第一章 线性系统的复频域分析方法

郭圆月

2022年8月29日

本章主要内容

§1.1 复频域分析

1.1.1 时间域–复频域的变换

1.1.2 系统传递函数和极点、零点

§1.2 系统响应

1.2.1 频率响应

1.2.2 伯德图方法

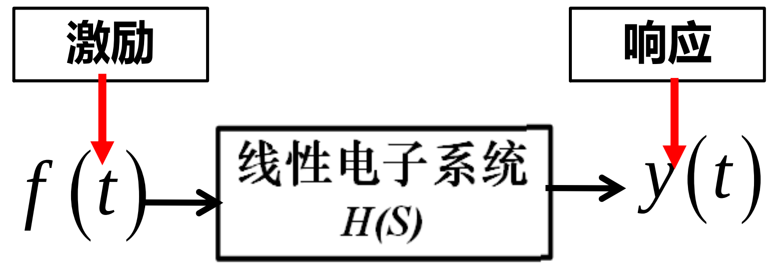
1.2.3 阶跃响应

§ 1.1 复频域分析

■ **研究对象：线性电子线路系统**

由有源器件和无源器件组成的各种线性、时不变电子电路；

■ **时域分析方法：**

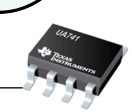


➢ **激励与响应；**

➢ **经典分析工具：线性常系数微分方程**

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_0 y(t)$$

$$= a_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_0 f(t), a_m, \ b_n \in \text{常数}$$



1.1.1 时域分析的不足之处

- 求解高阶线性常微分方程，相当复杂麻烦；
- 时域方程解不能清晰地反映出系统的内在特征。

解决之道：变换域分析 → 时域t：→ 复频域S=σ+jω

拉氏变换

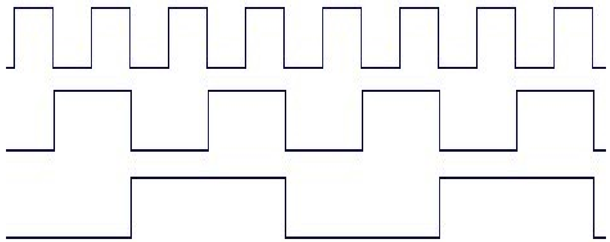
$$\underbrace{L\{f(t)\}}_{\text{象函数}}=F(s)=\int_0^{\infty}\underbrace{f(t)}_{\text{原函数}}e^{-st}dt,\ \underbrace{s}_{\text{复频率}}\in\underbrace{R_f}_{\text{收敛域}}$$

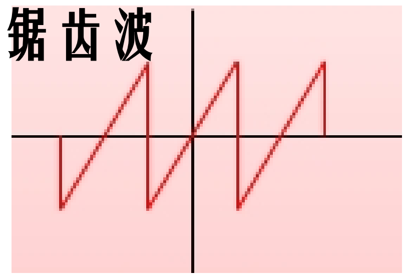
$f(t)\rightarrow F(S)$：初始状态为0下的一种广义积分变换；

复频域分析：拉氏变换将时域信号变换到新的处理域.

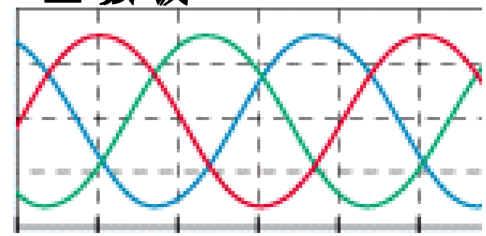
1.1.1 时域与频域

■ **时域**波形： 方波



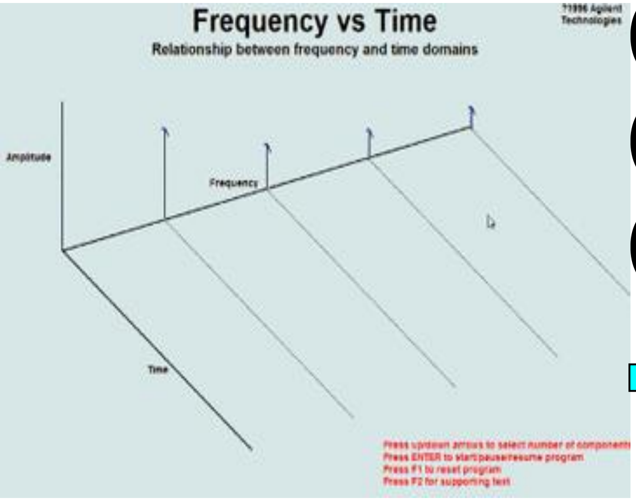


正弦波



真实性与时间的先后顺序 **形象与直观** 参数：周期、幅度、上升时间等

■ **频域**分析：时域任何波形可由正弦波的组合完全且惟一地描述；



（1）任何两个频率的正弦波都是正交的-正交基；

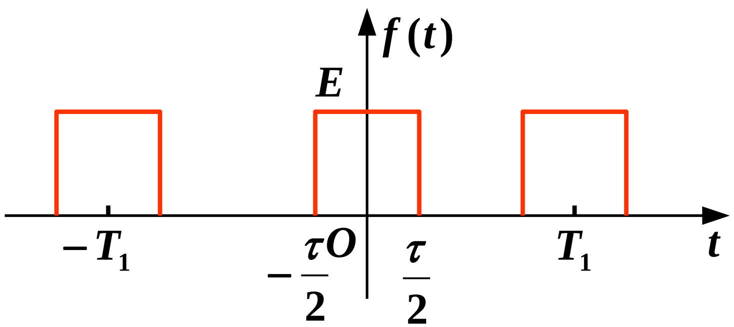
（2）精确的数学定义。

（3）正弦波及其微分值处处存在，没有上下边界

非真实的数学构造 → 简练、深刻、方便

1.1.1 傅氏变换与拉氏变换

1.周期时域信号



傅里叶变换：

三角函数形式

$$f(t) = a_0 + a_1\cos\omega_0 t + a_2\cos 2\omega_0 t + \dots$$
$$+ b_1\sin\omega_0 t + b_2\sin 2\omega_0 t + \dots$$
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n\sin n\omega_0 t)$$

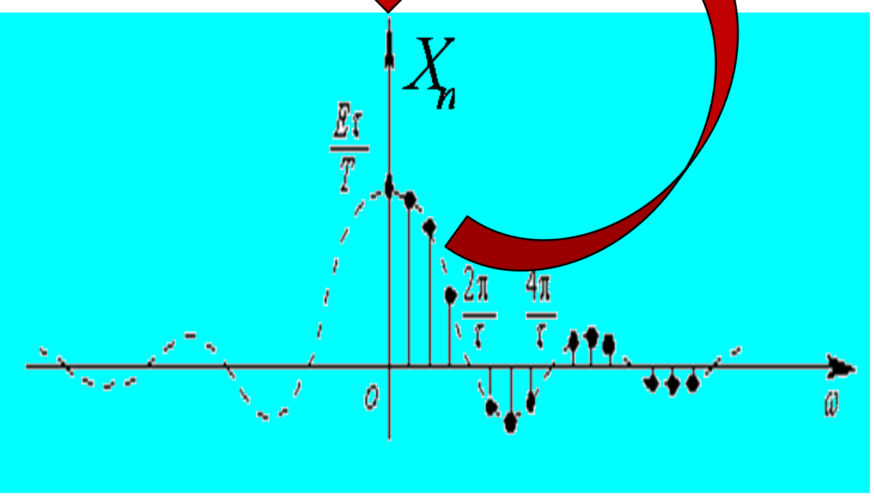
欧拉公式

复指数形式

$$F(\omega) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

频域

频谱



拉氏变换

复频域

$$\underbrace{L\{f(t)\}}_{\text{象函数}} = F(s) = \int_0^{\infty} \underbrace{f(t)}_{\text{原函数}} e^{-st} dt, \underbrace{s}_{\text{复频率}} \in \underbrace{R_f}_{\text{收敛域}} \quad s=\sigma+j\omega$$

1）常用拉氏变换的基本性质

1. 微分： $\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s)$ $\quad \frac{d^k x(t)}{dt^k} \xleftrightarrow{L} s^k X(s)$ ➡ $\frac{d}{dt} \xleftrightarrow{L} s$

2. 积分： $\int_{-\infty}^{t} x(t)dt \xleftrightarrow{L} \frac{X(s)}{s}$ ➡ $\int_{-\infty}^{t} dt \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s}$

3. 时移： $x(t-\alpha) \xleftrightarrow{L} X(s)e^{-\alpha s}$

4. 频移： $e^{-\alpha t}x(t) \xleftrightarrow{L} X(s+\alpha)$

5. 线性性质：

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &\xleftrightarrow{L} X_1(s) \\ x_2(t) &\xleftrightarrow{L} X_2(s) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xleftrightarrow{L} \alpha X_1(s) + \beta X_2(s)$$

表1　常用信号的拉普拉斯变换

$f(t)$	$F(s)$
冲激函数 $\delta(t)$	1
阶跃函数 $u(t)$	$1/s$
t	$1/s^2$
指数函数 e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
$1-e^{-at}$	$\dfrac{a}{s(s+a)}$

$f(t)$	$F(s)$
te^{-at}	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$2\lvert K\rvert e^{-\alpha t}\cos(\omega t+\theta)$	$\dfrac{\lvert K\rvert e^{j\theta}}{s+\alpha-j\omega}+\dfrac{\lvert K\rvert e^{-j\theta}}{s+\alpha+j\omega}$

1.1.2 系统传递函数的概念

$F(S) \longrightarrow$ 系统H(S) $\longrightarrow Y(S)$

■ 时域常微分方程

$$b_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+b_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+b_0 y(t)=a_m\frac{d^m f(t)}{dt^m}+a_{m-1}\frac{d^{m-1}f(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+a_0 f(t)$$

拉氏变换

■ 复频域线性方程

$$\left(b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_0\right)Y(s)=\left(a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_0\right)F(s)$$

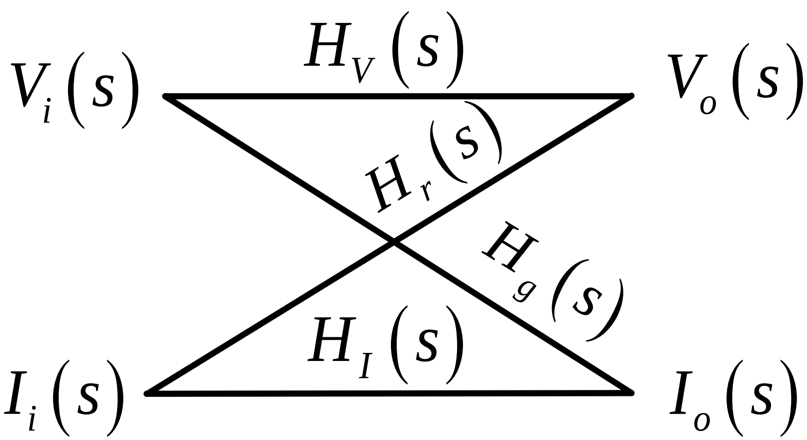
简化

系统传递函数

$$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_0}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_0},\ a_i, b_j\in \text{实常数}$$

- **s的有理分式，$m\le n$，电路系统稳定！** 若$m>n\Rightarrow\lim\limits_{s\to\infty}\left|H(s)\right|\to\infty, s\in R_f$
- **系统函数$H(s)$只取决于电路结构+器件，反映系统内在特征物理量；**
- **电路特性（频率特性、稳定性等）通常由系统函数$H(s)$唯一表征；**

1）线电系统的四种传递函数



电压传递函数 $H_V(s)=\dfrac{V_o(s)}{V_i(s)}$

电流传递函数 $H_I(s)=\dfrac{I_o(s)}{I_i(s)}$

阻抗传递函数 $H_r(s)=\dfrac{V_o(s)}{I_i(s)}$

导纳传递函数 $H_g(s)=\dfrac{I_o(s)}{V_i(s)}$

2）系统传递函数的零点与极点

■ 系统传递函数标准形式：$H(s)=\dfrac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1}....+a_0}{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}....+b_0}$

$$\Rightarrow H(s)=K\frac{(s-z_1)(s-z_2).....(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)......(s-p_n)}=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=K'\frac{\prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{s}{p_j}\right)}$$

■ 系统零点：传递函数分子多项式等于0的根；

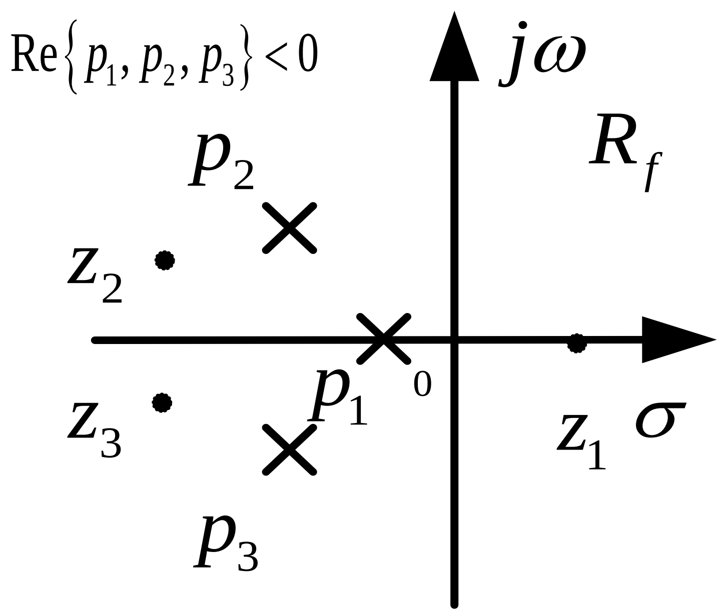
$$H(s)=\left.\frac{Y(s)}{F(s)}\right|_{s=z}=0\Rightarrow \left.Y(s)\right|_{s=z}=0 \Rightarrow \text{零点}z_i$$

■ 系统极点：传递函数分母多项式等于0的特征根；

$$H(s)=\left.\frac{Y(s)}{F(s)}\right|_{s=p}\to\infty\Rightarrow \left.F(s)\right|_{s=p}=0 \Rightarrow \text{极点}p_j$$

3）零极点分布图

■定义：零点用•、极点用x在复平面上绘制出来。



三零点三极点系统

➢ 所有零、极点为实数或共轭复数对。

$$z_2 = z_3^* \qquad p_2 = p_3^*$$

➢ 稳定系统，极点p_j分布在**虚轴左侧s平面内**，而零点没此约束。?

