第1章

2024春

上次课的简要回顾

- MATLAB基本使用方法
  - 运行界面
  - “帮助”文档本地化
  - 多种编程模式（脚本、函数，实时脚本、实时函数，等等，导出word文件、PDF文件）
  - demo；help ***；收藏
  - 数据类型、矩阵，结构体数组、元胞数组
  - 信号处理，文档、示例、函数、模块、APP
    - 信号处理工具箱（Signal Processing Toolbox）
    - Audio Toolbox（包括：AI for Audio）
    - DSP System Toolbox
  - 编程实践programming_2.mlx（CTFT符号计算，CTFS数值计算）
- 未讲解内容
  - 关于矩阵和数组在计算上的差别，主要有矩阵乘法、数组乘法等
  - MATLAB代码优化方法（ programming_2.mlx ）

第1章 离散时间信号

1.1 典型离散信号 （略）

1.2 离散信号的运算 （略）

1.3 信号的分类 （略）

1.4 噪声 （略）

1.5 信号空间的基本概念

1.6 确定性信号的相关函数

1.7 与本章内容有关的MATLAB文件

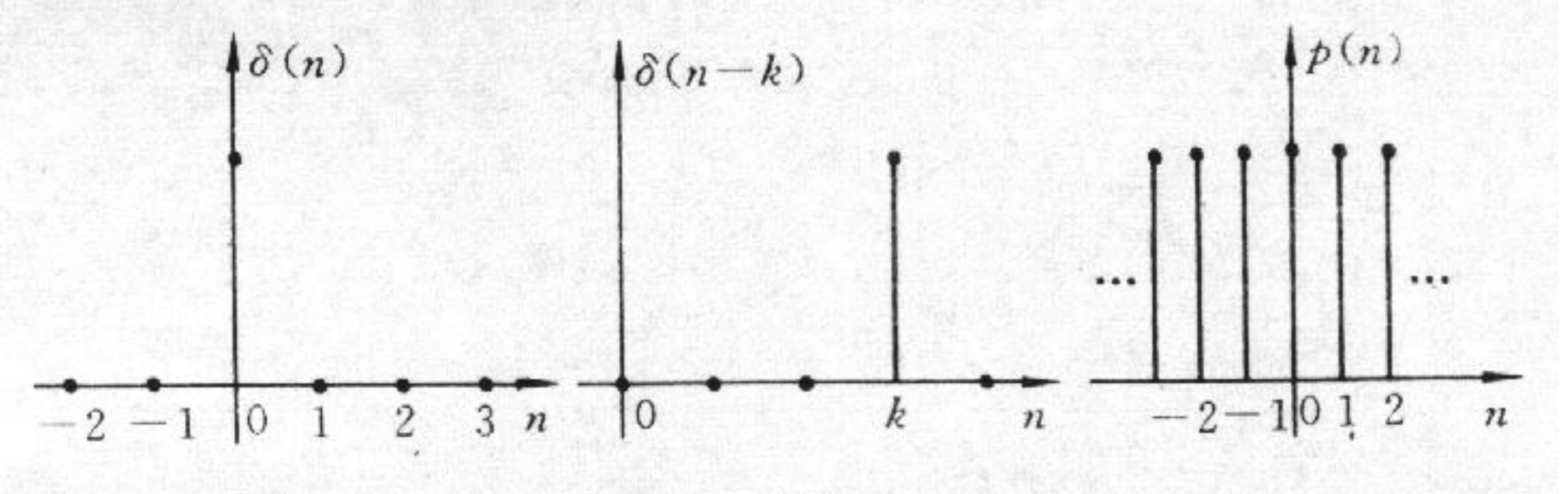
1.1 典型离散信号

1. 单位脉冲序列 （Kronecker 函数）

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

$\boxed{\text{二元函数}\delta_{ij}}$

$$\delta(n-k)=\begin{cases}1 & n=k\\ 0 & n\neq k\end{cases} \qquad p(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-k)$$



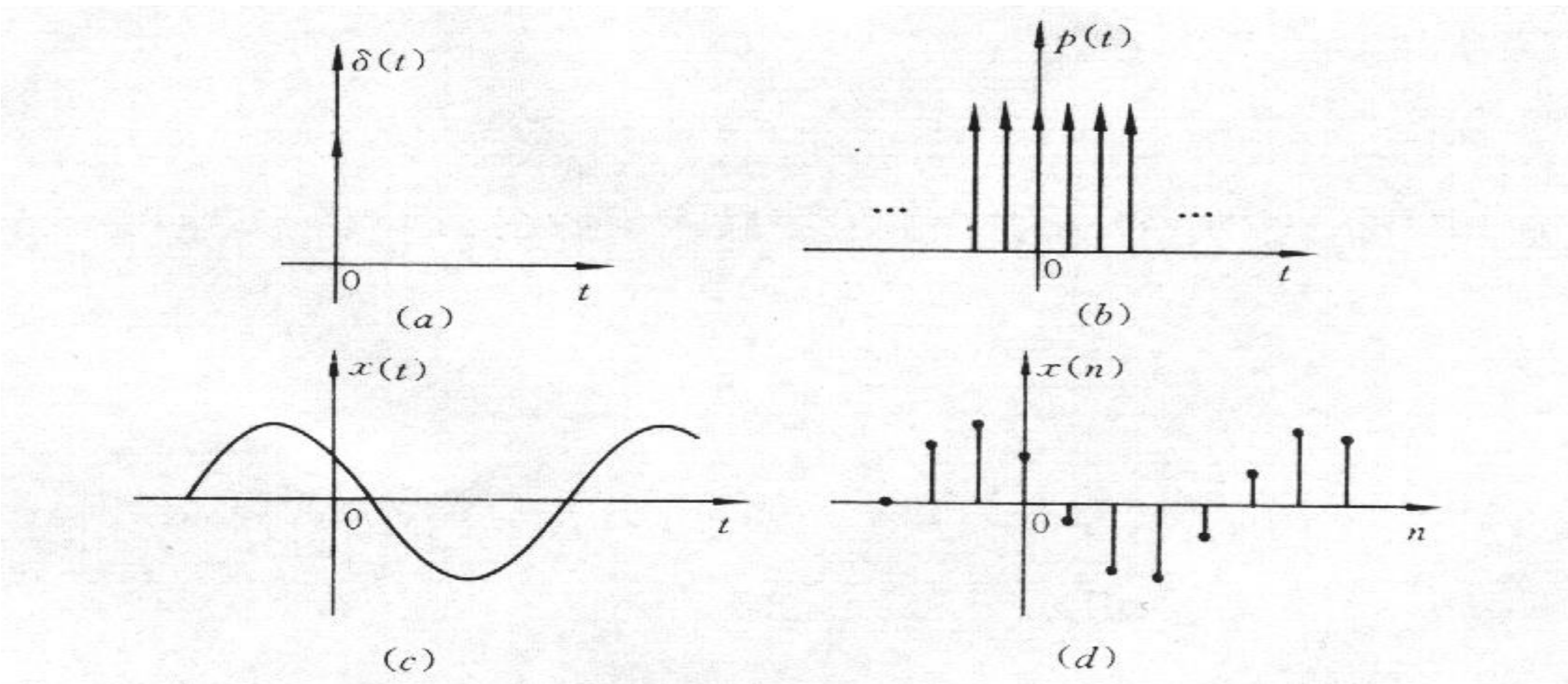
(a) (b) (c)

单位冲激信号（Drac 函数）

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 \\ \delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau)\mathrm{d}t = x(\tau)$$

一个变量，伴随积分一起出现



脉冲串： $$p(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-k)$$

或写为： $$p(n)=\{\dots,1,1,1,\dots\}$$

冲激串： $$p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s)$$

$p(t)$的应用

$$x_s(t)=x(t)p(t)=x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

对于冲激函数的强度，即采样样本$x(nT_s)$，将nT_s用n来替换，得到$x(n)$，即离散时间序列

$$x(nT_s)\ \Rightarrow\ x(n)$$

$\boxed{\text{离散时间序列}}$

2. 正弦序列

$$x(t) = A\sin(2\pi f t + \varphi) = A\sin(\Omega t + \varphi)$$

(f: Hz； Ω: rad/s； f_s: 抽样频率， Hz)

$$x(n) = x(t)\Big|_{t=nT_s} = A\sin(2\pi f n / f_s + \varphi)$$

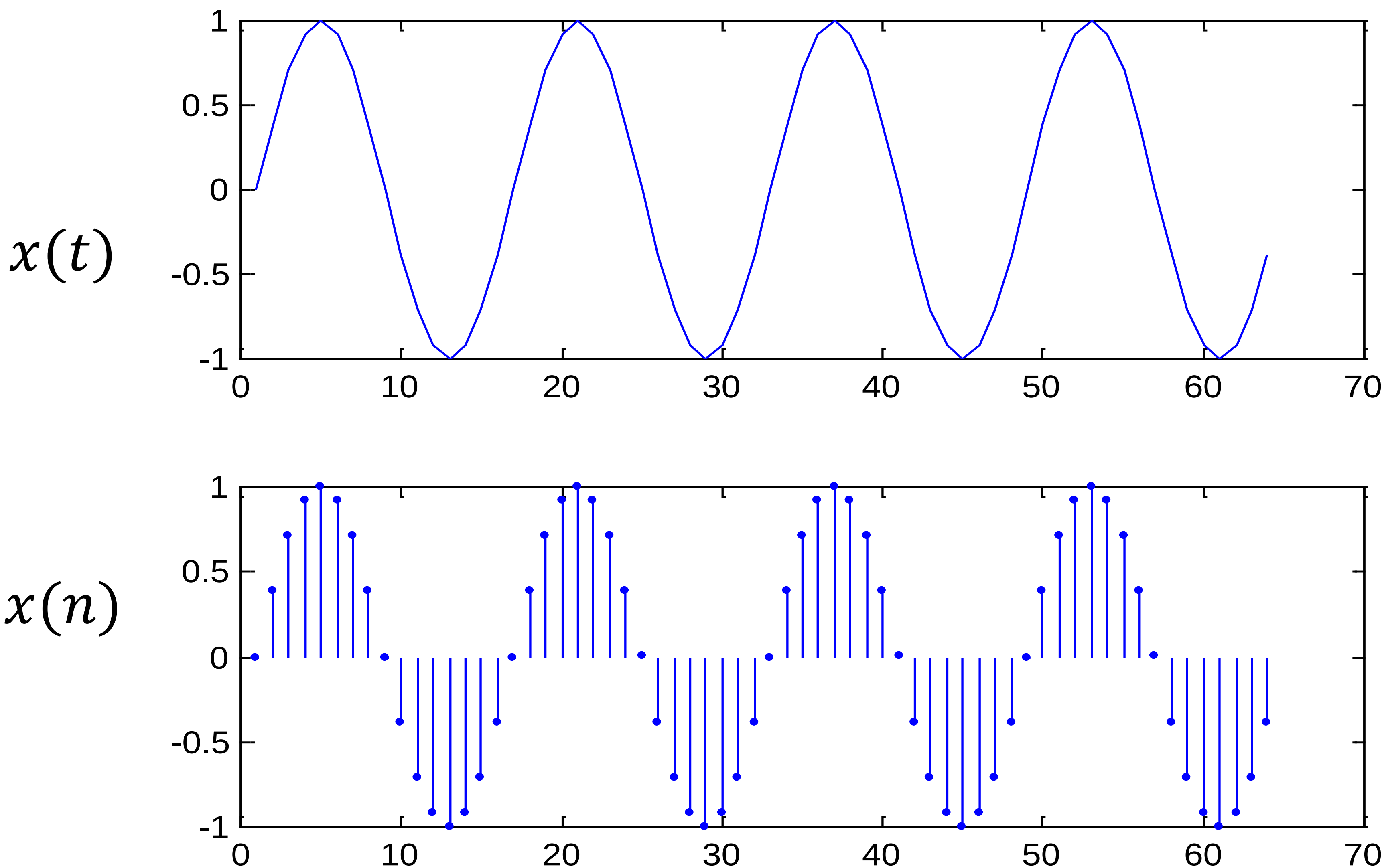
定义： $\omega = 2\pi f / f_s (rad)$

ω、Ω 之间一种简单直接的线性映射关系

$$\omega = 2\pi f T_s = \Omega T_s \text{（rad）}$$

$$x(n) = A\sin(\omega n + \varphi)$$

拓展：非线性。实际频率与感知频率；成像系统里的非线性关系



x(t)
x(n)
1
0.5
0
-0.5
-1
0
10
20
30
40
50
60
70

例

$$x(t) = \sin(200\pi t)$$

则 $f = 100\text{Hz}$ $T = 0.01s$

令 $f_s = 400\text{Hz}$ 则:

$$x(n) = \sin(200\pi n/400) = \sin(0.5\pi n)$$

则周期 $N = 4$

$x(n) = \sin(\omega n) \qquad \omega = 2\pi/N$

$x(n) = \sin(0.01\pi n) \qquad 2\pi/N = 0.01\pi \qquad N = 200$

$x(n) = \sin(0.1n) \qquad 2\pi/N = 0.1$

$N = 20\pi$　无周期?

条件：$\dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{N}{m}$，$m$、$N$为互素的整数

例如：$\dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{40}{3}$，$m$、$N$的含义?

$$\left.\begin{array}{l} e^{-j\omega n}=\cos(\omega n)+j\sin(\omega n) \\ e^{-j\omega n}=\cos(\omega n)-j\sin(\omega n) \end{array}\right\} \text{欧拉公式}$$

$e^{j\omega n}$的意义之一：DTFT的基函数

$e^{j\omega n}$的意义之二：DTLTI系统的特征函数。
证明？（涉及DTFT的导出）

DTLTI系统的特征函数的一般形式：z^n。
证明？（涉及ZT的导出）

卷积、特征函数、DTFT、ZT公式推导

3. u(n)单位阶跃序列

$u(n)$与$\delta(n)$之间

累加、差分关系

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

$$x(n)=x_1(n)u(n) \quad 则\, n\geq 0$$

这里$u(n)$的作用：限制自变量定义域；参与运算。

4. 指数序列

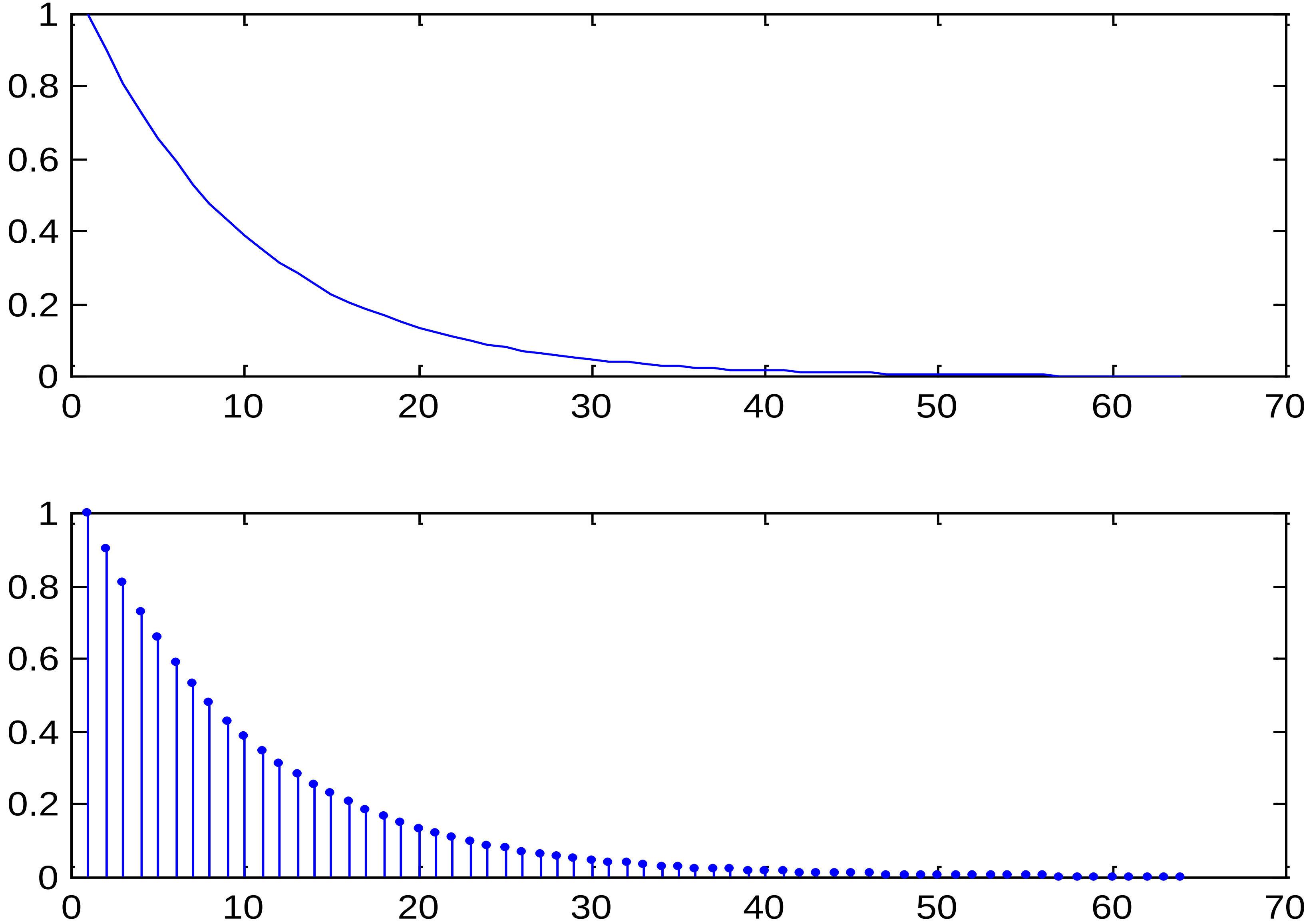
$$a^{|n|}, |a|<1$$

$$n=-\infty \sim 0 \sim \infty$$

$$x_a(t)=Ae^{-\alpha t}\sin(\Omega_0 t)u(t)$$
$$x(nT_s)=Ae^{-\alpha nT_s}\sin(\Omega_0 nT_s)u(nT_s)$$
$$x(n)=Ae^{-\alpha nT_s}\sin(\Omega_0 nT_s)u(n)$$
$$x(n)=Ae^{-\alpha nT_s}\sin(\omega_0 n)u(n)$$

