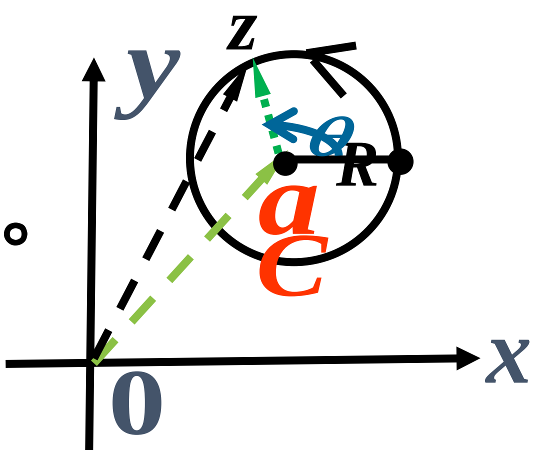
例2 求 $\int_C \frac{1}{(z-a)^n}\mathrm{d}z$，$C$ 为以复常数a为中心、R 为半径的圆周, 逆时针方向(正向)，n 为整数, $R>0$.

解 C: $|z-a|=R$，故 $z-a=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，



故$C: z=a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0\le\theta<2\pi$。

$z'(\theta)=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}$。

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\mathrm{i}\,R^{1-n}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

- 若$z(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t), a\le t\le b$, 则$z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}\,y'(t)$,

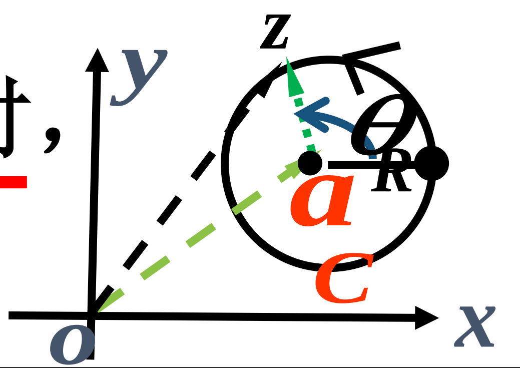
$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f\left(z(t)\right)z'(t)\mathrm{d}t. \quad (3.1.2)$$

$$C:\ z=a+Re^{i\theta},\quad 0\le\theta<2\pi.$$

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(Re^{i\theta})^n}Re^{i\theta}\,i\,d\theta=iR^{1-n}\int_0^{2\pi}e^{i(1-n)\theta}\,d\theta$$

$$\boxed{e^{i(1-n)2\pi}=1,\ e^0=1。}$$

$$=\begin{cases} iR^{1-n}\cdot\dfrac{1}{i(1-n)}e^{i(1-n)\theta}\Big|_0^{2\pi}=0, & n\neq 1\text{且}n\text{为整数时,}\\ i\int_0^{2\pi}1d\theta=2\pi i, & n=1,\text{即}n-1=0\text{时,}\end{cases}$$



即 $$\oint_{|z-a|=R}\frac{dz}{z-a}=2\pi i;$$

背熟此结论！！！

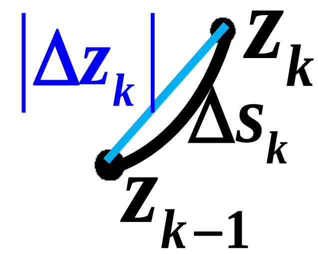
$$\int_C\frac{dz}{(z-a)^2}=\int_C\frac{dz}{(z-a)^3}=\cdots=\int_C(z-a)dz=\int_C(z-a)^2dz=\cdots=0。$$

3.1.2 长大不等式

设$f(z)$在曲线C上连续,则 $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s$。(3.1.3) (P50)

证明 在复积分定义中,

$$|\Delta z_k| = |z_k - z_{k-1}| \le \Delta s_k \left(z_{k-1}z_k\text{的弧长}\right),\text{ 故}$$



$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta s_k,$$

两边取极限得长大不等式(3.1.3)。证毕。

若$C: z(t) = x(t) + \mathrm{i}\, y(t),\ a \le t \le b,\ z'(t) = x'(t) + \mathrm{i}\, y'(t)$,

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t = |z'(t)|\,\mathrm{d}t \triangleq |\mathrm{d}z|,\text{ 故长大不等式为}$$

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s = \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| = \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

设$f(z)$在曲线C上连续,则 $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s$。(3) (P50)

第一型曲线积分

若$C: z(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t),\ a\le t\le b,$

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s = \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| = \int_a^b |f(z(t))|\cdot|z'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

长大不等式推论: 设曲线 C 的长度为 L,

在 C 上$|f(z)|\le A$, 则 $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le AL.$

证明: $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le A\int_C 1\mathrm{d}s = AL.$

例 设 C 为从原点到点 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段，

试求积分 $\int_C \frac{e^{\mathrm{i}\operatorname{Re}z}}{z-\mathrm{i}}dz$ 模的一个上界.

1). 先写C参数方程.

2). 在C上估算被积函数模.

3). 利用长大不等式或其推论。

解 设直线C : $z(t)=z_1+z_2t$, $0\le t\le 1$，起点$z(0)=z_1=0$,

终点$z(1)=0+z_2=3+4\mathrm{i}$。故C : $z(t)=(3+4\mathrm{i})t$, $0\le t\le 1$。

在 C 上, $\left|\frac{e^{\mathrm{i}\operatorname{Re}z}}{z-\mathrm{i}}\right|=\frac{\left|e^{\mathrm{i}\operatorname{Re}z}\right|}{|3t+(4t-1)\mathrm{i}|}=\frac{1}{\sqrt{(3t)^2+(4t-1)^2}}$ $\boxed{\left|e^{\mathrm{i}\operatorname{Re}z}\right|=1}$

$$=\frac{1}{\sqrt{25t^2-8t+1}}=\frac{1}{\sqrt{25\left(t-\frac{4}{25}\right)^2+\frac{9}{25}}}\le\frac{5}{3}\ \left(t=\frac{4}{25}\text{时的值}\right)。$$

$$\left|\int_C \frac{e^{\mathrm{i}\operatorname{Re}z}}{z-\mathrm{i}}dz\right|\le\frac{5}{3}\cdot|0-(3+4\mathrm{i})|=\frac{5}{3}|3+4\mathrm{i}|=\frac{25}{3}.$$

$$\boxed{\left|\int_C f(z)dz\right|\le AL.}$$

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s = \int_C |f(z)|\,|\mathrm{d}z| = \int_a^b |f(z(t))|\,|z'(t)|\,\mathrm{d}t. \quad (3)$$

例 证明：$\left|\int_1^{1+\mathrm{i}}\left(x^2+2\mathrm{i}\,y^2\right)\mathrm{d}z\right| \le \left(\sqrt{5}\right)$, 积分路径是直线段.

