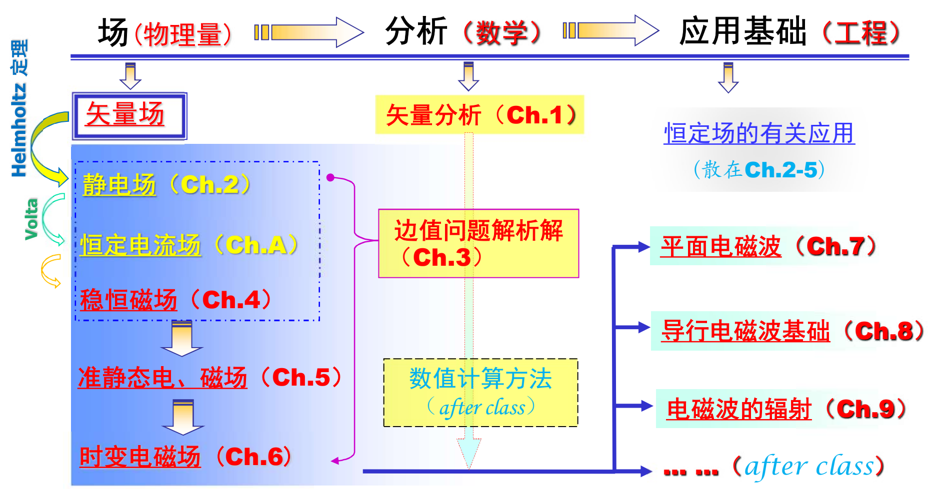
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

电磁场与波

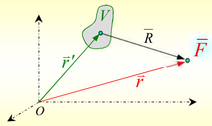
红专并进
理实交融

课程的体系结构



----从矢量场论到磁场方程

解读Helmholtz 定理：



$$\vec{F}=-\nabla\varphi+\nabla\times\vec{A}$$

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{\nabla'\cdot\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{\nabla'\times\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

➢如果场仅有**旋度源**，即：

$$\nabla\cdot\vec{F}=0$$

$$\nabla\times\vec{F}\triangleq\mu_0\vec{J}$$

$$\varphi(\vec{r})=0$$

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

此时： $\nabla\times\vec{F}=-\nabla\times\nabla\varphi+\nabla\times\nabla\times\vec{A}$

$$=\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\mu_0\vec{J}$$

$\because\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$

规范：$\nabla\cdot\vec{A}=0$

无界空间中方程的解

$$\boxed{\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}}$$ --- 矢量位的Poisson方程

磁感应强度

如果 $\vec{J}$ 为时不变的电流密度，则$\vec{F}$ 为稳恒磁场： $\vec{F}=\nabla\times\vec{A}\triangleq\vec{B}$

稳恒磁场方程

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$ （引入磁矢位）

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}}$$ --矢量磁位泊松方程

规范：$\nabla\cdot\vec{A}=0$

（无界空间）

Helmholtz定理给出其解：

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{1}{R}\vec{J}(\vec{r}')dV'$$

$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\nabla\times\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}dV'$$

$\nabla\times(\frac{\vec{J}'}{R})=\frac{1}{R}\nabla\times\vec{J}'+\nabla\frac{1}{R}\times\vec{J}'$

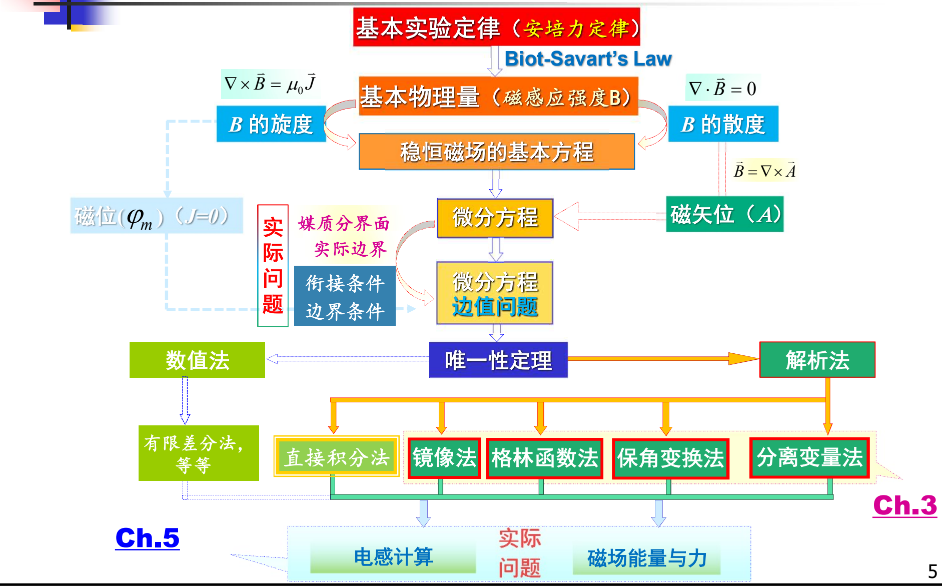
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\nabla\frac{1}{R}\times\vec{J}dV'$$

$\nabla\frac{1}{R}=-\frac{\hat{R}}{R^2}$

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\vec{J}(\vec{r}')\times\hat{R}}{R^2}dV'$$

└=➔ 毕奥—沙伐定律

恒定磁场知识结构框图



5

4 稳恒磁场

Oersted ---Ampère---Biot & Savart ：   your thought?

（July 1820---Fall 1820）

电（流）-->磁（场）

- 实验表明：导体中有恒定电流通过时，在导体内部和它周围的媒质中，不仅有恒定电场，同时还有不随时间变化的磁场，简称稳恒磁场（Static Magnetic Field）。

- 稳恒磁场和静电场是性质完全不同的两种场。但在分析方法上却有许多共同之处，注意类比法的应用。

- 研究对象——磁感应强度($\vec{B}$)

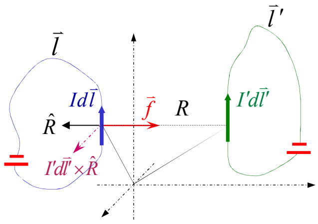
6

4-1 安培定律和磁感应强度

1. 安培力定律 （*vs.* 库仑定律）

(July 7, 1820)安培实验发现：电流为 I 的载流导线回路 $\bar{l}$，放在电流为 I' 的载流导线回路 $\bar{l}'$ 的附近，受到的作用力为：

$$\bar{f}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_l\oint_{l'}\frac{Id\bar{l}\times(I'd\bar{l}'\times\hat{R})}{R^2}$$



本质：电流之间通过“磁场”相互作用

奥斯特实验观察：(July 21, 1820)

电流使附近的指南针发生偏转

“电流周围的是磁场” —法拉第

7

2. 毕奥-沙伐定律（定理）： J. Biot & F. Savart（Fall，1820）

$$\bar{f}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_l\oint_{l'}\frac{Id\bar{l}\times(I'd\bar{l}'\times\hat{R})}{R^2}$$

$$\bar{f}=\oint_l Id\bar{l}\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\frac{I'd\bar{l}'\times\hat{R}}{R^2}\right) \Rightarrow \bar{B}(\bar{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\frac{I'd\bar{l}'\times\hat{R}}{R^2}$$

恒定电流元在某点产生的磁感应强度 B 定义为：

单位电流元在该点所受的最大磁场力

$$d\bar{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I'd\bar{l}'\times\hat{R}}{R^2}$$

