1. 解：$\hat{f}$ 的本征值满足方程：

$$\begin{vmatrix} \cos\theta-\lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda \end{vmatrix} = (\cos\theta-\lambda)^2+\sin^2\theta = 0$$

当 $\theta\in(0,\pi)$ 时，$\sin^2\theta>0$ 故上式无实数解（~~[illegible]~~）

~~$\Rightarrow \hat{f}$ 不存在[illegible]~~

（$\hat{f}$ 这一映射实际上对应于将二维矢量旋转 θ 角的操作，所以从几何上，没有任何一个非零矢量旋转 θ 角（$0<\theta<\pi$）后还能和自己共线. 所以 $\hat{f}$ 不存在 ~~本征矢量~~ 实本征值 ）

b. $\hat{f}$ 应满足（的本征值）

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(7-\lambda)=0$$

$\Rightarrow \lambda_1=2$ 对应的本征向量应满足：

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow 3b+2c=2b+3c=0 \Rightarrow b=c=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2=3$ 对应的本征向量应满足：

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2a=3a \\ 2b+2c=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ b=-c \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3=7$ 对应的本征向量应满足

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2a=7a \\ b=c \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$