复习课

一、基础知识：四种基本傅里叶变换、LT、ZT

典型信号的各种变换，包括一节、二阶基本系统的各种表示。
从 LT 到 ZT：导出 ZT，以及两种角频率之间的线性关系和s平面与z平面的基本映射关系。
三种频率之间的关系：f（Hz）、Ω（弧度/秒）、ω（弧度），$\Omega=2\pi f$，$\omega=\Omega T_s$，Ω_s，Ω_c。
采样频率：F_s，采样周期：T_s。
ω域上2π区间对应Ω域上一段区间。ω域上频谱是2π为周期的。$\Omega_s\rightarrow 2\pi$。$\omega=2\pi f/F_s$。
归一化频率：ω相对于…的归一化；Ω相对于…的归一化；f相对于…的归一化。
时间t轴可以相对于…归一化，然后可以得到序列n轴，T_s是尺度变换因子。
ω如何得到序列k轴？$\Delta\omega=2\pi/N$，k：$\omega_k=2\pi k/N$。
Ω如何得到序列k轴？$\Delta\Omega=\Delta\omega/T_s=\Delta\omega F_s=2\pi F_s/N=\Omega_s/N$，$k$：…。
掌握：模拟角频率、数字角频率、实际频率、截止频率、采样频率以及它们之间的转换。

二、卷积与相关、计算与定理、DTFT 重要性质

概念：线性卷积，线性相关，物理意义、二者的关系；循环卷积。
掌握：卷积的计算、相关的计算；时域计算，频域计算（利用 DFT 的循环卷积；FFT）。
定理：时域卷积频域乘积；频域乘积时域卷积。
定理：时域相关定理；Parseval 定理；维纳辛钦定理；（第 3 章第 2 讲）。

6. 时域相关定理

如果 $x(n)\rightarrow X(e^{j\omega})$

则有 $x(-n)\rightarrow X(e^{-j\omega})$

$x^*(n)\rightarrow X^*(e^{-j\omega})$

$x^*(-n)\rightarrow X^*(e^{j\omega})$

根据相关与卷积的计算关系，以及考虑一般性信号，则有：

$$r_{xy}(m)=x^*(-n)*y(n)\xrightarrow{DTFT}X^*(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$$

互相关：$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)y(n+m)$

$\Downarrow$ DTFT

$E_{xy}(e^{j\omega})=X^*(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$

自相关：$r_x(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)x(n+m)$

$DTFT\{r_x(m)\}=X^*(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$

$=\left|X(e^{j\omega})\right|^2\xrightarrow{\text{记为}}E_x(e^{j\omega})$

自相关函数与 DTFT 模平方关联起来了：自相关函数的DTFT=序列DTFT的模平方，且始终是ω的实函数！

7. Parseval's 定理

时域总能量： $E_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\langle x,x\rangle=\|x\|_2^2$

$$
\begin{aligned}
E_x&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x^*(n)\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\right]d\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)\,e^{j\omega n}\right]d\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})d\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{E_x(e^{j\omega})}_{\text{信号的能量谱}}d\omega
\end{aligned}
$$

8. Wiener—Khinchin 定理

功率信号自相关函数定义为

$$r_x(m)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x(n)x(n+m)$$

自相关函数的DTFT

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}r_x(m)e^{-j\omega m}=\lim_{N\to\infty}\frac{\left|X_{2N}(e^{j\omega})\right|^2}{2N+1}=\underbrace{P_x(e^{j\omega})}_{\text{信号的功率谱}}$$

信号功率 $P_x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_x(e^{j\omega})\,d\omega$