证明 积分路径C平行于虚轴, 在C上, 实部$\equiv 1$,

故C: $z(t)=1+t\,\mathrm{i},\quad 0\le t\le 1,\quad z'(t)=\mathrm{i}$。

根据长大不等式得

$$\left|\int_1^{1+\mathrm{i}}\left(x^2+2\mathrm{i}\,y^2\right)\mathrm{d}z\right| \le \int_0^1 \left|1^2+2\mathrm{i}\,t^2\right| |\mathrm{i}|\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1\left(\sqrt{1+4t^4}\right)\mathrm{d}t \le \int_0^1\left(\sqrt{1+4}\right)\mathrm{d}t = \left(\sqrt{5}\right)。$$

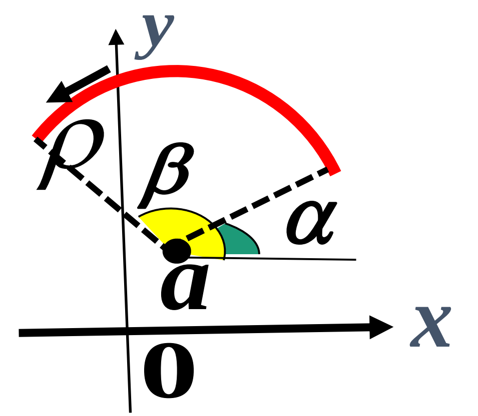
第三步是因为当$0\le t\le 1$时，$t^4\le 1$。

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s = \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| = \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,\mathrm{d}t. \quad (3)$$

例3 设$\rho>0$充分小，$f(z)$在C_ρ：$z=a+\rho e^{i\theta},\alpha\le\theta\le\beta$上连续，

(P50-51) 且$\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$, 则

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}(\beta-\alpha)k. \quad (6)$$



思路：先把右端与f无关的部分$\mathrm{i}(\beta-\alpha)$

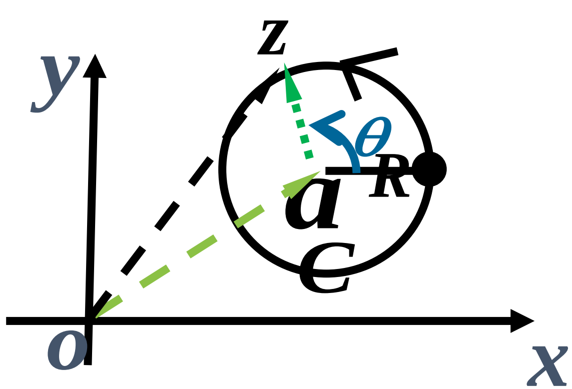
表示成某函数沿C_ρ的积分值。

若C是以a为中心, R为半径的逆时针方向圆周, n为整数, 则

由P49例2得 $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z-a}=2\pi\mathrm{i}$。

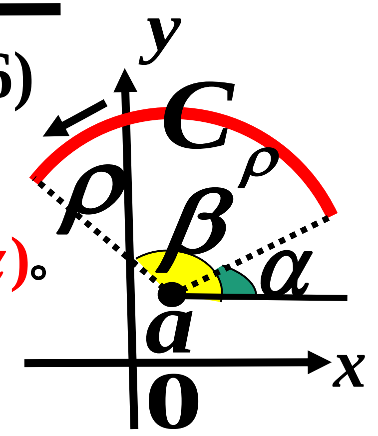
故猜测: $\int_{C_\rho}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\mathrm{i}(\beta-\alpha)$。

首先证明此猜测。



例4. 设$\rho>0$充分小，$f(z)$在 C_ρ： $z=a+\rho e^{i\theta},\alpha\le\theta\le\beta$上连续，

$\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$，则$\lim\limits_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,dz=i(\beta-\alpha)k$。(3.1.6)



证明：$\int_{C_\rho}\frac{dz}{z-a}=\int_\alpha^\beta\frac{1}{\rho e^{i\theta}}\left(\rho e^{i\theta}i\right)d\theta=i\int_\alpha^\beta 1\,d\theta=i(\beta-\alpha)$。

故$\left|\int_{C_\rho} f(z)\,dz-i(\beta-\alpha)k\right|=\left|\int_{C_\rho} f(z)\,dz-\int_{C_\rho}\frac{k}{z-a}dz\right|$

$$=\left|\int_{C_\rho}\frac{(z-a)f(z)-k}{z-a}dz\right|\le\int_\alpha^\beta\frac{\left|(z(\theta)-a)f(z(\theta))-k\right|}{\cancel{\left|\rho e^{i\theta}\right|}}\cancel{\left|\rho e^{i\theta}i\right|}d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta\left|(z(\theta)-a)f(z(\theta))-k\right|d\theta。\quad(*)$$

(P71)7

应仿照此例证明。

由条件知，$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，当$\rho=|z-a|<\delta$时，

$\left|(z-a)f(z)-k\right|\le\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$，故(*)右边$\le\varepsilon$。故 (3.1.6)成立。

熟记本题及 (P71)7的结论。

在第五章需要用到这些结论。

3.2 柯西积分定理(P54定理2)

定理2(P54) 柯西积分定理

设 D 是由简单闭曲线(简称闭路) C 围成的单连通区域，

$f(z)$在闭域$\bar{D}=D+C$上解析，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0,\quad \text{也记作}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=0。$$

注：$f(z)$在$\bar{D}=D+C$上解析是指：

$f(z)$在包含$\bar{D}$ 的某个更大的开区域G 内处处解析，

这意味着 $f(z)$在$\bar{D}$上的所有内点和边界点都解析。

证明：由P47中的定理 中的积分公式(1)

+ Green 定理(改进型)

+ 柯西-黎曼方程(P28定理2).

首先回顾Green定理:

设单连通区域D由分段光滑曲线L(逆时针方向)围成,

$P(x,y),Q(x,y)\in C^1(D)$, 则

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y。$$

改进的Green定理: (Gaursat 1925)

设单连通区域D由分段光滑曲线L(逆时针方向)围成,

$P(x,y),Q(x,y)$在D上有偏导数$\dfrac{\partial P}{\partial y},\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}$在$D$上连续, L取逆时针方向, 则

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y。$$

定理1(P51)

柯西积分定理：设 D是由简单闭曲线(简称闭路)C围成的单连通区域，$f(z)$在闭域$\bar{D}=D+C$上解析，则$\int_C f(z)\,dz=0$. ★★★ $\boxed{\text{熟记结论}}$

证明：设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$， 由条件知f在$\bar{D}$上连续，故

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy\ .\ (*)\quad (P\,47\text{的定理})$$

因 $f(z)$在$\bar{D}$解析，故u,v 在$\bar{D}$上可微，且满足$C-R$方程(P 30-31)，

$$\text{故}\ \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0,\qquad -\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=-\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0\text{。}$$

故由改进的Green公式得

$$\left.\begin{aligned}&\int_C udx-vdy=\iint_D\left[-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right]dx\,dy=0,\\&\int_C vdx+udy=\iint_D\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right]dx\,dy=0\text{。}\end{aligned}\right\}\ \text{代入}(*)\text{，得}\ \int_C f(z)\,dz=0\text{。}$$

柯西积分定理：设 D 是由简单闭曲线（简称闭路）C围成的单连通区域，$f(z)$在闭域$\bar{D}=D+C$上解析，则$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$。 定理1(P51)

证明：设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，在$\bar{D}$上解析，故

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y \quad (P\,47\text{的定理})$$

由C-R方程

$$=\iint_D\left[-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{i}\iint_D\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+\mathrm{i}0=0。$$

例. 求(1) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{1}{z-3}\,\mathrm{d}z$； (2) $\displaystyle\int_{|z-3|=1}\frac{1}{z-3}\,\mathrm{d}z$。

解. (1) $\frac{1}{z-3}$除$z=3$外处处解析，故$\frac{1}{z-3}$在$|z|\le 1$上解析。

故由柯西积分定理得$\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{1}{z-3}\,\mathrm{d}z=0$.