指数序列卷积计算，函数conv和filter

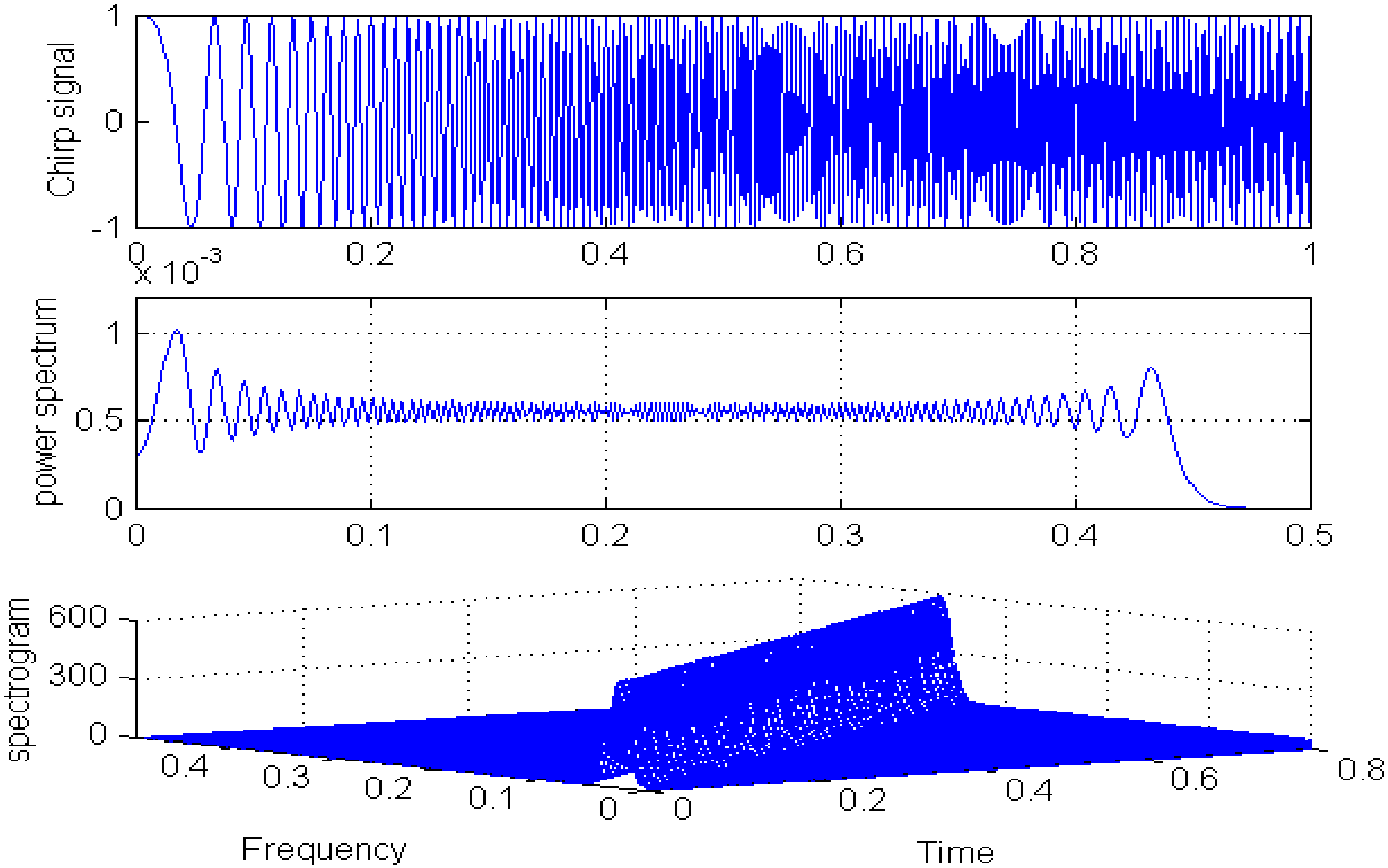
指数信号 $x(t)$, $x(n)$



5. Chirp 信号

$$x(t) = e^{j\alpha t^2}$$

$$x(n) = e^{j\alpha n^2}$$



spectrogram：使用短时傅里叶变换得到信号的频谱图

其它典型信号

（1）50Hz工频信号

$$x(t)=A\sin(2\pi f_0 t), A=220, f_0=50\mathrm{Hz}$$

（2）哈明窗（根据实际情况给定f_0）

$$x(t)=0.54-0.46\cos(2\pi f_0 t)$$

（3）sinc函数

$$x(t)=\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}, \Omega=2\pi f$$

MATLAB代码

1.2 离散信号的计算

关于信号自变量变换的计算

关于信号因变量变换的计算

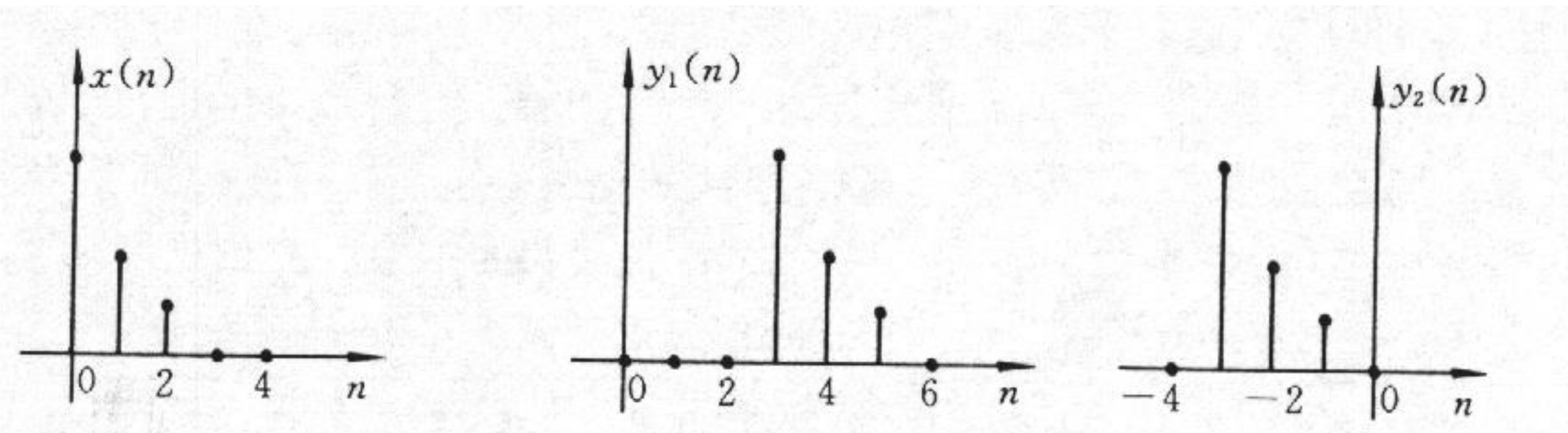
1. 移位

$x(n)$

$$y_1(n) = x(n-k)$$

$$y_2(n) = x(n+k)$$

整个序列移动



$k = 3$

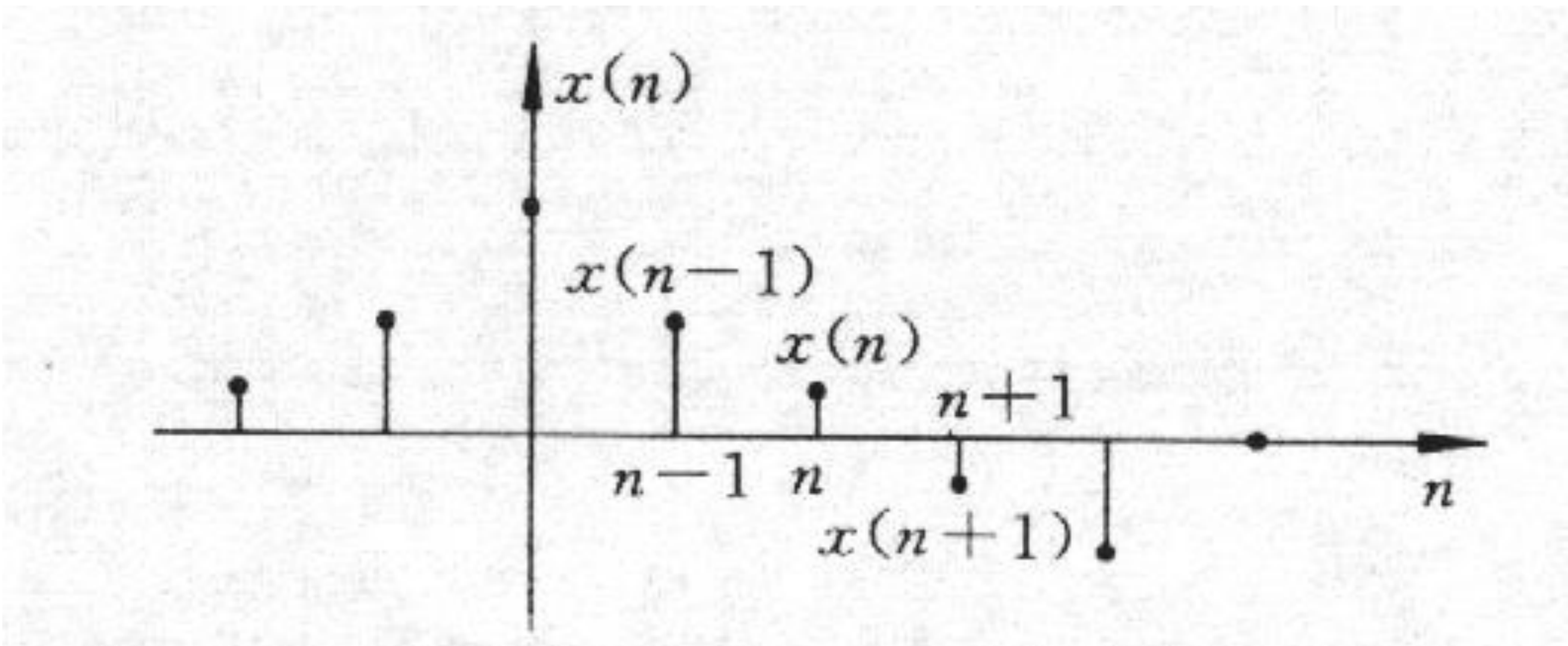
n ：当前时刻

$n-k$ ：过去时刻

$n+k$ ：将 来

$x(n-1)$ 是 $x(n)$ 的单位延迟

以后用 z^{-1} 表示



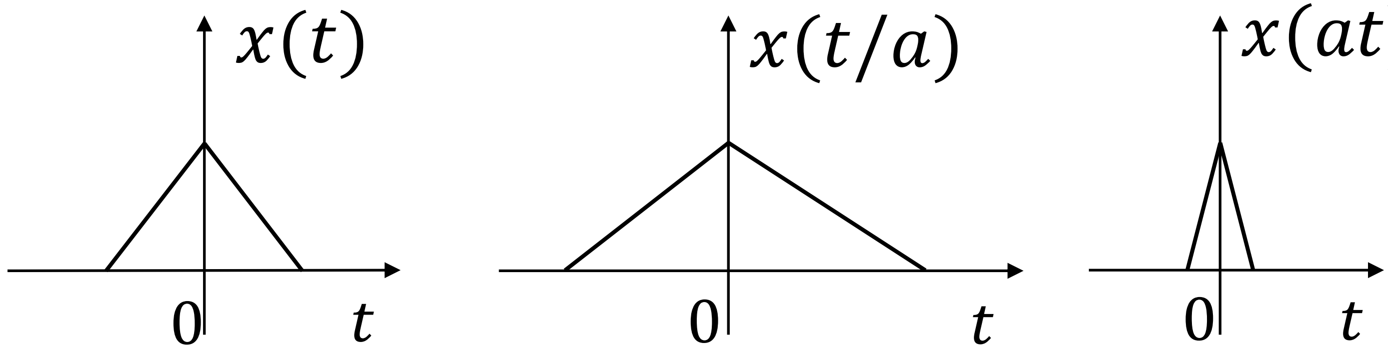
在数字信号处理器中，延迟（移位）是由一系列移位寄存器实现的。

任意序列的$\delta(n)$表示

- 任意序列与$\delta(n)$相乘——抽取
- 任意序列与$\delta(n)$卷积——复制
- 任意序列的$\delta(n)$表示
  - 可利用恒等系统的卷积导出

卷积、特征函数、DTFT、ZT公式推导

2. 信号时间尺度变化（压扩、反转（特例））



设$a > 1$

设$x(t)$，$t \in [\alpha, \beta]$，则对于$x(t/a)$, 有$t/a \in [\alpha, \beta]$，
所以有a$\alpha \leq t \leq a\beta$。
尺度变换，尺度伸缩，→小波变换中的重要操作