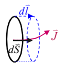
B单位：牛/安.米=焦/安米^2=韦伯/米^2=特斯拉（T）
高斯（G）： 1T=10^4G

- μ_0 --真空的导磁系数或磁导率：

$$\mu_0=4\pi\times10^{-7}(Vs/Am)$$

8

体电流元：



$$I' = \iint_S \vec{J}' \cdot d\vec{S}'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_s \int_l \frac{(\vec{J}' \cdot d\vec{S}') d\vec{l}' \times \hat{R}}{R^2}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_s \int_l \frac{(d\vec{S}' \cdot d\vec{l}') \vec{J}' \times \hat{R}}{R^2}$$

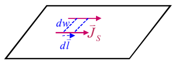
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = 0$$

$$\because \vec{a} = d\vec{S}', \ \vec{b} = \vec{J}', \ \vec{c} = d\vec{l}', \ \vec{J}' \parallel d\vec{l}'$$

$$d\vec{S}' \cdot d\vec{l}' = dV'$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}' \times \hat{R}}{R^2} dV'}$$

面电流元：

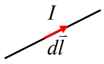


$$I' = J_S' dw'$$

$$dS' = dw' dl' \qquad \vec{J}_S' \parallel d\vec{l}'$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\vec{J}_S' \times \hat{R}}{R^2} dS'}$$

线电流元：

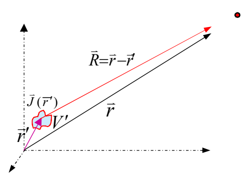


$$I' d\vec{l}'$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l'} \frac{I' d\vec{l}' \times \hat{R}}{R^2}}$$

9

3. 磁感应强度远区特性



$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}' \times \hat{R}}{R^2} dV'}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \vec{J}' \times \frac{\hat{R}}{R^2} dV' \qquad \frac{\hat{R}}{R^2} = \frac{\hat{r}}{r^2} + O(\frac{1}{r^3})$$

$$\therefore \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} [\iiint_{V'} \vec{J}' dV'] \times \frac{\hat{r}}{r^2} + O(\frac{1}{r^3})$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

$$\iiint_{V'} \vec{J}' dV' = 0$$

电流线在V′中闭合!

∴将体积分分解成无数个闭合的电流管，分别积分，再求和=➔0。

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0,$$
结论更精彩!

$$\vec{B}(\vec{r}) \sim O(\frac{1}{r^3})$$

适用条件：无限大均匀介质，且电流分布在有限区域内。

□ 比较远区静电场：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R^2} \hat{R} dV'$$

$$\frac{\hat{R}}{R^2} = \frac{\hat{r}}{r^2} + O(\frac{1}{r^3})$$

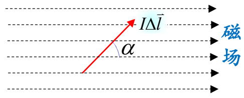
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} + O(\frac{1}{r^3})$$

结论：远区B比E小一个量级！（∵磁场没有通量源）

10

4. 磁场对电流的作用——洛伦兹力

电流元在磁场中的受力表示为：$\Delta f \propto I\Delta l \sin\alpha$



➤方向与电流方向垂直，与受力为零的方向垂直：

$$\Delta f = BI\Delta l\sin\alpha \Rightarrow \Delta\vec{f} = I\Delta\vec{l}\times\vec{B}$$

闭合载流导线在磁场中的受力为（据此亦可定义磁感应强度B）：

$$\vec{f} = \oint_l Id\vec{l}\times\vec{B}$$

磁场对电流力的作用可认为是对运动电荷的作用！

运动电荷在磁场中的作用力

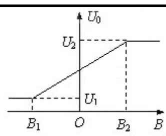
$$Id\vec{l} = (\vec{J}\cdot d\vec{S})d\vec{l} = (\rho dV)\vec{v} = dq\vec{v}$$

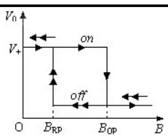
$$d\vec{f} = Id\vec{l}\times\vec{B} = dq\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow \boxed{\vec{f} = q\vec{v}\times\vec{B}}$$ ---洛仑兹力

- 始终与电荷运动方向垂直，不作功；
- 静止电荷在磁场中不受力的作用。

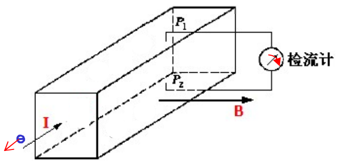
➤由此亦可定义磁感应强度B

11





✓ **霍耳效应**：（美国物理学家E. H. Hall，1855-1938）



霍尔效应示意图（霍尔 1879）

随着高强度的恒磁技术、微弱信号检测技术和材料工艺的进步，霍尔效应被成功地用于多类传感器（如开-关传感器、线性传感器）获得广泛应用。

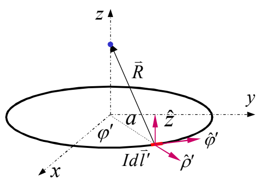
载流子正负不同，形成的附加电场方向不同，半导体霍尔效应比金属的强！

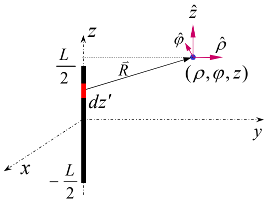
➤ 在霍尔效应发现约100年后，德国物理学家克利青(Klaus von Klitzing, 1943-)等在研究极低温度和强磁场中的半导体时发现了量子霍耳效应，是当代凝聚态物理学令人惊异的进展之一，克利青因此获得1985年诺贝尔物理学奖。

➤ 美籍华裔物理学家崔琦(Daniel Chee Tsui,1939-)和美国物理学家劳夫林(Robert B. Laughlin，1950-)、施特默(Horst L. Stormer，1949-)在更强磁场下研究量子霍尔效应时发现了分数量子霍尔效应，这个发现使人们对量子现象的认识更进一步，他们为此获得了1998年的诺贝尔物理学奖。

12

（电磁学课程）





$\vec{B}(z)=\frac{\mu_0}{2}\frac{Ia^2}{R^3}\hat{z}$ $\sim O(\frac{1}{r^3})$

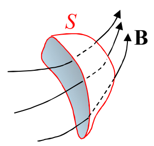
$\lim\limits_{L\to\infty}\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$ $\sim O(\frac{1}{r})$

$\because$ 电流线**NOT**在有限V′中!

4-2 磁场的高斯定律和安培环路定律

1. 磁场的高斯定律

磁感应强度B 的穿过任意面S 的通量，称为<u>磁通</u>。



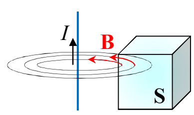
$\Phi=\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$ 单位：韦伯

到目前为止，所有的实验结果表明磁力线是闭合的！

✓ 穿进任意闭合面的B 的通量（磁通），一定等于从该闭合面穿出的B 的通量（磁通）。因此，从任意闭合面穿过的B的净通量（净磁通）为零，即：

$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$ --磁场的高斯定律

$\nabla\cdot\vec{B}=0$



该定律反映的一个基本事实是：

迄今为止，人类没有找到磁荷。磁单极子之谜……

➢ 从毕奥–沙伐定律证明：

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\vec{J}'\times\hat{R}}{R^2}dV'}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\nabla\cdot\frac{\vec{J}'\times\hat{R}}{R^2}dV'$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\nabla\cdot\left[\vec{J}'\times\nabla\frac{1}{R}\right]dV'$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{C})=\vec{C}\cdot(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{C})$$