(2) $\frac{1}{z-3}$在$|z-3|\le 1$上有不解析点$z=3$，故不可用柯西积分定理。

柯西积分定理：设 D 是由简单闭曲线（简称闭路）C围成的单连通区域，$f(z)$ 在闭域 $\bar{D}=D+C$ 上解析，则 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$。 $\boxed{\text{定理1(P51)}}$

例. 求(1) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{1}{z-3}\,\mathrm{d}z$；　(2) $\displaystyle\int_{|z-3|=1}\frac{1}{z-3}\,\mathrm{d}z$。

解. (1) $\dfrac{1}{z-3}$ 在 $|z|\le 1$ 上解析，故 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{1}{z-3}\,\mathrm{d}z=0.$

(2) $\dfrac{1}{z-3}$ 在 $|z-3|\le 1$ 上有不解析点 $z=3$，故不可用柯西积分定理。

故该用参数法。根据P 49例2知，$\displaystyle\int_{|z-3|=1}\frac{1}{z-3}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}$。

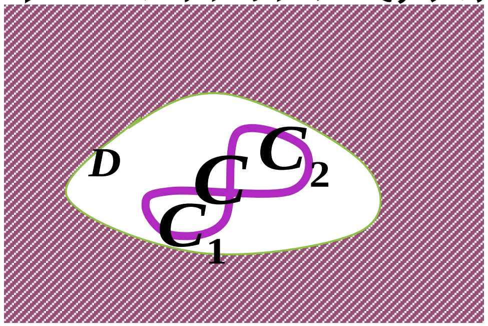
例 求 $\displaystyle I=\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{(z-\mathrm{i}\,1.5)(z+30)}\,\mathrm{d}z$ 和 $\displaystyle J=\int_{|z|=3}\mathrm{e}^{3z^2}\sin^3 z\,\mathrm{d}z$。

解 I的被积分函数除 $z_1=\mathrm{i}\,1.5$ 和 $z_2=-30$ 外处处解析，故在 $|z|\le 1$ 上解析。

故由柯西积分定理得 $I=0$。　同理得，$J=0$。

推论1: 设$f(z)$在单连通区域D 内解析，C是D内的任意封闭曲线，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$



证明：(1)若C是简单闭曲线，

由柯西积分定理知 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$。

(2) 如果C不是简单闭曲线，

则可设C由n条简单闭曲线$C_1, C_2, \cdots, C_n$依次连接组成，

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= 0 + 0 + \cdots + 0 = 0。$$ 证毕

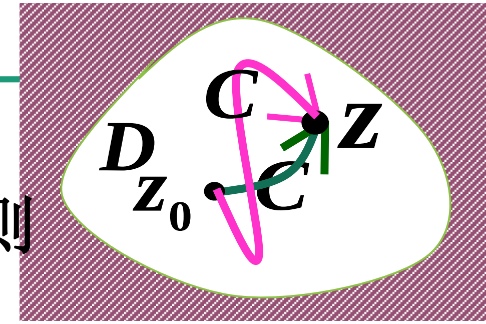
例 求$\mathrm{I} = \int\limits_{|z|=1} \dfrac{\cos z}{(z-\mathrm{i}\,1.5)(z+30)}\,\mathrm{d}z$和$J = \int\limits_{|z|=3} \mathrm{e}^{3z^2}\sin^3 z\,\mathrm{d}z$。

解 I的被积分函数除$z_1 = \mathrm{i}\,1.5$和$z_2 = -30$外处处解析，故在$|z| \le 1$上解析。

故由柯西积分定理得 $\mathrm{I} = 0$。同理得，$J = 0$。

推论1: 设$f(z)$在单连通区域D 内解析, C是D内的任意封闭曲线, 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$



推论2: 设$f(z)$在单连通区域D 内解析,

C是D 内任一条起于点z_0 终于z 的简单曲线, 则

$$\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \begin{cases} \text{值不依赖于} C, \\ \text{只由起点} z_0 \text{和终点} z \text{ 确定}, \end{cases}$$ 可记作$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$

证明: 设C是D 内任意的不同于C 的起于z_0 终于z 的简单曲线,

C与 C^- 连接组成 D 内一条封闭曲线。由推论1得

$$\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \int_{C^-} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0。$$ 因此

$$\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = -\int_{C^-} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta。$$

由C,C任意性知结论成立。

多连通区域的柯西定理(P55定理2)

设 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为 $n+1$ 条简单闭曲线，满足

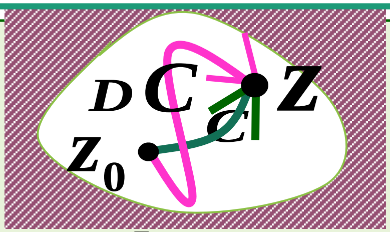
1) $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 都在 C_0 的内部，

2) $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 中每一条在所有其余各条的外部，

则 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 围成一个多连通区域 D，

$\left(D \text{在} C_0 \text{内部，在} C_1, C_2, \cdots, C_n \text{的外部}\right)$，

这种多连通区域 D 的全部边界 C 称为一个复闭路.



推论2：设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，

C 是 D 内任一条起于点 z_0 终于 z 的简单曲线，则

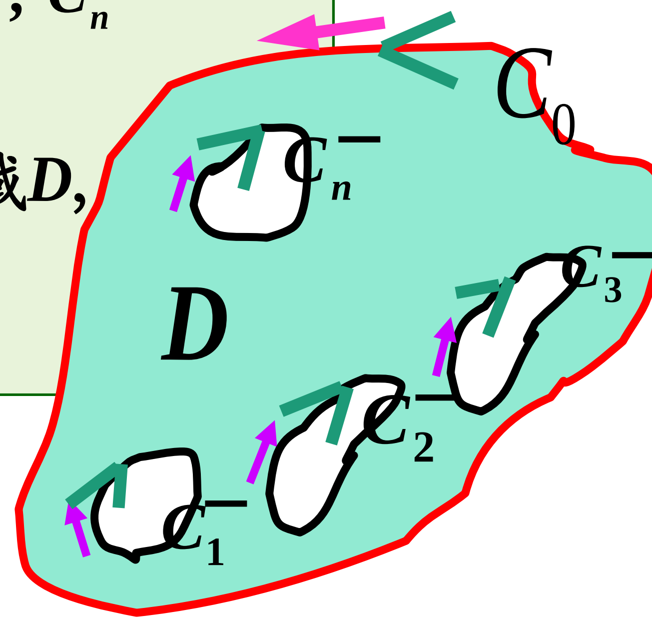
$\int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 值不依赖于 C，只由起点 z_0 和终点 z 确定，可 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$.

证明：设 C 是 D 内任意的不同于 C 的起于 z_0 终于 z 的简单曲线，

$$\int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_{C^-} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0。$$ 因此

$$\int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = -\int_{C^-} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta。$$ 由 C, C 任意性知结论成立。

设 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$为$n+1$条简单闭曲线，$C_1, C_2, \cdots, C_n$都在 C_0 的内部，且$C_1, C_2, \cdots, C_n$中每一条在所有其余各条的外部，则由 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$围成一个多连通区域$D$，$D$的全部边界$C$称为一个复闭路.



复闭路 C 由简单闭曲线$C_0, C_1, \cdots, C_n$组成。

- 复闭路C的正向：

人在 C 上行进时，D的内部总在此人左边的方向，称为 C 的正向.

- 在外边界 C_0 沿逆时针方向；
- 在内边界$C_1, C_2, \cdots, C_n$上，沿顺时针方向。

记复闭路 $C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$.