离散信号时间尺度的伸缩？

信号的抽取与插值

3. 加、减、乘 $x_1(n)$, $x_2(n)$

$$y(n) = x_1(n) \pm x_2(n)$$

$$y(n) = x_1(n) \bullet x_2(n)$$

注意：时刻对齐

4. 卷积 $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$

5. 信号的变换 Z，DFT，DCT，小波变换

正变换，反变换（信号分解）；FT无时间信息，短时FT

语音信号短时傅立叶分析：压缩、识别；语谱图

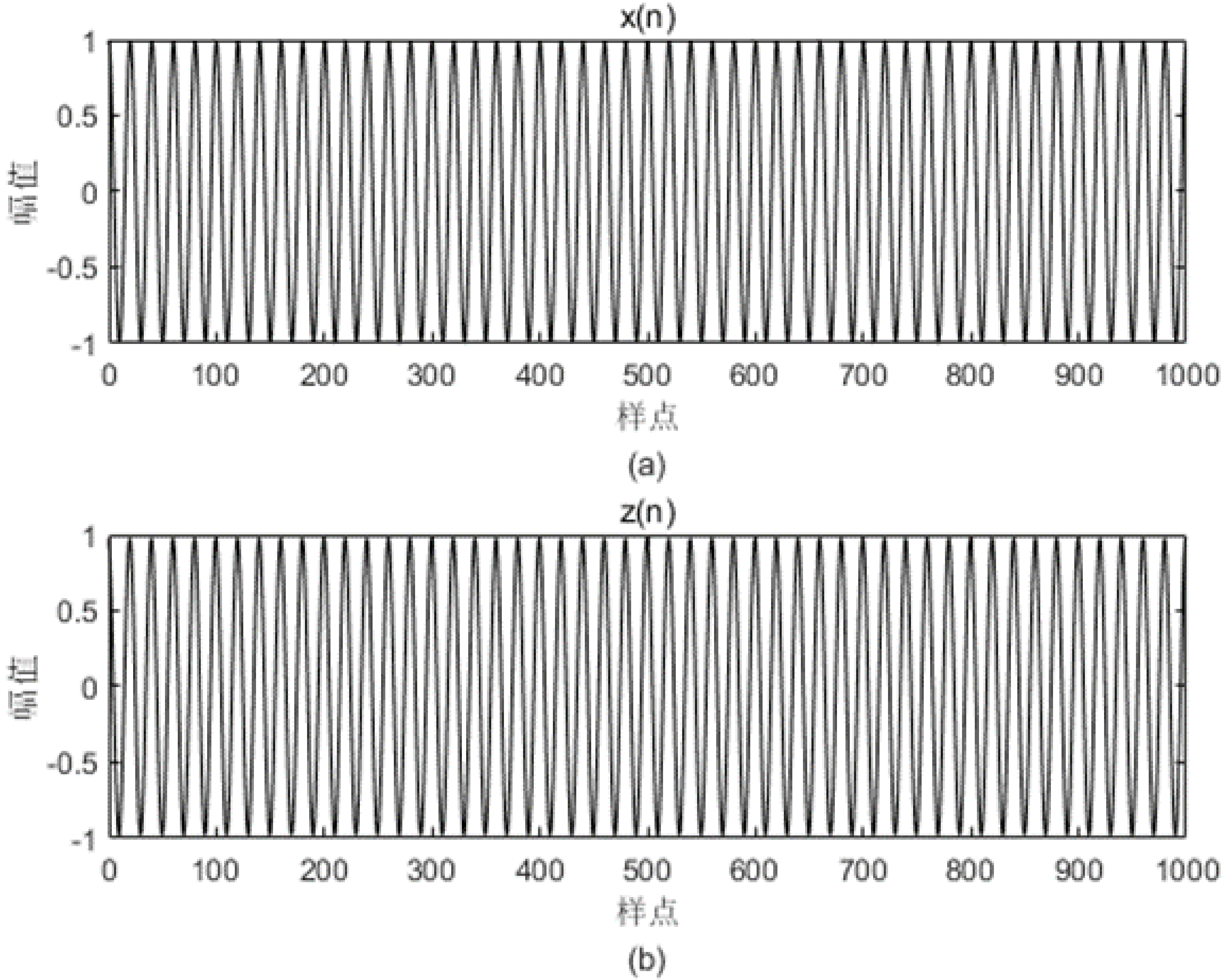
MFCC特征提取理论：实际频率/Hz→感知频率/Mel，Mel滤波器组

DCT在图像、视频压缩中的应用；对一维信号的压缩的例子，时域→DCT系数，处理系数，重建信号

语谱图；DCT压缩

$x(n)=\cos(2\mathrm{pi}fn/f_s)$，$f$=50Hz, f_s=1000Hz; y=dct(x);

DCT之后，幅值小于5的区间的幅值都置为0；重建信号



6. 信号的分解

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$$
$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$$
$$x(n)=x_e(n)+x_o(n)$$

（1）信号的奇偶分解

（2）任意序列的δ分解

（3）信号的基向量分解

任何信号都能分解为一个奇函数和偶函数的和。
奇函数和偶函数相对于普通的函数有一些特殊的性质可以利用。

将一个复杂的信号分解为一系列简单信号的组合是信号处理中最基本的方法。

- 便于了解所要处理的信号的内涵
- 便于提取信号的特征

差分对上信号（V_1，V_2）分解为差分信号(奇模V_{Odd})和共模信号(偶模V_{Even})信号来表示；引出小波变换的针对向量$[x1\ x2]$平均信息a和细节信息d的分解

信号的基向量分解

$$x = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varphi_n$$

信号的离散表示

信号的分解

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N$$

分解的基向量

连续的，或离散的

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$$

分解的系数

一组离散值

由 x， $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N \rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$

信号的变换，信号分解的逆过程

将信号从一个域映射到另一个域

时域→频域；信号处理中常用技术

4种基本FT对应的信号分解与变换

- CTFS（CFS）
  - 完备正交集无穷个
- DTFS（DFS）
  - 完备正交集有限个
- CTFT
  - 基向量连续的，无穷个，
  - 无穷区间
- DTFT
  - 基向量连续的，无穷个，
  - 有限区间

$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\mathrm{j}k\Omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0)e^{\mathrm{j}k\Omega_0 t}$，周期信号$x(t)$的分解

$a_k=X(k\Omega_0)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-\mathrm{j}k\Omega_0 t}\mathrm{d}t$，$x(t)$中第$k$次谐波的幅度

$\tilde{x}(n)=\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$，周期信号$\tilde{x}(n)$的分解

$a_k=\tilde{X}(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$，$\tilde{x}(n)$中第$k$次谐波的幅度

$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$，信号$x(t)$的分解

$X(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$，$x(t)$的频谱密度函数，频谱

$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{\mathrm{j}\omega})e^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega$，信号$x(n)$的分解

$X(e^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-\mathrm{j}\omega n}$，$x(n)$的频谱密度函数，频谱

傅里叶变换，将信号和一组不同频率的复正弦做**内积**：

$$X(k\Omega_0)=<x(t),e^{\mathrm{j}k\Omega_0 t}>$$

$$X(\mathrm{j}\Omega)=<x(t),e^{\mathrm{j}\Omega t}>$$

前者对应傅里叶级数，后者对应傅里叶变换。
式中的复正弦即变换的基向量，而傅里叶系数或傅里叶变换是信号在这一组基向量上的投影。
不同频率正弦信号两两之间是正交的，傅里叶变换是正交变换。傅里叶变换可直观解释为信号展开成无穷多正弦信号组合。正弦信号有哪些优势呢？傅里叶变换将时间和频率联系了起来。

1.3 信号的分类

模拟信号和数字信号：自变量和因变量是否都数字化。自变量离散，因变量量化

1. 连续，离散

2. 周期，非周期

3. 确定性信号，随机信号

$$x(n)=\begin{cases}\text{表格}\\ \text{曲线}\\ \text{公式}\end{cases}$$

$$n \to x(n)$$

确定性信号

随机信号统计特性：均值，方差，一阶矩，二阶矩，...

语音、图像、视频信号；系统板中的电压电流信号

4. 能量信号, 功率信号

能量信号

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\mathrm{d}t<\infty$$

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2<\infty$$

功率信号

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 < \infty$$

周期信号的功率定义

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

除以N，可以减小数据的数值范围，增加数据的精度

16-bit空间，数据动态范围和精度？

Q定点数数据类型

例

信号 $x_1(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & n\geq 1\\ 0 & n\leq 0\end{cases}$

可求出： $E_{x_1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^2=\dfrac{\pi}{6}$ ⇨ 能量信号

信号 $x_2(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{n}} & n\geq 1\\ 0 & n\leq 0\end{cases}$

可求出： $E_{x_2}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ ➡ 不收敛，非能量信号

$$
\begin{cases}
x(n) = \sin(\omega n + \varphi) \\
\varphi : (-\pi, \pi) \\
f(\varphi) = \dfrac{1}{2\pi}
\end{cases}
$$

随机相位正弦波

随机信号

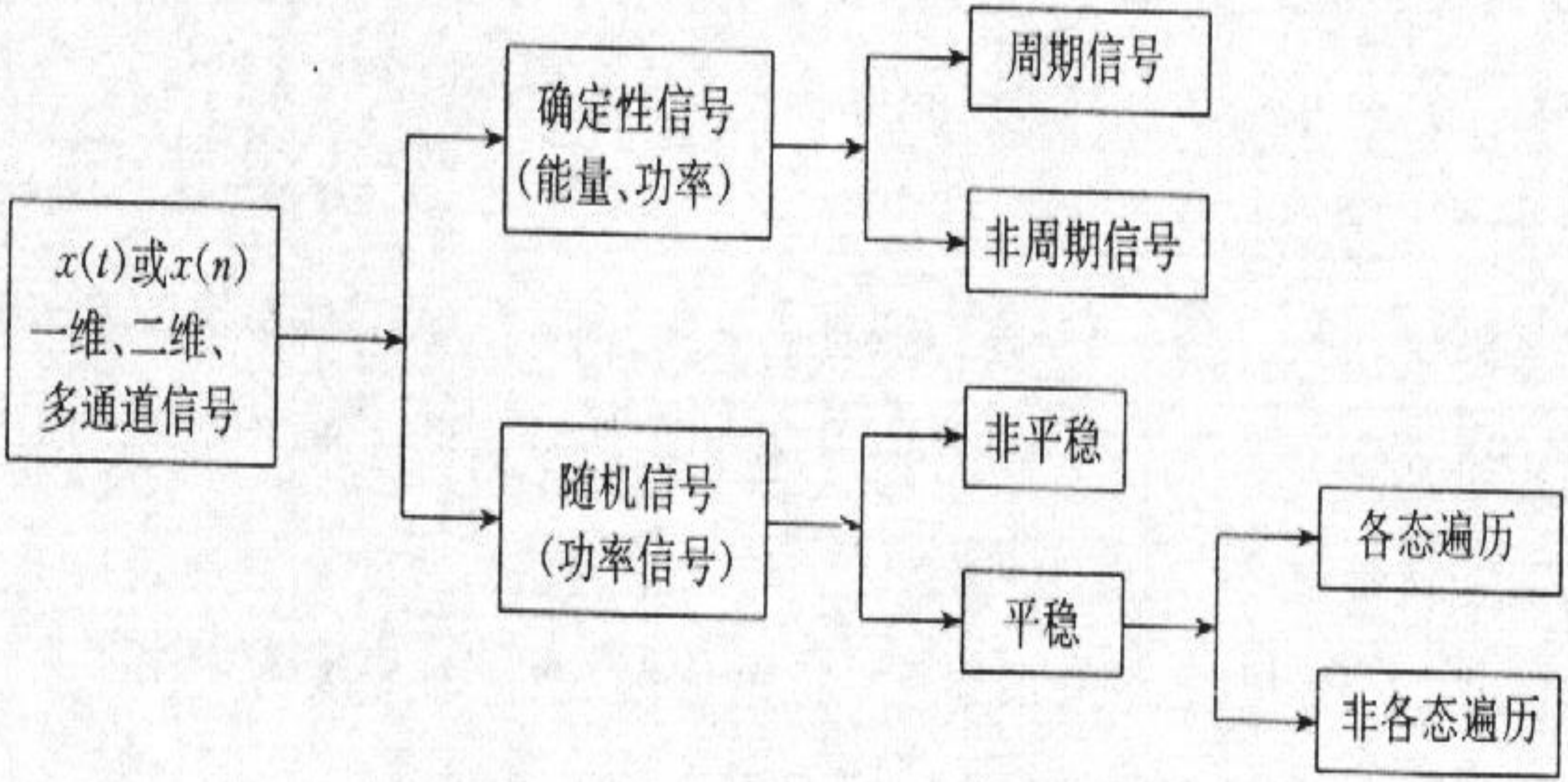
均匀分布的随机变量

5. 1-D, 2-D, 3-D

6. 单通道, 多通道

$$x(n) = [x_1(n), x_2(n), \cdots, x_M(n)]^T$$

二值图像信号，灰度图像信号，彩色图像信号



x(t)或x(n)
一维、二维、
多通道信号
确定性信号
(能量、功率)
随机信号
(功率信号)
周期信号
非周期信号
非平稳
平稳
各态遍历
非各态遍历

1.4 噪声（Noise）

- 噪声的分类
  - 从噪声的产生机理分
    - 50Hz工频干扰，热噪声，量化噪声，舍入噪声
  - 从噪声的统计特点分
    - 白噪声，有色噪声，脉冲噪声
  - 从噪声的引入方式
    - 加性噪声，乘性噪声，卷积噪声
- 指标
  - 信噪比，$SNR=10\log(P_s/P_u)$（dB）

