

DSP_HW4

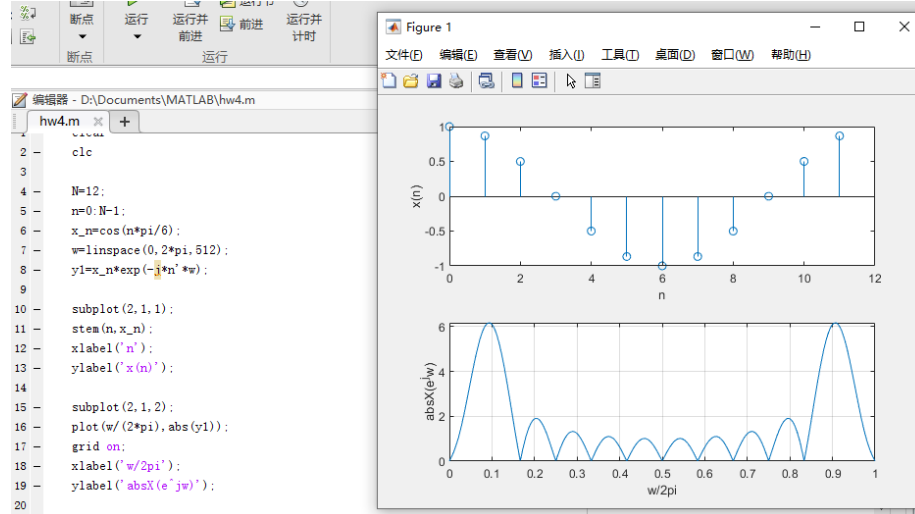
msh

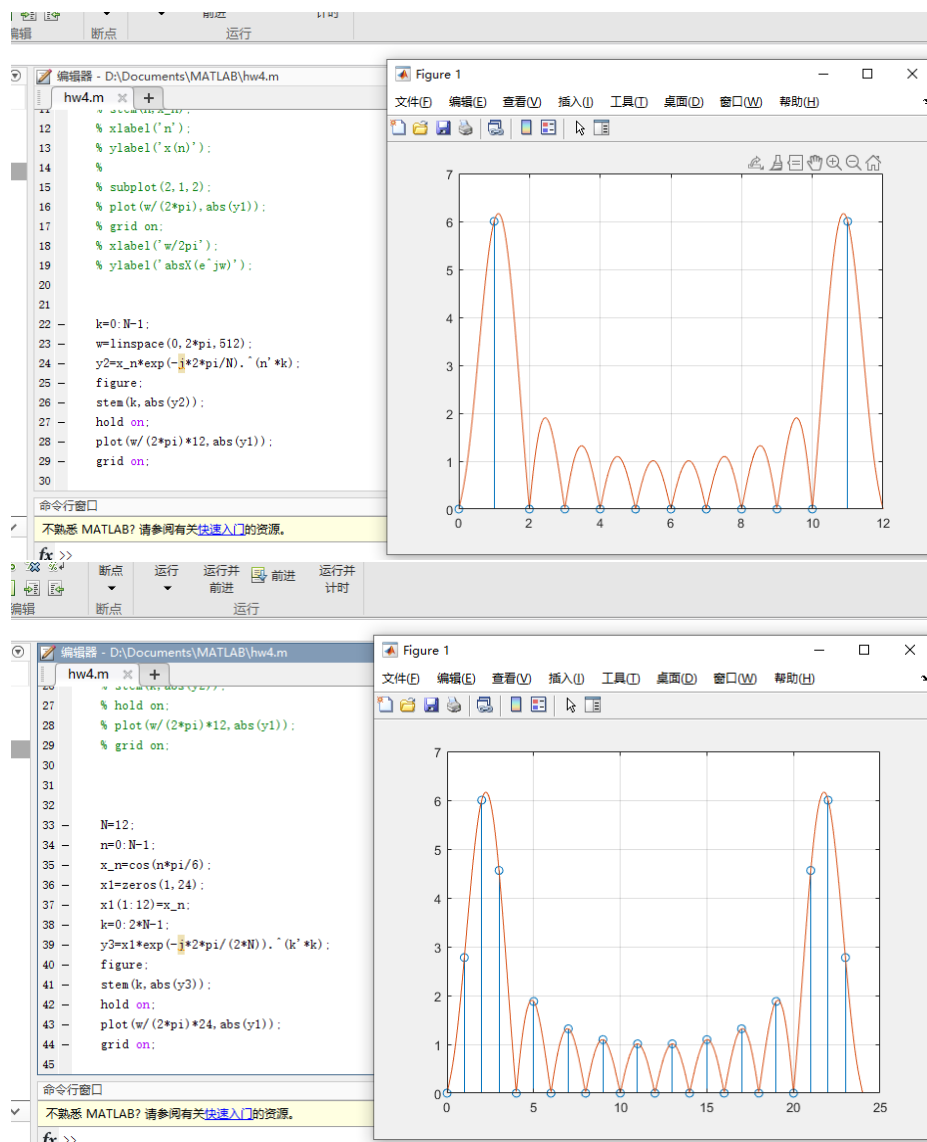
April 2024

Exercise 1

已知序列 $x(n) = \cos(n\pi/6)$, 其中 $n=0,1,\dots,N-1$, 而 $N=12$ 。(用 MATLAB 编程实现, 提交完整源代码和运行结果。)