今后复积分中复闭路的方向默认为正向。

多联通区域柯西定理(P55定理3)

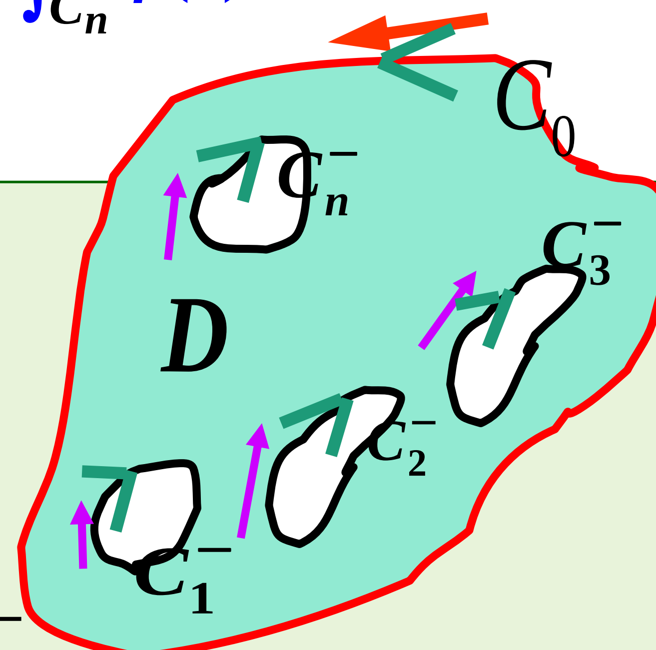
定理2(P53) 设$f(z)$在复闭路$C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots C_n^-$及其围成的多连通区域$D$内解析，即$f(z)$在$\bar{D}$上解析，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0,$$

★★★

熟记结论

即 $\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$。



复闭路 C 由闭曲线$C_0,C_1,C_2,\cdots,C_n$组成.

- 复闭路 C 的正向:

- 外边界 C_0：逆时针方向；
- 内边界$C_1,C_2,\cdots,C_n$：顺时针方向。

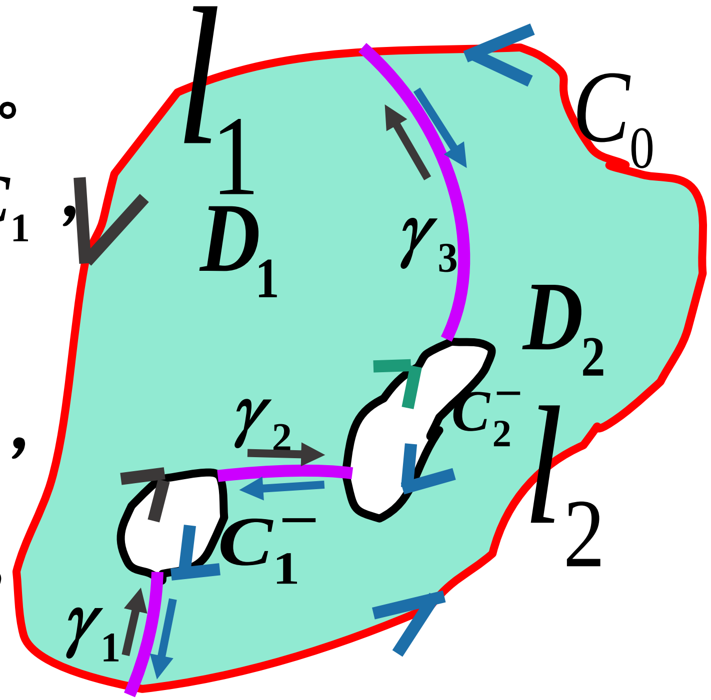
复闭路 $C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$。

复积分中复闭路默认为正向。

定理2(P53) 设$f(z)$在复闭路$C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots C_n^-$及其所围成多连通区域$D$ 内解析，即$f(z)$ 在$\bar{D}$上解析，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0,\ \text{即}\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

证明：只证$n=2$的情形，其余类似。



在D内，用简单曲线γ_1 连接 C_0 和C_1 ，γ_2连接C_1和C_2， γ_3连接C_2和C_0。D被分成两个单连通区域D_1 和D_2 ，用l_1记D_1的边界，用l_2记D_2的边界，l_1,l_2都取正向。由柯西积分定理(P51定理1)得

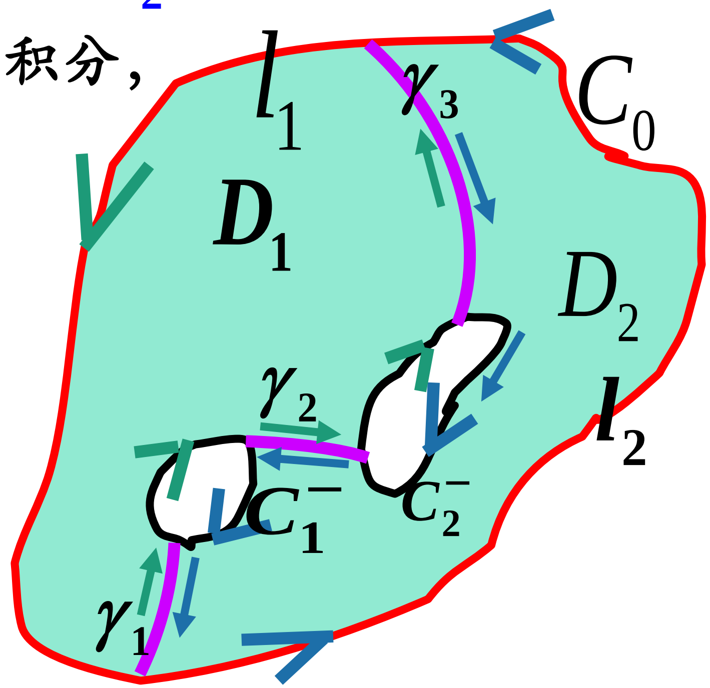
$$\int_{l_1} f(z)\mathrm{d}z=0,\ \int_{l_2} f(z)\mathrm{d}z=0,\ \text{故}\int_{l_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{l_2} f(z)\mathrm{d}z=0.$$

由柯西积分定理(P 51定理1)得 $\int_{l_1} f(z)dz + \int_{l_2} f(z)dz = 0 + 0 = 0.$

(1) 在 $\int_{l_1} f(z)dz + \int_{l_2} f(z)dz$ 中沿 γ_1，γ_2，γ_3 的积分，

沿不同方向各取了一次，

相加后正好相互抵消。



(2) C_0，C_1，C_2 都被分成两段弧，

分别出现在 l_1 和 l_2 中。

$\int_{l_1} f(z)dz$ 和 $\int_{l_2} f(z)dz$ 相加后，

可把沿 C_0, C_1, C_2 各自两弧段上的积分合并起来。故得

$$0 = \int_{l_1} f(z)dz + \int_{l_2} f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz + \int_{C_1^-} f(z)dz + \int_{C_2^-} f(z)dz$$

$$= \int_C f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz。$$

故 $\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz.$

沿外边　　沿内边　　沿内边

例5 设a是任一简单闭曲线C 的内部区域的任一内点，则

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=1, \\ 0, & n\neq 1\text{且}n\text{是整数。} \end{cases}$$

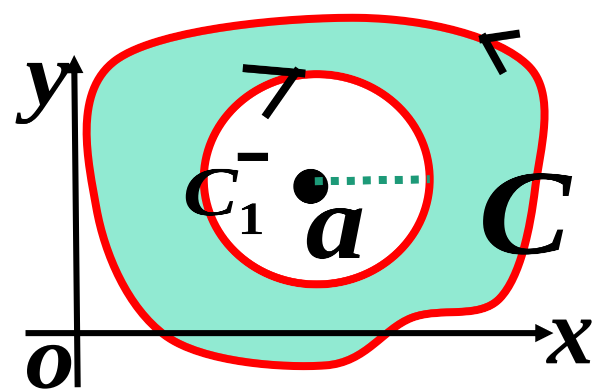
C是包含点 a 的任意简单闭曲线.