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{s-p_j} \rightarrow e^{p_j t} = e^{(\sigma + j\omega)t} \\ \lim\limits_{t\to\infty} h(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma < 0$$

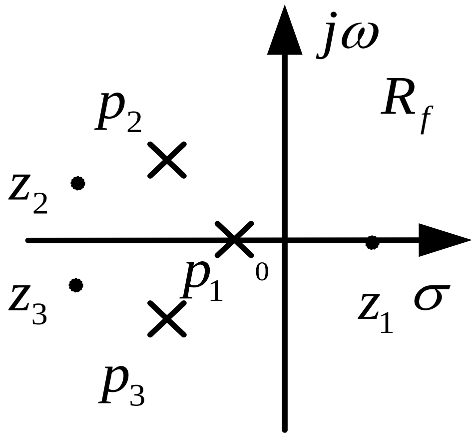
系统稳定性判断：

①p_j位于S面虚轴左侧 => 系统稳定；

②p_j位于S面虚轴右侧 => 系统不稳定；

③p_j位于S面虚轴 => 临界状态；

3）零极点分布与系统函数



■零点、极点分布：

➢ 判断电路系统稳定性；

➢ 极点p_j数目取决于电路系统电容、电感、有源器件的个数；

■系统传递函数$H(S)$：全面反映系统特性；

$$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=K\frac{(s-z_1)(s-z_2).....(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)......(s-p_n)}=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

✓ 一种系统传输属性，与激励无关；

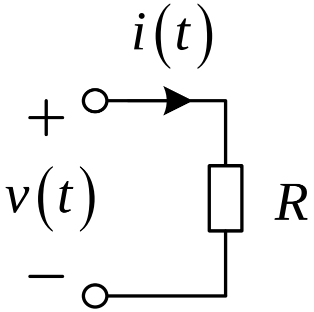
✓ 由电路结构+零极点唯一确定；

✓ 与冲激的响应函数对应；

$$h(t)=L^{-1}\left[H(s)\cdot\delta(s)\right]$$
$$=L^{-1}\left[H(s)\cdot 1\right]=L^{-1}\left[H(s)\right]$$

5）R、L、C元件的复频域模型

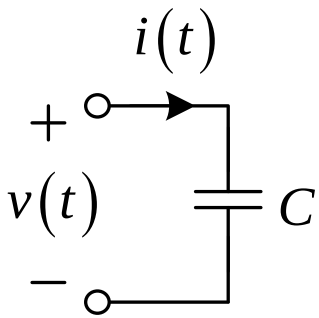
时间域	复频域



$$v(t)=R\cdot i(t)$$

复电阻

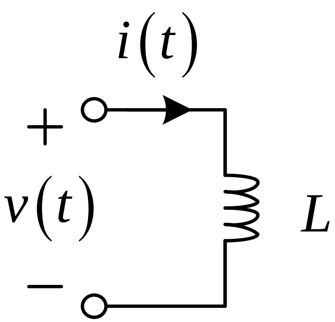
$$V(s)=RI(s)\Rightarrow Z_R(s)=R$$



$$v(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt$$

复容抗

$$V(s)=\frac{1}{sC}I(s)\Rightarrow Z_C(s)=\frac{1}{sC}$$



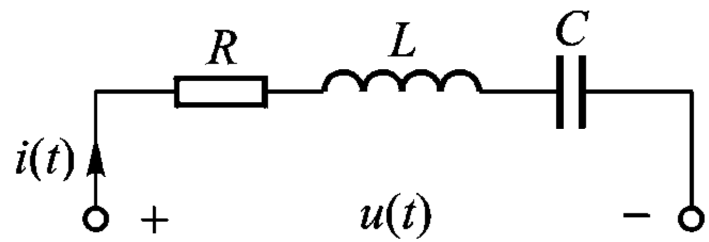
$$v(t)=L\frac{di(t)}{dt}$$

复感抗

$$V(s)=L\cdot S\cdot I(s)\Rightarrow Z_L(s)=L\cdot S$$

6）复频域形式的欧姆定律

■**R、L、C**元件串联电路为



■由伏安关系可得到电路方程

$$RI(s)+sLI(s)+\frac{1}{sC}I(s)=U(s) \qquad \left[R+sL+\frac{1}{sC}\right]I(s)=U(s)$$

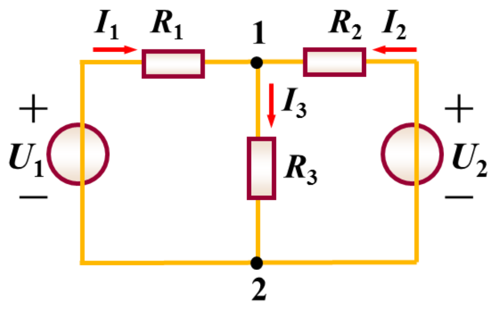
■ 欧姆定律的复频域形式：

$$U(s)=Z(s)I(s) \qquad I(s)=Y(s)U(s)$$

复频域阻抗：$Z(s)=R+sL+\dfrac{1}{sC}$ 　　复频域导纳：$Y(s)=\dfrac{1}{Z(s)}$

7）基尔霍夫定律的复频域形式

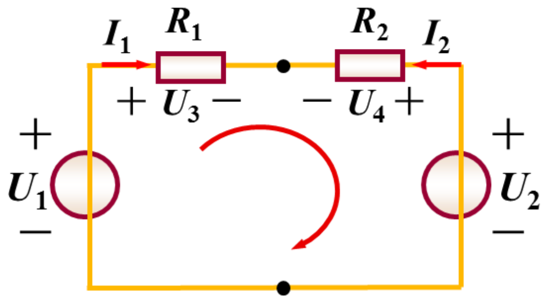
1. 基尔霍夫节点电流定律KCL： $\sum i(t)=0$



两边取拉氏变换： $\sum I(s)=0$

结论：电路中任一节点各支路电流象函数的代数和为零。

2. 基尔霍夫回路电压定律KVL： $\sum u(t)=0$

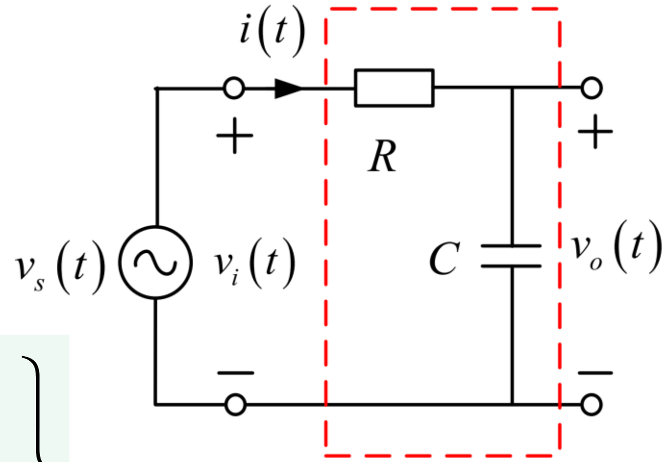


两边取拉氏变换： $\sum U(s)=0$

结论：电路中任一闭合回路各支路电压象函数的代数和为零.

例题1：一阶RC电路的复频域分析？

1\. 已知一阶RC电路结构如图所示，求复频域输出电压$V_o(s)$?



第一步

分析题意，标明电路电压电流定义方向，将时域信号变换到复频域

$$\left.\begin{aligned} v_i(t) &\xleftrightarrow{L} V_i(s) \\ v_o(t) &\xleftrightarrow{L} V_o(s) \end{aligned}\right\}$$

第二步

电路中器件复阻抗表征，根据电路回路结构，解复频域响应。

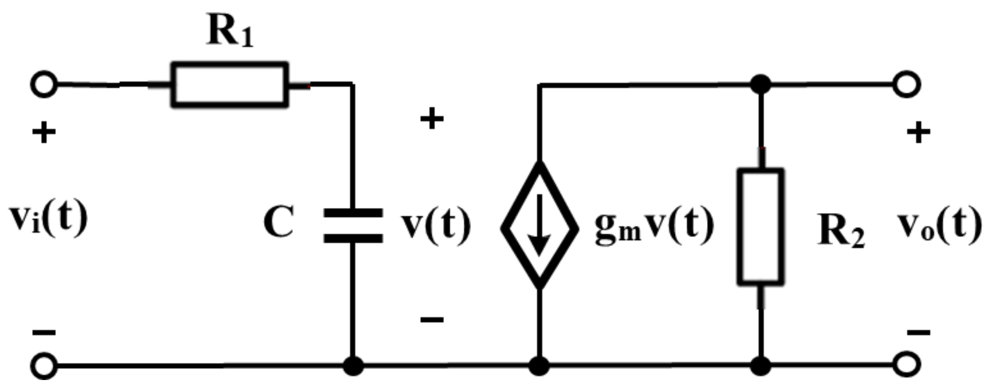
$$\boxed{V_o(s) = \frac{1/sC}{R+1/sC} V_i(s) = \frac{1}{1+sRC} V_i(s)}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1+sRC}}$$

单电容
单极点无零点
系统函数

例题2：线性电路系统传递函数？

2. 求解一阶电路的系统函数复频域分析



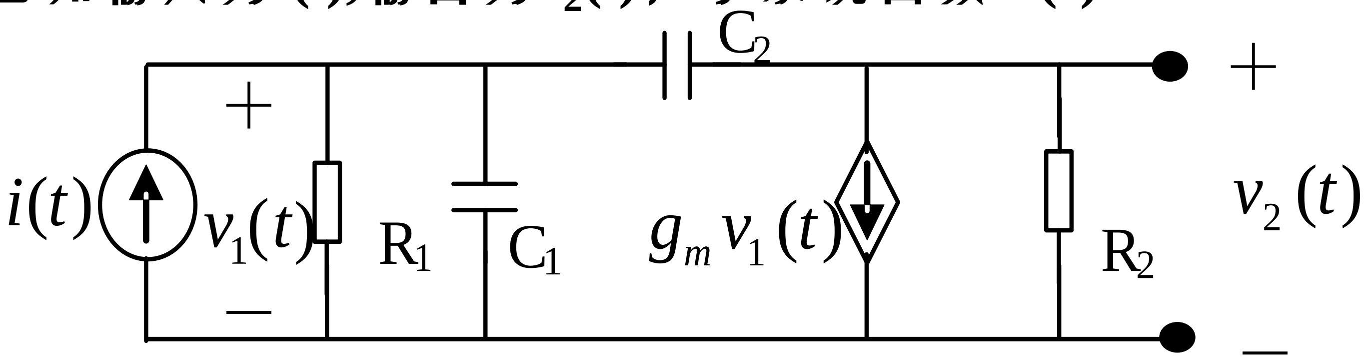
解：

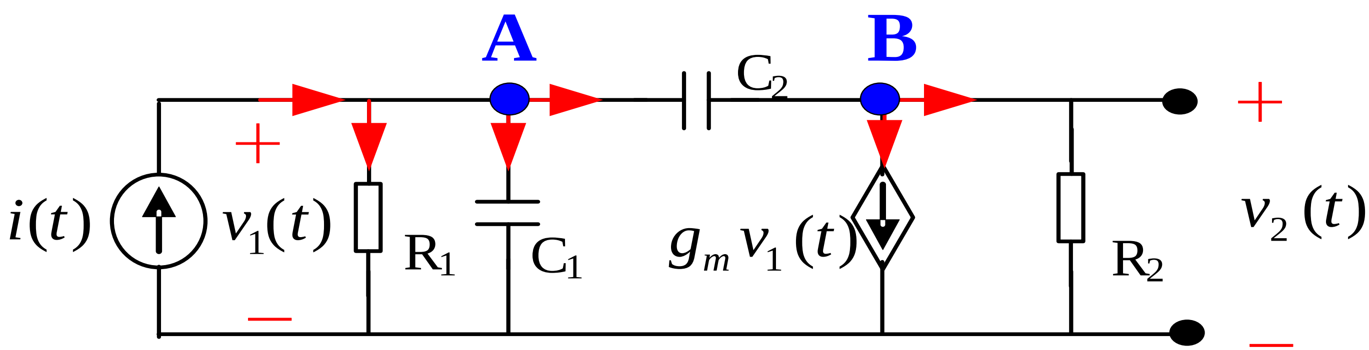
$$\left.\begin{aligned} v_i(t) &\xleftrightarrow{L} V_i(s) \\ v(t) &\xleftrightarrow{L} V(s) \\ v_o(t) &\xleftrightarrow{L} V_o(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} V_i(s) &= V(s) + R_1 \cdot \frac{V(s)}{\dfrac{1}{sC}} \\ V_o(s) &= -g_m V(s) \cdot R_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-g_m R_2}{1 + sR_1 C}$$

单电容
单极点无零点
系统函数

例题3：二阶电路系统传递函数？

3. 已知输入为$i(t)$,输出为$v_2(t)$，求系统函数$H(s)$?





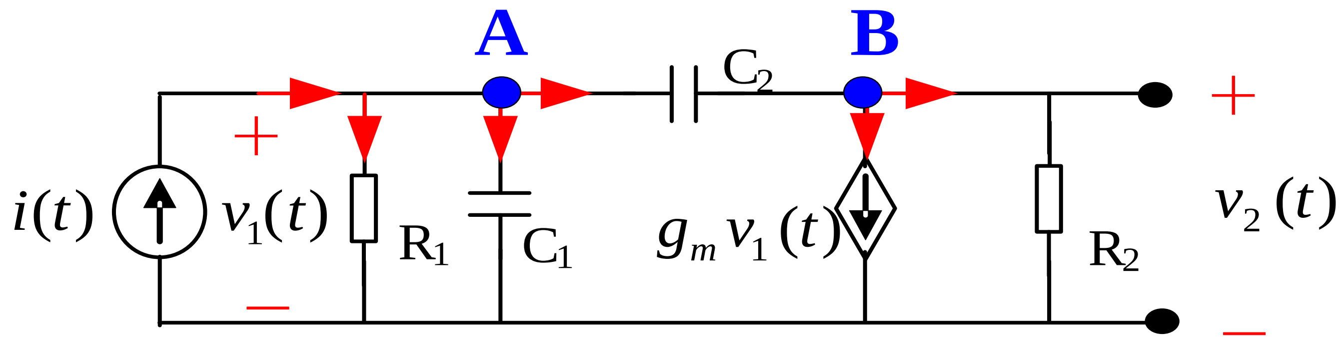
第一步

分析题意，标明电路的输入输出端口，所需电压电流的定义方向，并变换到复频域

$$\left.\begin{aligned} i(t) &\xleftrightarrow{L} I(s) \\ v_1(t) &\xleftrightarrow{L} V_1(s) \\ v_2(t) &\xleftrightarrow{L} V_2(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{阻抗传递函数}$$

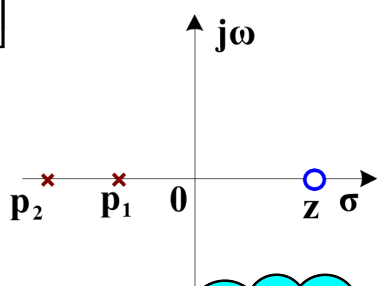
$$H(s) = \frac{V_2(s)}{I(s)} = ?$$

例题3：二阶电路系统传递函数？



第二步：节点电流法，复频域A、B两节点电流方程。

$$\begin{cases} I(s) = \dfrac{V_1(s)}{R_1} + sC_1 \cdot V_1(s) + sC_2\left[V_1(s) - V_2(s)\right] \\ sC_2\left[V_1(s) - V_2(s)\right] = g_m V_1(s) + \dfrac{V_2(s)}{R_2} \end{cases}$$

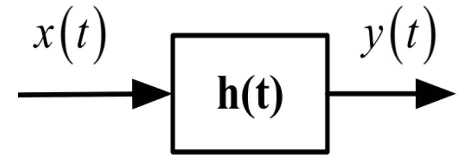


$$H(s) = \frac{V_2(s)}{I(s)} = \frac{R_1R_2(sC_2 - g_m)}{s^2R_1R_2C_1C_2 + s\left(R_1C_1 + \left(R_1 + R_2 + R_1R_2g_m\right)C_2\right) + 1}$$

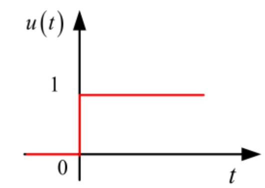
双电容
双极点单零点
系统函数

问题：几个零点、极点？为什么？系统稳定吗？

§1.2 系统响应



- 常用的激励函数有哪些?
  - 正弦函数sinωt：不同频率的稳态特性；=>频域
  - 阶跃函数u(t):　瞬时变化非稳态特性；=>时域
  - 冲激函数δ(t):　理论分析系统传递函数特性；



- 系统复频域响应：由系统传递函数和激励共同决定；

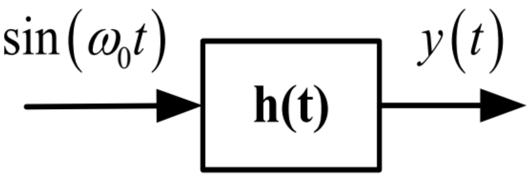
$$Y(s)=H(s)F(s)$$

- 系统时域响应
  - 根据系统传递函数H(s)，将系统在特定激励F(S)下的输出响应Y(S)，通过拉氏反变换到时域中来。

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\{H(s)F(s)\}$$

§1.2.1 频率响应

■定义：系统对正弦激励信号的**稳态响应**。



$$\sin\omega_0 t \xleftrightarrow{L} F(S)=\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0{}^2}=\frac{\omega_0}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)}$$

复频率响应

$$Y(S)=H(S)\frac{\omega_0}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)}=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}\cdot\frac{\omega_0}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)}$$

部分分式展开

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{K_j}{s-p_j}+\frac{K_0}{s+j\omega_0}+\frac{\overline{K_0}}{s-j\omega_0}$$

问题：K_0、$\overline{K_0}$由什么决定?

