一个金属环对称地置于圆盘上。设环的质量为 m，内外半径分别为 $r_{内}$和 $r_{外}$，转动惯量为$I_1 = \frac{1}{2}m(r_{内}^2 + r_{外}^2)$，这时扭摆的周期

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0+I_1}{D}} \tag{12}$$

由式（11）、（12）可得

$$G = \frac{4\pi Lm(r_{内}^2+r_{外}^2)}{R^4(T_1^2-T_0^2)} \tag{13}$$

G 即为所求的切变模量

实验仪器

扭摆、铁丝、圆盘、圆环、秒表、螺旋测微器、游标卡尺、米尺

实验步骤

1.装置扭摆，使钢丝与作为扭摆的圆盘面垂直，圆环应能方便地置于圆盘上。

2.用螺旋测微器测钢丝直径，等精度测量 9 次，用游标卡尺测环的内外径，等精度测量 1 次，用米尺测钢丝的有效长度，等精度测量 1 次。记录数据。

3.分别测量扭摆在放上金属环前后的周期，测量时测量 50 个周期，测量 3 次，以减小实验误差。记录数据。

4.计算钢丝的切变模量 G 和扭转模量 D，分析误差。

实验数据

1.钢丝长 L：精度 0.1cm，测量 1 次。

L=44.20cm

2.铁圈质量 m：精度 0.1g，测量 1 次。

m=564.5g

3.铁环内径 $r_{内}$：精度 0.02mm，测量 1 次。

$r_{内}$=8.348cm

4.铁环外径 $r_{外}$：精度 0.02mm，测量 1 次。

$r_{外}$=10.390cm

5.钢丝半径 R：精度 0.01mm，测量 9 次，分上中下三段。

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
R(mm)	0.767	0.764	0.759	0.759	0.759	0.757	0.763	0.761	0.764

6.圆盘的转动周期 T_0：精度 0.2s，测量 3 次，每次测 n=50 周期。

n=50	**1**	**2**	**3**
n*T_0(s)	112.99	113.01	112.88
T_0(s)	2.26	2.26	2.26

7.圆盘和圆环的转动周期 T_1：精度 0.2s，测量 3 次，每次测 n=50 周期。

n=50	**1**	**2**	**3**
n*T_1(s)	188.74	188.92	189.00
T_1(s)	3.77	3.78	3.78

数据处理

由切变模量公式：$G=\frac{4\pi Lm(r_{内}^2+r_{外}^2)}{R^4(T_1^2-T_0^2)}$可得**相对误差公式**为：

$$\frac{\Delta G}{G}=\frac{\Delta L}{L}+\frac{\Delta m}{m}+\frac{2r_1\Delta r_1}{r_1^2+r_2^2}+\frac{2r_2\Delta r_2}{r_1^2+r_2^2}+4\frac{\Delta R}{R}+\frac{2T_1\Delta t}{n_1(T_1^2-T_o^2)}+\frac{2T_0\Delta t}{n_0(T_1^2-T_o^2)}$$

其中 n_1、n_0 为一次测量周期的个数，r_1、r_2 分别为 $r_{内}$、$r_{外}$。

由各个测量仪器的精度和测量数值可得上述各个参数，若令 $n_1=n_0$，带入实验数据可以明显看出，$\frac{\Delta R}{R}$项最大，为主要误差，因此，为了降低实验误差，需要多次多周期测量扭转周期，使得周期项成为次要误差，即不多于主要误差的 1/3。通过计算可得：

n= n_1=n_0=15

即**单次测量 15 个周期便可使得时间测量成为次要误差**。而本次实验不仅测量周期 n=50 多于最少周期，而且测量三次。综上，本次实验的时间误差足以成为次要误差，是合理的。

下面计算切变模量 G 和扭转模量 D 的数值及其不确定度：

由上述实验数据可得：

L=44.20cm

m=564.5g

$r_{内}$=8.348cm

$r_{外}$=10.390cm

R=0.761mm

T_0=2.26s

T_1=3.78s

可得：

$$\underline{\underline{\boldsymbol{G = 1.80 \times 10^{10} N \ / \ m^2}}}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{D = 2.16 \times 10^{-3} kg \cdot m^2 \ / \ s^2}}}$$

不确定度有：

U_L=3.33*10^-4m

U_m=3.33*10^-5kg

$U_{r内}$=$U_{r外}$=1.15*10^-5m

U_{T1}= U_{T0}=1.33*10^-3s

U_R=1.08*10^-6m

由$G = \frac{4\pi Lm(r_{内}^2+r_{外}^2)}{R^4(T_1^2-T_0^2)}$以及$D = \frac{2\pi^2 m\left(r_{内}^2+r_{外}^2\right)}{T_1^2-T_0^2}$可得：

U_G=1.06*10^8N/m^2

U_D=2.78*10^-6kg*m^2/s^2

综上有：

$$\underline{\underline{\boldsymbol{G = (180 \pm 1.06) \times 10^{8} N \ / \ m^2}}}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{D = (216 \pm 2.78) \times 10^{-6} kg \cdot m^2 \ / \ s^2}}}$$

思考题

1.本实验是否满足 γ<<1 的条件？

因为$\gamma = \frac{R\varphi}{L}$，并且 R/L=1.72*10^-3<<1，注意到转动角度一般不大于一圈，不影响数量级，因此满足 γ<<1 的条件

2.为提高测量精度，本实验在设计上作了哪些安排？在具体测量时又要注意什么问题？

安排：

a) 对于不同的长度和精度要求选择不同的仪器进行测量，尽量分摊误差
b) 对于误差贡献最大的铁丝直径 R，进行多次测量，从而降低误差
c) 利用增加较为容易计算转动惯量的圆环代替直接测量圆盘以及夹具的转动惯量，提高了实验精度

注意的问题：

a) 转动时要求圆盘水平
b) 圆环的中心应当与圆盘的中心重和，否则根据平行轴定理，圆环的转动惯量偏大