解：(1)若C是以a为中心的圆周，则由P 49例2 知结论成立.

(2)若C不是以a为中心的圆周， 则在C 内作以a 为中心、半径充分小的圆周C_1(含在C 内部)， $C+C_1^-$ 构成复闭路。

在$C+C_1^-$ 及其内部，$z \neq a$，

故$\dfrac{1}{(z-a)^n}$在$C+C_1^-$及其内部解析，



故由P 53定理2得，

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}\mathrm{d}z = \int_{C_1} \frac{1}{(z-a)^n}\mathrm{d}z \overset{\text{P 49 例2}}{=} \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=1, \\ 0, & n\neq 1\text{且}n\text{是整数。} \end{cases}$$

3.3 柯西积分公式

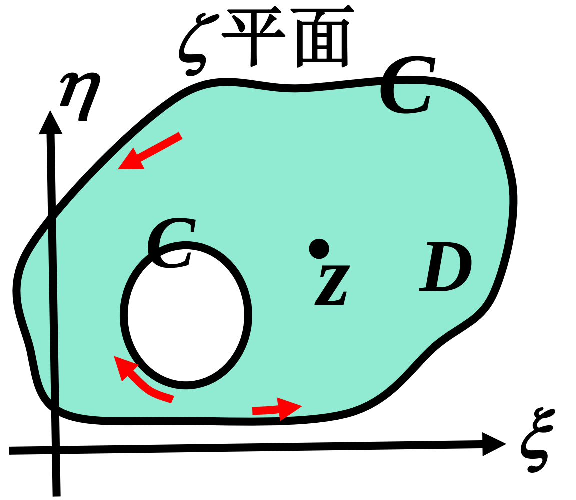
定理1(P54) 如果 $f(z)$ 在闭路(简单闭路或复闭路) C 及其所围区域 D 内处处解析，即 $f(z)$ 在 $\bar{D}=D+C$ 上处处解析，则 $\forall z\in D$，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

(柯西积分公式)

★★★★★

背熟

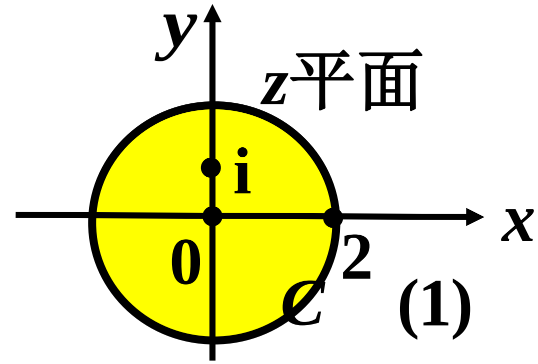


- 柯西积分公式，开启了许多方法和定理.
- 柯西积分公式让解析函数理论能够单独脱离于实函数进行分析。

柯西积分定理：设 D 是由闭路 C 围成的单连通或多连通区域，$f(z)$ 在闭域 $\bar{D}=D+C$ 上解析，则 $\int_C f(\zeta)d\zeta=0.$

定理5　如果函数 $f(z)$ 在闭路(简单闭路或复闭路) C 及其所围区域 D 内处处解析, 则对于 D 内任一点 z ,有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.\text{(柯西积分公式)}$$



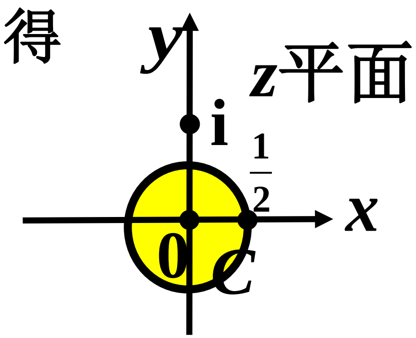
例.　求(1) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z^2}{z-i}dz$, (2) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{z^2}{z-i}dz$.

解.　(1)奇点 $z=i$ 在圆 $|z|<2$ 内， z^2 在 $|z|\le 2$ 上处处解析，故由柯西积分公式即定理1(P54)得

$$\int_{|z|=2}\frac{z^2}{z-i}dz=2\pi i\cdot\left(z^2\big|_{z=i}\right)=-2\pi i.$$

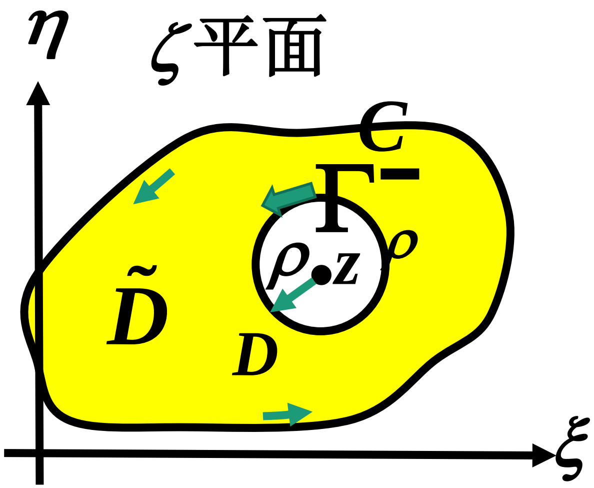
(2) $\dfrac{z^2}{z-i}$ 在 $|z|\le\dfrac{1}{2}$ 上处处解析,故由柯西积分定理(P51)得

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{z^2}{z-i}dz=0.$$



定理1(P54) 若 $f(z)$ 在(简单或复) 闭路C及其所围区域 D 内处处解析,

则$\forall z \in D$, $f(z)=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$。(柯西积分公式)



证明: $\forall z \in D$, $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$关于$\zeta$在$\overline{D}$ 上不解析,

$\zeta = z$是它在$\overline{D}$上的唯一奇点。

$\left(\text{不可由柯西积分定理得}\ \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = 0。\right)$

区域D是开集, 故

$\forall z \in D$, 可作z 的充分小领域$|\zeta - z| < \rho$, 使其全落在D 内。

记Γ_ρ : $|\zeta - z| = \rho$, 取逆时针方向得复闭路$\tilde{C} = C + \Gamma_\rho^-$,

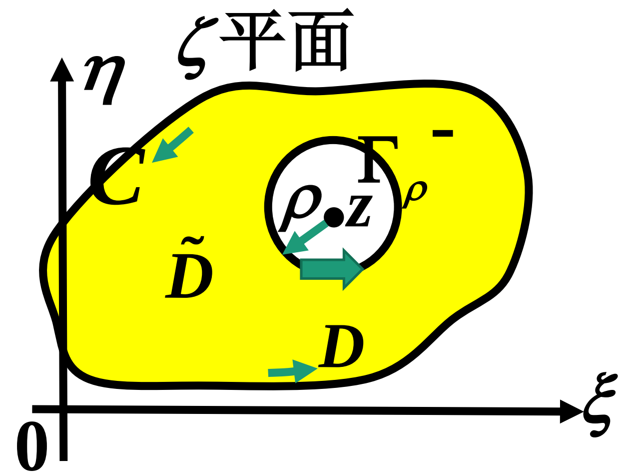
$\tilde{C}$ 围成一个多连通区域, 记为$\tilde{D}$。

$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$关于$\zeta$在闭域$\overline{\tilde{D}}$上处处解析, 由多连通区域柯西定理得,
(P 53定理2)

