第5章

第5章 离散时间系统的相位、结构

5.4 全通系统与最小相位系统

全通系统

如果一个系统的幅频响应对所有的频率都等于1 (或一个常数)，即

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1,\ 0 \leq |\omega| \leq \pi$$

则称系统$H_{ap}(z)$为全通系统。

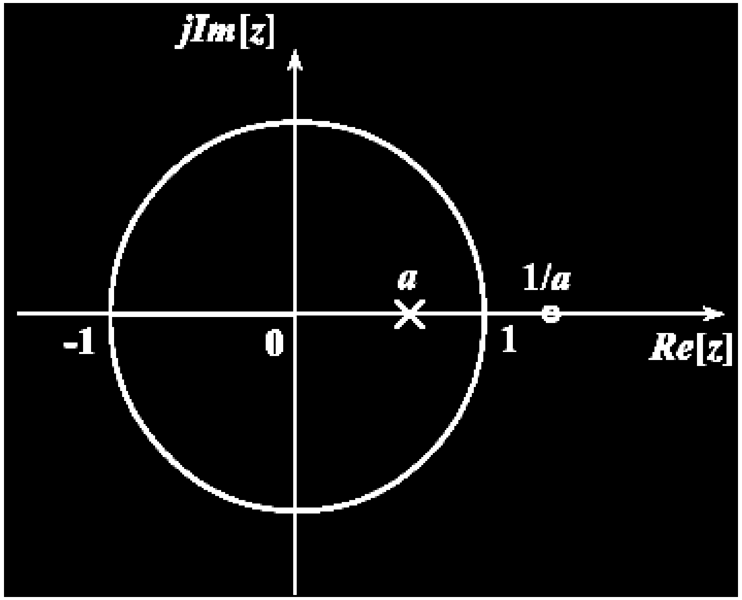
$H_{ap}(z) = z^{-k}$，是什么样系统?

最简单的全通系统，纯延迟

一阶全通系统

$$\boxed{H_{ap}(z)=\frac{1-\lambda^{-1}z^{-1}}{1-\lambda z^{-1}}\quad |\lambda|<1}$$

$$\text{Pole: } z=\lambda,\quad \text{Zero: } z=1/\lambda$$



镜像对称

$$\left|H_{ap}(z)\right|^2=H_{ap}(z)H_{ap}(z^{-1})=\lambda^{-2}$$

$$\left|H_{ap}(e^{j\omega})\right|^2=H_{ap}(e^{j\omega})H^*{}_{ap}(e^{j\omega})=\lambda^{-2}$$

线性相位FIR滤波器，有关联$H(z)$和$H(z^{-1})$的表示

$$H(z)=\pm z^{-(N-1)}H(z^{-1})$$

这里又有关联二者的新的表示，形式为：

$$P(z)=H(z)H(z^{-1})$$

设 $X(n)$ 为一平稳随机信号，它通过一线性移不变系统 $H(z)$ 后，输出为 $Y(n)$，由于

$$Y(n)=X(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k)h(n-k)$$

所以，$Y(n)$ 也是随机的，且也是平稳的。若 $X(n)$ 是确定性信号，则 $Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$，由于随机信号不存在傅里叶变换，因此，我们需要从相关函数和功率谱的角度来研究随机信号通过线性系统的行为。为了讨论方便起见，现假定 $X(n)$ 是实信号，这样，$Y(n)$ 也是实的。$X(n)$ 和 $Y(n)$ 之间的关系主要有如下 4 个

$$r_Y(m)=r_X(m)*h(m)*h(-m)$$
$$P_Y(e^{j\omega})=P_X(e^{j\omega})\left|H(e^{j\omega})\right|^2$$
$$r_{XY}(m)=r_X(m)*h(m)$$
$$P_{XY}(e^{j\omega})=P_X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

DTLTI系统，时域卷积→频域乘积：

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$P_Y(z)=P_X(z)P_h(z)$$
$$P_h(z)=H(z)H(z^{-1})$$

相关域： $r_y(m)=r_x(m)*r_h(m)$

对应平稳随机信号，有： $r_Y(m)=r_X(m)*r_h(m)$

若希望 $\left|H_{ap}(e^{\mathrm{j}\omega})\right| = 1$

则可令

$$\boxed{H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - \lambda}{1 - \lambda z^{-1}}}$$