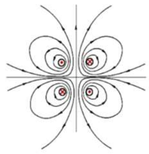
$$\therefore\nabla\cdot\left[\vec{J}'\times\nabla\frac{1}{R}\right]=\nabla\frac{1}{R}\cdot\underbrace{\nabla\times\vec{J}'}_{0}-\vec{J}'\cdot\underbrace{\nabla\times\nabla\frac{1}{R}}_{0}=0$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r})=0}$$

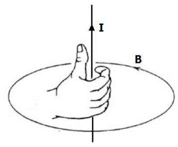
由于没有散度源–磁荷：

✓ 磁力线是闭合的；

✓ 磁力线不能相交



两对上下放置传输线的磁场分布



磁力线方程：$\vec{B}\times d\vec{l}=0$

15

2. 安培环路定理

$\nabla\times\vec{B}=?$ $\boxed{\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}}$

证明的方法有多种：

1）Stokes定理出发：

以长直导线的磁场为例：

前例已知：$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$

$$\boxed{\oint_l\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I}$$

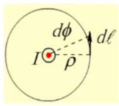
$$\oint_l\vec{B}\cdot d\vec{l}=\iint_S(\nabla\times\vec{B})\cdot d\vec{S}$$

$$\mu_0 I=\iint_S\mu_0\vec{J}\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}}$$

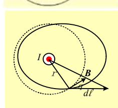
（1）安培环路与磁力线重合

$$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_0^{2\pi}\frac{\mu I_0}{2\pi\rho}\rho d\varphi=\mu_0 I$$



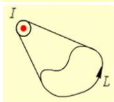
（2）安培环路与磁力线不重合

$$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_L B\cos\theta dl=\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\rho d\varphi=\mu_0 I$$



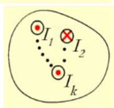
（3）安培环路不交链电流

$$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_L B\cos\theta dl=\int_0^{0}\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\rho d\varphi=0$$



（4）安培环路与若干根电流交链

$$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I_k$$



16

2）Biot-Savart定律出发:

$$\nabla\times\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\nabla\times\frac{\vec{J}'\times\hat{R}}{R^2}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\nabla\times(\vec{J}'\times\frac{\hat{R}}{R^2})dV'$$

$$\because\ \nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})$$

$$\begin{aligned}\therefore\nabla\times(\vec{J}'\times\frac{\hat{R}}{R^2})&=(\frac{\hat{R}}{R^2}\cdot\nabla)\vec{J}'-\frac{\hat{R}}{R^2}(\nabla\cdot\vec{J}')-(\vec{J}'\cdot\nabla)\frac{\hat{R}}{R^2}+\vec{J}'(\nabla\cdot\frac{\hat{R}}{R^2})\\&=-(\vec{J}'\cdot\nabla)\frac{\hat{R}}{R^2}-\vec{J}'(\nabla\cdot\nabla\frac{1}{R})\\&=-(\vec{J}'\cdot\nabla)\frac{\hat{R}}{R^2}+4\pi\vec{J}'\delta(\vec{r}-\vec{r}')\end{aligned}$$

$$\nabla\times\vec{B}(\vec{r})=-\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}(\vec{J}'\cdot\nabla)\frac{\hat{R}}{R^2}dV'+\mu_0\vec{J}(\vec{r})$$

$$\because\oint_S\vec{B}(\vec{A}\cdot d\vec{S})=\int_V\left[(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+\vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})\right]dV\qquad \text{定理(1-92)}$$

$$\therefore\oint_{S'}\frac{\hat{R}}{R^2}\underbrace{(\vec{J}'\cdot d\vec{S}')}_{0}=\underbrace{\iiint_{V'}(\vec{J}'\cdot\nabla)\frac{\hat{R}}{R^2}dV'}_{\rightarrow 0}+\iiint_{V'}\frac{\hat{R}}{R^2}\underbrace{(\nabla\cdot\vec{J}')}_{0}dV'$$

$$\therefore\nabla\times\vec{B}(\vec{r})=\mu_0\vec{J}(\vec{r})$$

□ Biot-Savart定律=➔磁场方程:

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\vec{J}'\times\hat{R}}{R^2}dV'$$

两边求旋度 ⇨ $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$

两边求散度 ⇨ $\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r})=0$

➢ 恒定磁场的核心规律：Biot-Savart定律！

➢ 磁场为有旋场：其旋度源为电流密度矢量！

➢ 若 $\nabla\cdot\vec{J}\neq0$，则 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$ 不成立！

$$\because\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})=\mu_0\nabla\cdot\vec{J}=?!$$

$\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ ⇨ $\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\neq0$ ⇨ 时变电流，精彩无限！

4-3 稳恒磁场的矢量磁位

1. 矢量磁位的引入

Helmholtz定理

Biot-Savart定律

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\vec{J}'\times\hat{R}}{R^2}dV'$$

两边求散度

两边求旋度

稳恒磁场方程

$\nabla\cdot\vec{B}=0$ ⇨ $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$ ⇨ $\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}$ —矢量磁位泊松方程

规范：$\nabla\cdot\vec{A}=0$

$\vec{A}$ 称为矢量磁位，或称为磁矢位。其单位为：Wb/m

$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

求解…

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

毕奥—萨伐尔定律 ===➔ 矢量磁位 $\vec{A}$：

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\vec{J}'(\vec{r}')\times\hat{R}}{R^2}dV' \qquad \boxed{\nabla\frac{1}{R}=-\frac{\hat{R}}{R^2}}$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec{J}'\times\nabla\frac{1}{R}dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla\frac{1}{R}\times\vec{J}'dV' \qquad \boxed{\nabla\times(\frac{\vec{J}'}{R})=\frac{1}{R}\nabla\times\vec{J}'+\nabla\frac{1}{R}\times\vec{J}'}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}(\nabla\times\frac{\vec{J}'}{R}-\frac{1}{R}\underbrace{\cancel{\nabla\times\vec{J}'}}_{0})dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla\times\frac{\vec{J}'}{R}dV'=\nabla\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}'}{R}dV'\right) \qquad \boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}'}{R}dV'}$$ = 亥姆霍兹定理所给出的解！

□ **唯一性---规范变换**

事实上，A不是唯一的： 由Helmholtz定理，矢量场A只有同时给定其旋度和散度，才能确定，而以上仅给定了其旋度。 $\boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}$

$$\because \nabla\times(\vec{A}+\nabla\varphi)=\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$$

$$\boxed{\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\varphi}$$ --同样满足场方程！

∴定义磁矢位可以有多种人为选择，相应地有不同的散度值。

若将上式看作一个由A到A′的变换，称该变换为规范变换；

规范变换：在该变换下，矢量位、标量位描述的电磁场不变。

如：可以规定磁矢位散度为零(此时表达式最简单)，即

$$\nabla\cdot\vec{A}'=\nabla\cdot\vec{A}=0 \Longrightarrow \nabla^2\varphi=0$$

└➔ 库仑规范

库伦规范靠谱吗？

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}'}{R}dV'$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\nabla\cdot(\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}'}{R}dV')$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \nabla\cdot\frac{\vec{J}'}{R}dV'$$

$$\nabla\cdot(\frac{\vec{J}'}{R})=\frac{1}{R}\nabla\cdot\vec{J}'+\vec{J}'\cdot\nabla\frac{1}{R}$$