$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$关于$\zeta$在闭域$\overline{\tilde{D}}$上处处解析. 由多连通区域柯西定理得,

(P 53定理2)

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$



$$= \oint_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \oint_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + f(z) \oint_{\Gamma_\rho} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

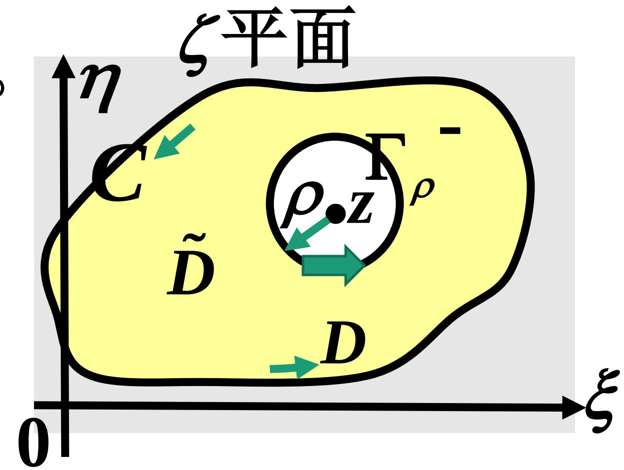
P52例2

$$= \oint_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + 2\pi i\, f(z).$$

故 $\displaystyle \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i\, f(z) = \oint_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$

目标：证明 $\displaystyle f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$ （柯西积分公式）

故$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - 2\pi i\, f(z) = \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}d\zeta$。 (*)



由于$f(z)$在 z解析从而连续,

故对任给$\varepsilon>0$, 存在$\delta(\varepsilon)>0$, 使得当

$|\zeta - z| < \delta$时， $|f(\zeta)-f(z)| < \varepsilon$.

取$0<\rho<\delta$, 从而$\forall \zeta \in \Gamma_\rho$, $|\zeta - z| = \rho < \delta$，故

$$\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\right| = \frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta - z|} < \frac{\varepsilon}{\rho}.$$ 由长大不等式推论得

$$\left|\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}d\zeta\right| < \frac{\varepsilon}{\rho}\cdot\left(\Gamma_\rho\text{周长}\right) = \frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$ 代入(*)，得

$$\left|\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - 2\pi i\, f(z)\right| \le 2\pi\varepsilon.$$ 左端不依赖于ε.

因此令$\varepsilon \to 0$, 得左端等于0，故 $\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 2\pi i\, f(z)$.

作业

P70-71

3,4

5(先用柯西积分定理即定理1(P 51)求积分，再用参数法求它)

7（与P50-51例3的证明类似，首先证明$\int_{C_R}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}\alpha$）

8 $\left(\text{由条件可得}\lim\limits_{z\to\infty}\frac{zP(z)}{Q(z)}=0\text{, 然后直接应用第7题的结论即可。}\right)$

例. 求积分 (1) $\oint_{|z-2i|=1} \frac{e^z}{z(z^2+4)} dz$; (2) $\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz$.

- 首先分析被积函数在积分路径及其所围区域内的解析性。如果不解析, 找出积分路径内所有奇点.

解 (1) 由 $z(z^2+4)=0$ 得 $z_1=0$, $z_2=\left(\sqrt{-4}\right)_0=2i$, $z_3=\left(\sqrt{-4}\right)_1=-2i$.

只有 $2i$ 在 $|z-2i|<1$ 内, 0, $-2i$ 都不在闭域 $|z-2i|\le 1$ 上.

e^z 处处解析. 故由柯西积分公式(P59定理5)得

$$\oint_{|z-2i|=1} \frac{e^z}{z(z^2+4)} dz = \oint_{|z-2i|=1} \frac{\frac{e^z}{z(z+2i)}}{(z-2i)} dz$$

$$= 2\pi i \cdot \left. \frac{e^z}{z(z+2i)} \right|_{z=2i} = 2\pi i \cdot \frac{e^{2i}}{2i(2i+2i)} = -\frac{\pi}{4} i e^{2i}$$

$$= \frac{\pi}{4}(\sin 2 - i\cos 2).$$

例. 求积分 (1) $\oint_{|z-2i|=1} \frac{e^z}{z(z^2+4)} dz$; (2) $\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz$.

解 (2)因为 $f(z)=\sin z$ 在全复平面内解析,

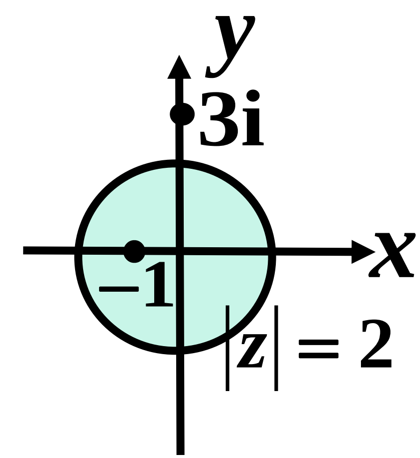
$z=0$ 位于 $|z|<4$ 内, 故由柯西积分公式(P59定理5)得

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz = 2\pi i \cdot \sin z\Big|_{z=0} = 2\pi i \cdot \sin 0 = 0.$$

例. 求下列积分(1) $\oint_{|z|=2}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(z+1)(3i-z)}dz$; (2) $\oint_{|z|=3.5}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(z+1)(3i-z)}dz$.

解：由$(z+1)(3i-z)=0$，得被积函数奇点 $z_1=-1$, $z_2=3i$。

(1) -1在$|z|<2$ 内，$3i$不在$|z|<2$ 内.



$$f(z)=\frac{(3z-2)e^{2z}}{3i-z}\text{在}|z|\le 2\text{内解析},$$

故由柯西积分公式(P59定理5)得

$$\oint_{|z|=2}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(z+1)(3i-z)}dz=2\pi i\cdot\frac{(3z-2)e^{2z}}{3i-z}\Big|_{z=-1}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{(-3-2)e^{-2}}{3i-(-1)}=-\frac{10e^{-2}\pi i}{3i+1}=-\frac{10e^{-2}\pi i(1-3i)}{(3i+1)(1-3i)}$$

$$=-e^{-2}\pi(3+i).$$

例．求下列积分(1) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(z+1)(3i-z)}dz$; (2) $\displaystyle\oint_{|z|=3.5}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(z+1)(3i-z)}dz$.

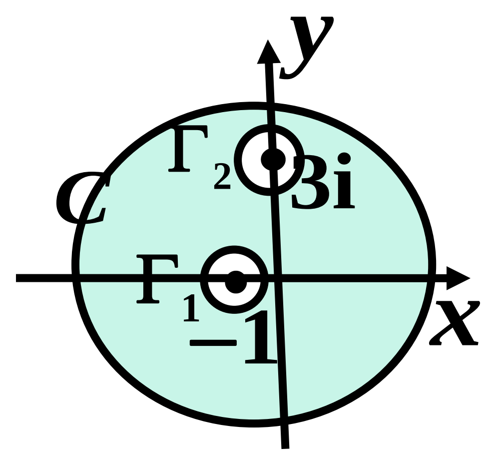
解：由$(z+1)(3i-z)=0$，得被积函数奇点 $z_1=-1$，$z_2=3i$。

(2) 奇点-1, $3i$都在$C:|z|=3.5$所围区域内部.