相关函数和功率谱：随机信号分析与处理的主要工具，它们都需要靠“估计”得到，这就形成了丰富的“估值理论”。

$$X_{2N}(n)=\begin{cases}x(n) & |n|\le N\\ 0 & |n|>N\end{cases}$$

DTLTI 系统的特征函数（$e^{j\omega_0 n}$，$z_0{}^n$）

掌握：可以利用特征函数引出 DTFT、ZT，以及可以利用特征函数解题。掌握从 LT 导出 ZT、利用特征函数导出 ZT 的方法，体会其意义。

三、DFT 与 FFT

为什么要提出 DFT

DFT 的导出过程！从图形解释去理解，一张很重要的图！

性质：重要的一个是：DFT 时域循环卷积（圆卷积）。

应用：计算卷积、相关、信号频谱和系统频率响应、功率谱，数字计算是离散的谱。

掌握：DFT 与 DTFS、DTFT、ZT 的关系以及应用（包括第 5 章、第 7 章的应用）。

实现 FFT 的基本思路

基 2 DIT、DIF；基 4 DIF；分裂基 FFT；CZT 的计算方法，使用 DFT 计算时的特殊性。

应用：快速卷积、快速相关的计算。

时域采样定理与频域采样定理

时域采样定理。

频域采样定理。频域采样的结果，以及注意事项，混叠表现情形？出现过时域混叠的例子，有哪些？教材例 3.7.4、3.7.5，PPT 上例子。

例2 $x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)$

$$x(n)=\underline{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)}\xrightarrow{DTFT}\underline{\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{N}k\right)}$$ 频域采样用到

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)\right)e^{-j\omega n}\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)\,e^{-j\omega n}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega kN}\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(N\omega+2\pi k)\\&=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{N}k\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega n}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+2\pi k)}$$

$$\boxed{\delta(at)=\frac{1}{a}\delta(t),a>0}$$

频域采样用到：频域间隔为$\omega_0=\frac{2\pi}{N}$，时域周期为N

注 1：若上面题目中$N=1$，则……。

注意：

长序列的分段卷积（两种基本方法）。

用 DFT 计算线性卷积，即用循环卷积计算线性卷积，补零操作。

用 DFT 进行连续时间信号频谱分析，基本步骤和注意事项，物理分辨率和计算分辨率。

计算问题：DFT 系数、循环卷积、线性卷积、FFT 计算及其应用、长序列分段线性卷积。

DTFT 与 CTFT

用数字频谱估计信号模拟频谱的注意事项，几个相关的公式，注意变量之间的替换。

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_a\left(j(\Omega-k\Omega_s)\right)\Big|_{\Omega=\omega/T_s}=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_a\left(j\left(\frac{\omega-k\cdot2\pi}{T_s}\right)\right)$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{T_s}X_a(j\Omega)|_{\Omega=\omega/T_s}=\frac{1}{T_s}X_a\left(j\frac{\omega-k\cdot2\pi}{T_s}\right)$$

注意下面关系式的应用

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}G(j\Omega-jk\Omega_s)\Big|_{\Omega=\omega/T_s}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H_a(j\Omega)|_{\Omega=\omega/T_s}$$