- (1) 求 $x(n)$ 的 DTFT $X(e^{j\omega})$
- (2) 求 $x(n)$ 的 DFT $X(k)$
- (3) 若在 $x(n)$ 后补 N 个零得到 $x_1(n)$, 求 $x_1(n)$ 的 DFT $X_1(k)$ 。此题求解后, 对正弦信号抽样及其 DFT 和 DTFT 之间的关系能总结出什么结论?





分析上面三个图可以看出：

1. DTFT 是频率的连续函数，而 DFT 是离散频率函数；
2. 实正弦函数的频谱本来是位于正负频率处的线谱，由于截短的原因，其 DTFT 不再是线谱，它是矩形窗和线谱卷积的结果。
3. 对正弦信号作 DFT 时，如果信号长度包含了整周期，尽管数据也被截短，但其 DFT 仍是线谱，这时 DFT 是对 DTFT 的抽样
- 4 在对数据补零后，其 DFT 是对原变换进行插值，如果被补零的信号是正

弦，其频谱不再是线谱

Exercise 2

信号 $x(n)=\{1, 2, 3, 4\}$ ，通过系统 $h(n)=\{4, 3, 2, 1\}$, $n=0, 1, 2, 3$

- (1) 求系统的输出 $y(n) = x(n) * h(n)$
- (2) 试用循环卷积计算 $y(n)$
- (3) 简述通过 DFT 来计算 $y(n)$ 的思路

HW 4.2.

$$(1) y(n) = x(n) * h(n) = \{4, 11, 20, 30, 20, 11, 4\}, n=0, 1, \dots, 6$$

(2) 用循环卷积计算，先对 $x(n)$ 和 $h(n)$ 补零，使长度变为二者长度之和减一，

$$L = N + M - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$$

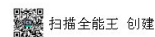
$$x'(n) = \{1, 2, 3, 4, 0, 0, 0\}$$

$$h'(n) = \{4, 3, 2, 1, 0, 0, 0\}$$

$x'(n) \otimes h'(n)$ 一个周期内求出结果 等价于线性卷积。

$$y(n) \text{ 即为 } \{4, 11, 20, 30, 20, 11, 4\}$$

(3)



扫描全能王 创建

因为 DFT 的‘时域卷积，频域相乘’对应的是循环卷积，而不是线性卷积。所以想要通过 DFT 计算 $y(n)$ ，步骤如下：

1. 对 x 和 h 补零，使其长度为 $L = M + N - 1 = 7$ ，保证线性卷积结果与循环卷积结果一致。
2. 对两个新序列分别求 DFT，得到两个长度为 L 的频域序列。
3. 将两个频域序列相乘，再进行 DFT 逆变换，得到的结果即为 $y(n)$

Exercise 3

关于正弦信号抽样的实验研究。给定信号 $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$, $f_0 = 50\text{Hz}$, 现对 $x(t)$ 抽样, 设抽样点数 $N=16$ 。我们知道正弦信号 $x(t)$ 的频谱是在 $\pm f_0$ 处的 δ 函数, 将 $x(t)$ 抽样变成 $x(n)$ 后, 若抽样率及数据长度 N 取得合适, 那么 $x(n)$ 的 DFT 也应是在 $\pm 50\text{Hz}$ 处的 δ 函数。由 Parseval 定理, 有

$$E_t = \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{2}{N} |X_{50}|^2 = E_f$$

X_{50} 表示 $x(n)$ 的 DFT 在 50Hz 处的谱线, 若上式不成立, 说明有频谱泄露。

给定下述抽样频率: (1) $f_s = 100\text{Hz}$ (2) $f_s = 150\text{Hz}$ (3) $f_s = 200\text{Hz}$ 。试分别求出 $x(n)$ 并计算其 $X(k)$, 然后用 Parseval 定理研究其泄露情况, 请观察得到的 $x(n)$ 和 $X(k)$, 总结对正弦信号抽样应掌握的原则。(用 MATLAB 编程验证题目要求, 提交完整源代码和运行结果。)

HW 3 (1) $f_s = 100\text{Hz}$ 时, 由于 $x(n) = \sin(2\pi \cdot 50n/100) = \sin(n\pi) \equiv 0$,

