11-14 作业

43. 记 F_n, F 分布为 Y_n, Y 的分布函数。当 $y > 0$ 时，有

$$\begin{aligned}
F_n(y) &= P(Y_n \le y) = P(X_n \le ny) \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor ny \rfloor}(1-\frac{\lambda}{n})^{k-1}\frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda}{n}\frac{1-(1-\frac{\lambda}{n})^{\lfloor ny \rfloor}}{1-(1-\frac{\lambda}{n})} \\
&= 1-(1-\frac{\lambda}{n})^{\lfloor ny \rfloor} \\
&\to 1-e^{-\lambda y} = F(y), \quad \text{当 } n \to \infty.
\end{aligned}$$

所以 Y_n 依分布收敛到 Y。

45. 由题意可知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ $i.i.d. \sim B(1, 0.2)$, 则 500 次独立实验中某事件发生的总次数 $Y := \sum_{i=1}^{500} X_i \sim B(500, 0.2)$。所以：

(1) 由契比雪夫不等式：

$$P(80 \le Y \le 120) = P(|Y-100| \le 20) \ge \frac{Var(Y)}{20^2} = \frac{500 \times 0.2 \times 0.8}{400} = 0.8$$

(2) 记样本均值 $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n = Y/n$, 由中心极限定理可知 $\frac{\bar{X}-E\bar{X}}{\sqrt{Var(\bar{X})}} \xrightarrow{d} N(0,1)$，其中 $E\bar{X} = 0.2$，$Var(\bar{X}) = \frac{1 \times 0.2 \times 0.8}{500} = 0.00032$，所以

$$\begin{aligned}
P(80 \le Y \le 120) &= P(0.16 \le \bar{X} \le 0.24) \\
&= P(\frac{-0.04}{\sqrt{0.00032}} \le \frac{\bar{X}-E\bar{X}}{\sqrt{Var(\bar{X})}} \le \frac{0.04}{\sqrt{0.00032}}) \\
&= 2 \times 0.9873 - 1 = 0.9746.
\end{aligned}$$

46. $X_1, \cdots, X_2$ 为独立同分布随机变量,

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) &= nE\left(X_1^2\right) = n\alpha_2, \\
\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) &= n\operatorname{Var}\left(X_1^2\right) = n\left(E\left(X_1^4\right) - \left(E\left(X_1^2\right)\right)^2\right) = n\left(\alpha_4 - \alpha_2^2\right)
\end{aligned}$$

则由中心极限定理有

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\alpha_2}{\sqrt{n\left(\alpha_4 - \alpha_2^2\right)}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

48. 系统由 n 个独立的部件组成, 设 $X_i = \begin{cases} 1, \text{ 第i 个部件正常工作} \\ 0, \text{ 第i 个部件损坏} \end{cases}$, 则

$$X_1, \cdots, X_n, \text{ i.i.d. } \sim B(1, 0.9),$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = nE\left(X_1\right) = 0.9n, \quad \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n \operatorname{Var}\left(X_1\right) = 0.09n.$$

(1) 当 $n = 100, E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 90, \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 9$. 由中心极限定理,

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 85\right) &= 1 - P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 85\right) \\ &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 90}{3} \leq \frac{85 - 90}{3}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) \\ &\approx 0.9522 \end{aligned}$$

(2) 由中心极限定理, 至少有 80% 的部件正常工作的概率为

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > 0.8n\right) &= 1 - P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 0.8n\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 0.9n}{0.3\sqrt{n}} \leq \frac{0.8n - 0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(-\frac{n}{3\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \end{aligned}$$

要使所求概率不小于 0.95, 即

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) &\geq 0.95 \\ n &\geq 24.35. \end{aligned}$$

所以 n 至少取 25 .

8. (1) 样本空间为 $\Omega=\{(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5):X_1,...,X_5\in\{0,1\}\}$，抽样分布为

$$P((X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5))$$
$$=p^{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i}(1-p)^{5-\sum\limits_{i=1}^{5}x_i},\quad x_i\in\{0,1\},i=1,...,5.$$

(2)$X_1+X_2,\min_{1\le i\le 5}X_i$ 是统计量；
$X_5+p,X_5-E(X_1),\frac{(X_5-X_1)^2}{Var(X_1)}$ 不是统计量，因为含有未知参数 p。

11. (1) 因为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，所以 $Var(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2})=2(n-1)$，所以可证

$$Var(S^2)=2\sigma^4/(n-1).$$