高速数字系统中，有串扰、地反弹等噪声，会使传输数字信号的电压波形发生畸变，严重时不可用。测量时也会引入噪声，可能产生好的或坏的作用。

1.白噪声

White Noise

- 功率谱为一直线；
- 自相关函数为δ函数
- 各点之间互不相关

白噪声是信号处理中最常用的噪声模型！

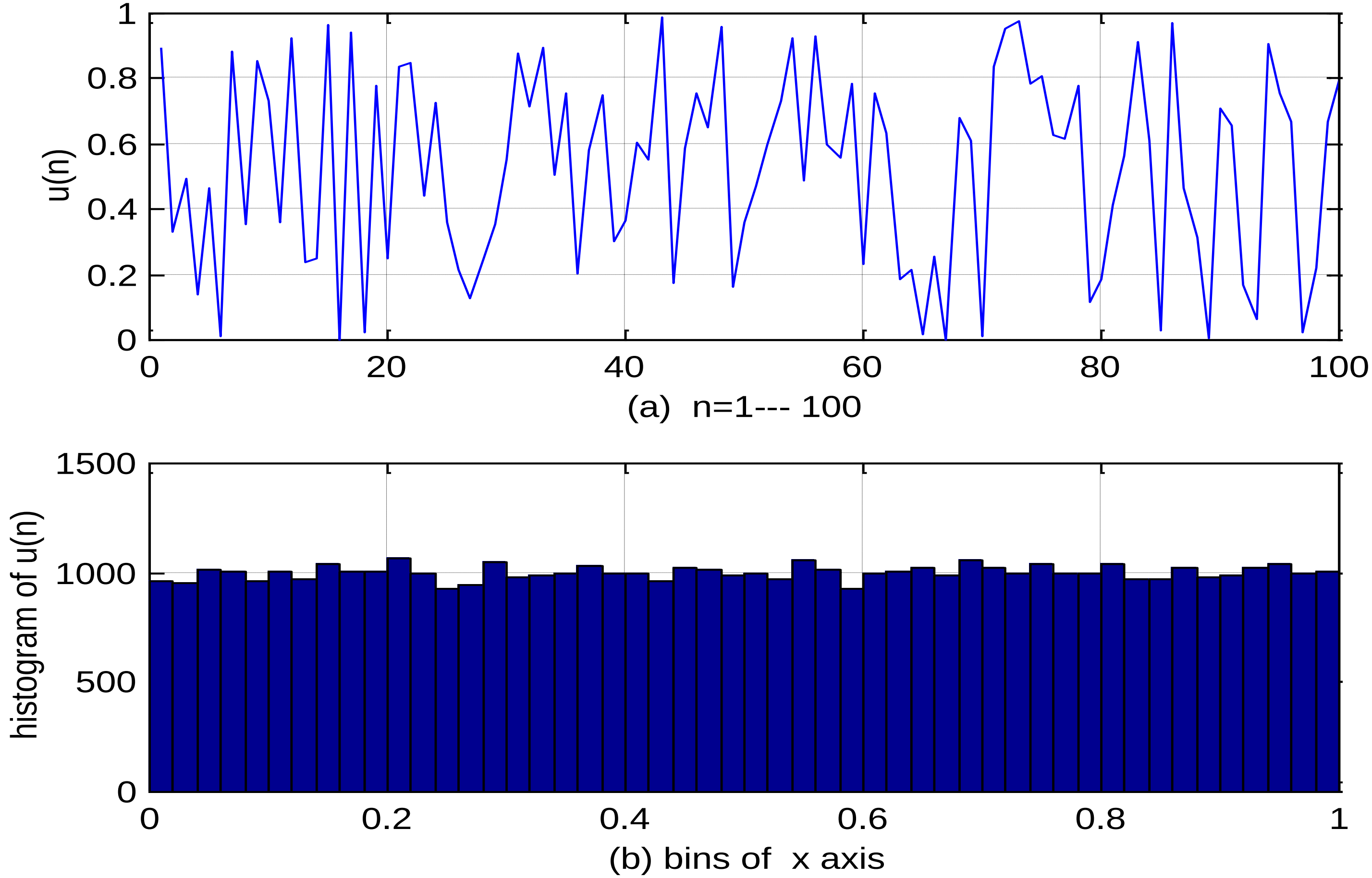
自相关函数的FT是功率谱
为什么说白噪声是任意两点都不相关的？

语音信号样点间的相关性？

实信号 $x(n)$ 的自相关函数：$r_x(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n+m)$

白噪声、含白噪声的正弦信号，MATLAB代码

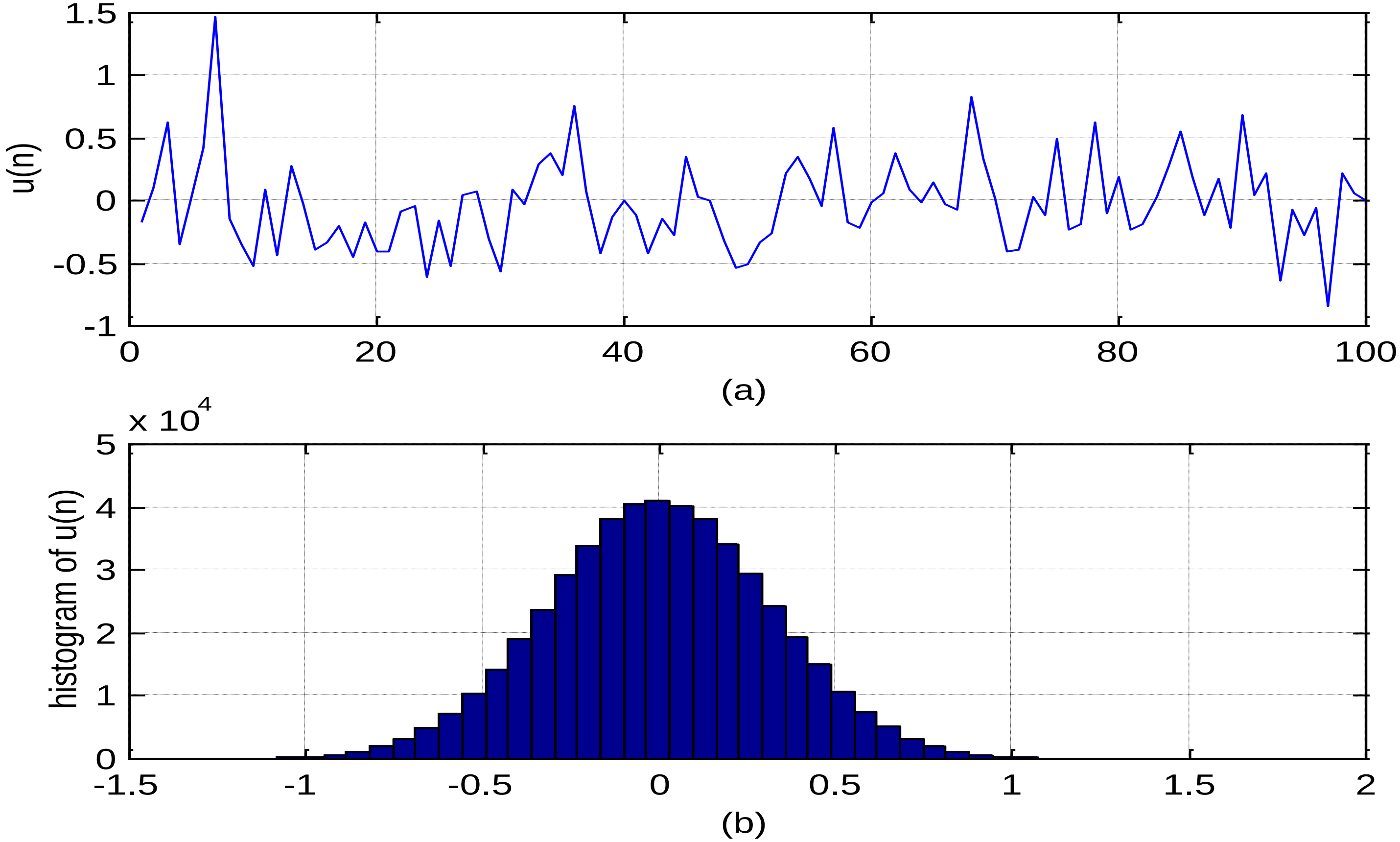
均匀分布白噪声



u(n)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
20
40
60
80
100
(a) n=1--- 100
histogram of u(n)
1500
1000
500
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
(b) bins of x axis

直方图

高斯分布白噪声



1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
u(n)
0
20
40
60
80
100
(a)
x 10^4
5
4
3
2
1
0
histogram of u(n)
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
(b)

直方图

2. 有色噪声　　Colored Noise

特点：功率谱不是直线

3. 脉冲噪声

4. 工频噪声

噪声与信号的关系（信号与噪声是相对的）

$$x(n) = s(n) + u(n)$$　　*加法性噪声*

$$x(n) = s(n) \bullet u(n)$$　　*乘法性噪声*

去除噪声是信号处理的永恒话题！

1.5 信号空间的基本概念

《线性代数简明教程》：**线性空间**是定义了加法与数量乘法（两种运算常称之为线性运算），且两种运算满足八条基本运算规律的一个非空集合V。有时将V称为向量空间，V中的元素常称为向量。

线性空间是很广泛的一类事物在数学上的抽象。

将**三维空间**推广到**n数组空间**，并定义加法、数乘，是一个典型的具有代表性的线性空间。

实数n维数组空间引入**内积**后，就成为**欧氏空间**。

欧氏空间中，元素为向量（**矢量**），定义了向量长度的度量方法、向量间的点积操作。

欧氏空间 -> **信号空间**：元素是信号，定义范数（对应向量长度）和内积（对应向量点积）。

信号分类方法：用到信号**距离**度量，可借用**欧几里德距离**度量。

空间的概念

线性空间：即向量空间；

赋范线性空间：定义了范数的线性空间；

度量空间（Metric Space）：定义了距离的空间，

赋范线性空间也是度量空间；

内积空间：定义并满足内积性质的空间；

Hilbert空间：完备的内积空间称为Hilbert空间

（一） **范数**: Norm

信号的一种特征表示：

最大幅度、绝对和、能量

$$||\boldsymbol{x}||_\infty = \max\{|x(t)|, \quad t = -\infty \sim \infty\}$$

$$||\boldsymbol{x}||_\infty = \max\{|x(n)|, \quad n = -\infty \sim \infty\}$$

$$||\boldsymbol{x}||_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$||\boldsymbol{x}||_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|$$

特征是一个很广泛的概念

语音识别、说话人识别、音乐检索，等

特征抽取与应用

信号空间 → 特征空间

MFCC特征参数提取原理；Mel滤波器组

$$||\boldsymbol{x}||_2=\left[\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}},\quad ||\boldsymbol{x}||_2=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Matlab中求范数的函数：norm

范数的性质

$\|\boldsymbol{x}\|\geq 0,\quad if\quad \|\boldsymbol{x}\|=0,\quad then\quad \boldsymbol{x}$ 全零信号

$\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$

$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ $\Longrightarrow$ 三角不等式

（二）**信号空间**定义

信号空间与特征紧密联系，特征空间

L_∞, l_∞空间：　$\|\boldsymbol{x}\|_\infty < \infty$ 的 x 的集合

L_1, l_1空间：　$\|\boldsymbol{x}\|_1 < \infty$ 的 x 的集合

L_2, l_2空间：　$\|\boldsymbol{x}\|_2 < \infty$ 的 x 的集合

$\boldsymbol{x} \in l_2$：　$x(n)$ 是能量信号

$\mathbb{Z}$ 整数的集合

$\mathbb{N}$ 正整数的集合 $\mathbb{Z}^+$

$\mathbb{R}$ 实数的集合

$\mathbb{R}^+$ 正实数的集合

$\mathbb{C}$ 复数的集合

关注L_2, l_2空间

（三）两个信号之间的**距离**

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||_2 = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)-y(n)|^2\right]^{1/2}$$