拉氏反变换

时域频响

$$y(t)=\boxed{\sum_{j=1}^{n}K_je^{p_jt}}+\boxed{K_0e^{-j\omega_0t}+\overline{K_0}e^{j\omega_0t}}$$

t→∞,趋于0；自由响应。

强迫响应。

§1.2.1 频率响应

■稳态频率响应：

$$Y(S)=\sum_{j=1}^{n}\frac{K_j}{s-p_j}+\frac{K_0}{s+j\omega_0}+\frac{\overline{K_0}}{s\text{-}j\omega_0}$$

$$\Rightarrow (s+j\omega_0)Y(s)=K_0+(s+j\omega_0)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{K_j}{s-p_j}+\frac{\overline{K_0}}{s\text{-}j\omega_0}\right)$$

$$\xrightarrow{s=-j\omega_0} K_0=(s+j\omega_0)Y(s)\big|_{s=-j\omega_0}=H(s)\cdot F(s)\cdot(s+j\omega_0)\big|_{s=-j\omega_0}$$

$$=H(s)\cdot\frac{\omega_0}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)}(s+j\omega_0)\big|_{s=-j\omega_0}=\frac{H(\text{-}j\omega_0)}{-2j}$$

同理可推

$$\xrightarrow{s=j\omega_0} \overline{K_0}=(s\text{-}j\omega_0)Y(s)\big|_{s=j\omega_0}=H(s)\cdot F(s)\cdot(s\text{-}j\omega_0)\big|_{s=j\omega_0}=\frac{H(j\omega_0)}{2j}$$

$\Rightarrow$ 系统K_0与$\overline{K}_0$由系统$H(s)$和正弦激励$F(s)$共同决定！

（1）系统频率响应$H(j\omega)$

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}K_j e^{-j\omega_j t}+K_0 e^{-j\omega_0 t}+\overline{K_0}e^{j\omega_0 t}=0+\frac{H(-j\omega_0)}{-2j}e^{-j\omega_0 t}+\frac{H(j\omega_0)}{2j}e^{j\omega_0 t}$$

$$=\frac{|H(j\omega_0)|e^{-j\phi(\omega_0)}}{-2j}e^{-j\omega_0 t}+\frac{|H(j\omega_0)|e^{j\phi(\omega_0)}}{2j}e^{j\omega_0 t}=|H(j\omega_0)|\sin(\omega_0 t+\phi)$$

- **频率响应：相同频率正弦信号，幅度增大$|H(j\omega_0)|$，相移$\phi(\omega_0)$；**
  - $|H(j\omega)|$、$\phi(\omega)$分别与$H(j\omega)$的**模和幅角对应**；

    $$\sin\omega t \rightarrow \boxed{H(S)} \rightarrow |H(j\omega)|\sin(\omega t+\phi(\omega))$$

  - 对于不同频率正弦信号，频率响应**取决于 $H(j\omega)$** $\sim\omega$
- **频率响应函数定义：**

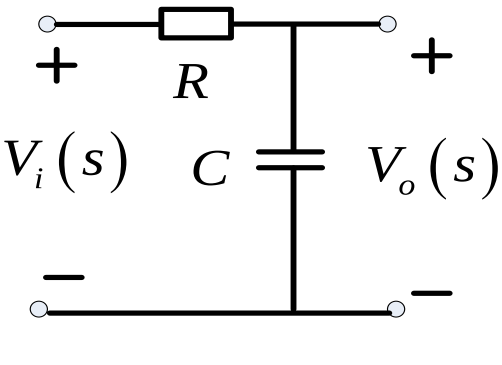
$$\boxed{H(j\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}}=\underbrace{|H(j\omega)|}_{\text{幅频响应}}e^{\overbrace{j\phi(\omega)}^{\text{相频响应}}}$$

反映线性电路系统传递函数的频率特性！

举例1：*RC*电路的频率响应

系统传递函数的复频域分析

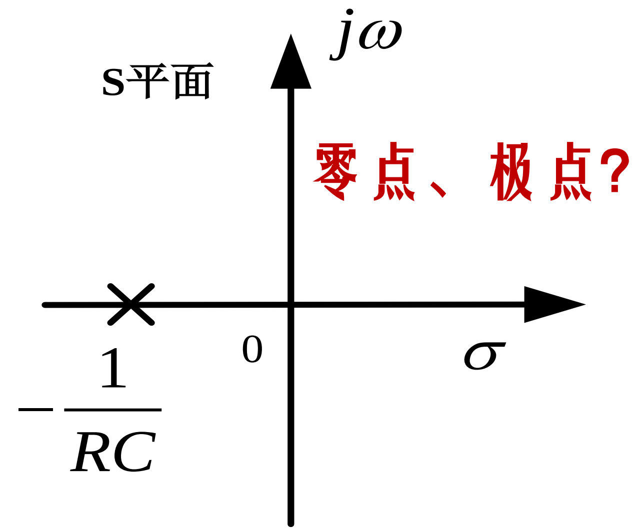
$$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{1/sC}{R+1/sC}=\frac{1}{1+sRC}=\frac{1}{1+\dfrac{s}{1/RC}}$$



频率响应

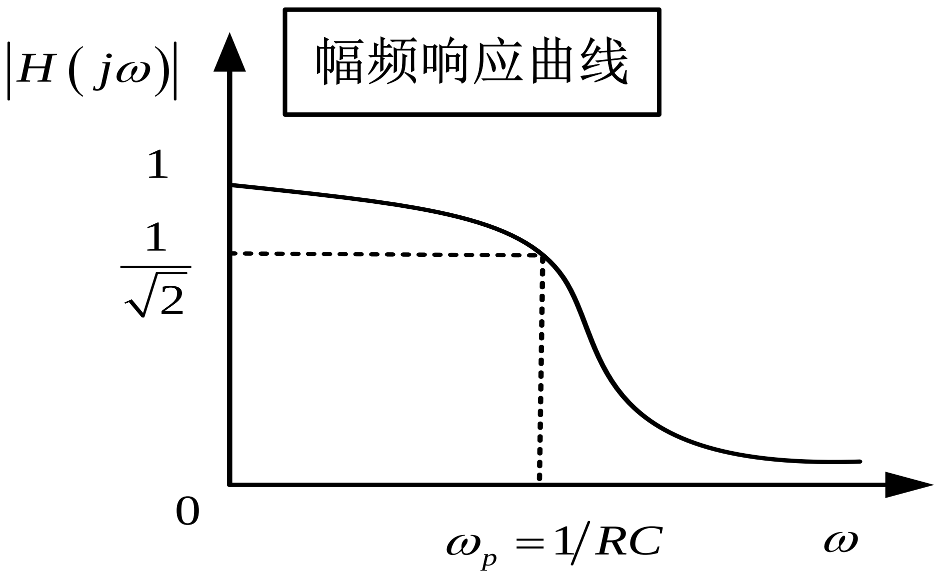
$$H(j\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

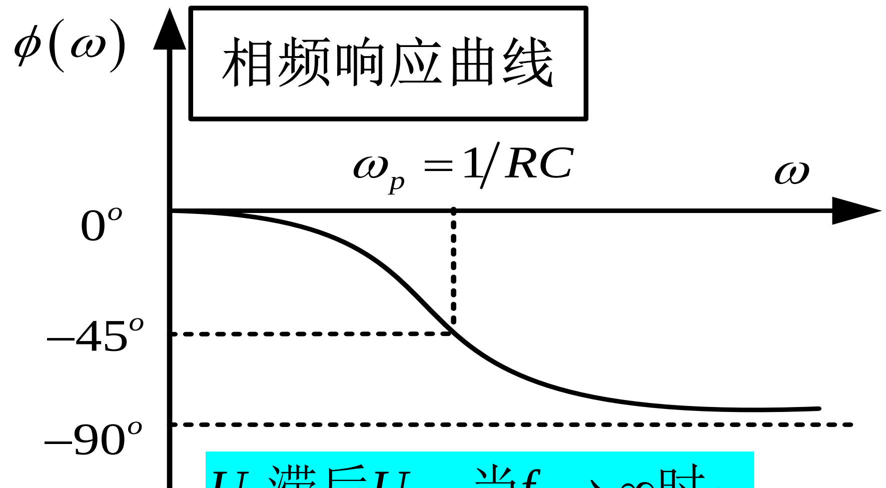
$$\Rightarrow\begin{cases}\text{幅频:}\left|H(j\omega)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\\ \text{相频：}\ \phi(\omega)=-\arctan(\omega RC)\end{cases}$$



零点、极点分布图

举例1：*RC*电路的频率响应





U_o滞后U_i，当$f \to \infty$时；

$|U_o| \to 0$，U_o滞后U_i 90^o。

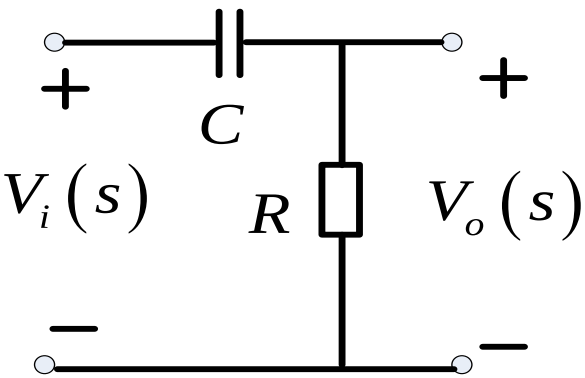
- **单极点一阶低通**系统：低频信号通过，高频输入信号大幅衰减。
- **转折频率**： $\omega_p = |p| = 1/RC$

$$\Rightarrow 20\lg\left|H\left(j\omega_p\right)\right| = -3dB \qquad \phi\left(\omega_p\right) = -45^o$$

举例2：CR电路的复频域分析

■ 系统传递函数

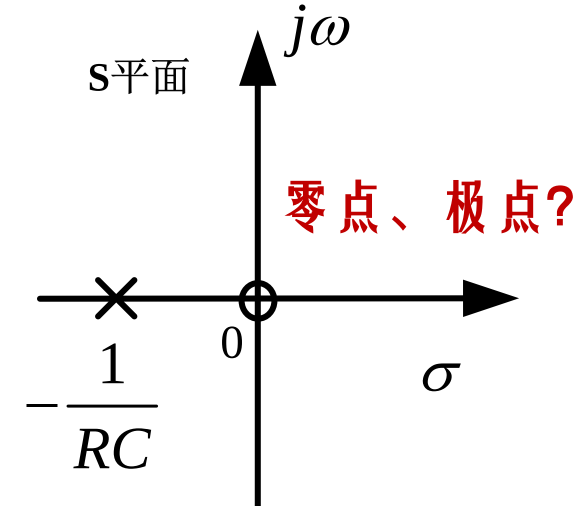
$$\Rightarrow H(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{R}{R+\dfrac{1}{sC}}=\frac{sRC}{1+sRC}$$



■ 频率响应

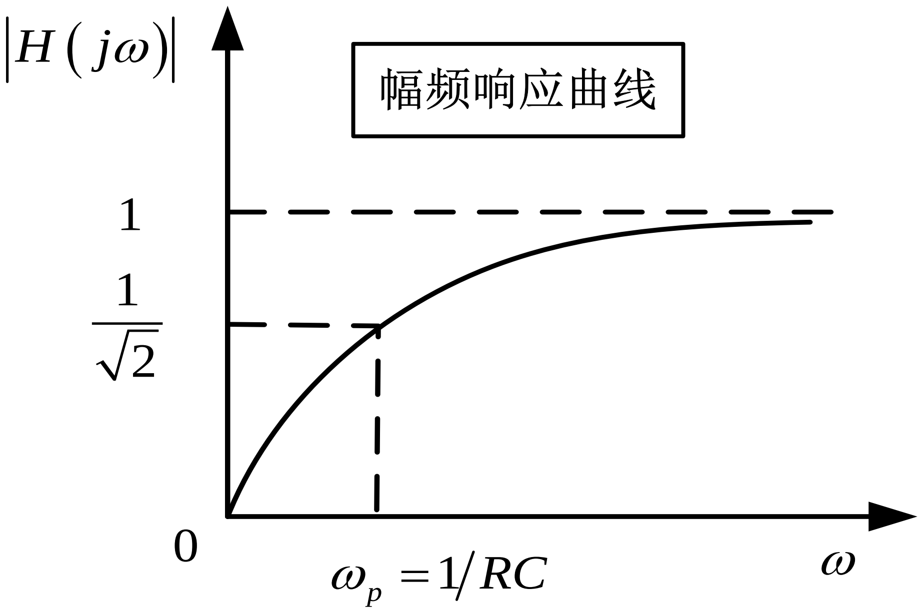
$$H(j\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}=\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$$

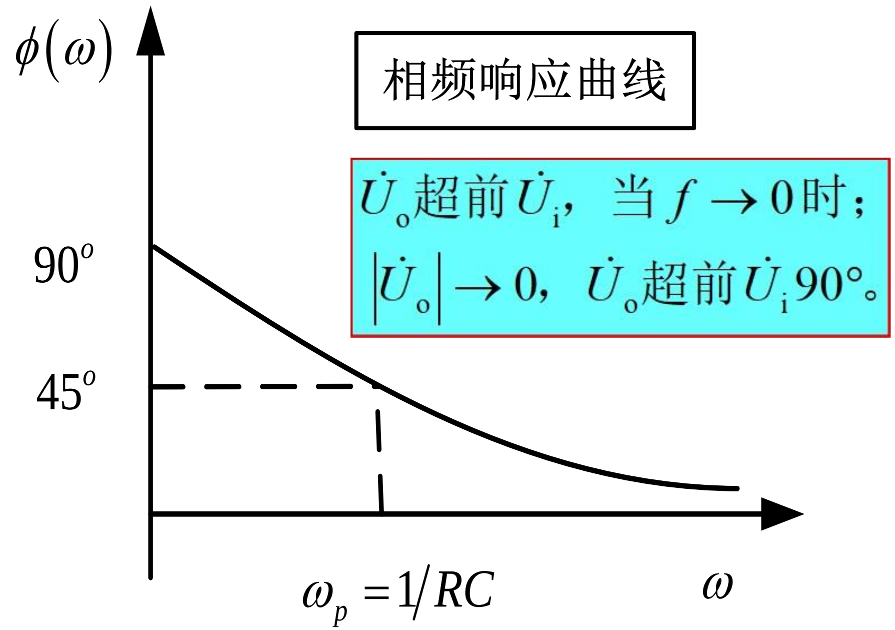
$$\Rightarrow\begin{cases}\text{幅频:}\left|H(j\omega)\right|=\dfrac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\\[2ex]\text{相频：}\ \phi(\omega)=90^o-\arctan(\omega RC)\end{cases}$$



零点、极点分布图

举例2：系统频率响应



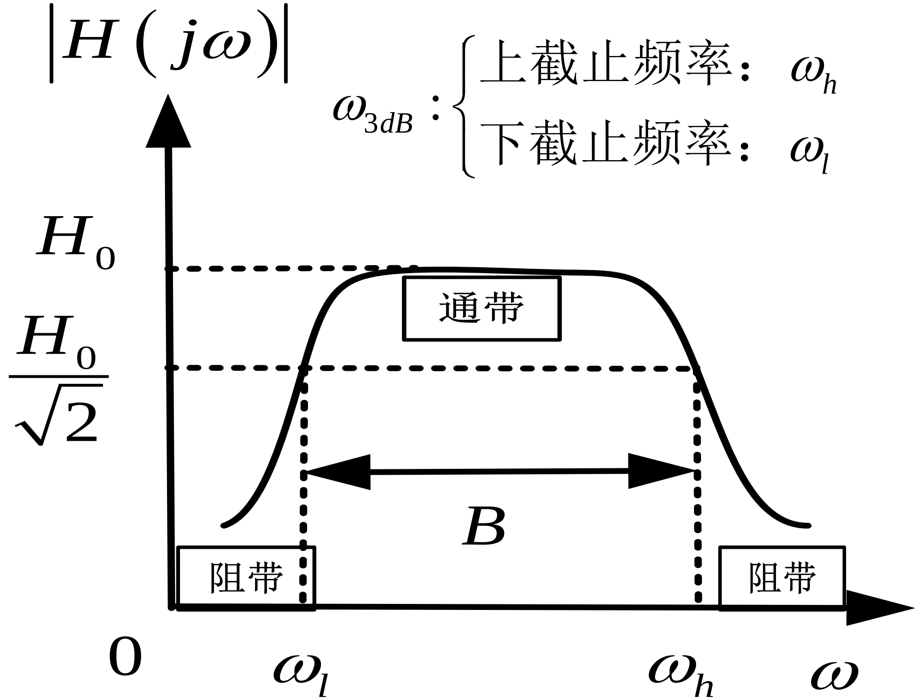


■ **单极点**一阶高通系统：允许**高频**信号通过，**低频**输入信号大幅衰减。

■ **转折频率：**

$$\omega_p = |p| = 1/RC \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega_p)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \phi(\omega_p) = 45^o \end{cases}$$

（2）频率响应三个主要参数



频率响应参数

通带增益：H_0

3dB截止频率：ω_{3dB}

$$\left|H\left(j\omega_{3dB}\right)\right| = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \sim -3dB$$