证明:

$$\begin{aligned}
&H_{ap}(e^{\mathrm{j}\omega}) \cdot H_{ap}^{*}(e^{\mathrm{j}\omega}) \\
&= \frac{e^{-\mathrm{j}\omega} - \lambda}{1 - \lambda e^{-\mathrm{j}\omega}} \cdot \frac{e^{\mathrm{j}\omega} - \lambda}{1 - \lambda e^{\mathrm{j}\omega}} \\
&= \frac{1 + \lambda^2 - \lambda(e^{\mathrm{j}\omega} + e^{-\mathrm{j}\omega})}{1 + \lambda^2 - \lambda(e^{\mathrm{j}\omega} + e^{-\mathrm{j}\omega})} \\
&= 1
\end{aligned}$$

二阶全通系统

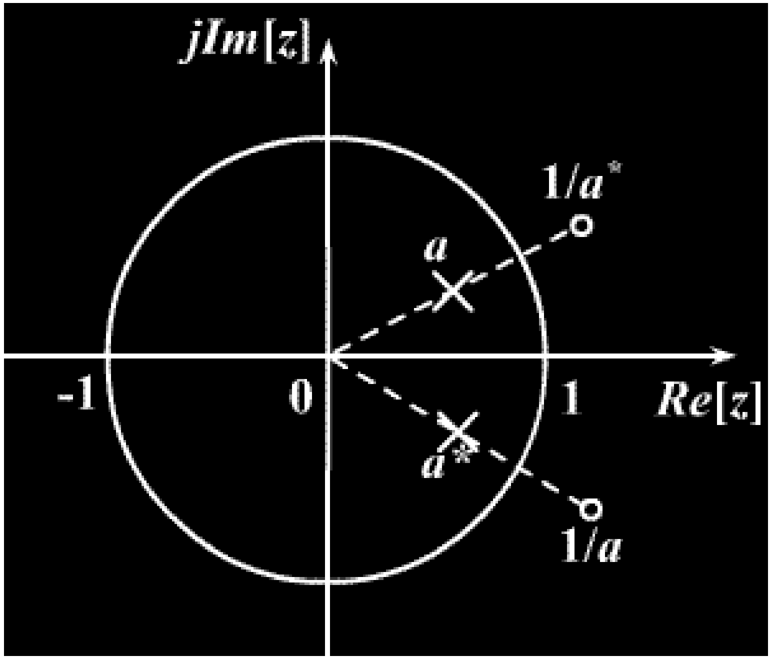
$$\boxed{H_{ap}(z)=\frac{(1-\lambda^{-1}z^{-1})(1-(\lambda^{-1})^{*}z^{-1})}{(1-\lambda z^{-1})(1-\lambda^{*}z^{-1})}}$$

一对位于单位圆内的共轭极点，一对共轭零点和极点以单位圆为镜像对称 。

若希望 $\left|H_{ap}(e^{j\omega})\right|=1$

可令 $H_{ap}(z)=\dfrac{(z^{-1}-\lambda^{*})(z^{-1}-\lambda)}{(1-\lambda z^{-1})(1-\lambda^{*}z^{-1})}$

共轭 镜像



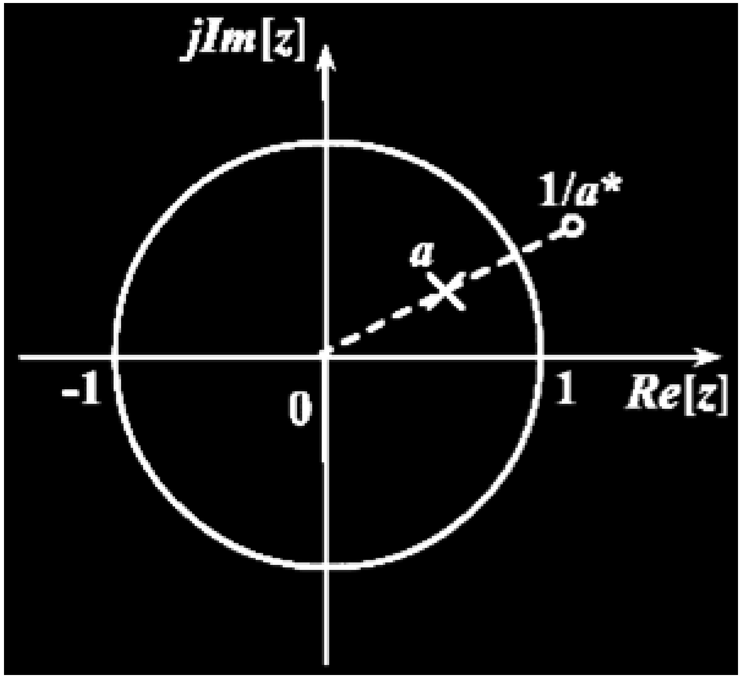
高阶全通系统

$$\boxed{H_{ap}(z) = \pm \prod_{k=1}^{N} \left[\frac{z^{-1} - \lambda_k{}^*}{1 - \lambda_k z^{-1}} \right] \quad |\lambda_k| < 1}$$