$\nabla\cdot\vec{J}'=0=\nabla'\cdot\vec{J}'$ （∵恒定电流场）

$$\nabla\frac{1}{R}=-\nabla'\frac{1}{R}$$

$$\nabla'\cdot(\frac{\vec{J}'}{R})=\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{J}'+\vec{J}'\cdot\nabla'\frac{1}{R}=-\nabla\cdot(\frac{\vec{J}'}{R})$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \nabla'\cdot\frac{\vec{J}'}{R}dV'$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_S \frac{\vec{J}'}{R}\cdot d\vec{S}=0$$ ∵电流分布在有限区域

✓ 库伦规范靠谱！

2. 矢量磁位满足的微分方程

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

$$\nabla\times\vec{B}=\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\mu_0\vec{J}$$

$$\boxed{\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\mu_0\vec{J}}$$

--矢量磁位方程，
可进一步完善：

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

库伦规范

$$\boxed{\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}}$$

--矢量磁位泊松方程

或者：

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}'}{R}dV'$$

$$\nabla^2\vec{A}=\nabla^2A_x\hat{x}+\nabla^2A_y\hat{y}+\nabla^2A_z\hat{z}$$

$$\nabla^2A_x=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \nabla^2\frac{J_x'}{R}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V J_x'\nabla^2\frac{1}{R}dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V J_x'(\vec{r}')\{-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')\}dV'$$

$$=-\mu_0J_x(\vec{r})$$

$$\nabla^2A_y=-\mu_0J_y(\vec{r})$$

$$\nabla^2A_z=-\mu_0J_z(\vec{r})$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}(\vec{r})}$$

矢量磁位 A 的应用

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\vec{J}'}{R}dV'$$

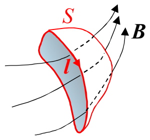
$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\vec{J}'\times\hat{R}}{R^2}dV'$$

➢计算磁通:

$$\Psi=\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_S\nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S}$$

$$\int_S\nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S}=\oint_l\vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$$\Psi=\oint_l\vec{A}\cdot d\vec{l}$$



✓ 穿过面S的磁通等于矢量磁位沿S的边界 l 进行线积分。

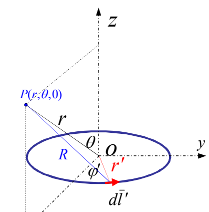
注：l 绕行方向与磁通穿出S的方向之间为右手螺旋关系。

23

例：求半径为 a 电流为 I 的小电流环在远处（$r\gg a$）的磁场。

解：选用球坐标，使电流环在 xoy 平面，且中心在坐标原点。

磁场与 φ 无关，取场点在 $\varphi=0$ 面内：在 xoz 面内求取即可。



$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l'}\frac{I'}{R}d\vec{l}'$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\int_0^{2\pi}(1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi')a\hat{\varphi}'d\varphi'$$

$$=\frac{\mu_0 Ia}{4\pi r}\int_0^{2\pi}(1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi')(\hat{y}\cos\varphi'-\hat{x}\sin\varphi')d\varphi'$$

$$A_y=-\frac{\mu_0 Ia}{4\pi r}\int_0^{2\pi}(1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi')\cos\varphi'd\varphi'=\frac{\mu_0 Ia^2\sin\theta}{4r^2}$$

$$A_x=0$$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0 Ia^2\sin\theta}{4r^2}\hat{y}\xrightarrow{\text{旋转对称}}\vec{A}=\frac{\mu_0 Ia^2\sin\theta}{4r^2}\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

$$d\vec{l}'=ad\varphi'\hat{\varphi}'$$

$$\hat{\varphi}'=\hat{y}\cos\varphi'-\hat{x}\sin\varphi'$$

$$\vec{R}=r\hat{r}-a\hat{r}'$$

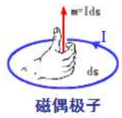
$$=r[1+(\frac{a}{r})^2-\frac{2a}{r}\sin\theta\cos\varphi']^{1/2}$$

$$(r>>a)$$

$$\frac{1}{R}\approx\frac{1}{r}[1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi']$$

24

➢**磁偶极子：** “小”电流环



◆ **定义：** 磁偶极矩表示磁偶极子的大小和方向 $\vec{m}=I\vec{S}$

◆ 位于坐标原点的半径为 a 电流为 I 的平面小电流环的磁偶极矩为： $\vec{m}=I\pi a^2\hat{z}$

在空间任意点的矢量磁位可表示为：

$$\vec{A}=\frac{\mu_0 Ia^2\sin\theta}{4r^2}\hat{\varphi}=\frac{\mu_0}{4\pi r^2}\vec{m}\times\hat{r} \qquad \hat{z}\times\hat{r}=\sin\theta\hat{\varphi}$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(3\cos\theta\hat{r}+\sin\theta\hat{\theta}) \sim \frac{1}{r^3}$$

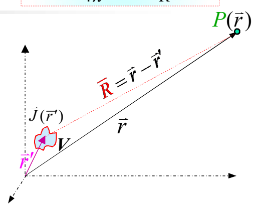
✓ 位于空间任意点磁偶极子的矢量磁位为： $\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi R^2}\vec{m}\times\hat{R}$

电偶极子的标量电位为： $\varphi(\vec{r})=\frac{\vec{p}\cdot\hat{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

25

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\vec{J}'(\vec{r}')}{R}dV'$$

3. 矢量磁位的多极展开



电流分布在有限区域时：

$$\because f(\vec{r}-\vec{r}')=f(\vec{r})-(\vec{r}'\cdot\nabla)f(\vec{r})+\frac{1}{2}(\vec{r}'\cdot\nabla)^2 f(\vec{r})+\cdots$$

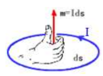
$$\therefore \frac{1}{R}=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{r}-(\vec{r}'\cdot\nabla)\frac{1}{r}+\frac{1}{2}(\vec{r}'\cdot\nabla)^2\frac{1}{r}+\cdots=\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3}+O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\vec{J}'}{R}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi r}\underbrace{\iiint_V\vec{J}'dV'}_{0}+\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\iiint_V\vec{J}'(\vec{r}'\cdot\vec{r})dV'+O(\frac{1}{r^3})$$

$$\triangleq\frac{\mu_0}{4\pi r^3}(\vec{m}\times\vec{r})$$

参考课本例4.8理解

$$\vec{m}=\frac{1}{2}\iiint_V\vec{r}'\times\vec{J}'dV'$$



$$\vec{m}=\frac{1}{2}\iiint_V\vec{r}'\times\vec{J}'dV'=\frac{1}{2}\oint_l\vec{r}\times Id\vec{l}$$
$$=\frac{I}{2}\int_0^{2\pi}a\cdot ad\theta\hat{n}=I\pi a^2\hat{n}=IS\hat{n}$$

---电流分布的等效磁偶极矩；

---对给定的电流密度分布，为常矢量！

26

远区磁场：

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times(\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r^3})$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}[-(\vec{m}\cdot\nabla\frac{1}{r^3})\vec{r}-\frac{1}{r^3}(\vec{m}\cdot\nabla)\vec{r}]$$

0

习题1-5 (r≠0)

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{m}}{r^3}]$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{m}}{r^3}]$$

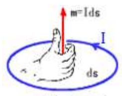
类比

电偶极矩远区电场：$\boxed{\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{p}}{r^3}]}$