通带带宽：$B = \omega_h - \omega_l$

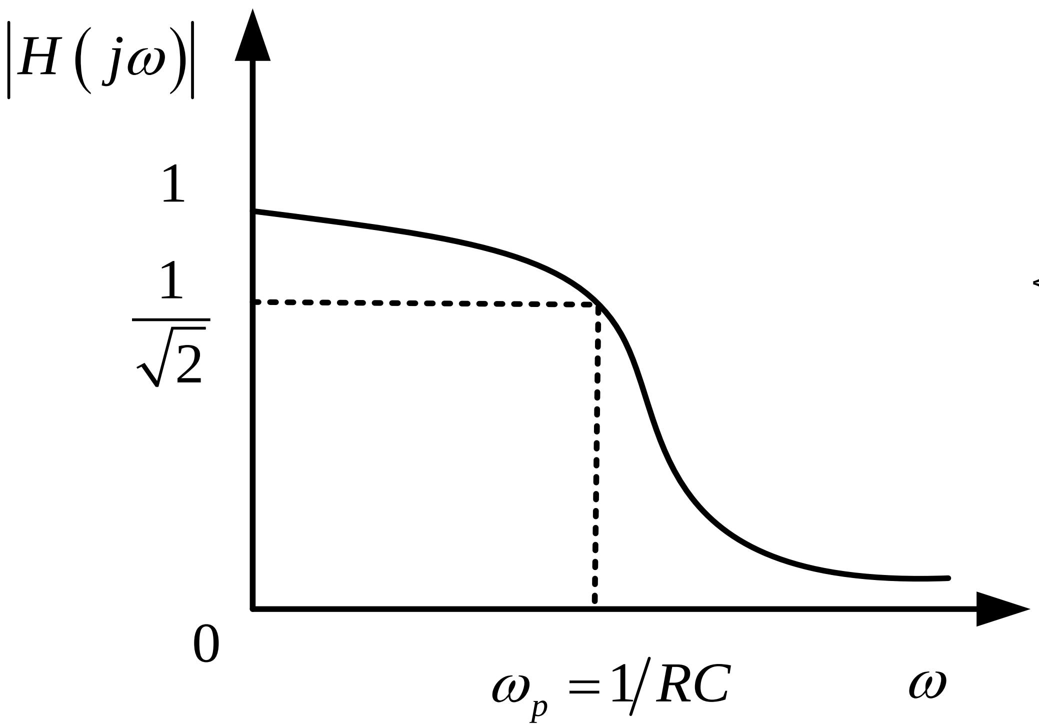
截止频率ω_{3dB}与转折频率ω_{pj}的区别？

- 截止频率ω_{3dB}与系统通带有关；
- 转折频率ω_{pj}的与极点p_j一一对应；
- 除单极点系统，$\omega_{3dB} \neq \omega_{p_j}$

幅频响应$|H(j\omega)|$仅是频率的函数，具体反映了系统对不同频率分量的选通性能！

（2）频率响应参数

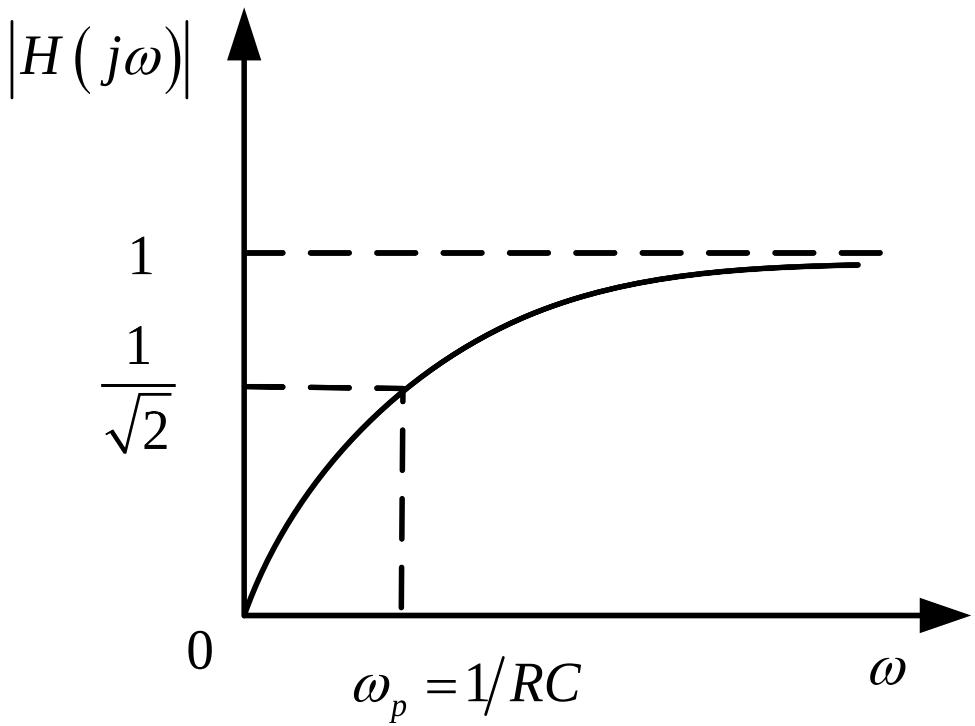
■ **例：单极点RC低通系统的频率响应参数**



$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ \omega_h = \omega_p = 1/RC \\ B = \omega_h \end{cases}$$

（2）频率响应参数

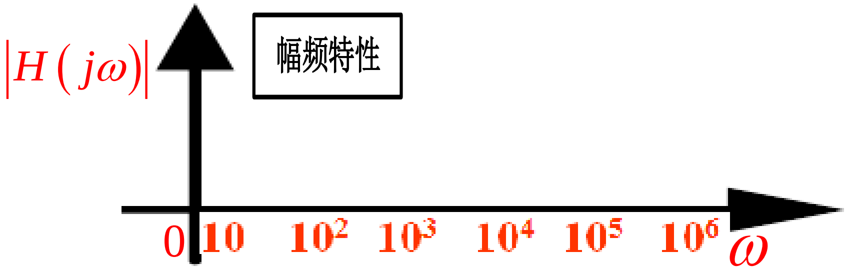
■ 例：单极点*CR***高通系统**的频率响应参数

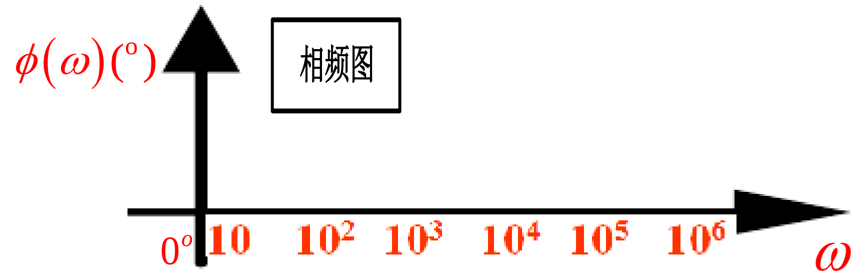


$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ \omega_l = \omega_p = 1/RC \\ B = \quad > \omega_l \end{cases}$$

§1.2.2 伯德图方法

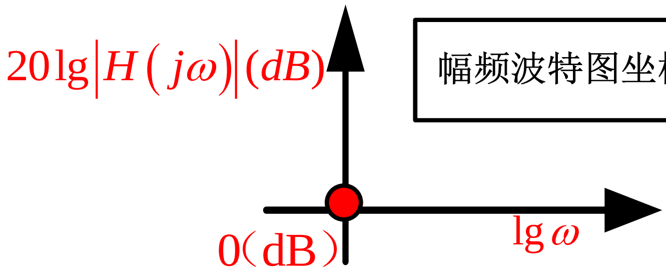
■ 对数坐标系

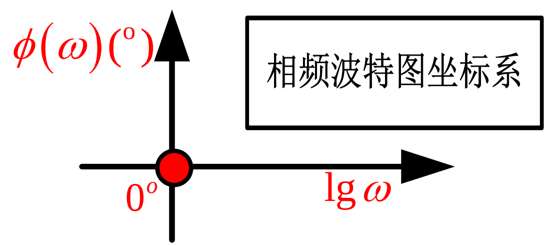




➡ **频率跨度大，给绘图带来困难，如何扩大频率的视野?**

■ 伯德图：以对数为标尺、用折线绘制的幅频、相频特性曲线





➡ **问题：ω=0时，坐标在哪里?**

§ 1.2.2 伯德图方法

■分贝dB的概念

1. 功率：$10\lg P$

2. 幅度：$20\lg U(s)$;　$20\lg I(s)$;　$20\lg \left|H(j\omega)\right|$;

3. 运算关系：

$$10\lg A\times B = 10\lg A + 10\lg B$$

$$10\lg \frac{A}{B} = 10\lg A - 10\lg B$$

（1）伯德图方法步骤

■第一步：系统函数**标准归一化**处理，分别**独立分析**零、极点和常数项

$$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=K'\frac{\prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{s}{p_j}\right)}$$

➤幅率响应：

常数项　　零点　　极点

$$20\lg\left|H(j\omega)\right|=20\lg\left|K'\right|+\sum_{i=1}^{m}20\lg\left|1-\frac{j\omega}{z_i}\right|-\sum_{j=1}^{n}20\lg\left|1-\frac{j\omega}{p_j}\right|$$

➤相频响应：

$$\phi(\omega)=\begin{matrix}0^o\\-180^o\end{matrix}+\sum_{i=1}^{m}\arctan\left(\frac{-\omega}{z_i}\right)-\sum_{j=1}^{n}\arctan\left(\frac{-\omega}{p_j}\right)$$

在对数域，系统所有零极点的幅频及相频贡献满足**线性叠加**关系；

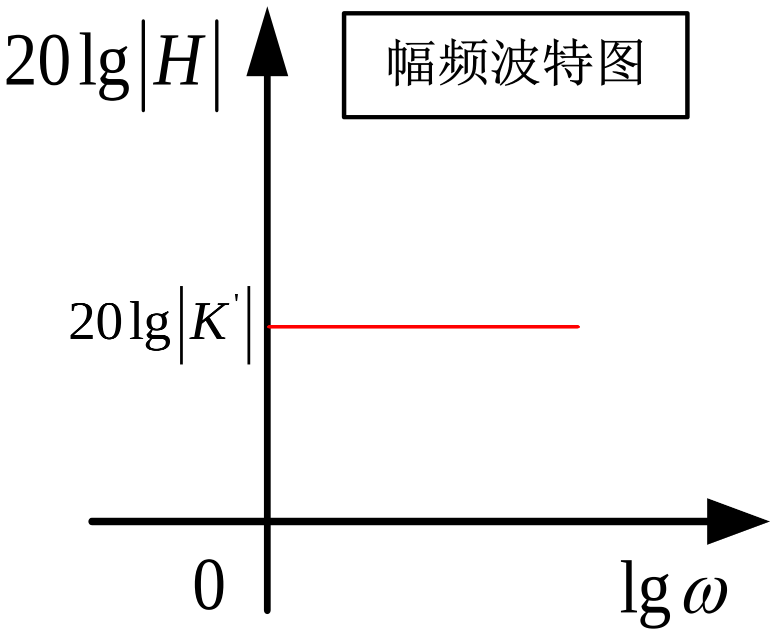
（1）伯德图方法步骤

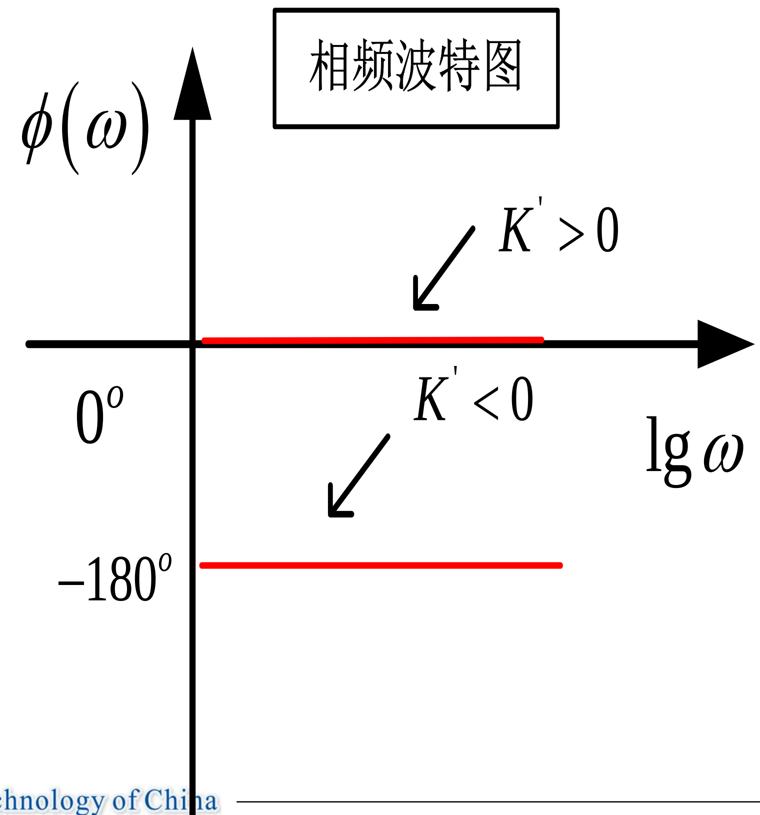
■第二步：绘制出各单项常数项、零点、极点等幅频和相频伯德图；

■第三步：将各个单项伯德图线性叠加在一起，即可完整获得系统的幅频和相频伯德图；

（2）单项常数项K'—幅频、相频响应

$$\begin{cases} K' > 0 \\ K' < 0 \end{cases} \Rightarrow 20\lg|H(j\omega)| = 20\lg|K'|$$





（3）单项负实极点p_j—幅频响应

定义转折频率： $\omega_p = -p_j$

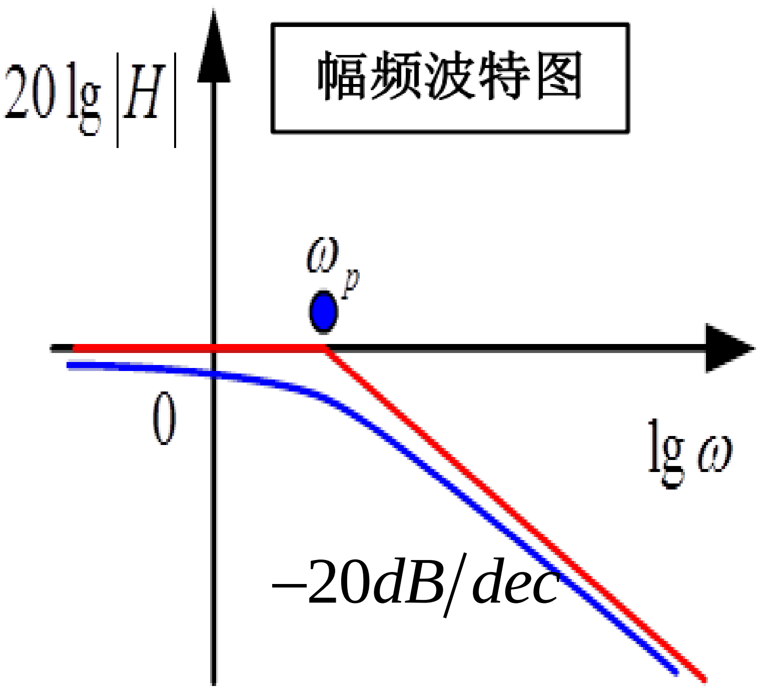
$$\Rightarrow 20\lg|H(j\omega)| = -20\lg\left|1-\frac{j\omega}{p_j}\right| = -20\lg\left|1+\frac{j\omega}{\omega_p}\right| = -20\lg\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}$$

近似折线处理

$$= \begin{cases} \omega \ll \omega_p, -20\lg\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_p}\right)^2} \approx 0dB \\ \omega \gg \omega_p, -20\lg\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_p}\right)^2} = -20\lg\dfrac{\omega}{\omega_p}(dB) \end{cases}$$

（3）单项负实极点p_j–幅频伯德图

■ 折线化处理：



一个转折点：极点值ω_p

➢ 第一直线段：横轴上0到ω_p的水平直线；

➢ 第二直线段：起始于转折频率ω_p，斜率为$-20dB/dec$的直线；

➢ 折线化存在误差，最大误差位置在转折频率处，且存在3dB误差；

$$-20\lg\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}\Bigg|_{\omega=\omega_p}=-3dB$$