利用离散时间滤波器过滤连续时间信号的系统；连续时间带限微分器的离散时间实现。

四、相位、结构、特殊滤波器

相位的意义，一维信号、二维图像（矩形的模、妇女头像的相位，合成出人脸轮廓）。

线性相位，线性相位 FIR 数字滤波器的特点（两类共四种，在 FIR DF 设计中的考虑）。

线性相位 FIR 系统的零点分布满足共轭对称和单位园镜像对称；$H(z)$为镜像对称多项式。

全通滤波器及其特点、应用，利用两种形式的全通滤波器（一种是“1/1”型）。

全通滤波器的分子分母多项式是“互为镜像多项式”。

最小相位滤波器及其特点，应用（通过谱分解，构造最小相位系统，如 IIR 模拟滤波器设计）。

谱分解的概念及应用，见上一条，以及满足其它要求的拆分零极点的应用；

谱分解会用到系统频率响应模平方与系统函数的关系，这在 IIR 模拟滤波器里有深刻体现。

逆系统、反卷积、系统辨识：教材 9.4 节，PPT 参见第 5 章。

频域实现系统辨识：从信号x、系统h、输出y的相关函数及其 DTFT 和 ZT 出发进行分析。

IIR DF 和 FIR DF 的各种结构。

格形结构滤波器，三种基本结构，给定系统函数 H(z)，更够计算出其格形结构的参数。
镜像对称多项式、互为镜像对称的多项式。

五、IIR DF 设计

获取指标要求（数字域指标）。
转换为模拟域指标（对于双线性变换法，要使用频率预畸变）。
转换到模拟低通滤波器指标。
设计模拟低通原型（巴特沃思、切比雪夫 I 型）滤波器。
谱分解：$(\Omega_{\mathrm{p}},\Omega_{\mathrm{s}},\alpha_{\mathrm{p}},\alpha_{\mathrm{s}})\to|G(\mathrm{j}\Omega)|^2\to G(s)G(-s)\to G(s)$。
衰减函数的应用、求参数（特别是滤波器阶次）的公式、求极点的公式。
模拟低通原型去归一化。
转换到数字域滤波器。
高通、带通、带阻滤波器设计，为什么可以利用低通滤波器设计资源？
冲激响应不变法的特点及其模-数变换应用特点、应用局限（系统是带限的，带限于…）。
*采样周期 Ts 的影响。
双线性变换法的特点及其模-数变换应用特点。
*两种角频率之间的非线性关系，正切关系，低频时接近线性关系。
*采样周期 Ts 的影响。
切比雪夫多项式：在 IIR DF 设计中的应用，及设计最佳一致逼近 FIR DF。

六、FIR DF 设计

窗函数法：窗函数，吉伯斯现象，优化方法，又称为傅里叶级数法。
频率抽样法：原理，优化方法；公式推导（指定$H_{\mathrm{d}}(k)$的方法，内插函数，DFT 性质的应用）、$h(n)$和$h_{\mathrm{d}}(n)$的关系式。

特殊滤波器设计：理想差分器、希尔伯特变换器。

对于理想差分器，注意：如何将某个模拟频率折算到对应的数字频率？问题：并不希望整个频率范围都是理想的差分器，怎么办？某个模拟频率之上有噪声，不希望它们进入差分器的系统响应范围，怎么办？
*采样周期T_{S}的影响。

掌握到目前所学过的吉伯斯现象的产生情形和原因。

注意的一些例题：PPT 上出现过的例题，包括例 9.7.1。

*统一两类共四种 FIR DF 设计。
最佳一致逼近法：原理，3 种代表性方法，remez 迭代方法（指定哪些参数？）
其它滤波器设计：

平均滤波器，噪减比，计算公式；平滑滤波器，去趋势项，如何做；梳状滤波器，亮色分离，互补滤波器；低阶低通最佳差分器。

七、DTFS、DTFT、ZT 的关系和应用

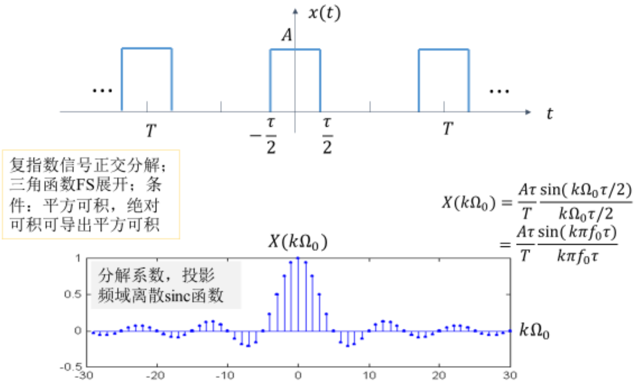
DFT 表示 ZT/DTFT 的理论；设计一种滤波器结构；一种 FIR DF 实现方法。

八、窗函数的性质及应用

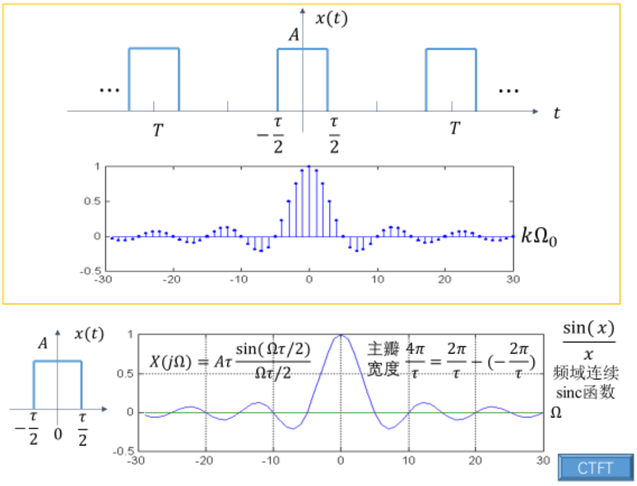
基本的矩形窗函数，sinc 函数。

1. 周期连续时间信号 → 频域离散 sinc 函数。

傅立叶系数 $X(k\Omega_0)$是第 k 次谐波的系数，所以 $X(k\Omega_0)$ 在频率坐标轴上是离散的，间隔是Ω_0。



2. 连续非周期单个矩形窗函数的频域 sinc 函数。



二者的关系

设周期为 T 的信号，CTFS：$x(t)$ <-> $X(k\Omega_0)$

主值周期区间信号，CTFT：$x_\tau(t)$ <-> $X(j\Omega)$

有：
$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{T}X(j\Omega)\Big|_{\Omega=k\Omega_0}$$