27

4-4 物质的磁化和磁化强度

❖ 电子围绕原子运动产生磁偶极矩，大小为：$\vec{m}=I\vec{S}$



磁偶极子

其中的电流叫安培分子电流。

➢ 媒质无外磁场作用时，不呈现磁性（永磁体除外）；

➢ 媒质受外磁场作用时发生磁化，呈现磁性——媒质磁化。

1. 物质的磁化机理

分子电流在磁场中的取向；自旋电子在磁场中的进动

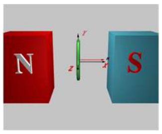
2. 物质的磁化种类

3. 磁化强度

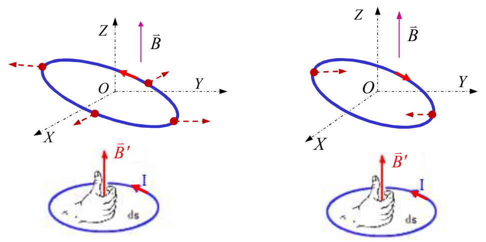
28

1. 物质的磁化机理

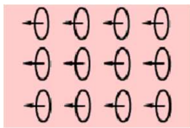
1) 分子电流在磁场中的取向

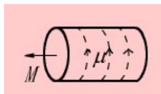


磁偶极子受磁场力而转动



分子电流在外加磁场的作用下发生偏转，使杂乱的磁偶极子取向趋于一致，使**磁场加强**：***B+B'***



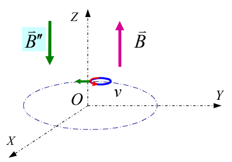


29

2) 电子自旋在磁场中的进动

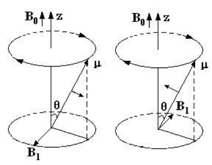
分子中运动的电子受到外磁场的作用力，自旋会产生进动。

$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



➢ 由自旋电子进动产生的附加磁场，与外加磁场方向相反：***B-B″***

进动(precession)是自转物体之自转轴又绕着另一轴旋转的现象，又可称作旋进。常见的例子为陀螺：当其自转轴的轴线不再呈铅直时，会发现自转轴会沿着铅直线作旋转，此即“旋进”现象。



自旋的进动现象==➔ 核磁共振与磁振造影成像系统

30

2. 物质的磁化种类

磁介质：指对磁场产生影响的一类介质。　　效应1）+效应2）=?

抗磁性物质：与外磁场相反，使总磁场减弱。

顺磁性物质：与外磁场同向，使总磁场增强。

铁磁性物质：产生显著磁性，有剩磁和磁滞，存在磁畴。

亚铁磁性物质：磁化较铁磁物弱，但剩磁小，电导率低，应用广泛。

对比：介质极化—总是减弱（对抗）外场！

磁介质应用：利用磁介质特性构成的器件种类丰富

3. 磁化强度与磁化电流

磁化强度 M 定义为：

单位体积中磁偶极矩的统计平均值

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{m}}{\Delta V}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

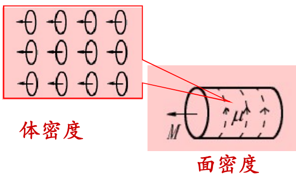
$\vec{m} = I\vec{S}$

—为单个分子的磁偶极矩

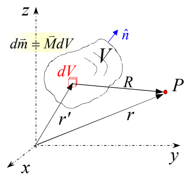
$$\vec{m} = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{r}' \times \vec{J}' dV'$$

—电流分布的磁偶极矩

➢介质磁化后，会形成磁化电流：



磁化电流：由媒质磁化而产生的电流，可与磁偶极矩等效



单个磁偶极子的矢量磁位为 $\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi R^2}\vec{m}\times\hat{R}$

dV中磁偶极子的矢量磁位为 $d\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{d\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\vec{M}\times\vec{R}}{R^3}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\vec{M}\times\nabla'(\frac{1}{R})dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{1}{R}\nabla'\times\vec{M}dV'-\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\nabla'\times\frac{\vec{M}}{R}dV'$$

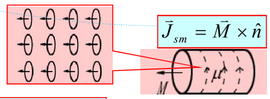
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{1}{R}\boxed{\nabla'\times\vec{M}}dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_S\frac{\boxed{\vec{M}\times\hat{n}}}{R}dS$$

$$\nabla'\times(\frac{1}{R}\vec{M})=\nabla'(\frac{1}{R})\times\vec{M}+\frac{1}{R}\nabla'\times\vec{M}$$

$$\vec{M}\times\nabla'(\frac{1}{R})=\frac{1}{R}\nabla'\times\vec{M}-\nabla'\times(\frac{1}{R}\vec{M})$$

$$\boxed{\int_V\nabla\times\vec{B}dV=\oint_S(\hat{n}\times\vec{B})dS=\oint_S d\vec{S}\times\vec{B}}$$ 积分定理（1-90）

据此，分别“定义”磁化电流体密度和磁化电流面密度：



$\vec{J}_{sm}=\vec{M}\times\hat{n}$

$\vec{J}_m=\nabla\times\vec{M}$

加深理解：

➢磁化媒质中，穿过任意曲面S的磁化电流为：

$$I'_m=\iint_S\vec{J}_m\cdot d\vec{S}=\iint_S\nabla\times\vec{M}\cdot d\vec{S}=\oint_l\vec{M}\cdot d\vec{l}$$

➢ 等效磁化电流在周围也会产生磁场：

由毕奥—萨伐尔定律可得 $\vec{B}_m=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_V\frac{\vec{J}_m\times\hat{R}}{R^2}dV+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\frac{\vec{J}_{sm}\times\hat{R}}{R^2}dS$

➢ 磁介质中的磁场可以视作：$\vec{B}+\vec{B}_m$

由源电流 $J_{f/sf}$ 和等效磁化电流 $J_{m/sm}$ 在真空中共同产生

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{(\vec{J}_m+\vec{J}_f)\times\hat{R}}{R^2}dV+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\frac{(\vec{J}_{sm}+\vec{J}_{sf})\times\hat{R}}{R^2}dS$$

“对比”

磁化介质可以等效由**磁偶极矩**或**磁化电流**代替

极化介质可以等效由**电偶极矩**或**极化电荷**代替

4. 磁场强度

均匀磁介质空间中的磁场可以看成是由源电流与磁化电流在真空中共同产生：

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0(\vec{J}_f+\vec{J}_m)=\mu_0(\vec{J}_f+\nabla\times\vec{M})$$

$$\nabla\times(\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M})=\vec{J}_f$$

据此定义磁场强度： $\boxed{\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}\boxed{\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f} & \text{与磁化电流无关} \\ \boxed{\nabla\cdot\vec{B}=0} & \end{cases}$

（单位：A/m）

磁介质的本构方程： $\boxed{\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})}$

（注：有的书上$\vec{B}=\mu_0\vec{H}+\vec{M}$是因为它的$\vec{m}=\frac{\mu_0}{2}\int_V\vec{r}'\times\vec{J}dV'$）

35

磁介质中磁场强度微分、积分形式的安培环路定律：

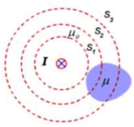
$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0(\vec{J}_f+\vec{J}_m) \qquad \oint_l\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0(I_f+I_m)$$

$$I_m=\int_S\vec{J}_m\cdot d\vec{S}=\int_S\nabla\times\vec{M}\cdot d\vec{S}=\oint_l\vec{M}\cdot d\vec{l}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f} \qquad \boxed{\oint_l\vec{H}\cdot d\vec{l}=I_f}$$

- 磁介质中磁场强度的环量只与闭合路径所围面积上穿过的自由电流有关，与磁介质的分布无关。
- 环路上任一点的磁场强度是由系统全部载流体产生的。
- 电流的正、负仅取决于环路与电流的交链是否满足右手螺旋关系，是为正，否为负。