（3）单项负实极点p_j——相频响应

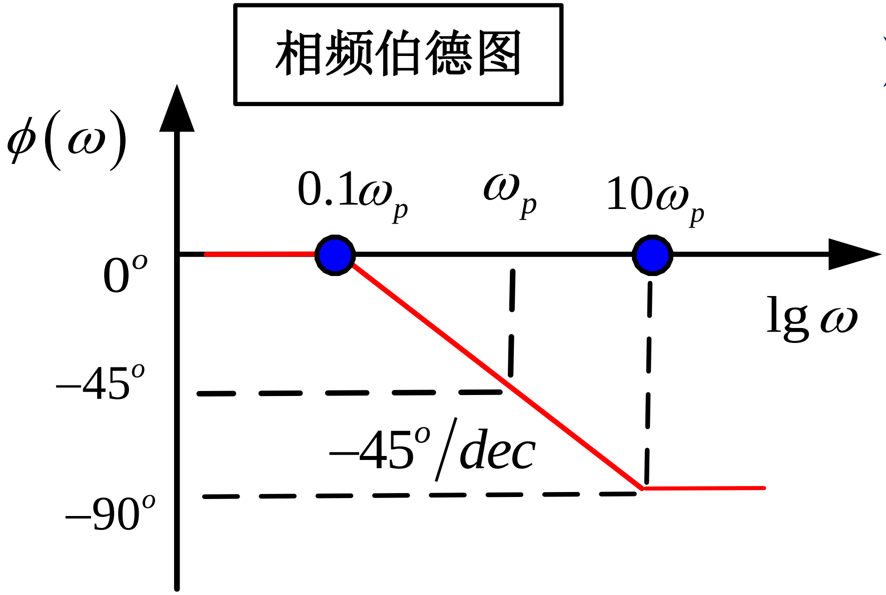
单负实极点的相频响应： 极点转折频率定义： $\omega_p = -p_j$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1-\dfrac{j\omega}{p_j}} \Rightarrow \phi(\omega) = -\arctan\frac{-\omega}{p_j} = -\arctan\frac{\omega}{\omega_p}$$

折线近似

$$= \begin{cases} \omega << 0.1\omega_p, & -\arctan\dfrac{\omega}{\omega_p} \approx 0^o \\ \omega = \omega_p, & -\arctan\dfrac{\omega}{\omega_p} = -45^o \\ \omega \gg 10\omega_p, & -\arctan\dfrac{\omega}{\omega_p} \approx -90^o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -45^o \lg\dfrac{\omega}{0.1\omega_p} \\ \omega \in (0.1\omega_p, 10\omega_p) \end{cases}$$

(3) 单项负实极点p_j—相频伯德图



两个转折点：$0.1\omega_p$、$10\ \omega_p$

- 第一条直线段：横轴上从频率0到$0.1\omega_p$的水平直线；
- 第二条直线段：从频率点$0.1\omega_p$至$10\omega_p$，斜率**-45º/dec**的直线；
- 第三条直线段：始于频率点$10\omega_p$的水平直线，纵坐标**-90º**；

转折点的误差 ？

$$\left.\begin{aligned} 0.1\omega_{p_j} &\to -5.7^o \\ \omega_{p_j} &\to -45^o \\ 10\omega_{p_j} &\to -84.3^o \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \Delta\varphi \le 5.7^o$$

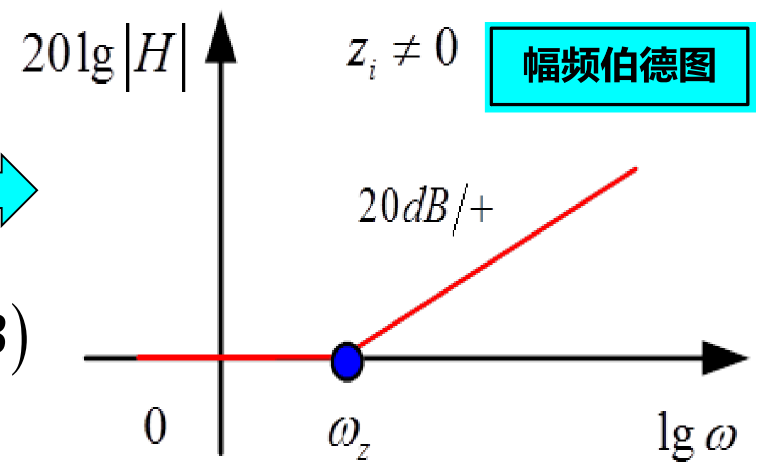
(4) 单项实数零点 $z_i \neq 0$ —幅频响应

零点转折频率定义： $\omega_z = |z_i| \begin{cases} z_i > 0 \\ z_i < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow 20\lg|H(j\omega)| = 20\lg\left|1 - \frac{j\omega}{z_i}\right| = 20\lg\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{z_i}\right)^2} = 20\lg\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2}$$

折线近似

$$= \begin{cases} \omega << \omega_z, 20\lg\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2} \approx 0dB \\ \omega >> \omega_z, 20\lg\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2} = 20\lg\frac{\omega}{\omega_z}(dB) \end{cases}$$



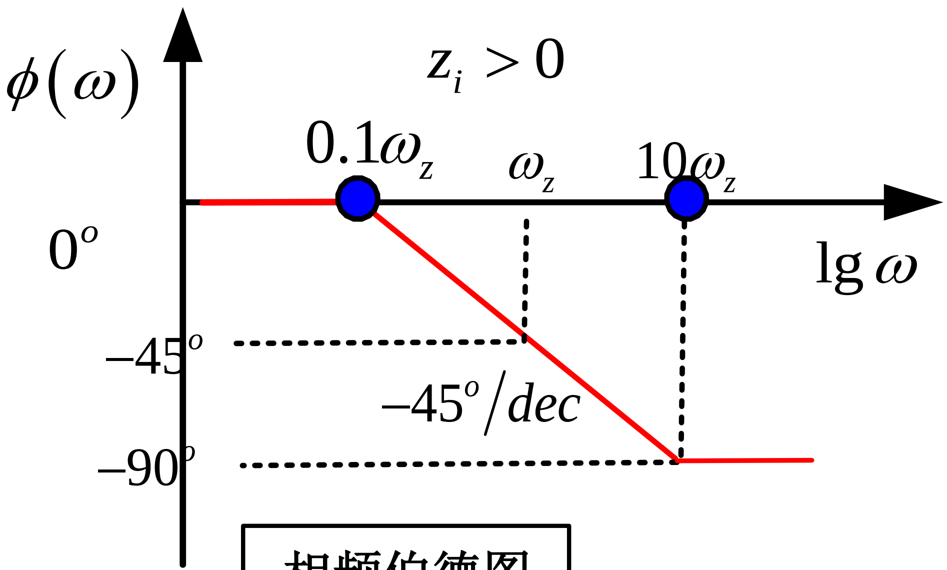
(4) 单项实数零点 $z_i \neq 0$ —相频响应

$$\Rightarrow H(j\omega)=1-\frac{j\omega}{z_i} \Rightarrow \phi(\omega)=\arctan\frac{-\omega}{z_i}$$

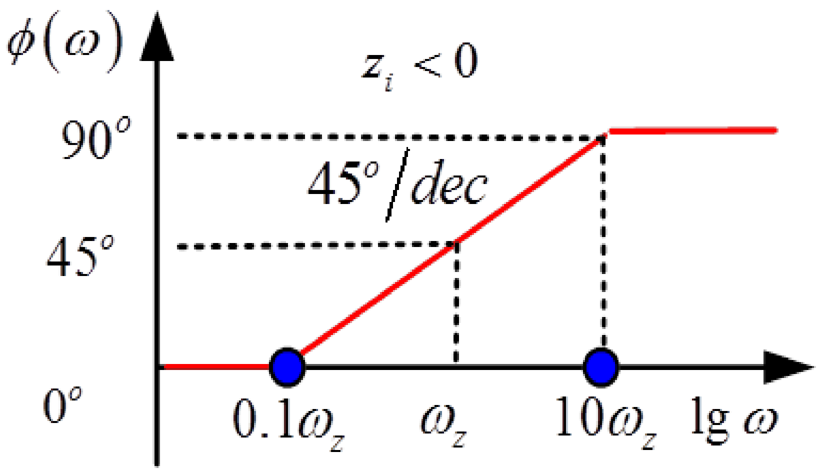
附加相位贡献取决于z_i正负

$\omega_z = z_i, z_i > 0$

$\omega_z = -z_i, z_i < 0$



相频伯德图

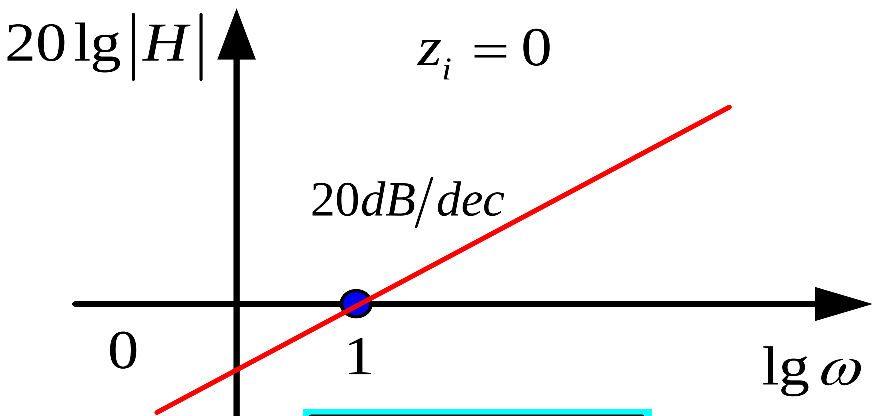


相频伯德图

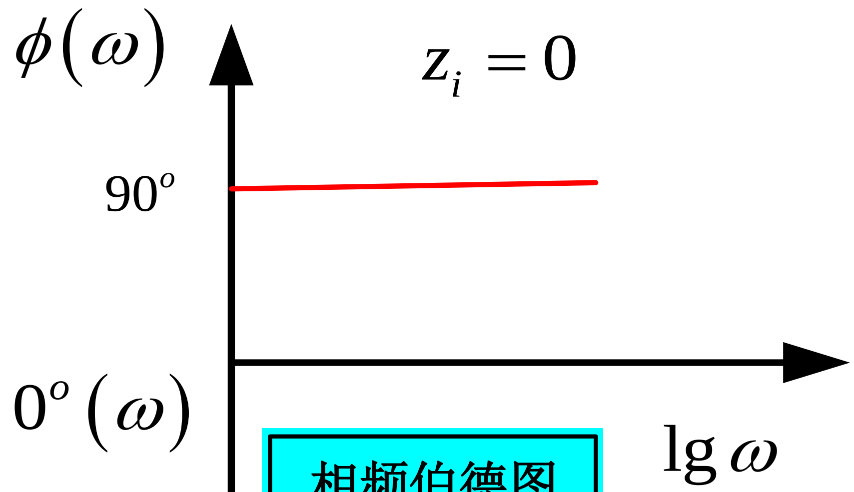
（4） 单项实数零点 $z_i = 0$

$$|H(j\omega)| = S|_{s=j\omega} = j\omega = \omega e^{j90^o} \quad (\omega > 0)$$

$$20\lg|H(j\omega)| \Rightarrow 20\lg|j\omega| = 20\lg\omega \qquad s \Rightarrow \phi(\omega) = 90^o$$



幅频伯德图



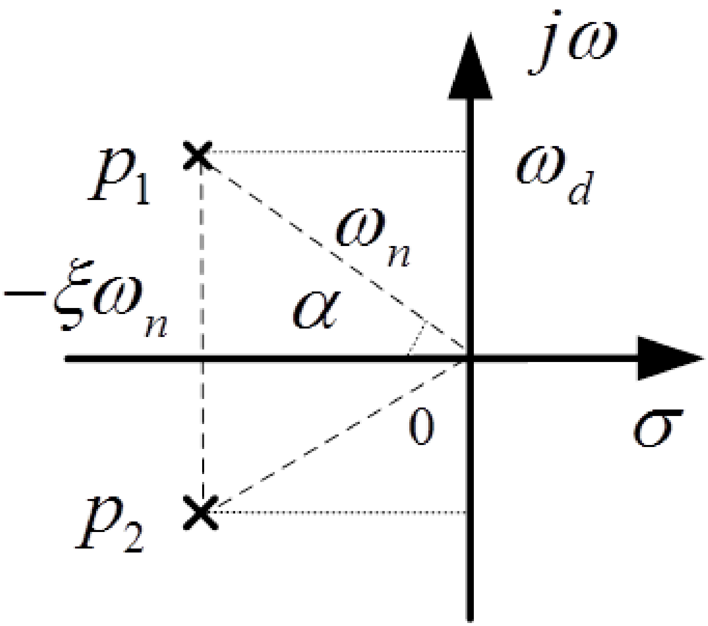
相频伯德图

(5) 单项复共轭极点对–幅频响应

- 共轭极点对：　$p_1, p_2 = -a \pm jb$　a、b为正值

- 另一种描述参数：

无阻尼自然频率



转折角频率：$\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2}$

阻尼系数：$\xi = \cos\alpha = \dfrac{a}{\omega_n}$　$\xi \in (0,1)$

则：$p_1, p_2 = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

阻尼自然频率：$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - a^2}$

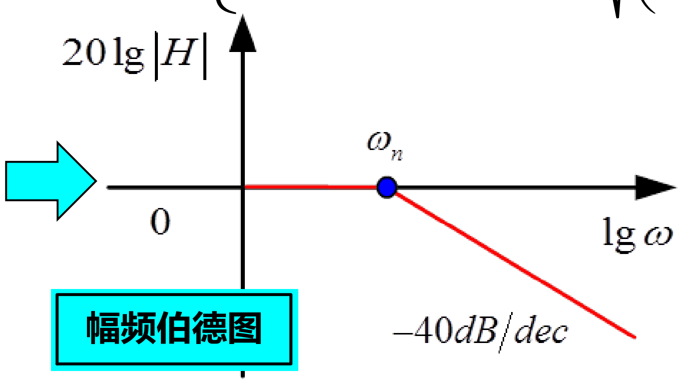
(5) 单项复共轭极点对–幅频响应

$$\left(1-\frac{j\omega}{p}\right)\left(1-\frac{j\omega}{p^*}\right)=1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+j\frac{2\xi\omega}{\omega_n}$$

$$\Rightarrow -20\lg\left|\left(1-\frac{j\omega}{p}\right)\left(1-\frac{j\omega}{p^*}\right)\right|=-20\lg\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

折线近似

$$\Rightarrow = \begin{cases} \omega<<\omega_n,\ -20\lg\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}\approx 0dB \\ \omega>>\omega_n,\ -20\lg\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}\approx -40\lg\frac{\omega}{\omega_n}(dB) \end{cases}$$

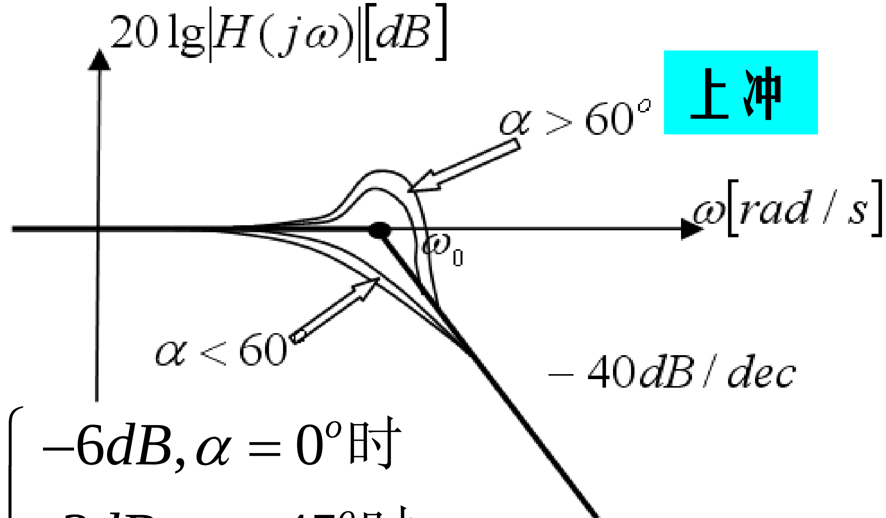


问题：为什么斜率是–40dB/dec?