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2 = \left[\int_a^b |x(t)-y(t)|^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2}$$

信号能量

信号幅度

δ函数定义

信号逼近（如CTFS）中系数求解

该公式可用于求解CTFS和DTFS系数a_k。

对于CT周期信号$x(t)$，周期为T_0，其复指数组合逼近为：

$$\hat{x}(t) = \sum_k a_k e^{\mathrm{j}k\omega_0 t}$$

系数a_k的求解，要用到逼近误差的能量对a_k的求导。

距离的性质：

$$0 \le d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \infty$$

$$if \quad d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0, \quad then \quad x(n), y(n) \ldots$$

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$$

闵式距离

多元统计分析中距离是衡量样品和变量间相似性和差异性的常用测度。许多多元方法都是以距离为基础建立起来的。

闵可夫斯基距离(Minkowski Distance)又叫做闵氏距离，是一组距离的定义。

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) - y(n)|^p \right]^{1/p}$$

根据p取值的不同，闵氏距离分为曼哈顿距离、欧氏距离和切比雪夫距离等。

马氏距离：由印度统计学家马哈拉诺比斯(P. C. Mahalanobis)提出的，表示数据的协方差距离。它是一种有效的计算两个未知样本集的相似度的方法。

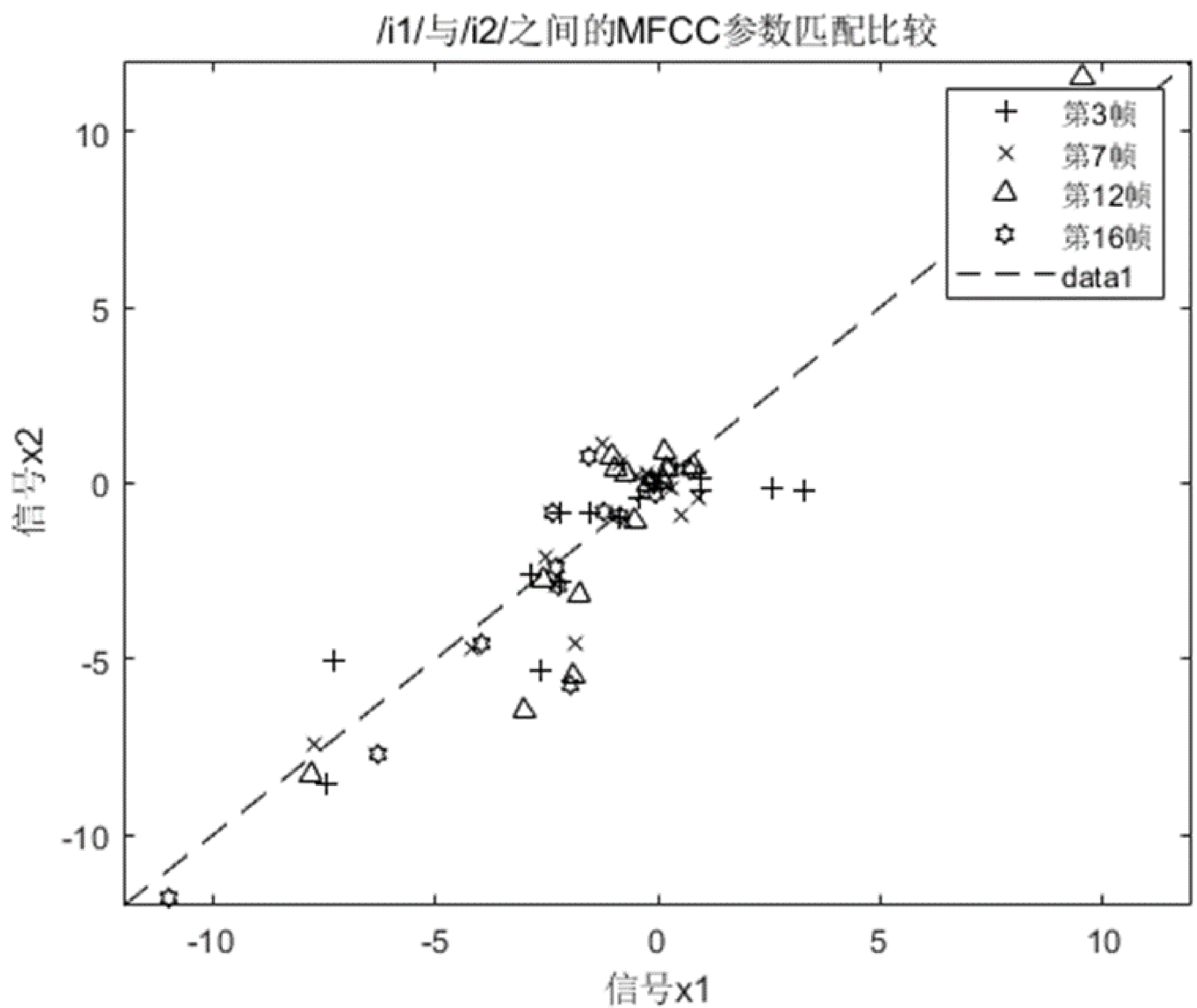
“距离”的应用

- 信号的距离在模式识别中有着广泛的应用
- 对于特征矢量（信号），可以用这种距离度量方法将特征矢量分类。
- 如说话人识别
  - 语音信号[空间]->提取特征->MFCC矢量空间
  - MFCC聚类码书设计，每个人的MFCC空间是有差别的，可用于说话人识别。
- 生物医疗中，预测病人是否将要发病。
- 指纹识别

语音信号短时傅立叶分析：压缩、识别；MFCC特征提取例子

MFCC 特征参数提取与对比

- 语音样点长度为2000点、帧长为200点、帧移为80点
- 有23帧；取中间19帧的MFCC特征矢量，19x16；画4帧
- 如果两个语音是比较匹配的，那么MFCC参数将分布在45度线附近，对应分量的差值比较小，距离近；两个元音\i\



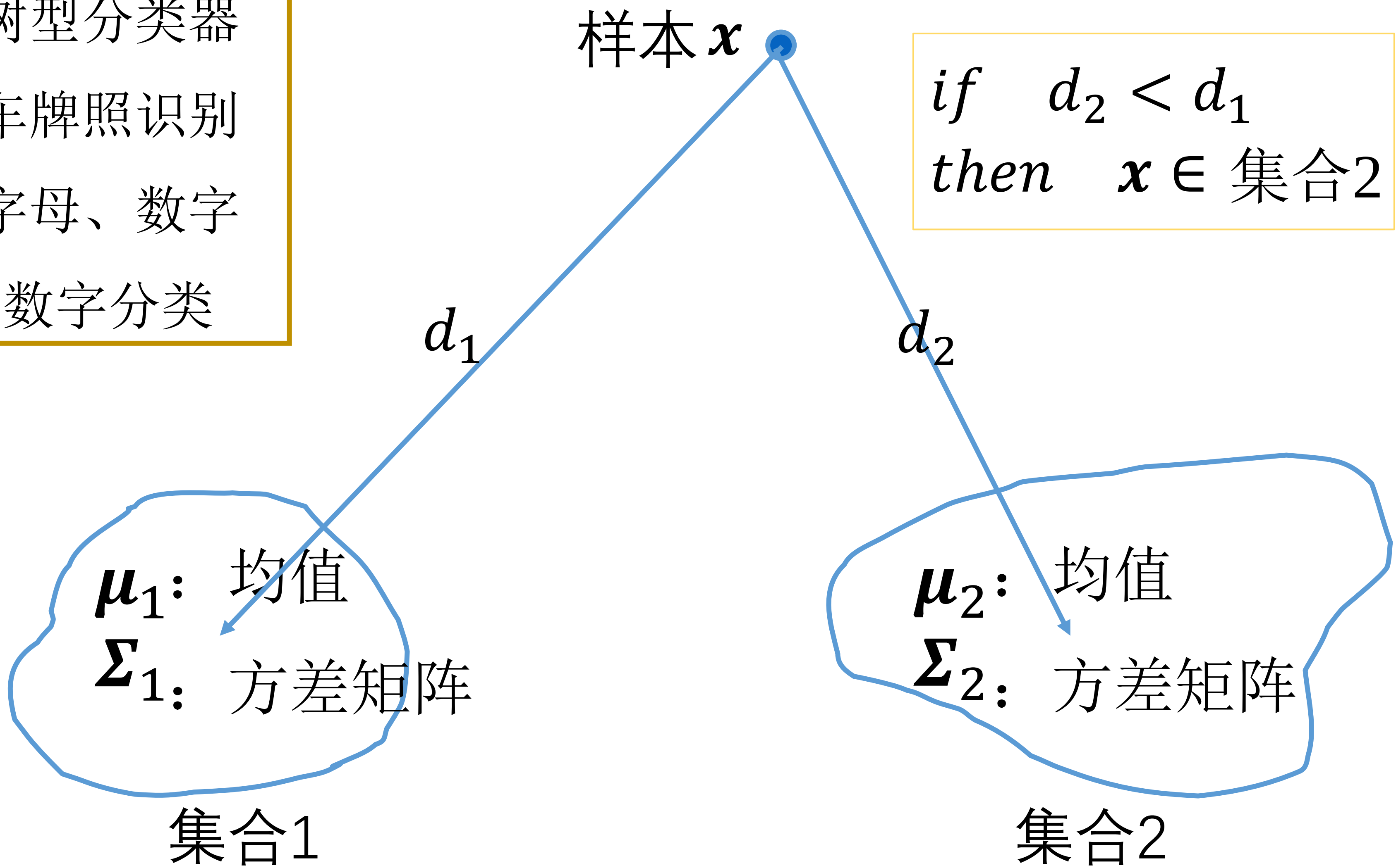
树型分类器

车牌照识别

字母、数字

数字分类

$$\text{if} \quad d_2 < d_1$$
$$\text{then} \quad \boldsymbol{x} \in \text{集合2}$$



在一个数据集合中找一个代表数据，是哪个合适？
找 N 个代表呢？

性格特征分类，等

（四）**内积**

L_2, l_2空间信号

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) \mathrm{d}t \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n) \end{cases}$$

对比：向量点积（内积）

内积的性质

(1) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle^*$
(2) $\langle \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \beta\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$, 式中$\alpha, \beta$是标量
(3) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$, 当且仅当$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$时，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$，式中$\boldsymbol{0}$是零向量

如果 $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= 0$ 则 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 正交

对比：两个非零向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是垂直的，当且仅当：

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$$

信号距离与范数的关系

$$d^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int_a^b [x(t)-y(t)][x(t)-y(t)]^* \mathrm{d}t$$
$$= \|\boldsymbol{x}\|_2^2 + \|\boldsymbol{y}\|_2^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$$

上式联系了距离、范数、内积

许瓦兹不等式

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n)\right|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2$$

含义：内积模的平方≤$\boldsymbol{x}$的能量E_x与$\boldsymbol{y}$的能量E_y的乘积

1.6 确定性信号的相关函数

相关是研究两个信号之间，或一个信号和其移位后的相关性，是信号分析、检测与处理的重要工具；在随机信号的理论中起到了中心的作用。

$x(n)$， $y(n)$ $\quad n=0,\cdots,\infty$

相关系数:

$$\rho_{xy}=\frac{\sum_n x(n)y(n)}{\left[\sum_n x^2(n)\sum_n y^2(n)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

