数理方程复习参考

yuki

2022/05/06

（这个文档就是我感觉学完这个课、过几天去参加闭卷考试需要掌握的知识点的分奴笔记，有需要的同学参考着看看是不是都会了，也许能为大家复习提供一点点帮助。如有谬误，请大家方便的话向我指出。）

Chap.1.　数学物理中的偏微分方程

(一些以前学过的知识应当是很熟悉的，比如一阶线性ODE的解，2阶常系数ODE与Euler方程等的解， 以及极坐标、球坐标下的拉普拉斯算子的形式等。)
1.三个典型方程（波动方程、热传导方程、场位方程），定解条件

2.无界弦震动：d'Alembert公式

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

另(1)，半无界弦：奇/偶延拓
另(2)，作业里做到过的三维空间中的球面波，做变量代换$u(r,t) = rv(r,t)$即易求。

3.叠加原理、齐次化原理

Chap.2.　分离变量法

求解偏微分方程最常用的方法，到现在应该是烂熟于心了……包括矩形域、圆域、环形域、扇形域、球域等。考试时请同学们把分离变量必要步骤写下来，即使你可能一眼看出来解是什么形式。

1.一个典型例子.

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, r \le a \\ u|_{r=a} = f(a\cos\theta, a\sin\theta) \end{cases}$$

令$u = R(r)\Theta(\theta)$，则方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

成为

$$\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{\frac{1}{r^2}R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

Θ:

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 0 : \Theta_0(\theta) = A_0 \\ \lambda_n = n^2 : \Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \end{cases}$$

相应的R:

$$R_0 = C_0 + D_0 \ln r = 1, R_n = C_n r^n + D_n r^{-n} = r^n$$

（不要在0奇异的部分）
故

$$u = \frac{A_0}{2} + \sum_n (\frac{r}{a})^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

根据$u|_{r=a}$的边界条件求出系数:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a\cos\theta, a\sin\theta) d\theta$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a\cos\theta, a\sin\theta) \cos n\theta d\theta$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a\cos\theta, a\sin\theta) \sin n\theta d\theta$$

以上便是分离变量法求解偏微分方程的完整过程。

2.Sturm-Liouville定理

Sturm-Liouville定理是我们看待二阶线性常微分方程的一个很重要的角度。
任何二阶线性常微分方程都可以化为施图姆-刘维尔方程,

$$(k(x)y')' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$$

（k、q、ρ满足的条件详见课本）
我们希望它是一个本征值问题，且唯有参数λ可以成为本征值，故

$$Ay = [\frac{1}{\rho(x)} \frac{d}{dx}(k(x)\frac{d}{dx}) - \frac{q(x)}{\rho(x)}]y = -\lambda y$$

可以证明本征值正是我们期望的一个递增序列$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 ....$
而本征函数具备正交性。本征函数族具有完备性。于是通解可以写成各本征函数的线性组合。
写个大概，详细的大家看课本。Sturm-Liouville定理一定要懂的。

3.非齐次问题

大多数时候我们碰到的都不是什么漂亮的方程，可能方程不齐次，可能边界条件不齐次，这时候就需要一些经验了。常用的方法有固有函数法、特解法和冲量原理法（就是利用齐次化原理求解）。这里没什么好说的，就是多做练习就是了。

Chap.3. 特殊函数

1. Bessel函数

(1).Helmholtz方程在柱坐标下的变量分离

$$\Delta_3 u + k^2 u = 0, \Delta_3 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

令$u(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$，有

$$\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0$$

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -\sigma, \frac{Z''}{Z} = -\mu, \sigma = \nu^2, \lambda = k^2 - \mu$$

$$\Rightarrow (rR')' + (\lambda r - \frac{\nu^2}{r})R = 0$$

令$x = \sqrt{\lambda}r, y(x) = R(r)$，得

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

这就是ν阶Bessel方程。

(2).Bessel函数

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$$

(3).性质

母函数：

$$e^{\frac{x}{2}(\xi - \xi^{-1})} = \sum_{\infty}^{\infty} J_n(x)\xi^n$$

递推公式：

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

就记住这两个就可以推其它几个常用的。

正交性：

$$\int_0^a rJ_n(\omega_m^n r)J_n(\omega_l^n r)dr = \frac{a^2}{2}[J_{n+1}(\omega_l^n a)]^2 \delta_{ml}$$

(4).固有值问题

就是柱坐标下各种含有Laplace算子的方程。如果与θ无关，那就是0阶Bessel方程。Fourier展开时要记得权函数是r。 关于模平方在三类边条下的值，至少把1类的记一下。（一定要会解方程！）

2. Legendre函数

(1).Helmholtz方程在球坐标下的变量分离

$$\Delta_3 u + k^2 u = 0, \Delta_3 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