- 两个极点的贡献；
- 折线与阻尼系数ξ无关。

（5）单项复共轭极点——误差分析

- 转折点ω_n处误差最大；
- 该点误差与阻尼系数有关



$$-20\lg\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}\Bigg|_{\omega=\omega_n}$$

$$=-20\lg 2\xi=-6dB-20\lg\xi=\Delta=\begin{cases}-6dB,\alpha=0^o\text{时}\\-3dB,\alpha=45^o\text{时}\\0dB,\alpha=60^o\text{时}\\8dB,\alpha=78^o\text{时}\end{cases}$$

α = 60º时，$\xi=1/2$，$-20\lg\xi=6dB$，误差Δ =0；

α> 60º越大，$\xi<1/2$ 越小，误差Δ为正值，上冲+不稳定；

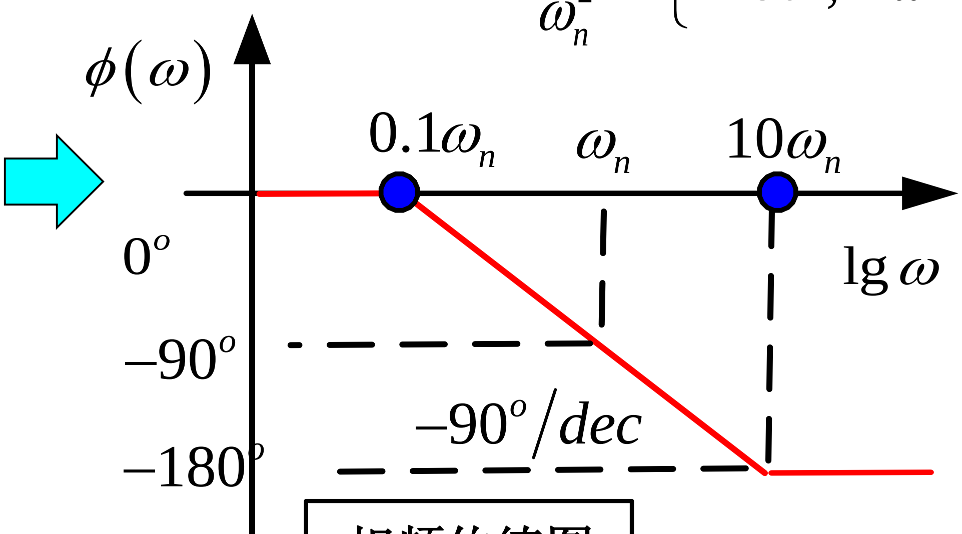
α=45º时，$\xi=1/\sqrt{2}$；转折频率ω_n恰为截止频率ω_{3dB}；

α<45º越小，$\xi>1/\sqrt{2}$ 越大，误差Δ负值，通带变窄；

(5) 单项复共轭极点对—相频响应

$$\left(1-\frac{j\omega}{p}\right)\left(1-\frac{j\omega}{p^*}\right)=1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+j\frac{2\xi\omega}{\omega_n}$$

$$\phi(\omega)=-\arctan\frac{2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}=\begin{cases}0^o, & \omega<<0.1\omega_n\\ -90^o, & \omega=\omega_n\\ -180^o, & \omega>>10\omega_n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-90^o\lg\dfrac{\omega}{0.1\omega_n}\\ \omega\in(0.1\omega_n,10\omega_n)\end{cases}$$

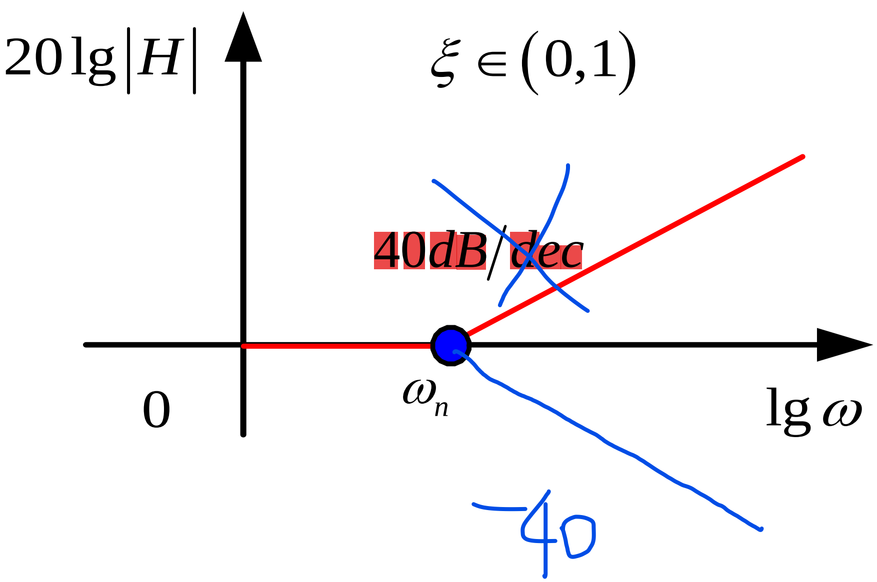


相频伯德图

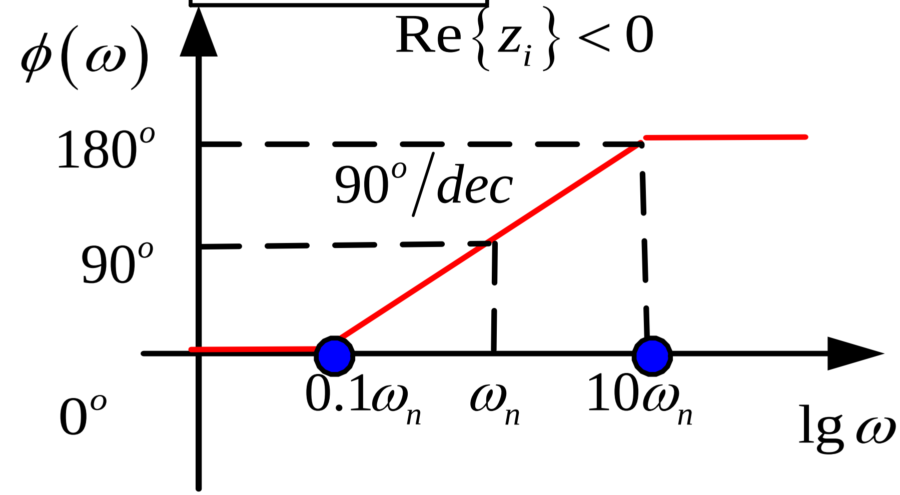
- 两个极点的贡献；
- 折线与阻尼系数ξ无关。

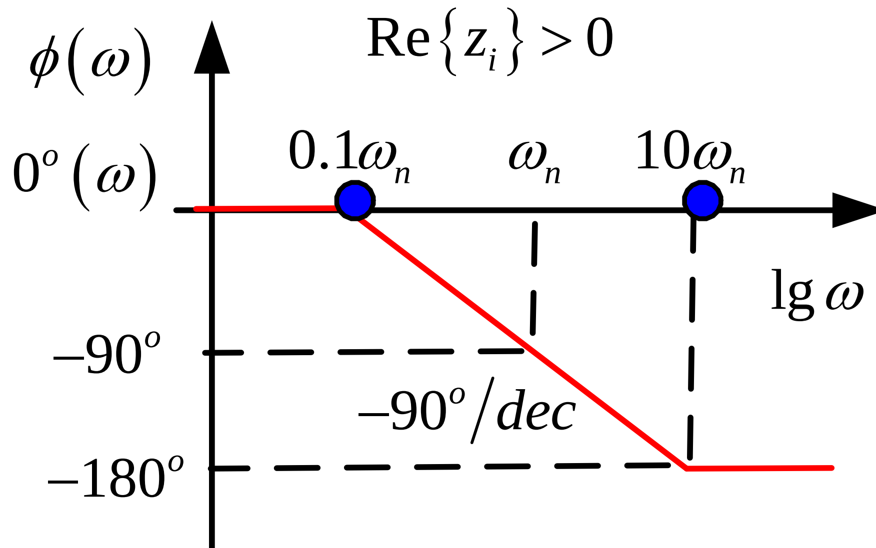
（6）单项复共轭零点对–幅频响应

幅频伯德图



相频伯德图





（7）伯德图归纳

■ *Bode*伯德图：大频率范围、近似折线化系统频响作图方法；

与零极点
直接关联

1. 对数坐标系： $[10\lg\omega, 20\lg|H(j\omega)|]$
2. 原理：由常数项、零点、极点单项折线的线性叠加；
3. 折线斜率：(1)幅频：“零正极负”（20*dB/dec*）；
   (2)相频：“零正极负”（45º/*dec*）；
   仅正零点z_j =>负斜率（-45º/*dec*）；
   (3) *n*阶相同零极点，斜率*n*倍，转折点不变；
4. 重点标明：转折点坐标（仍标角频率ω）+ 折线斜率；
5. 关注误差：转折点=> 幅度：3*dB*误差
   相位：$\Delta\varphi \le 5.7^o$
6. 终极目标–估算系统带通参数：H_0， ω_{3dB}， ω_l， ω_h， B

（7）伯德图的实例分析1

已知$H(s)=\dfrac{2\times10^{2}s(s+2)}{(s+1)(s+20)}$，画伯德图

■ 第一步：归一化、标准化表示

$$H(s)=\frac{2\times10^{2}s\times2\left(1+\dfrac{s}{2}\right)}{(1+s)\times20\times\left(1+\dfrac{s}{20}\right)}=20\times\frac{s\left(1-\dfrac{s}{-2}\right)}{\left(1-\dfrac{s}{-1}\right)\left(1-\dfrac{s}{-20}\right)}$$

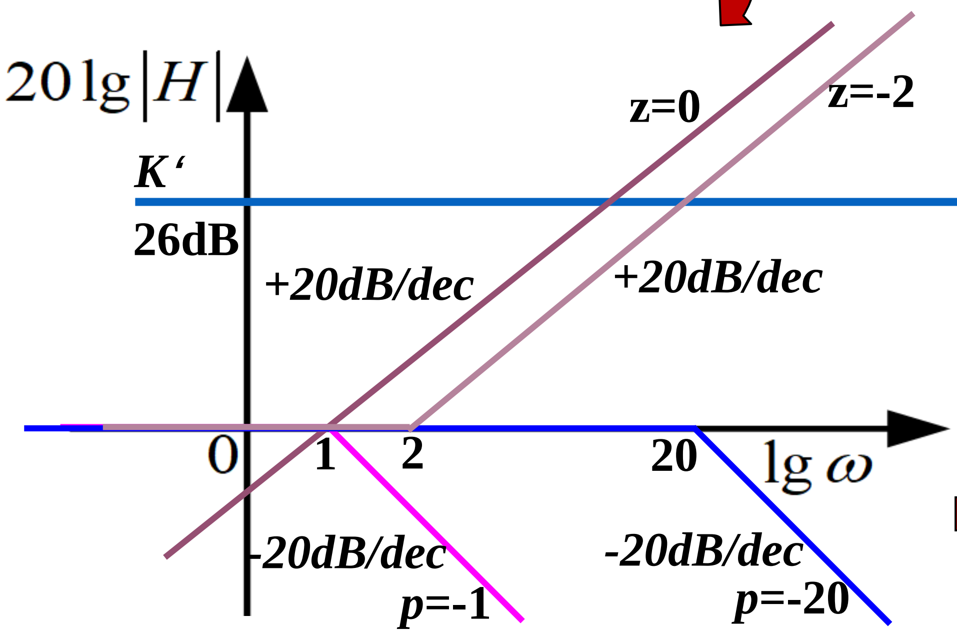
零、极点？ $\Rightarrow$ $\begin{cases}\text{常数项：}K'=20\text{，即26dB}\\ \text{两个实零点：}0,\ -2\\ \text{两个负实极点：}-1,\ -20\end{cases}$

（7）实例分析1

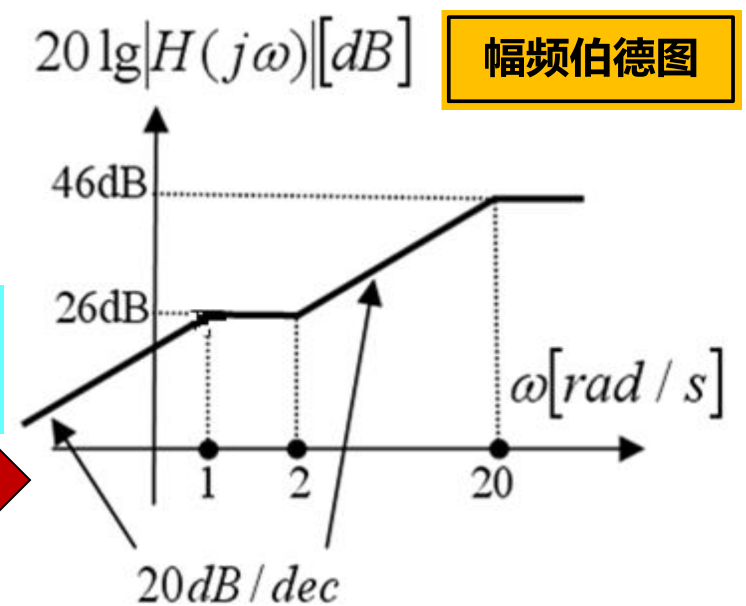
■ 第二步：画出各单项因子幅频伯德图，标明转折点及折线斜率；

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{常数项：}K^{'}=26\text{dB}\\ \text{零点：}0,\ -2\\ \text{极点：}-1,\ -20\end{cases}$$

■ 第三步:线性叠加出完整幅频伯德图；



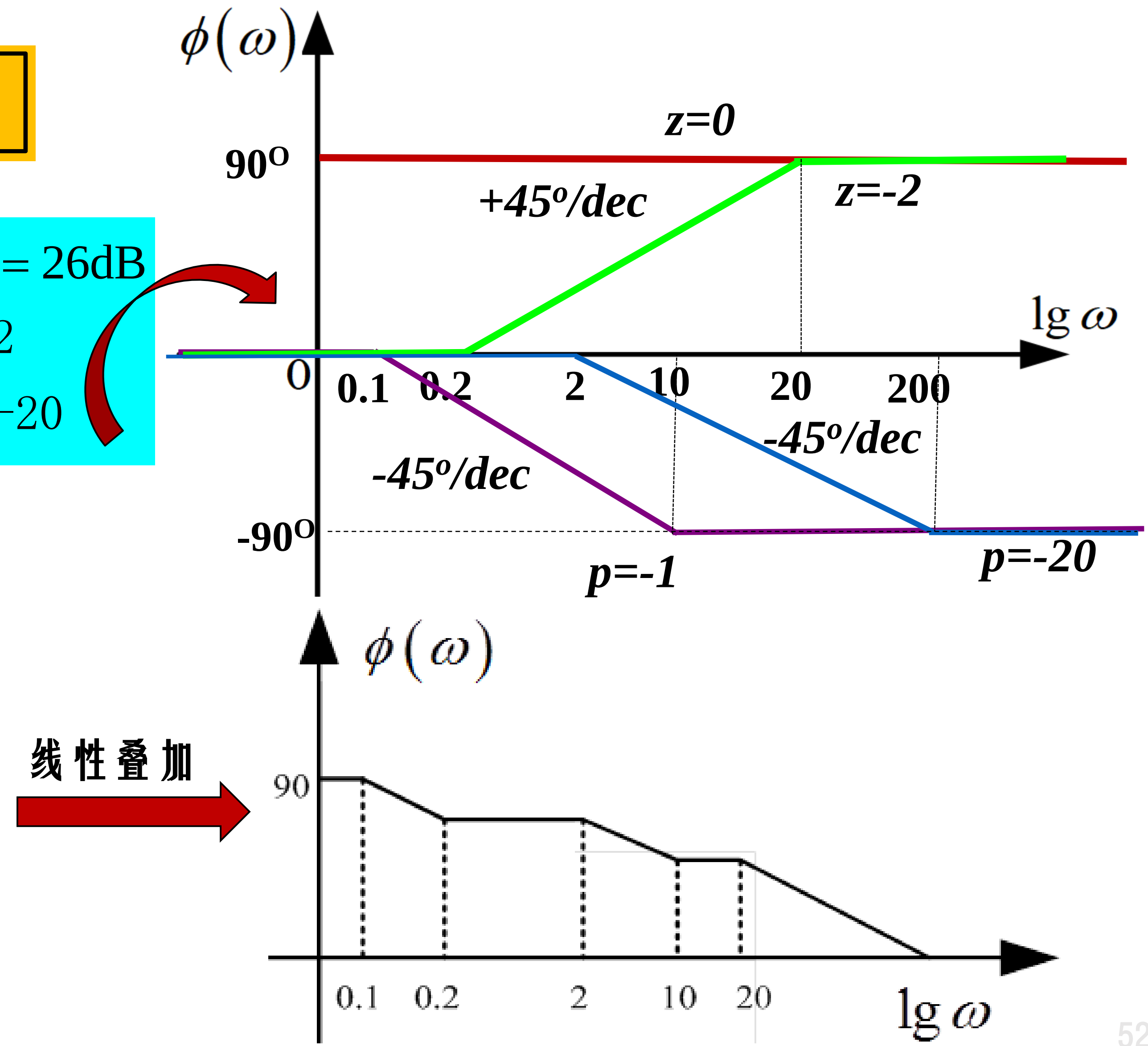
线性叠加



(7) 实例分析1

相频伯德图

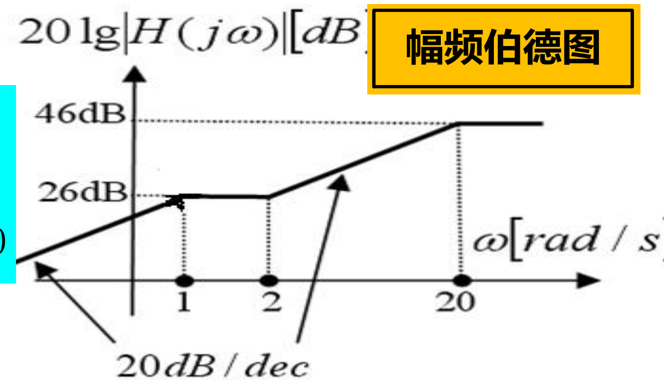
$$\Rightarrow \begin{cases} 常数项：K' = 26\text{dB} \\ 零点：0，-2 \\ 极点：-1，-20 \end{cases}$$