H 的分布与磁介质有关

36

5. 磁化率与相对磁导率

对多数媒质(线性各向同性)，磁化强度与磁场强度成正比，与媒质材料有关：

$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$　　χ_m --媒质的磁化率

$$\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})=\mu_0(1+\chi_m)\vec{H}=\mu_0\mu_r\vec{H}=\mu\vec{H}$$

$\mu=\mu_0\mu_r$ --媒质的磁导率

$\mu_r=1+\chi_m$ --相对磁导率

（对比：介电常数ε
电导率σ

$\boxed{\vec{B}=\mu\vec{H}}$ --媒质的本构方程

- 抗磁性物质 $\mu_r<1$； 顺磁性物质 $\mu_r>1$ ； 弱磁媒质 $\mu_r\sim1$
- 铁磁性物质 $\mu_r>>1$，且与磁场强度有关。
- 物质的磁性也可分为： 均匀和非均匀；线性和非线性；各向同性和各向异性。

（对比：电介电质
$\varepsilon_r\geq1$

(注：顺磁物质、抗磁物质的磁导率多近似为μ_0)

37

在线性各向同性介质中的磁化电流只存在于介质交界面及介质中电流不为零的地方。

证明： $\boxed{\vec{J}_m=\nabla\times\vec{M}}$

$$\because \vec{M}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{H}=(\frac{\mu(\vec{r})}{\mu_0}-1)\vec{H}=\chi(\vec{r})\vec{H}$$

$$\therefore \vec{J}_m=\nabla\times\left[\chi(\vec{r})\vec{H}\right]=\chi(\vec{r})\nabla\times\vec{H}+\nabla\chi(\vec{r})\times\vec{H}$$

$$=\chi(\vec{r})\vec{J}_f+\nabla\chi(\vec{r})\times\vec{H}$$

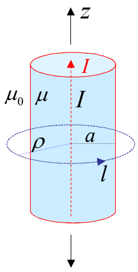
$\boxed{\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f}$

所以：只有当 $\vec{J}_f\neq0$ 或者 $\nabla\chi\neq0$ 时，才可能 $\vec{J}_m\neq0$

⊕ 当$\vec{J}_f\neq0$，$\nabla\chi=0$ 时， $\vec{J}_m=\chi(\vec{r})\vec{J}_f=(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\vec{J}_f$

38

例：磁导率为 μ，半径为a 的无限长磁介质圆柱，其**中心轴上有一无限长线电流 I**，圆柱外为空气。求各处的磁感应强度、磁场强度和磁化强度和磁化电流。



解：磁场分布沿柱长方向没有变化，相对于中心轴具有旋转对称性，应用安培环路定理：

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi\rho H_\varphi = I$$

（1）磁场强度H

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\hat{\varphi} \quad (0<\rho<\infty)$$

（2）磁感应强度B

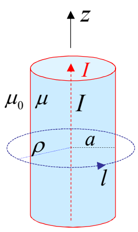
$$\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}, & (\infty>\rho>a) \\ \dfrac{\mu I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}, & (a>\rho>0) \end{cases}$$

39

（3）磁化强度M

$$\because \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = (\frac{\mu}{\mu_0}-1)\vec{H}$$

$$\vec{M} = \begin{cases} 0, & (\rho>a) \\ (\dfrac{\mu}{\mu_0}-1)\dfrac{I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}, & (\rho\le a,\ \rho\neq 0) \end{cases}$$



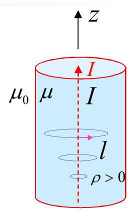
（4）磁化电流 J_m

$$\vec{J}_m = \nabla\times\vec{M} = \begin{vmatrix} \dfrac{\hat{\rho}}{\rho} & \hat{\varphi} & \dfrac{z}{\rho} \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho M_\varphi & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (\rho\neq 0)$$

$$\vec{J}_{sm} = \vec{M}\times\hat{n} = \vec{M}\times\hat{n}\Big|_{\rho=a} = (\frac{\mu}{\mu_0}-1)\frac{I}{2\pi a}\hat{\varphi}\times\hat{r} = -(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\frac{I}{2\pi a}\hat{z}$$

40

圆柱外：无磁化电流 $\vec{M}=0$



圆柱侧面的磁化电流：

$$I_{sm}=2\pi a J_{sm}=(\frac{\mu}{\mu_0}-1)I$$

注意到：$\vec{J}_{sm}=-(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\frac{I}{2\pi a}\hat{z}$

柱面磁化电流沿 $-z$ 方向

圆柱内的磁化电流：$(\vec{J}_m=0, for\ \rho\neq 0)$

$$I_m=\oint_l \vec{M}\cdot d\vec{l}=(\frac{\mu}{\mu_0}-1)I$$

注意到柱内：$\vec{J}_f\neq 0$@轴线上

所以：中心轴线上有磁化电流！

$$\vec{M}=(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\frac{I}{2\pi\rho}\hat{\varphi},\quad(\rho\le a)$$

$$\vec{J}_m=\chi(\vec{r})\vec{J}_f=(\frac{\mu}{\mu_0}-1)I\hat{z}$$

- 磁介质圆柱本身不提供额外电流，中心轴线上的磁化电流沿+z方向，柱面上的磁化电流沿-z方向：磁化电流大小相等，方向相反。

41

4-5 稳恒磁场的边界条件

恒定磁场方程 ----描述同一种均匀媒质中磁场与源的关系

恒定磁场的边界条件 ----不同磁介质分界面磁场的关系

恒定磁场方程:

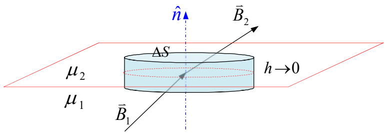
$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0 \qquad \boxed{\nabla\cdot\vec{B}=0}$$

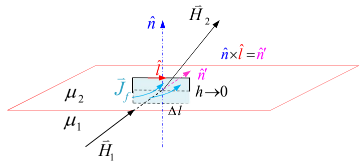
$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=I_f \qquad \boxed{\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f}$$

$$\boxed{\vec{B}=\mu\vec{H}}$$

42

1. 不同媒质分界面的边界条件





$\oint\!\!\oint_S \vec B\cdot d\vec S=0$

$\Delta S B_{2n}-\Delta S B_{1n}=0 \Rightarrow \boxed{B_{1n}=B_{2n}}$

$\boxed{\mu_1 H_{1n}=\mu_2 H_{2n}}$

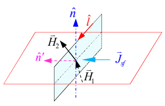
$\oint_l \vec H\cdot d\vec l=I_f$　　$I_f=\iint_S \vec J_f\cdot d\vec S$

$\vec J_f\cdot\vec n'\triangleq\vec J_{sf}$

$H_{2t}\Delta l-H_{1t}\Delta l=J_{sf}\Delta l \Rightarrow \boxed{H_{2t}-H_{1t}=J_{sf}}$

$(H_t=\vec H\cdot\hat l)$

若 $J_{sf}=0$　$\boxed{H_{2t}=H_{1t}}$



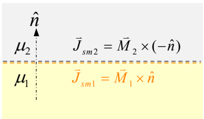
注： 选环路使 $|\vec H\cdot\hat l|=|\hat n\times\vec H|$，且 $\hat n\times\hat H=\hat n'$