由许瓦兹不等式，有: $|\rho_{xy}|\le 1$

“相关”概念的分类

相关系数的又一个定义：

$$r_{xy} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n)$$

$$r_{xy} = -\infty \sim \infty \quad \Longleftrightarrow \quad |\rho_{xy}| \le 1$$

注意：

正弦、余弦信号是正交的：

$$< \sin(\omega n), \cos(\omega n) >= 0$$

但却是相关的：其中一个移动π/2，则…

引入相关函数：

相关系数不能反映信号内在的相关性，所以引入相关函数（含有自变量）；自相关函数和互相关函数。

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n+m)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)y(n)$$

x, y之间的互相关

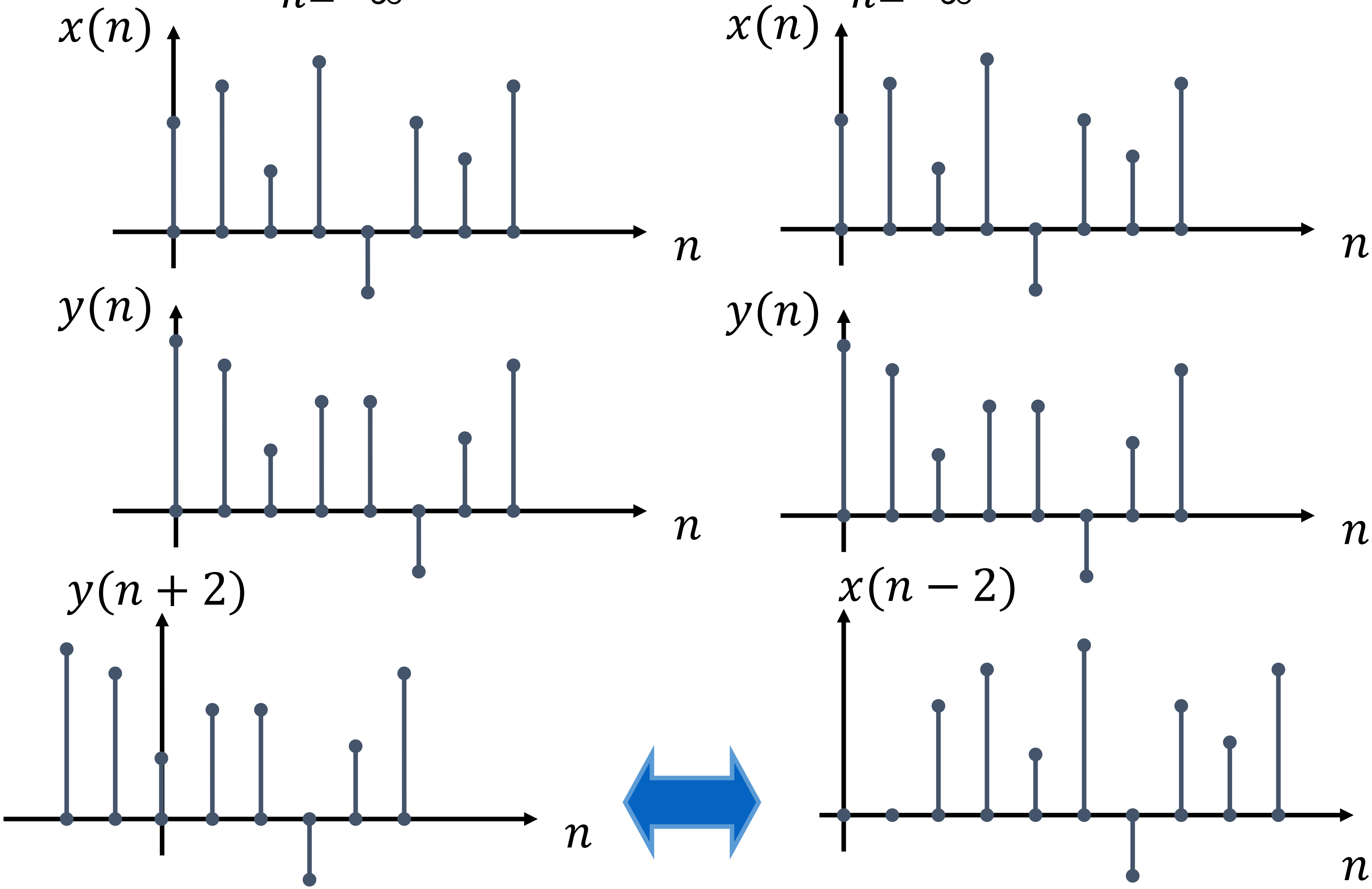
$$r_{yx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n+m)$$

y, x之间的互相关

所以

$$r_{yx}(m) = r_{xy}(-m) \Rightarrow r_{xy}(m) \neq r_{yx}(m)$$

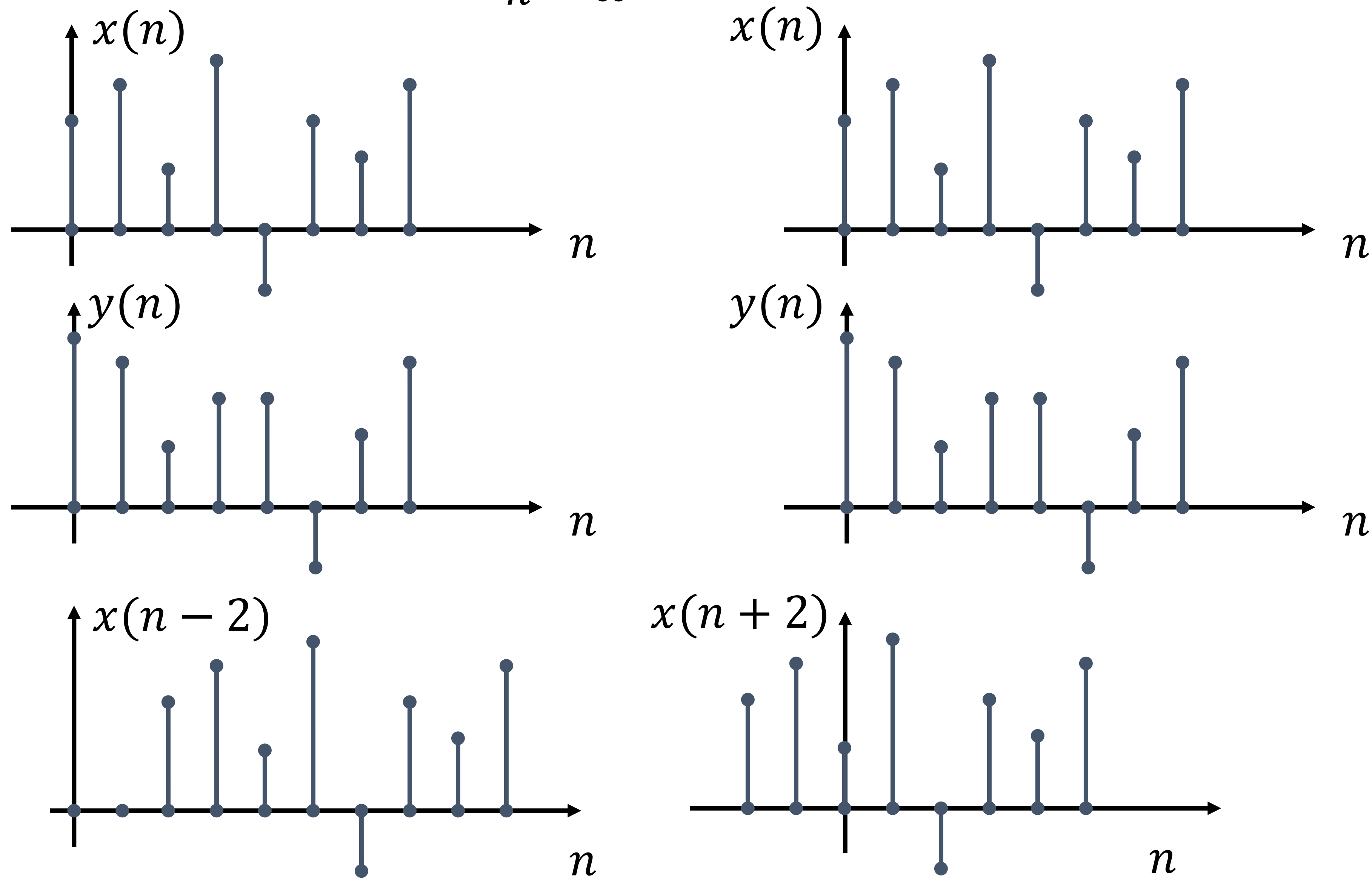
$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n+m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)y(n)$$



$r_{xy}(m)$

$$r_{yx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n+m)$$

$r_{yx}(m)$



相关函数中的时间变量

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n+i)y(n+j)$$
$$=r_{xy}[(n+j)-(n+i)]=r_{xy}(j-i)$$

含意

1. 保持 $x(n)$不动，将 $y(n)$ 往左，或右移动 m 个抽样间隔，然后将 $x(n)$和 $y(n+m)$ 对应相乘与相加，即得 $r_{xy}(m)$；
2. $x(n)$ 和 $y(n)$ 的长度应一样;
3. m 可正可负。

自相关函数

$$\boxed{r_x(0) = E_x = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$$

$$r_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+m)$$

实序列

$$r_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)x(n+m)$$

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)y(n+m)$$

复序列

性质:
$$\begin{cases} r_x(m) = r_x(-m), r_x(m) = r_x^*(-m); \\ r_x(0) \ge |r_x(m)| \\ \lim\limits_{m\to\infty} r_x(m) = 0 \end{cases}$$

实信号: 实偶函数

复信号: 翻转共轭

卷积和相关的关系

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n+m)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)y(n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-(m-n)]\ \ y(n)$$

$$= x(-m) * y(m)$$

上式的理解：卷积需要翻转，而相关不需要翻转。如果用卷积表示相关，所以需要预先把一个序列翻转。二者在计算上有相似性，但物理概念明显不同：

相关：

定义：两个序列的关系

计算：任一序列都不需要翻转

卷积：

描述LSI系统输入输出关系

其中一个序列要翻转

功率信号相关函数的定义

$$r_{xy}(m) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)y(n+m)$$

互相关

$$r_x(m) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)x(n+m)$$

自相关

对于能量信号

$$r_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+m)$$

自相关

功率信号自相关函数的性质

1. 若 $x(n)$ 是周期的, 周期是 N, 则

$$r_x(m) = r_x(m+N)$$

2. 若 $x(n)$ 是实的, 则 $r_x(m) = r_x(-m)$

3. $r_x(0)$ 取最大值, $r_x(0) = P_x$ 为信号功率

4. 若 $x(n)$ 是复信号, 则

$$r_x(m) = {r_x}^*(-m)$$

例 $x(n)=\sin(\omega n)$ $\omega=\dfrac{2\pi}{N}, n=0,1,\cdots,N-1$

$$r_x(m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sin(\omega n)\sin(\omega n+\omega m)$$

$$=\cos(\omega m)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sin^2(\omega n)$$

$$+\sin(\omega m)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sin(\omega n)\cos(\omega n)$$

$$=\frac{1}{2}\cos(\omega m)$$

同频率余弦

例 信号的检测 $x(n) = s(n) + \underline{u(n)}$

（白噪声）

?