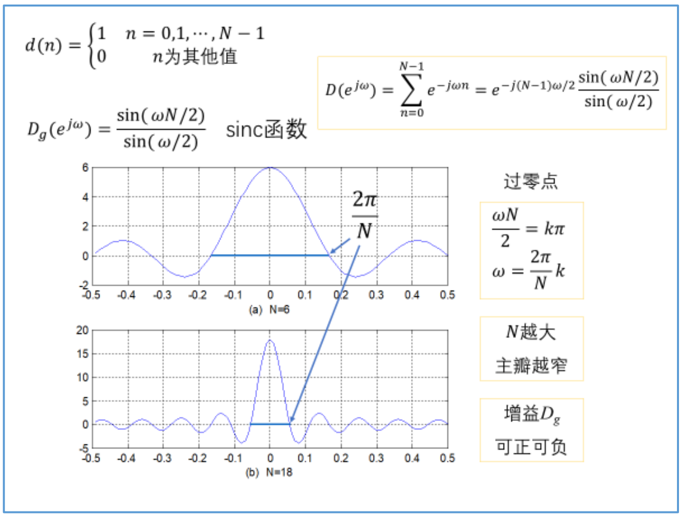
Parseval定理

周期信号的功率 $P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|X(k\Omega_0)|^2$

能量信号的能量 $E_x = \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\Omega)|^2d\Omega$

掌握定理的推导

3. 离散非周期单个矩形窗函数的频域 sinc 函数。



因果函数时的结果，线性相位；双边偶对称函数时的结果，零相位，非因果的。

频率分辨率、频谱泄露。

围绕信号、系统两个方面来说；信号频谱分析，系统频率响应。

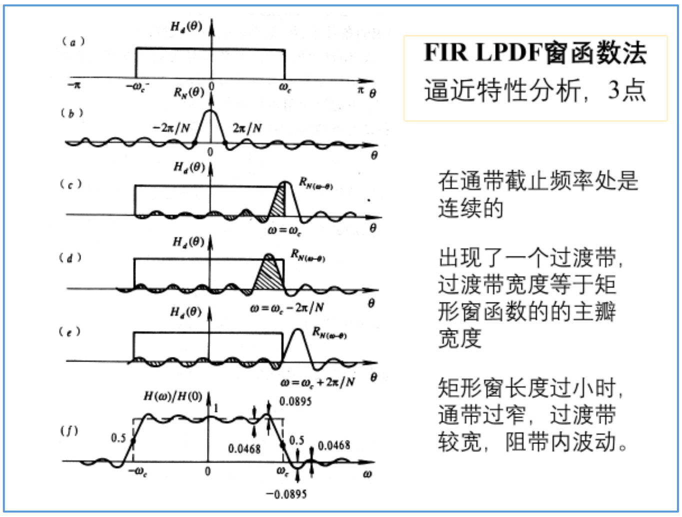
对信号做频谱分析，有频率分辨率、频谱泄露。

对 FIR DF 设计之窗函数法，设计出来的滤波器有通带波动、过渡带带宽、阻带波动

频率分辨率：把两个靠得很近的正弦信号频率区分开。

物理分辨率（CTFT、DTFT，$\Delta f=\frac{1}{T}$），计算分辨率（DFT，$\Delta f=\frac{f_s}{M}$，$\Delta\omega=\frac{2\pi}{M}$）。

$T=NT_s$，$M\geq N$。



窗函数的基本指标、作用与影响。

信号采集，默认使用矩形窗；对信号做频谱分析，就有加窗操作；也可以加汉明窗。

其它常见的窗函数。

窗函数的重要指标、在使用中的性能要求，参见信号频谱分析和 FIR DF 窗函数设计法。

窗函数的主瓣宽度、旁瓣峰值、旁瓣衰减速度，影响到使用效果，至少在信号频谱分析、系统 FIR DF 设计两个方面进行考虑。

为什么有时不用离散时间矩形窗信号，而用哈明窗，试举例说明？