∴ 该边界条件亦可记作 $\hat n\times(\vec H_2-\vec H_1)=\vec J_{sf}$

43

2. 媒质分界面的磁化电流密度

$\vec J_{sm}=\vec M\times\hat n$



$\boxed{H_{2t}-H_{1t}=J_{sf}}$

∵ $\vec H=\dfrac{\vec B}{\mu_0}-\vec M$

∴ $\hat n\times\left((\dfrac{\vec B_2}{\mu_0}-\vec M_2)-(\dfrac{\vec B_1}{\mu_0}-\vec M_1)\right)=\vec J_{sf}$

∵ $\hat n\times(\vec B_2-\vec B_1)=\mu_0(\vec J_{sm}+\vec J_{sf})$

∴ $\hat n\times(\dfrac{\vec B_2}{\mu_0}-\dfrac{\vec B_1}{\mu_0})=\vec J_{sm}+\vec J_{sf}$

$\boxed{\vec J_{sm}=(\vec M_1-\vec M_2)\times\hat n}$

(Note：矢量相等包含方向要求)

44

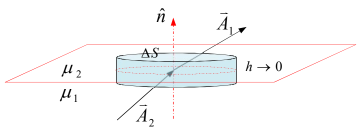
3. 矢量磁位满足的边界条件

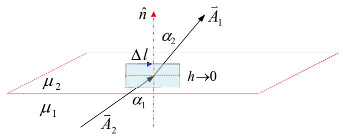
根据 A 所满足的旋度和散度的表示式以及磁场的基本方程，可以推导出 A 的法向分量和切向分量在边界面上都是连续的，即：

A在边界面上是连续的 $\boxed{\vec{A}_1 = \vec{A}_2}$

$$\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{A}dV = 0 \qquad \oint_l \vec{A}\times d\vec{l} = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} \xrightarrow[S\to 0]{h\to 0} 0$$

$$A_{1n} = A_{2n} \qquad A_{1t} = A_{2t}$$





45

边界条件对比总结

电介质	导电体	磁介质
$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$	$\vec{J} = \sigma\vec{E}$	$\vec{B} = \mu\vec{H}$
$D_{1n} - D_{2n} = \rho_{sf}$	$J_{1n} = J_{2n}$	$\boxed{B_{1n} = B_{2n}}$
$\boxed{E_{1t} = E_{2t}}$	$E_{1t} = E_{2t}$	$H_{2t} - H_{1t} = J_{sf}$

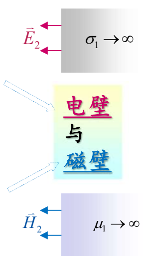
+ 位的边界条件，极化电荷/磁化电流…

理想导体： 电导率为无限大的导体1 $\sigma_1 \to \infty$

$$\vec{J}_1 = \sigma_1\vec{E}_1 \quad \vec{E}_1 = 0 \Longrightarrow E_{2t} = 0 \quad \boxed{E_{2n} \neq 0}$$

理想导磁体： 磁导率为无限大的媒质1 $\mu_1 \to \infty \quad (\sigma_1 = 0)$

$$\vec{B}_1 = \mu_1\vec{H}_1 \quad \vec{H}_1 = 0 \Longrightarrow H_{1t} = H_{2t} = 0 \quad \boxed{H_{2n} \neq 0}$$



46

4-6 标量磁位及其方程

恒定磁场的基本方程

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f \qquad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

在无自由电流区域：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\vec{H}=0\\&\nabla\times\nabla\varphi=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{令：}\ \vec{H}=-\nabla\varphi_m$$

标量磁位

✓标量磁位并不必然与磁荷联系。

✓磁荷在物理上仍在探寻中。目前只能在数学上谈磁荷，即：

某一磁学量（物理量或数学量）的通量源 （并无统一的概念）。

➢ 如果作上述考量，可以在磁场相关的数学分析中引入磁荷这个说法。

47

$$\nabla\cdot\vec{B}=\nabla\cdot\left[\mu_0(\vec{H}+\vec{M})\right]=0$$

$$\nabla\cdot\vec{H}=-\nabla\cdot\vec{M}$$

定义等效磁荷体密度为： $\rho_m=-\nabla\cdot\vec{M}$

$$\vec{H}=-\nabla\varphi_m \Rightarrow \nabla^2\varphi_m=-\rho_m$$

均匀磁化：

$$\nabla^2\varphi_m=0$$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi \qquad \nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

在介质交界面：

$$\hat{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0\Rightarrow\hat{n}\cdot(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\hat{n}\cdot(\vec{M}_1-\vec{M}_2)\triangleq\rho_{ms} \Rightarrow \frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}=\rho_{ms}$$

或者：

$$\hat{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0\Rightarrow\hat{n}\cdot(\mu_2\vec{H}_2-\mu_1\vec{H}_1)=0 \Rightarrow \mu_1\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}=\mu_2\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}$$

$$\hat{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0 \Rightarrow \varphi_{m1}=\varphi_{m2}$$

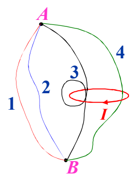
48

关于磁位φ_m：

- ✓ 只适合于无自由电流区域，无物理意义；
- ✓ φ_m=常数的面（线），与磁场强度H线垂直； $\vec{H}=-\nabla\varphi_m$
- ✓ φ_m有多值性：

设B点为磁位参考点，则可求A点磁位φ_{mA}： $\varphi_{mA1}=\int_{A1B}\vec{H}\cdot d\vec{l}$ $\varphi_{mA3}=\int_{A3B}\vec{H}\cdot d\vec{l}$

$\varphi_{mA2}=\int_{A2B}\vec{H}\cdot d\vec{l}$ $\varphi_{mA4}=\int_{A4B}\vec{H}\cdot d\vec{l}$



$$\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=\oint_{A1B4A}\vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_{A1B}\vec{H}\cdot d\vec{l}+\int_{B4A}\vec{H}\cdot d\vec{l}$$
$$=\varphi_{mA1}-\varphi_{mA4}=I$$

$\therefore\ \varphi_{mA1}=\varphi_{mA4}+I$ ===➔多值性

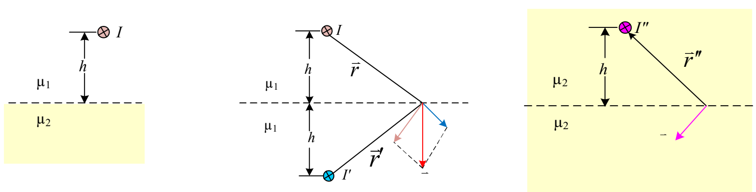
避免φ_m多值性，需要特别定义：

磁压计算积分路径不得穿过电流回路（即不交链）！

4-7 磁场的边值问题

磁矢位与标量磁位均分别满足泊松方程/Laplace方程，求解静电边值问题的方法可以比照使用。

例: 设磁导率为μ_1和μ_2的两种磁介质的分界面是一无限大平面，在μ_1的分界面为h处置有一与分界面平行的无限长线电流I，求各处的磁感应强度。



解： 采用镜像法，将边界面上的磁化电流用镜像电流代替

利用 I和 I′ 可计算上半空间的磁场

利用 I″ 可计算下半空间的磁场

在边界上满足边界条件：

$B_{1n}=B_{2n}$ $\quad B_{1n}=\frac{\mu_1 I}{2\pi r}\cos\theta+\frac{\mu_1 I'}{2\pi r}\cos\theta = B_{2n}=\frac{\mu_2 I''}{2\pi r}\cos\theta$