（7）实例分析1

试确定系统的通带特性，求通带增益和截止频率。

■ 系统**通带特性**：高通系统：H_0，ω_l



求H_0：伯德图方法1：5项分别算

$$\begin{cases}\text{常数项：}K' = 20\\ \text{两个实零点：}0,\ -2\\ \text{两个负实极点：}-1,\ -20\end{cases}$$

$$H_0\Big|_{\omega=20} = 20\lg 20 + 20\lg\frac{20}{1} + 20\lg\frac{20}{2} - 20\lg\frac{20}{1} - 20\lg\frac{20}{20} = 46\text{dB}$$

公式方法2：极限法

$$\lim_{s\to\infty}|H(s)| = \lim_{s\to\infty}\frac{2\times10^2 s(s+2)}{(s+1)(s+20)} = \lim_{s\to\infty}\frac{2\times10^2\frac{s}{s}\left(1+\frac{2}{s}\right)}{\left(1+\frac{1}{s}\right)\left(1+\frac{20}{s}\right)} = 200 = 46dB$$

公式方法3：由已得到的幅频伯德图算得：

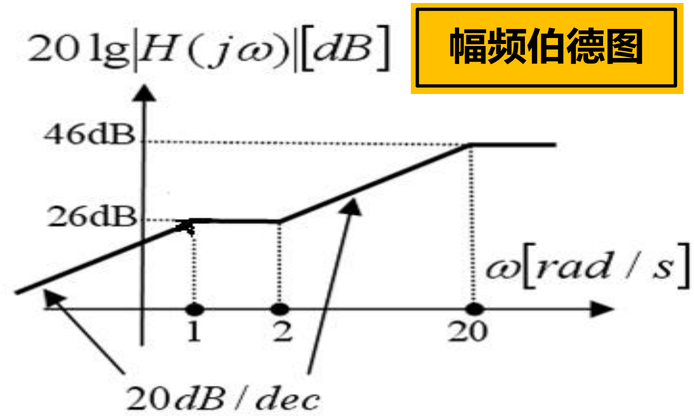
起点后的幅度上升为ω=2→ω=20，斜率20dB/dec，故：26+20lg20/2=46dB

(7) 实例分析1

■ 下限截止频率 ω_l:

伯德图方法1：主极点决定。

$$\omega_{p_2} >> \omega_{p_1} \Rightarrow \omega_l = \omega_{p_2} = 20rad/s$$



公式方法2：3dB截止频率定义，得精确解：

$$|H(j\omega_l)| = \frac{200}{\sqrt{2}}$$

$$|H(j\omega_l)| = \left|\frac{2\times10^2\, j\omega(j\omega+2)}{(j\omega+1)(j\omega+20)}\right| \Rightarrow \omega_l = 19.83rad/s$$

分析：0.17误差的根源在哪里？ 其它零、极点的影响。

(7) 完整伯德图实例2

已知 $H(s)=\dfrac{10^6(s+2)}{(s+10)(s^2+10^2s+10^4)}$，画出幅频响应伯德图，确定通带特性，求出频率响应参数。

■ **标准形式**处理，分析单项参数：

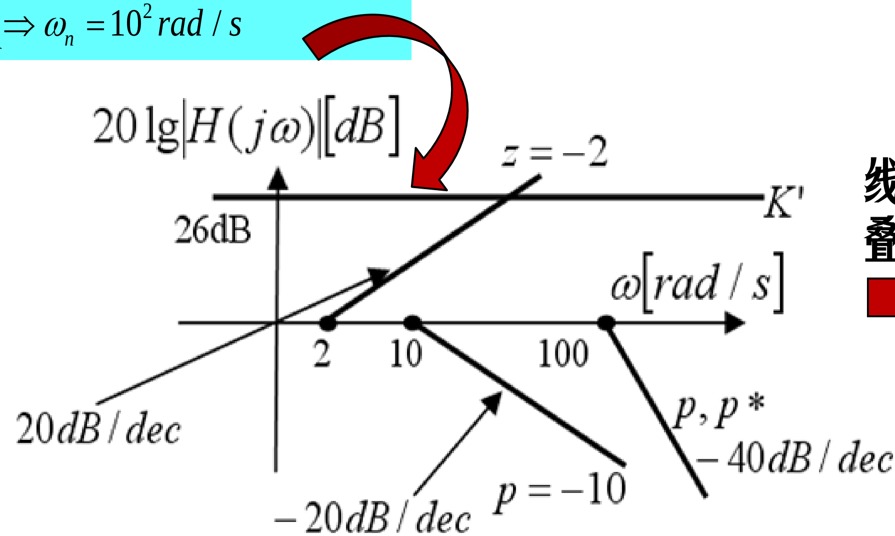
$$H(s)=\frac{10^6\times 2\left(1+\dfrac{s}{2}\right)}{10\left(1+\dfrac{s}{10}\right)\times 10^4\times\left(1+\dfrac{1}{10^2}s+\dfrac{s^2}{10^4}\right)}$$

$$=20\frac{\left(1+\dfrac{s}{2}\right)}{\left(1+\dfrac{s}{10}\right)\left(1+\dfrac{1}{10^2}s+\dfrac{s^2}{10^4}\right)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{常数项K}'\text{：}20\\ \text{一个零点：}-2\\ \text{三个极点：}-10,-\dfrac{10^2}{2}\pm j\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 10^2\\ \Rightarrow \omega_n=10^2\,rad/s\end{cases}$$

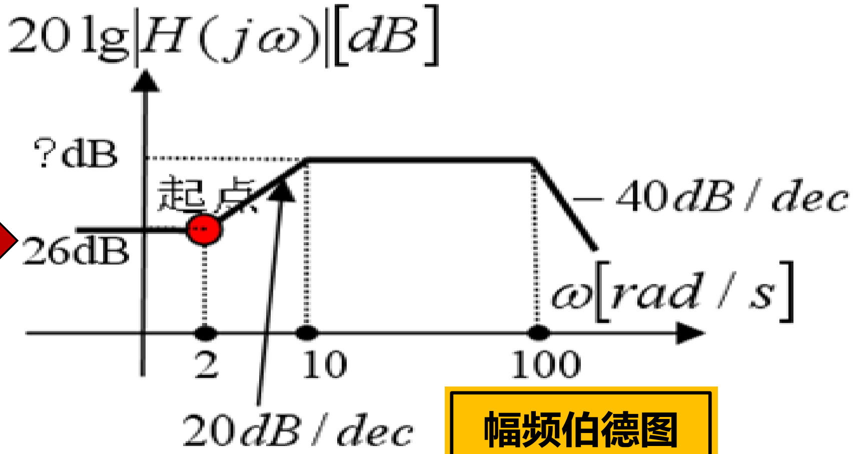
（7） 实例2

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{常数}K'\text{：}20\\ \text{零点：}-2\\ \text{极点：}-10,-\dfrac{10^2}{2}\pm j\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times10^2\\ \Rightarrow \omega_n=10^2 rad/s\end{cases}$$



线性叠加

带通系统：H_0，ω_l，ω_h



幅频伯德图

■ 由伯德图求H_0： $20\lg H_0=26+20\lg\dfrac{10}{2}=40(\text{dB})\Rightarrow H_0=100$

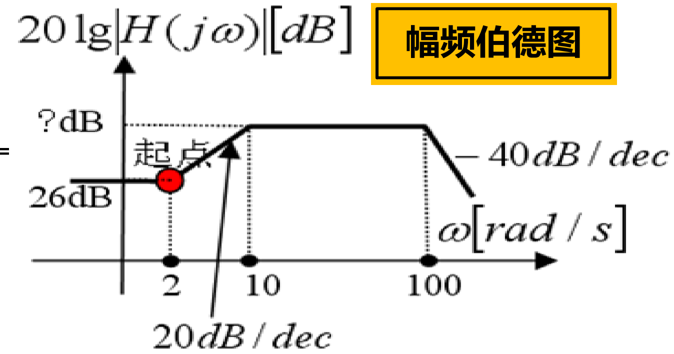
■ 下限截止频率ω_l：伯德图方法1：主极点决定： $10>>2\Rightarrow\omega_l=10rad/s$

公式法2： $H(s)=\dfrac{10^6(s+2)}{(s+10)(s^2+10^2s+10^4)}$ 由$s<<10^2\Rightarrow\dfrac{10^6}{s^2+10^2s+10^4}\approx10^2$

$\Rightarrow H(s)=10^2\cdot\dfrac{s+2}{s+10}$ $|H(j\omega_l)|=\dfrac{H_0}{\sqrt{2}}\Rightarrow\omega_l=9.59rad/s$

（7）实例2

幅频伯德图



■ 求上限截止频率ω_h：

$$\alpha = 60^o, \xi = 0.5 \Rightarrow \omega_h \neq \omega_n, \quad if\left(\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \omega_h = 100rad/s$$

由公式法：$H(s) = \dfrac{10^6(s+2)}{(s+10)(s^2+10^2s+10^4)}$

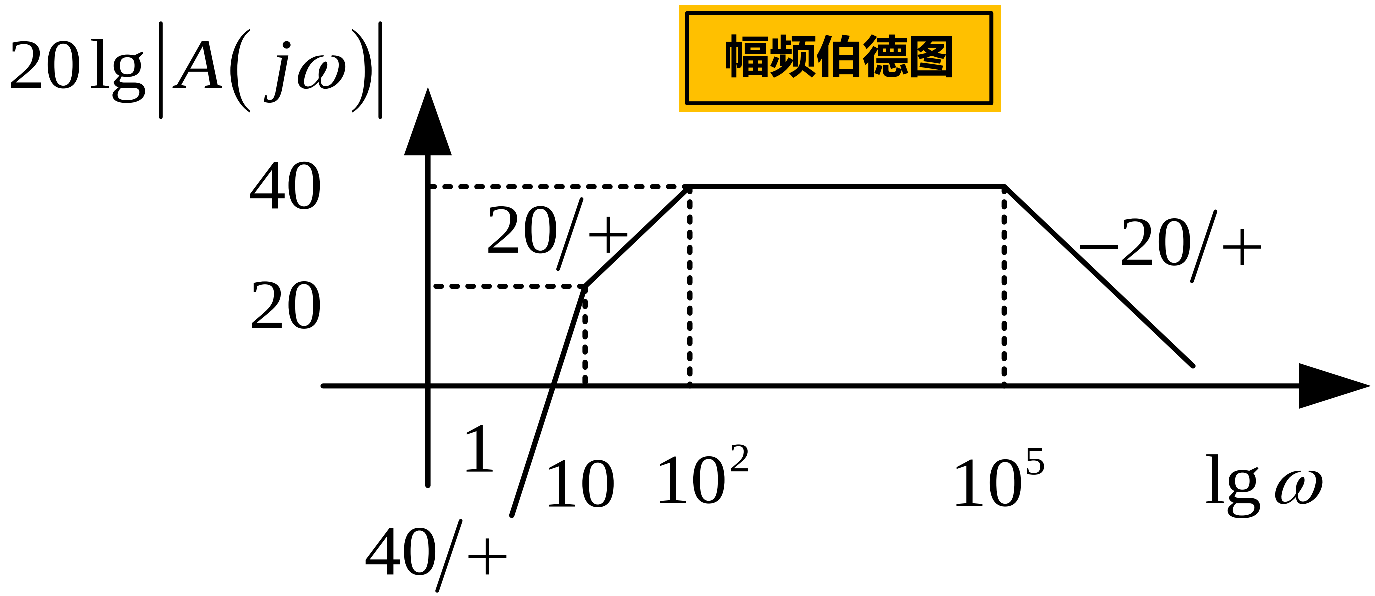
$$s >> 10 \Rightarrow \frac{s+2}{s+10} \approx 1 \Rightarrow H(s) = \frac{10^6}{s^2+10^2s+10^4}$$

$$|H(j\omega_h)| = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_h = 1.27\times10^2 rad/s$$

3dB上限截止频率ω_h与转折频率ω_n并不相同！

例3：根据系统伯德图求传递函数

已知某放大器传递函数的幅频响应伯德图，试写出其传递函数表达式。

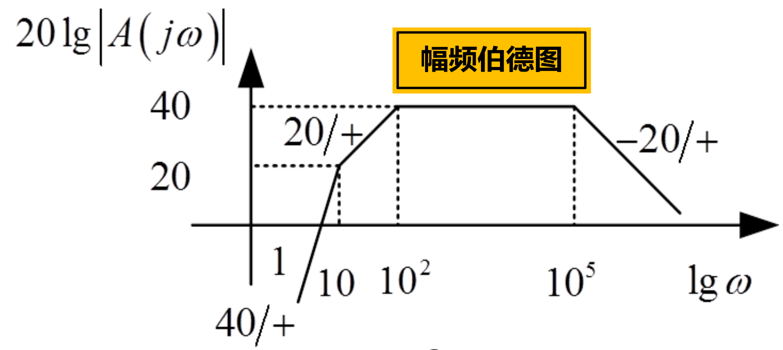


例3：根据系统伯德图求传递函数

解：分析可知，该系统含有

1个二阶零点：0

3个负实极点：-10，-100，-10^5。



$$A(s)=K\frac{s^2}{(s+10)(s+10^2)(s+10^5)}=K'\frac{s^2}{\left(1+\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s}{10^2}\right)\left(1+\frac{s}{10^5}\right)}$$

求K'：

$$H_0\Big|_{\omega=10^2}=20\lg|K'|+40\lg\frac{10^2}{1}-20\lg\frac{10^2}{10}=20\lg|K'|+80-20=40\text{dB}\Rightarrow K'=\pm\frac{1}{10}$$

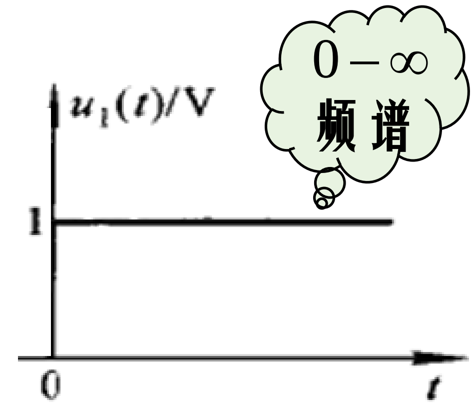
求K：取$10^2 \ll s_0 \ll 10^5$ $A(s)=K\frac{s^2}{(s+10)(s+10^2)(s+10^5)}\approx K\frac{s^2}{(s)(s)(10^5)}=\frac{K}{10^5}$

$$20\lg|A(s_0)|=20\lg\frac{|K|}{10^5}=40 \qquad K=\pm10^7\Rightarrow A(s)=\frac{\pm10^7\cdot s^2}{(s+10)(s+10^2)(s+10^5)}$$

1.2.3 阶跃响应

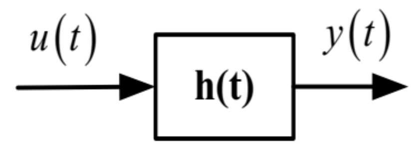
- **阶跃响应：时域=>非稳态变化特性**

$$u(t) \xleftrightarrow{L} F(s) = \frac{1}{s}$$



- **关注：瞬态时域波形响应？**

$$Y(s) = H(s) \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow y(t) = L^{-1}\left\{H(s) \cdot \frac{1}{s}\right\}$$



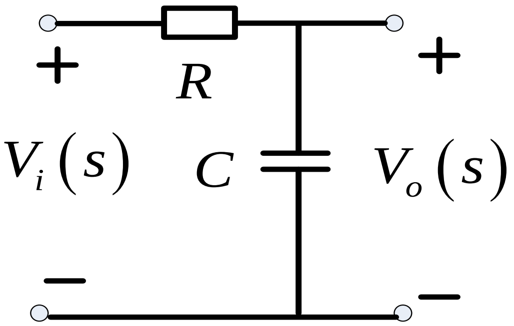
$$= L^{-1}\left\{K \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s - p_j)} \cdot \frac{1}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{K_j}{s - p_j} + \frac{K_0}{s}\right\} = \sum_{j=1}^{n} K_j e^{p_j t} + K_0 u(t)$$