作圆周：Γ_1: $|z+1|=\rho$, Γ_2: $|z-3i|=\rho$，使得

Γ_1, Γ_2都在$|z|=3.5$ 内部, Γ_1和Γ_2中任一个在另外一个的外侧.

则得复闭路 $\tilde{C}=C+\Gamma_1^{-}+\Gamma_2^{-1}$。

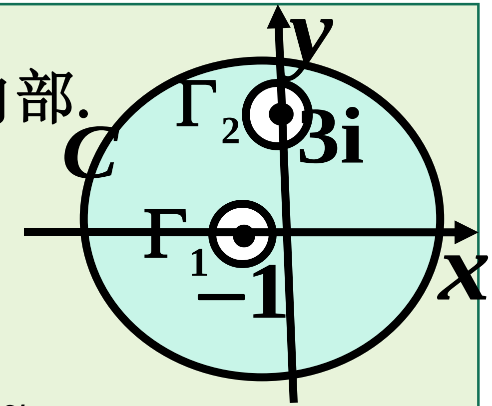


由多连通区域柯西定理(P 53 定理2)

和柯西积分公式(P 54 定理1) 得

$$\oint_{|z|=3.5}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(z+1)(z-3i)}dz=\oint_{|z+1|=\rho}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(z+1)(3i-z)}dz+\oint_{|z-3i|=\rho}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(z+1)(3i-z)}dz$$

解 (2) 奇点$z_1=-1$, $z_2=3\mathrm{i}$都在$C:|z|=3.5$所围区域内部.



作Γ_1: $|z+1|=\rho$, Γ_2: $|z-3\mathrm{i}|=\rho$, $\rho>0$充分小, 使得

Γ_1, Γ_2都在$|z|=3.5$的内部,

Γ_1和Γ_2中任一个在另外一个的外侧. 则得复闭路 $\tilde{C}=C+\Gamma_1^{-}+\Gamma_2^{-1}$.

由多连通区域柯西定理(P 53 定理2) 和柯西积分公式(P 54 定理1) 得

$$\oint_{|z|=3.5}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(z+1)(z-3\mathrm{i})}dz=\oint_{|z+1|=\rho}\frac{\frac{(3z-2)e^{2z}}{(3\mathrm{i}-z)}}{(z+1)}dz+\oint_{|z-3\mathrm{i}|=\rho}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(z+1)(3\mathrm{i}-z)}dz$$

$$=2\pi\mathbf{i}\cdot\left.\frac{(3z-2)e^{2z}}{(3\mathrm{i}-z)}\right|_{z=-1}+(-1)\oint_{|z-3\mathrm{i}|=\rho}\frac{\frac{(3z-2)e^{2z}}{(z+1)}}{(z-3\mathrm{i})}dz \quad ★★★$$

$$=2\pi\mathbf{i}\cdot\left.\frac{(3z-2)e^{2z}}{(3\mathrm{i}-z)}\right|_{z=-1}-2\pi\mathbf{i}\cdot\left.\frac{(3z-2)e^{2z}}{z+1}\right|_{z=3\mathrm{i}}$$

$$\oint_{|z|=3.5}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(z+1)(z-3i)}dz=\oint_{|z+1|=\rho}\frac{\frac{(3z-2)e^{2z}}{(3i-z)}}{(z+1)}dz+\oint_{|z-3i|=\rho}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(z+1)\underline{(3i-z)}}dz$$

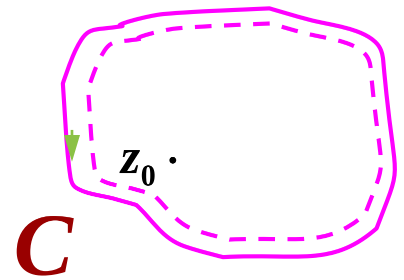
$$=2\pi i\cdot\left.\frac{(3z-2)e^{2z}}{(3i-z)}\right|_{z=-1}+\underline{(-1)}\oint_{|z-3i|=\rho}\frac{\frac{(3z-2)e^{2z}}{(z+1)}}{\underline{(z-3i)}}dz.$$

$$=2\pi i\cdot\left.\frac{(3z-2)e^{2z}}{(3i-z)}\right|_{z=-1}-2\pi i\cdot\left.\frac{(3z-2)e^{2z}}{z+1}\right|_{z=3i}$$

$$=2\pi i\left\{\frac{(-3-2)e^{-2}}{3i-(-1)}-\frac{(9i-2)e^{6i}}{3i+1}\right\}=2\pi i\left\{\frac{-5e^{-2}}{3i+1}-\frac{(9i-2)(\cos 6+i\sin 6)}{3i+1}\right\}$$

$$=\frac{2\pi(9\cos 6+2\sin 6)+2\pi i(-5e^{-2}+2\cos 6+9\sin 6)}{3i+1}\cdot\frac{-3i+1}{-3i+1}$$

$$=\frac{\pi(15\cos 6+29\sin 6)-15\pi e^{-2}}{5}=-i\frac{\pi(25\cos 6+3\sin 6+5e^{-2})}{5}。$$



注:

$f(z)$如果在简单闭曲线C所围成的区域D内解析，在D的闭域上$D+C$连续，那么柯西积分公式仍然成立.

柯西积分公式的意义:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

(1) 函数在区域内部任一点的值可用它在边界上的值表示. 从而解析函数在区域内部任一点的值，完全可由它在区域边界上的值确定。如果两解析函数在区域边界上处处相等，则它们在区域内处处相等. （这是解析函数的一个重要特征）

(2) 公式给出了一种表示解析函数的方法,而且给出的是解析函数的一个积分表达式.

(这是研究解析函数各种性质的有力工具。)

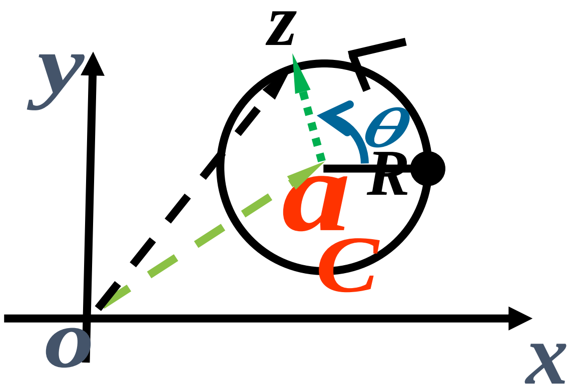
(3) 公式提供了一种计算积分的方法.

思考与练习

求积分 $\oint_{|z|=2} \frac{z}{(3-z)(z+\mathrm{i})} \mathrm{d}z$

$f(z)$沿着简单闭曲线C从某一点开始到第一次回到该点的积分，

也可记为 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$.



设C 为以a为中心，R 为半径的顺时针方向圆周，n 为整数.