$H_{1t}=H_{2t}$ $\quad H_{1t}=\frac{I}{2\pi r}\sin\theta-\frac{I'}{2\pi r}\sin\theta = H_{2t}=\frac{I''}{2\pi r}\sin\theta$

$$\Rightarrow \begin{cases}\mu_1(I+I')=\mu_2 I''\\ I-I'=I''\end{cases}$$

求解得： $I'=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}I$ $\quad I''=\frac{2\mu_1}{\mu_2+\mu_1}I$

磁感应强度： $\vec{B}_1=\frac{\mu_1}{2\pi}\hat{i}\times\left(\frac{I\hat{r}}{r}+\frac{I'\hat{r}'}{r'}\right)=\frac{\mu_1 I}{2\pi}\hat{i}\times\left(\frac{\hat{r}}{r}+\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}\frac{\hat{r}'}{r'}\right)$

$$\vec{B}_2=\frac{\mu_2}{2\pi}\hat{i}\times\frac{I''\hat{r}''}{r''}=\frac{\mu_2}{2\pi}\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}I\hat{i}\times\frac{\hat{r}''}{r''}$$

□ 当媒质2为理想导磁体时：$\mu_2\to\infty$，界面处磁感应强度：

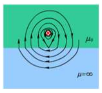
$\vec{B}_2=\mu_2\vec{H}_2 \Rightarrow H_{1t}=H_{2t}=0$

$\mu_2\to\infty$

$\vec{H}_2=0$ $\quad$ 分界面上只有H_{1n}！

$I'=I$ $\quad \vec{B}_1=\frac{\mu_1 I}{2\pi}\hat{i}\times\left(\frac{\hat{r}}{r}+\frac{\hat{r}'}{r'}\right)$

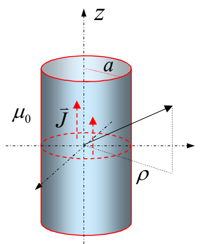
$I''=0$ $\quad \vec{B}_2=\frac{\mu_1 I}{\pi}\hat{i}\times\frac{\hat{r}''}{r''}$



51

例： 空间有一电流分布为 $\vec{J}=J_0\rho\hat{z}\ (\rho\le a)$，求任一点的磁感应强度。

解： 由于电流分布的圆柱对称性，$\vec{A}$只与坐标ρ有关。设电流所在的区域($\rho<a$)内磁矢位为$\vec{A}_1$，电流以外的区域内($\rho>a$)的磁矢位为$\vec{A}_2$，则有



$$\begin{cases}\nabla^2 A_{1z}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A_{1z}}{\partial\rho}\right)=-\mu_0 J_0\rho & (\rho<a)\\ \nabla^2 A_{2z}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A_{1z}}{\partial\rho}\right)=0 & (\rho>a)\end{cases}$$

求解得：
$$\begin{cases}\frac{\partial A_{1z}}{\partial\rho}=-\frac{1}{3}\mu_0 J_0\rho^2+\frac{C_1}{\rho} & (\rho<a)\\ \frac{\partial A_{2z}}{\partial\rho}=\frac{C_2}{\rho} & (\rho>a)\end{cases}$$

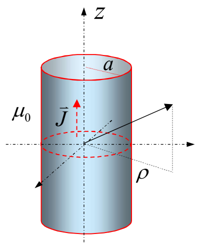
$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\begin{cases}-\frac{\partial A_{1z}}{\partial\rho}\hat{\phi}=\left(\frac{1}{3}\mu_0 J_0\rho^2-\frac{C_1}{\rho}\right)\hat{\phi} & (\rho<a)\\ -\frac{\partial A_{2z}}{\partial\rho}\hat{\phi}=-\frac{C_2}{\rho}\hat{\phi} & (\rho>a)\end{cases}$$

52

因为$\rho=0$时，磁感应强度B的数值是有限的：

$$C_1=0$$

在$\rho=a$处，磁场强度的切向分量应连续：

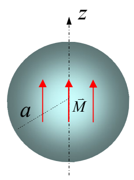


$$\left.\frac{\partial A_{1z}}{\partial \rho}\right|_{\rho=a}=\left.\frac{\partial A_{2z}}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} \Longrightarrow C_2=-\frac{1}{3}\mu_0 J_0 a^3$$

$$\vec{B}=\begin{cases} -\dfrac{\partial A_{1z}}{\partial \rho}\hat{\phi}=\dfrac{1}{3}\mu_0 J_0 \rho^2\hat{\phi} & (\rho\le a) \\ -\dfrac{\partial A_{2z}}{\partial \rho}\hat{\phi}=\dfrac{1}{3}\mu_0 J_0 \dfrac{a^3}{\rho}\hat{\phi} & (\rho> a) \end{cases}$$

例： 有一半径为a的球状永久磁铁，具有恒定的磁化强度 $\vec{M}=M_0\hat{z}$ ，球外为真空，求球内外任一点的磁场强度。

解： $\rho_m=-\nabla\cdot\vec{M}=0$ ==➔ 标量磁位应满足拉普拉斯方程；



由于球的轴对称性，标量磁位与方位角 ϕ 无关；

故待求磁位 φ_m 满足球坐标系中二维拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \varphi_m}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \varphi_m}{\partial \theta}\right)=0$$

通解为：

$$\varphi_m(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta)+\sum_{n=0}^{\infty}B_n r^{-(n+1)}\underline{P_n(\cos\theta)}$$

n 阶勒让德多项式

在$r<a$的球内，设标量磁位为φ_{m1}，因为$r=0$时φ_{m1}应为有限值，系数$B_n=0$

在$r>a$的球外，设标量磁位为φ_{m2}，因为$r\to\infty$时φ_{m2}应趋于0，则系数$A_n=0$

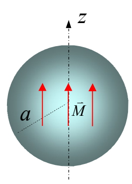
$$\varphi_{m1}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta)\qquad (r<a)$$
$$\varphi_{m2}(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)\qquad (r>a)$$

在$r=a$，标量磁位应满足边界条件
$$\begin{cases}\varphi_{m1}\big|_{r=a}=\varphi_{m2}\big|_{r=a}\\ \dfrac{\partial\varphi_{m2}}{\partial r}\Big|_{r=a}-\dfrac{\partial\varphi_{m1}}{\partial r}\Big|_{r=a}=-(\vec{M}_1-\vec{M}_2)\cdot\hat{r}=-\rho_{sm}\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{M}_1&=M_0\hat{z}\\ \vec{M}_2&=0\\ \rho_{sm}=\vec{M}_1\cdot\hat{r}=M_0\hat{z}\cdot\hat{r}&=M_0\cos\theta\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}&A_n=B_n=0\quad(n\neq 1)\\ &A_1=\frac{1}{3}M_0,\ B_1=\frac{1}{3}M_0a^3\end{aligned}$$

55

$$\begin{cases}\varphi_{m1}(r,\theta)=\dfrac{1}{3}M_0 r\cos\theta & (r\le a)\\ \varphi_{m2}(r,\theta)=\dfrac{1}{3}M_0\dfrac{a^3}{r^2}\cos\theta & (r\ge a)\end{cases}$$



$$\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})=\mu_0(-\nabla\varphi_m+\vec{M})$$
$$=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\mu_0M_0\hat{z} & (r<a)\\ \dfrac{\mu_0}{4\pi}\left[\dfrac{3(\vec{m}\cdot\hat{r})}{r^3}\hat{r}-\dfrac{\vec{m}}{r^3}\right] & (r>a)\end{cases}$$

$$\vec{m}=\frac{4}{3}\pi a^3\vec{M}$$

56

Thank You !

57