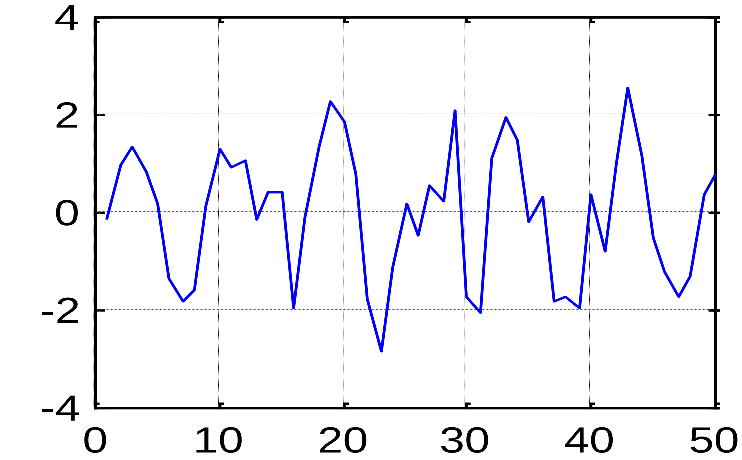
- $x(n)$ 中有无 $s(n)$
- 如果有, 功率是多少?
- 周期呢? $\boxed{\text{例：语音信号基音周期的检测}}$

$$r_x(m) = \sum_n [s(n) + u(n)][s(n+m) + u(n+m)]$$

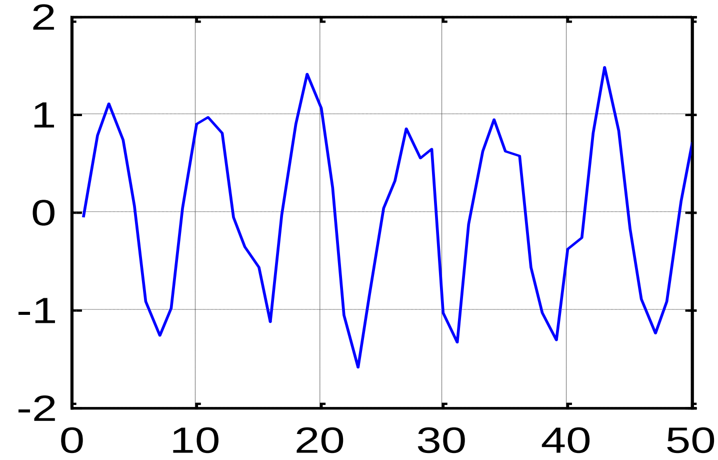
$$= r_s(m) + r_u(m) + \underbrace{\underline{r_{su}(m)} + \underline{r_{us}(m)}}_{0}$$

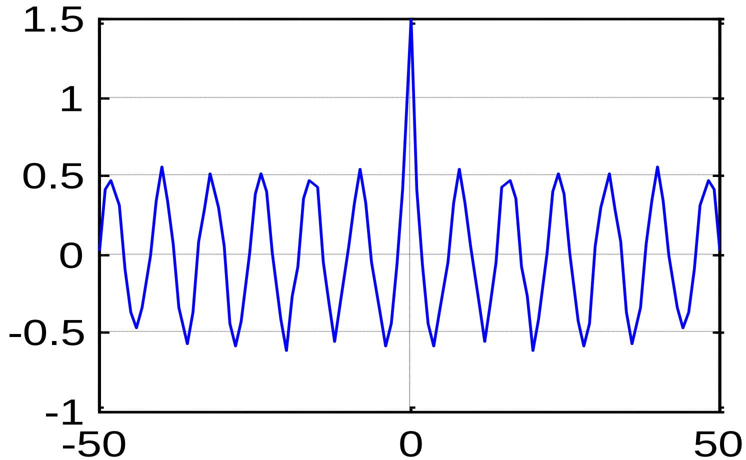
$$= r_s(m) + r_u(m)$$

例 正弦 + 白噪声 SNR=-3dB

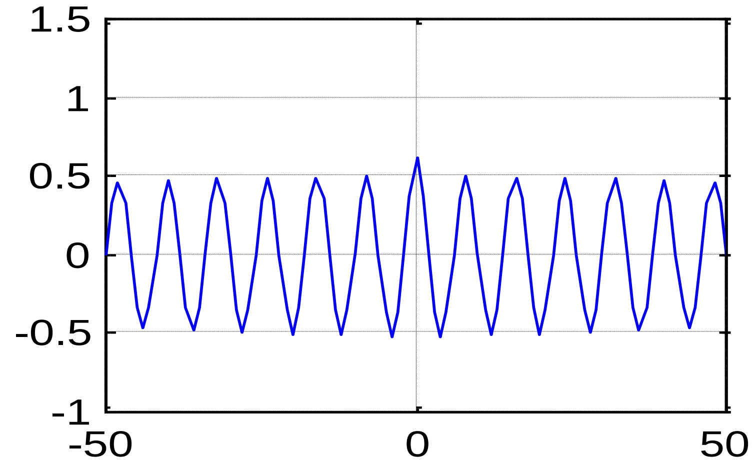


正弦 + 白噪声 SNR=7dB





自相关函数



自相关函数

白噪声、含白噪声的正弦信号，MATLAB代码

实际计算相关函数时:

$$x(n), \quad n = 0,1,\cdots,N-1$$

$$r_x(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x(n+m)$$

$$m = -M \sim M\,, \quad M \le N-1$$

所以，$r_x(m)$ 的最大长度为 $2N-1$

自相关函数的估计，分为有偏估计和无偏估计

关于MATLAB

MATLAB是美国MathWorks公司开发的一种功能极其强大的高技术计算语言和内容极其丰富的软件库。

它以矩阵和向量的运算以及运算结果的可视化为基础，把广泛应用于各个学科领域的数值分析、矩阵计算、函数生成、信号、图形及图象处理、建模与仿真等诸多强大功能集成在一个便于用户使用的交互式环境之中，为使用者提供了一个高效的编程工具及丰富的算法资源。

与信号处理直接有关的工具箱（Toolbox）

Signal Processing （信号处理工具箱）

Wavelet （小波工具箱）

Image Processing （图象处理工具箱）

Higher-Order Spectral Analysis

（高阶谱分析工具箱）

与信号处理间接有关的工具箱（Toolbox）

Control System （控制系统）

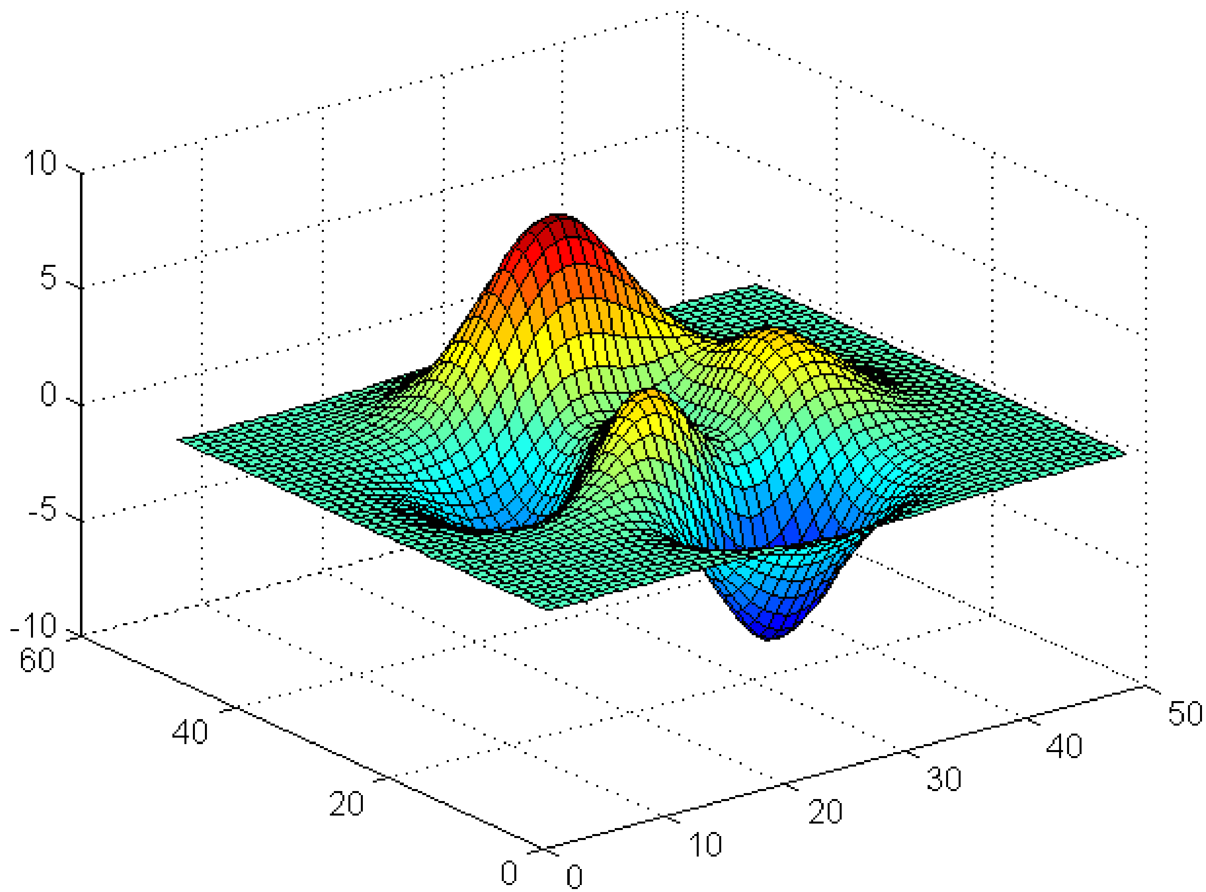
Communication （通信）

System Identification （系统辨识）

Statistics （统计）

Neural Network （神经网络）

例 `z=peaks; surf(z);`



与本章内容有关的MATLAM文件

1. rand.m 用来产生均值为0.5、幅度在

0~1之间均匀分布的伪白噪声：u=rand(N)

$$\text{方差：}\sigma_u^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}[u(n)-\mu_u]^2，\quad \sigma_u^2 = \frac{1}{12}$$

如何改变 $u(n)$ 的方差?

2. randn.m 用来产生均值为零、方差为1服从

高斯（正态）分布的白噪声信号 $u(n)$

3. sinc.m 用来产生 sinc 函数

对连续信号，sinc函数定义为：

$$\operatorname{sinc}(t)=\frac{\sin(t)}{t}$$

$$\operatorname{sinc}(t)=\begin{cases}1 & t=0\\ 0 & t=k\pi\\ \operatorname{sinc}(t) & t\text{为其它}\end{cases}$$

对离散信号，相应的sinc函数定义为

$$\operatorname{sinc}(\omega)=\frac{\sin(N\omega)}{\sin(\omega)}$$

4. conv.m 实现两个离散序列的线性卷积。其调用格式是：y=conv(x,h)

5. xcorr.m 计算互相关和自相关。格式是：

(1) rxy=xcorr(x,y)：求x,y的互相关；

(2) rx=xcorr(x,M,’flag’)：求x的自相关

M：rx的单边长度，总长度为2M+1；

flag：定标标志

若 flag=biased，则表示是“有偏”估计，需将rx(m)都除以N；

若flag=unbiased，则表示是“无偏”估计，需将rx(m)都除以(N-abs(m))；

若’flag’缺省，则rx不定标。

M和flag同样适用于求互相关。