所以 $X(k) \equiv 0, k=0, 1, \dots, 15$,

这样抽取没意义。

但遇到 Matlab 转频度问题。
抽样率 e^{-16}, e^{-15} 量级, 可当 0 处理。

(2) $f_s = 150\text{Hz}$ 时, 由于 $x(n) = \sin(2\pi n/3)$, 一个周期抽样得 3 个点, 时域的能量

$$E_t = 7.5$$

$$|X(k)| = \{0, 0.1187, 0.2746, 0.5451, 1.2247, 1.1379, 3.8632, 2.0038, 1.752$$

$k=0, \dots, 8$, 对称性 $k=9, \dots, 15$ 不再考虑。

显然它不是在 50Hz 处的 δ 函数。

$$Af = \frac{1}{T} = \frac{f_s}{N} = 9.375, \quad k=5 \text{ 时}, \quad f = 9.375 \times 5 = 46.875, \text{ 可猜}$$

$$|X(5)| \text{ 看作 } |X_m|, \text{ 这时}, \quad \frac{2}{N} |X_m|^2 = \frac{2}{16} \times 1.1379^2 = 4.707 \neq 7.5$$

显然有明显的泄露。

HW4.3 (3) 当 $f_s = 200\text{Hz}$ 时, $x(n) = \sin(\pi n/2)$, 一个周期抽样四个点, 分别为 $0, 1, 0, -1$. $E_t = 8$.

$|X(k)|$ ($k=0, \dots, 8$) 是,

$$|X(k)| = \{0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 0\}$$

显然, 是在 $\pm f_0$ 处的 δ 函数, f_0 对应的 $k=4$,

满足 $E_t = E_f = 8$ 的关系.

上述结果告诉我们, 对正弦信号抽样时, 抽样频率应尽量取

信号频率的整数倍; 抽样点数应包含整周期, 且每个周期

最好不少于4个点.

扫描全能王 创建

编辑器 - hw4_3.m

变量 - x1

absy2 x1 x

1x16 double

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1.2246e-16	-2.4493e-16	3.6739e-16	-4.8986e-16	-1.1640e-15	-7.3479e-16	-2.6955e-15	-9.7972e-16	1.1022e-1
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

absy3 x

1x16 double

	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2.0448e-15	8	4.0065e-15	2.6450e-15	8.6489e-16	6.0033e-15	8.0883e-15	7.4089e-15	1.5266e-14	8	1.7463e-14	1.0082e-14
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												

名称 ^

absy2

absy3

E1

E2

E3

f0

f1

f2

f3

n

N

x1

x2

x3

y2

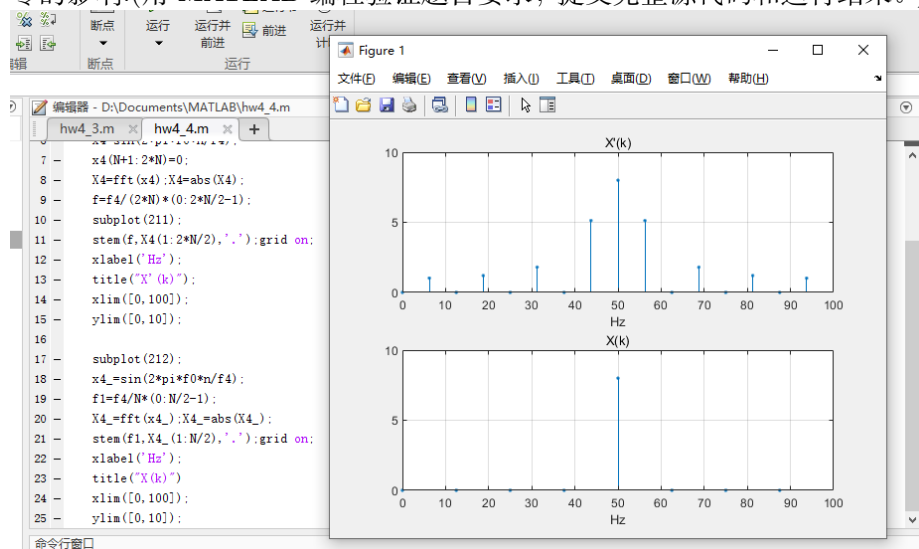
y3

名称

absy2
absy3
Et1
Et2
Et3
f1
f2
f3
n
N
x1
x2
x3
y2
y3

Exercise 4

对 Exercise 3, 当取 $f_s = 200\text{Hz}$, $N=16$ 时, 在抽样点后再补 N 个零得到 $x'(n)$, 这时 $x'(n)$ 是 32 点序列, 求 $x'(n)$ 的 DFT $X'(k)$ 分析对正弦信号补零的影响。(用 MATLAB 编程验证题目要求, 提交完整源代码和运行结果。)



补零前后的频谱如图所示, 分析可得:

对正弦信号, 在抽样频率和数据点合适的情况下, 其频谱是狄拉克函数, 反应了正弦信号线谱的特点。

在数据后面补零后, 将引起频谱泄露, 使得正弦信号的频谱不再是线谱。