10-17 作业

27. 记标准正态分布的分布函数、密度函数分布为 $\Phi(\cdot)$ 及 $\phi(\cdot)$ 。$|Y|$ 取值非负, 所以

$y<0, F(y)=P(|Y|\leq y)=0, f_{|Y|}(y)=0;$

$y\geq 0, F(y)=P(|Y|\leq y)=P(-y\leq Y\leq y)=1-2P(Y>y)=1-2(1-\Phi(y))=2\Phi(y)-1,$

$$f_{|Y|}(y)=2\phi(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},$$

又因为 X,Y 相互独立, $X\sim \mathrm{Exp}(1)$, 所以

$$f(X,|Y|)=f_x(x)f_{|Y|}(y)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\left(x+\frac{y^2}{2}\right)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

29. $X\sim N(\mu,\sigma^2), Y\sim B(1,p)$. 记标准正态分布的分布函数为 $\Phi(\cdot)$。令 $Z=XY$，则当 $z<0$ 时，有

$$P(Z\leq z)=P(XY\leq z)=P(X=1,Y\leq z)=p\Phi((z-\mu)/\sigma),$$

当 $z\geq 0$ 时，有

$$P(Z\leq z)=P(X=0)+P(X=1,Y\leq z)=1-p+p\Phi((z-\mu)/\sigma).$$

即 $F_Z(z)=\begin{cases}p\Phi((z-\mu)/\sigma), & z<0,\\ 1-p+p\Phi((z-\mu)/\sigma), & z\geq 0.\end{cases}$

35. (1) 由密度函数的正则性

$$\int\int Ae^{-(3x+4y)}dxdy=\frac{A}{4}\int e^{-3x}dx=\frac{A}{12}=1.$$

所以 $A=12$.

(2) 因为 $f(x,y)$ 可分离变量，所以 X,Y 相互独立。

(或通过求边际密度可得 $X\sim Exp(3), Y\sim Exp(4)$, 可得 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.)

(3) 对于 $\forall z > 0$，有

$$\begin{aligned} P(Z \le z) = P(X+Y \le z) &= \int_0^z \int_0^{z-x} 12e^{-(3x+4y)} dx dy \\ &= \int_0^z 3e^{-3x} - 3e^{-4z+x} dx \\ &= 1 - 4e^{-3z} + 3e^{-4z} \end{aligned}$$

所以

$$f_Z(z) = \begin{cases} 12e^{-3z} - 12e^{-4z}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(4) 因为 (X, Z) 的联合密度为

$$f(x, z) = f(x, z-x) \cdot |J| = 12e^{-(4z-x)},\ x, z > 0,$$

所以当 $x > 0$ 时，

$$f_{X|Z}(x|z=1) = \frac{f(x,z)}{f(z)}\Big|_{z=1} = \frac{12e^{-4+x}}{12e^{-3} - 12e^{-4}} = \frac{e^x}{e-1}.$$

所以

$$P(X > 0.5 | X+Y=1) = \int_{0.5}^1 \frac{e^x}{e-1} dx = \frac{1}{e-1} e^x \Big|_{0.5}^1 = \frac{e - e^{-1/2}}{e-1}.$$

42.

$$f_X(x) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x,y,z) dy dz = \begin{cases} \frac{1}{2\pi},\ 0 < x < 2\pi, \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$$

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi} f(x,y,z) dz = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2},\ 0 < x, y < 2\pi, \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$$

由对称性可知，$f_Y(y), f_Z(z)$ 与 $f_X(x)$，$f(x,z), f(y,z)$ 与 $f(x,y)$ 有相同的形式，因为 $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$，
所以 x, y 相互独立，同理可得 X, Y, Z 两两独立。
因为 $f(x,y,z) \neq f_X(x) f_Y(y) f_Z(z)$，所以 X, Y, Z 不相互独立。

47. $(X,Y)\sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 其联合密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$
$$-\infty<x,y<\infty.$$

$\begin{cases}U=X+bY,\\V=X-bY,\end{cases}$ 的反函数为 $\begin{cases}X=\frac{1}{2}(U+V),\\Y=\frac{1}{2c}(U-V).\end{cases}$ 对应的雅可比行列式为

$$J=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2c} & -\frac{1}{2c}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2c=b}$$

则 (U,V) 的联合密度为

$$\begin{aligned}f_{UV}(u,v)=&f\left((\frac{1}{2}(u+v),\frac{1}{2b}(u-v)\right)\cdot|J|\\
=&\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}(u+v)-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}\right.\right.\\
&\left.\left.-2\rho\frac{\left(\frac{1}{2}(u+v)-\mu_1\right)\left(\frac{1}{2b}(u-v)-\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\left(\frac{1}{2b}(u-v)-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}\cdot\left|-\frac{1}{2b}\right|\\
=&\frac{1}{4|b|\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[A_2u^2+A_1v+B_2v^2+B_1v+C_2uv+D\right]\right\},\\
&-\infty<u,v<\infty.\ \text{其中}C_2=\left(\frac{1}{2\sigma_1^2}-\frac{1}{2b^2\sigma_2^2}\right).\end{aligned}$$

要使 U,V 独立，由分离变量法，即要求 uv 项系数 C_2 为 0 即可：

$$C_2=\left(\frac{1}{2\sigma_1^2}-\frac{1}{2b^2\sigma_2^2}\right)=0\ \Rightarrow\ b=\pm\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

48. (1) 令 $Z = \frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$，则

$$J^{-1} = \frac{\partial(x,z)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}, \quad \Rightarrow \quad J = \sqrt{1-\rho^2}$$

所以 (X,Z) 的联合密度

$$f_{XZ}(x,z) = f(x, z(x,y))|J| = \frac{1}{2\pi}\exp\{-(x^2+z^2)/2\}, \ (x,z) \in \mathbb{R}^2$$

即 $(X,Z) \sim N(0,0,1,1,0)$，所以 X,Z 相互独立。

(2)$P(Y>0) = P(X>0) = 1/2$, 所以

$$\begin{aligned} P(XY<0) &= P(X<0, Y>0) + P(X>0, Y<0) \\ &= P(Y>0) - P(X>0,Y>0) + P(X>0) - P(X>0,Y>0) \\ &= 1 - 2P(X>0,Y>0). \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} P(X>0,Y>0) &= P\left(X>0, Z> -\frac{\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \ (\text{令} x = r sin\theta, z = r\cos\theta) \\ &= \int_{arccot - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{r}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\theta \\ &= \int_{arccot - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{\pi} \frac{1}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\arccos\rho. \end{aligned}$$

所以 $P(XY<0) = \frac{1}{\pi}\arccos\rho$。