令$u(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$，
Φ部分：

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0$$

（2π周期性$\Rightarrow \mu = m^2$）
Θ部分：

$$\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')' + (\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta})\Theta = 0$$

令$x = \cos\theta$，就得到

$$[(1-x^2)y']' + (\lambda - \frac{m^2}{1-x^2})y = 0$$

这是m阶伴随Legendre方程。书上只出现φ对称的，也就是不用管这个m。
R部分，其实是个球Bessel方程，书上没写就不考，大家也不需要知道，只需要会$k=0$时的情况——Euler方程。
总之，我们关注

$$[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0$$

$\lambda = l(l+1), l = 0,1,2...$

(2).Legendre多项式

$$P_l(x) = \sum_{n=0}^{[\frac{l}{2}]} \frac{(-1)^n(2l-2n)!}{2^l n!(l-n)!(l-2n)!}x^{l-2n}$$

前几个多项式建议记住。

(3).性质

母函数：

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l, |t| < 1$$

递推公式：

$$(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0$$
$$(2l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$$

正交性：

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{lm}$$

(4).固有值问题

课本275-278页，认真看过解方程应该没什么问题了。（一定要会解方程！）

Chap.4. 积分变换方法

1. 傅里叶变换

$$\bar{f}(\lambda)=F[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

(1). 线性

(2). 微分关系

$$F[f^{(n)}(x)]=(i\lambda)^nF[f(x)]$$

(3). 逆变换

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

(4). 频移和时移特性

$$F[f(x)e^{i\lambda_0 x}]=\bar{f}(\lambda-\lambda_0)$$
$$F[f(x-x_0)]=\bar{f}(\lambda)e^{-ix_0\lambda}$$

(5). 相似性质

$$F[f(\alpha x)]=\frac{1}{|\alpha|}\bar{f}(\frac{\lambda}{\alpha})$$

(6). 积分关系

$$F[\int_{-\infty}^{x}f(\xi)d\xi]=\frac{1}{i\lambda}\bar{f}(\lambda)$$

(7). 卷积性质

$$F[f(x)*g(x)]=\bar{f}(\lambda)\bar{g}(\lambda)$$

2. 拉普拉斯变换

略（上学期的一章，作业也写了好几题了。ILT有时候不太好求，我觉得大家不用太在意，上学期考过的这学期大概率不会再考。以前学会了之后会忘也无可厚非，平时需要用到时翻翻复变能做出来我觉得就算学会了。）

Chap.5. 基本解和解的积分表达式

1. δ函数

这里列一些关于δ函数的性质：

$$F[\delta(x)]=\int_{\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-i\lambda x}dx=1$$

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(x)dx=H(x)$$

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(x, y, z)$$

若$x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$，J是变换的Jacobi行列式，则

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \frac{1}{|J|}\delta(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)$$

另外，由$\delta(x)$的傅里叶变换可知：对1作FT是$2\pi\delta$，还可推e^{iax}、$\cos ax$、$\sin ax$的FT.

2. $Lu = \delta(M)$，基本解的求法

若$U(M)$是$LU = \delta(M)$的解，则

$$u = U(M) * f(M) = \int_{R^3} U(M - M_0) f(M_0) dM_0$$

满足方程

$$Lu = f(M)$$

物理上的理解也是很自然的。

另外就是基本解的求解，有镜像法、分离变量法、保形变换法、Fourier变换法等等。大家重点掌握镜像法吧，一般是很简单的几何关系，最后一题大概率是考这个。（关于这一章的考试，（直接引语，大家自己理解）老师说："按教材上Green 函数的基本解方程来看各种区域上的Green函数。不用Green表示。"）

这两个相信大家都会算并记住了：

$$\Delta_3 U = \delta(x, y, z) \Rightarrow U = -\frac{1}{4\pi r}$$

$$\Delta_2 U = \delta(x, y) \Rightarrow U = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$$

3. 场势

$$\begin{cases} \Delta u = -f(M) \\ u|_{\partial V} = \varphi(M) \end{cases}$$

若$G(M; M_0)$是上式方程I类边条对应的Green函数，则上式解为

$$u(M) = \int_V f(M_0) G(M; M_0) dM_0 - \oint_{\partial V} \varphi(M_0) \frac{\partial G}{\partial n} dS_0$$

4. 初值问题的基本解方法：$U_t = Lu$ 与 $U_{tt} = Lu$
略。（应当要掌握的，但是我懒得抄了。。。）

总结起来差不多就是这些。老师在群里发了复习指导，我相信对大家考试还是很有裨益的，建议着重复习老师所提及的内容。（我没有近几年考题，真想刷卷子的同学自己找找吧。平时未必能及时看到qq消息也未必能看了题就会解，但不管怎么说对于提问虽迟必回，请大家谅解。）祝大家考试顺利。