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \text{且} n \text{为整数时}, \\ 2\pi \mathrm{i}, & n=1 \text{时}. \end{cases}$$

定理3(P55) 设$f(z)$在复闭路$C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots C_n^-$及其所围成多连通区域$D$ 内解析，即$f(z)$ 在$\bar{D}$上解析，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0,\text{ 即 }\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)\mathrm{d}z.$$

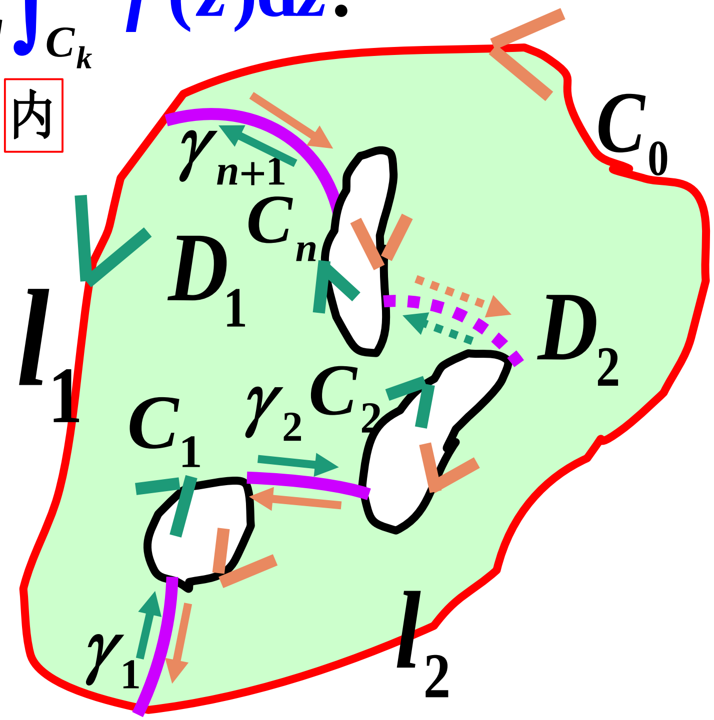
外　内

证明：2)当$n>2$时，

用D内简单曲线γ_1连接C_0和C_1，

γ_2连接C_1和C_2，γ_3连接C_2和C_3，$\cdots$，

γ_{n+1}连接C_n和C_0.



把D分成两个单连通区域D_1 和D_2，

用l_1记D_1的边界，用l_2记D_2的边界，

l_1,l_2都取逆时针方向.

由柯西积分定理得 $\int_{l_1} f(z)\mathrm{d}z=\int_{l_2} f(z)\mathrm{d}z=0+0=0.$

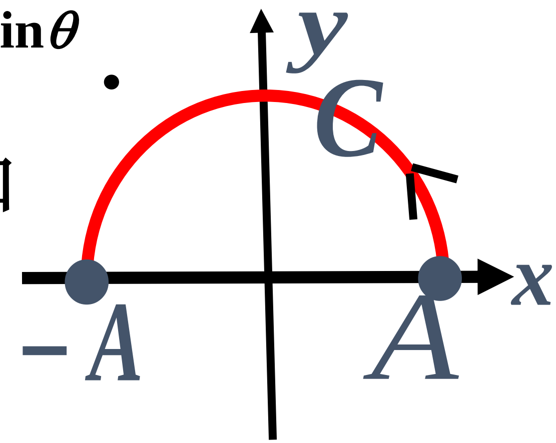
$$0=\int_{l_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{l_2} f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z+\sum_{k=1}^{n}\int_{C_k^-} f(z)\mathrm{d}z.\text{ 故}\cdots\cdots$$

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta |f(z(t))|\cdot|z'(t)|\mathrm{d}t. \quad (3.3)$$

例3(P53) 证：$\left|\int_C e^{iz}\,\mathrm{d}z\right| < \pi$, 设 C 为 $|z| = A$ 上半圆周从 A 到 $-A$.

解 C 的参数方程为 $z = Ae^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$. 在 C 上,

$$\left|e^{iz}\right| = e^{\mathrm{Re}(iz)} = e^{-\mathrm{Im}z} = e^{-\mathrm{Im}\left(Ae^{i\theta}\right)} = e^{-A\sin\theta}.$$



$|z'(\theta)| = \left|iAe^{i\theta}\right| = A.$ 根据性质(3.3)知

$$\left|\int_C e^{iz}\,\mathrm{d}z\right| \le A\int_0^\pi e^{-A\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= A\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-A\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)$$

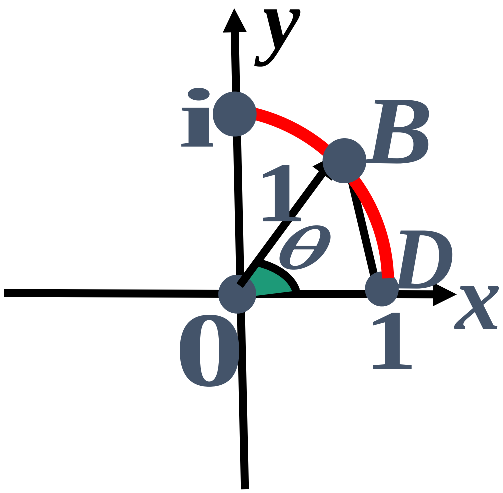
(对第二项积分 令 $\theta = \pi - \theta$)

$$= A\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-A\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\right) = 2A\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

下面估算 $\sin\theta$.

$$\left|\int_C e^{iz}\,dz\right| \le A\int_0^{\pi} e^{-A\sin\theta}\,d\theta \;= 2A\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,d\theta.$$

当$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$时，$\dfrac{2}{\pi}\theta\le\sin\theta\le\theta$. 这是因为



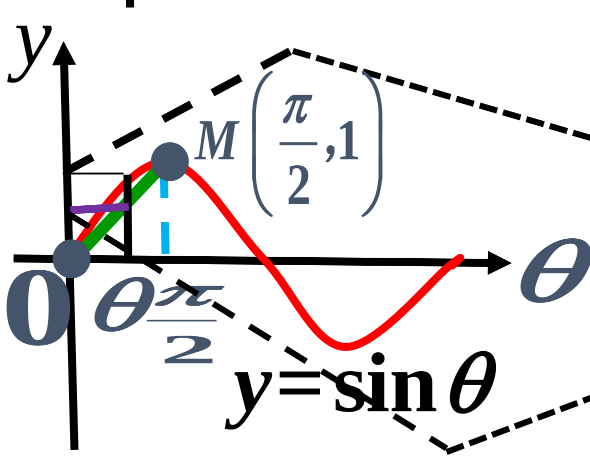
ΔOBD的面积≤扇形OBD的面积，

$$\frac{1}{2}\sin\theta\le\frac{1}{2}\theta,$$

即$\sin\theta\le\theta$，$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\sin''\theta=-\sin\theta\le 0$，

故在$[0,\pi/2]$，$\sin\theta$ 凹，故



$$\frac{2}{\pi}\theta\le\sin\theta.$$

$$\left|\int_C e^{iz}\,dz\right| \le A\int_0^{\pi} e^{-A\sin\theta}\,d\theta = 2A\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,d\theta.$$ 下面估算$\sin\theta$.

当$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$时，$\frac{2}{\pi}\theta\le\sin\theta\le\theta$. 故 $e^{-A\sin\theta}\le e^{-A\frac{2}{\pi}\theta}$.

因此 $$\left|\int_C e^{iz}\,dz\right| \le 2A\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2A}{\pi}\theta}\,d\theta$$

$$\le -\pi e^{-\frac{2A}{\pi}\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left(1-e^{-A}\right)\le\pi.$$