$t \to \infty$, 第一项趋于0. 稳态响应为K_0

（2）单极点低通系统的阶跃响应

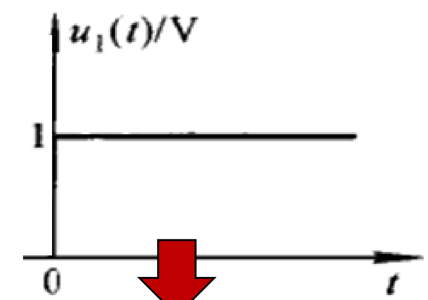
■ 系统传递函数：

$$H(s)=H_0\frac{\omega_h}{s+\omega_h}\qquad \omega_h=\frac{1}{RC}$$



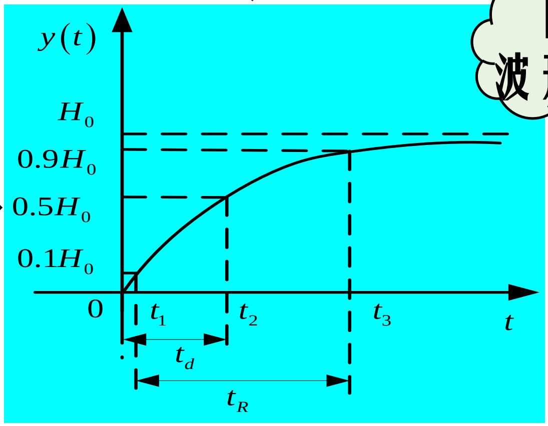
$$y(t)=L^{-1}\left\{H(s)\cdot\frac{1}{s}\right\}=L^{-1}\left\{H_0\frac{\omega_h}{s+\omega_h}\cdot\frac{1}{s}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{K_0}{s+\omega_h}+\frac{K_1}{s}\right\}$$



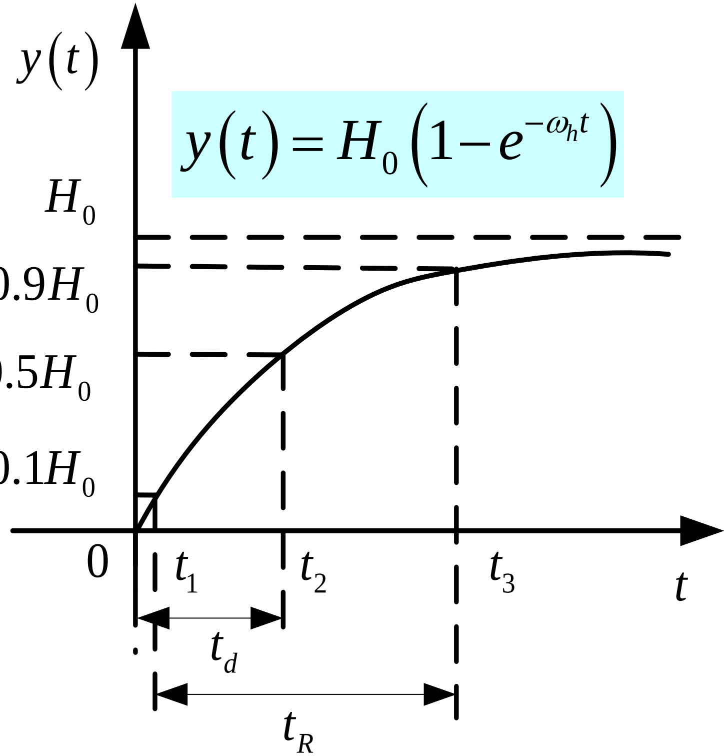
$$\begin{cases}K_0=-H_0\\ K_1=H_0\end{cases}\Rightarrow y(t)=H_0\left(1-e^{-\omega_h t}\right)$$

瞬态响应



时域
波形失真

(2) 阶跃响应的参数-1



上升时间t_R： 幅值从$0.1H_0$上升至$0.9H_0$所需的时间；

延迟时间t_d： 幅值从0上升至$0.5H_0$所需的时间；

$$t_R=t_3-t_1=\frac{2.2}{\omega_h} \qquad t_d=t_2-t_0=\frac{0.69}{\omega_h}$$

$$\Rightarrow \omega_h\to\infty,\quad t_R\to 0;\quad t_\mathrm{d}\to 0$$

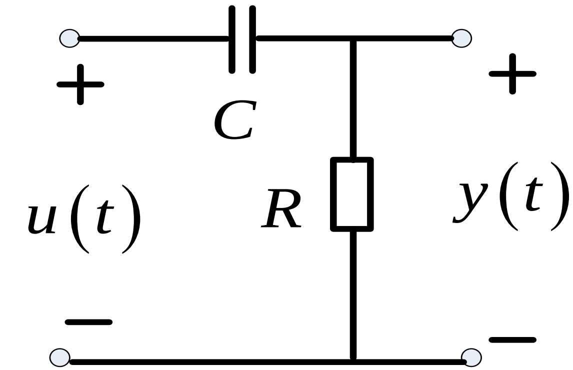
问题与思考

特点？时域瞬态与电路的频响参数什么关系？

1. 上升时间快慢反映系统高频特性；
2. ω_h越高，B越宽，高增益频谱成分通过越多，阶跃上升越快；

（3）单极点高通系统的阶跃响应

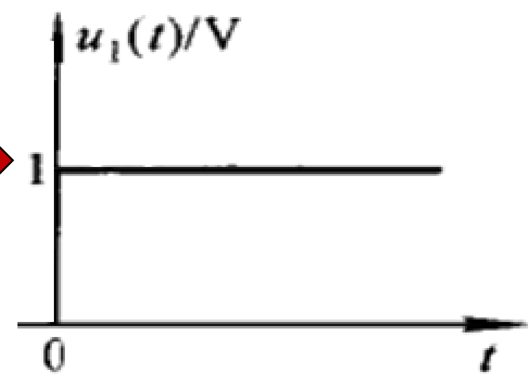
$$H(s)=H_0\frac{s}{s+\omega_l} \qquad \omega_l=\frac{1}{RC}$$

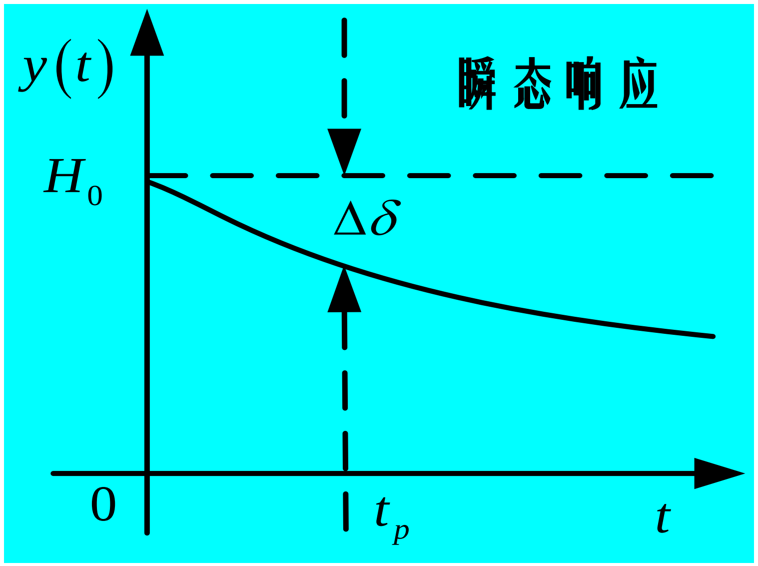


$$y(t)=L^{-1}\left\{H(s)\cdot\frac{1}{s}\right\}=L^{-1}\left\{H_0\frac{1}{s+\omega_l}\right\}$$

$$u(t)\overset{L}{\longleftrightarrow}X(s)=\frac{1}{s}$$

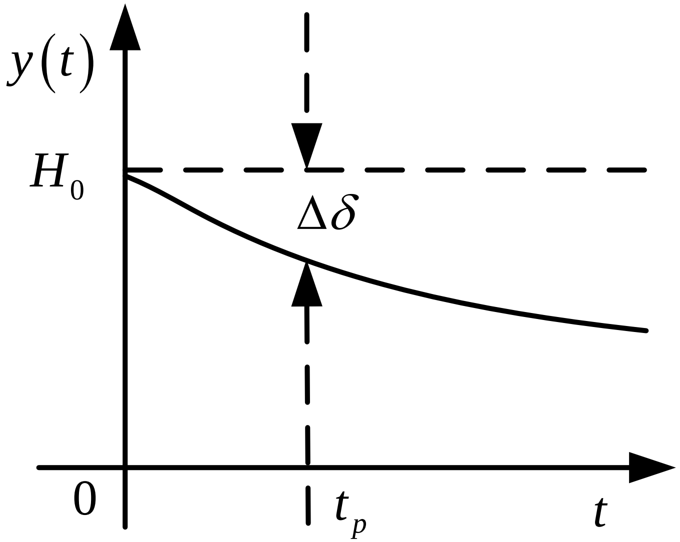
$$\Rightarrow y(t)=H_0e^{-\omega_l t}$$





（3）高通系统的阶跃响应参数−2

- **斜降 δ_p：** 即t_p时刻的衰减量与H_0的比值：$\delta_p\Big|_{t_p} = \dfrac{\Delta\delta}{H_0}\Big|_{t_p}$



$$\delta_p\Big|_{t_p} = \frac{\Delta\delta}{H_0}\Big|_{t_p} = \frac{H_0 - H_0 e^{-\omega_l t_p}}{H_0}$$

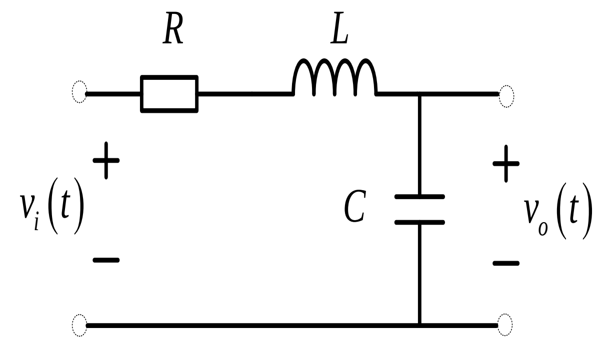
$$= 1 - e^{-\omega_l t_p} \approx \omega_l t_p, \quad t_p << 1/\omega_l$$

$$\Rightarrow \omega_l \to 0, \quad \delta_p \to 0$$

- **特点-1：** 高通系统高频特性好（∞），上升沿不需要时间；
- **特点-2：** 缓变斜降特性取决于低频特性ω_l：$\omega_l \neq 0$，响应随时间逐渐下降，稳态时趋于0；$\omega_l = 0$，维持H_0！

（4）二阶低通系统的阶跃响应

■ 二阶低通系统：



$$H(s)=\frac{\frac{1}{SC}}{R+SL+\frac{1}{SC}}=\frac{1}{1+SRC+S^2LC}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

其中，$\omega_n=\frac{1}{\sqrt{LC}}$，$\xi=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$

极点：$p_1,p_2=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$

➡ $\xi\geq1$，p_1,p_2 两负实极点，阶跃响应与单极点低通电路类似；上升时间与 ω_h 有关！

➡ 若 $\xi<1$，p_1,p_2 一对复共轭极点，系统为共轭极点对低通系统。

➡ $$H(s)=\frac{\omega_n^2}{(S+\xi\omega_n-j\omega_d)(S+\xi\omega_n+j\omega_d)}$$ 阻尼自然频率 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

（4）二阶低通系统阶跃响应参数-3

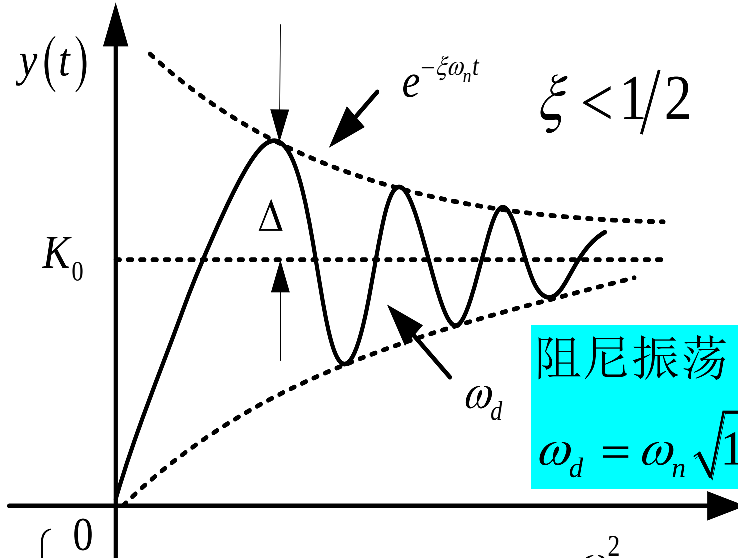
■ **对应的阶跃响应：**

$$y(t)=L^{-1}\left\{H(s)\frac{1}{s}\right\}$$

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{\omega_n^2}{(S+\xi\omega_n-j\omega_d)(S+\xi\omega_n+j\omega_d)}\frac{1}{s}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{K_0}{S}+\frac{K_1}{S+\xi\omega_n-j\omega_d}+\frac{\bar{K}_1}{S+\xi\omega_n+j\omega_d}\right\}$$

$$=K_0-2|K_1|e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t+\arctan K_1)$$



阻尼振荡

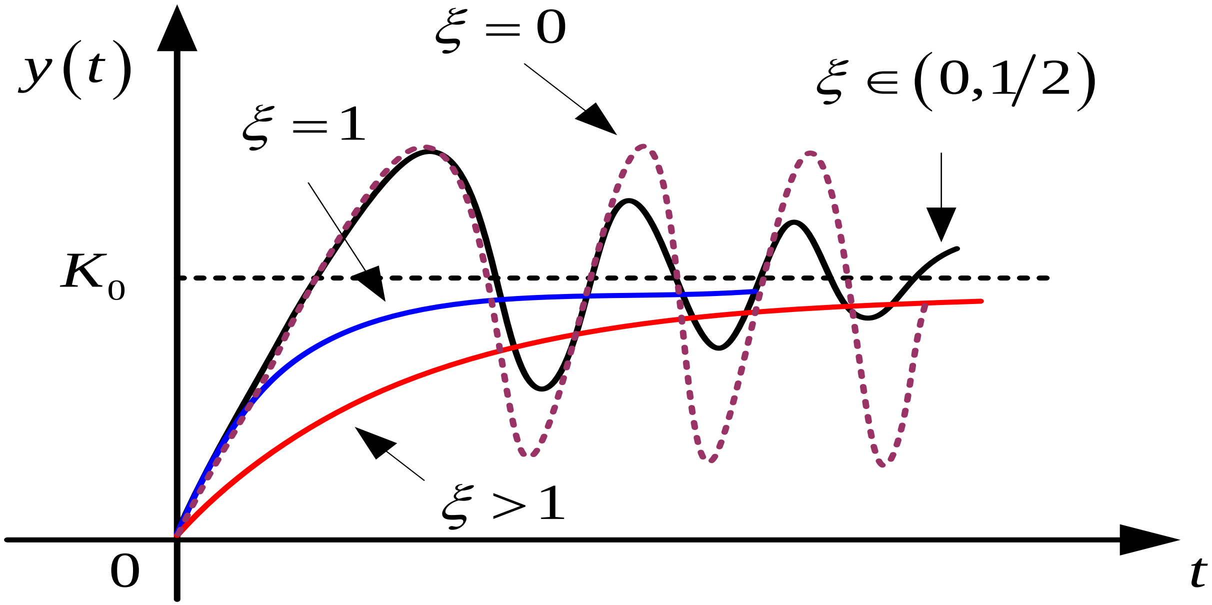
$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\begin{cases} K_0=1 \qquad K_1=\dfrac{\omega_n^2}{2\left(\omega_d^2-j\omega_d\omega_n\xi\right)} \\ |K_1|=\dfrac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \arctan K_1=\arctan\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \end{cases}$$

■ **幅值衰减的正弦振荡，振荡频率为ω_d，其包络线为$e^{-\xi\omega_n t}$**

■ **超量上冲Δ：$\xi<1/2$，α＞60度，第一峰值明显大于稳态值；**

（4）二阶低通系统的阶跃响应



■ 上冲与阻尼振荡由系统共轭阻尼参数 (ω_n,ξ) 决定；

■ 阻尼系数 ξ 越小，起始幅度越大，阶跃响应上升越快，即上升时间越短。

（4）阶跃响应与频率响应对比

- 阶跃响应和频率响应是反映同一系统在不同激励下系统特性:
  - 频率响应考察系统的频率特性；
  - 阶跃响应考察系统的时域波形特征，
- 对同一系统而言，阶跃响应参数与频率响应参数之间有一定的关联性，即阶跃响应可一定程度反映系统的频率特性；
- 阶跃响应关注的是系统的暂态响应，而频率响应关注的是系统的稳态响应，故一般通过分析系统的频率响应来获得系统的频率特性。

本章小结