一阶全通节 $\dfrac{z^{-1} - \lambda_k^*}{1 - \lambda_k z^{-1}}$

极点 $p_k = \lambda_k$

零点 $z_k = \lambda_k^{*(-1)}$



高阶全通系统的另一种表示形式

$$H_{ap}(z) = \pm \frac{a_N + a_{N-1}z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-(N-1)} + z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

即：
$$H_{ap}(z) = \pm \frac{z^{-N}A(z^{-1})}{A(z)}$$

极点： $z_p = re^{\pm j\omega}, r < 1$　　　　**零点：** $z_o = \frac{1}{r}e^{\pm j\omega}, r < 1$

对该全通系统，可证明：

$$\begin{aligned} \left|H_{ap}(e^{j\omega})\right|^2 &= H_{ap}\left(e^{j\omega}\right) \cdot H_{ap}^*\left(e^{j\omega}\right) \\ &= H_{ap}(z) \cdot H_{ap}(z^{-1})\Big|_{z=e^{j\omega}} = 1 \end{aligned}$$

一种证法　根据DTFT的实信号的共轭对称性

若　$x(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{\mathrm{j}\omega})$

则　$x^*(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} X^*(e^{-\mathrm{j}\omega})$

若 $x(n)$为实序列

则　$X^*(e^{-\mathrm{j}\omega}) = X(e^{\mathrm{j}\omega})$　　$X(e^{-\mathrm{j}\omega}) = X^*(e^{\mathrm{j}\omega})$

$$A(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\text{，系数}a_k\text{为实数}$$

$$A(z^{-1})\Big|_{z=e^{\mathrm{j}\omega}} = A(e^{-\mathrm{j}\omega}) = A^*(e^{\mathrm{j}\omega})$$

$$\boxed{\left|H_{ap}(e^{\mathrm{j}\omega})\right| = \frac{\left|A^*(e^{\mathrm{j}\omega})\right|}{\left|A(e^{\mathrm{j}\omega})\right|} = 1}$$

全通系统的特点

1. 是IIR系统(不考虑纯延迟形式）；
2. 极点数和零点数相等;
3. 极点和零点是以单位圆镜像对称的;
4. 极点都在单位圆内，零点都在单位圆外;
5. 全通系统的群延迟始终为正值;
6. 对实稳定全通系统，当频率ω从0变到π时，N阶全通系统的相位的改变为$N\pi$。

特点5的证明：全通系统的相位是非正的、单调递减的。

单调性证明：　　基于一阶全通节　　$|r| < 1$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[\arg[H_{ap}(e^{\mathrm{j}\omega})]] < 0，\text{即} \frac{\mathrm{d}\theta_{ap}(\omega)}{\mathrm{d}\omega} < 0$$

$$\left.\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}\right|_{z=e^{\mathrm{j}\omega}} = \frac{e^{-\mathrm{j}\omega} - re^{-\mathrm{j}\theta}}{1 - re^{\mathrm{j}\theta}e^{-\mathrm{j}\omega}} = e^{-\mathrm{j}\omega}\frac{1 - re^{\mathrm{j}(\omega-\theta)}}{1 - re^{-\mathrm{j}(\omega-\theta)}}$$

$$= e^{-\mathrm{j}\omega}\frac{1 - r\cos(\omega - \theta) - \mathrm{j}r\sin(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta) + \mathrm{j}r\sin(\omega - \theta)}$$

$$= 1 \times e^{-\mathrm{j}[\omega + 2\arctan[r\sin(\omega-\theta)/(1-r\cos(\omega-\theta))]]}$$

$$= 1 \times e^{\mathrm{j}\theta_{ap}(\omega)}$$

$$\theta_{ap}(\omega) = -\omega - 2\arctan\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_{ap}(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \frac{-(1-r^2)}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)} = \frac{-(1-r^2)}{|1-re^{\mathrm{j}(\omega-\theta)}|^2} < 0$$

由于$h(n)$是实数，则当ω=0时，有$\theta_{ap}(0)$=0，又有相频特性随ω的增大而单调下降，则全通系统的**相频特性一定是负数**：

$$\theta_{ap}(\omega) < 0,\quad 0 \le \omega \le \pi$$

从而，全通系统的**群时延一定为正**：

$$\tau_{ap}(\omega) = -\frac{\mathrm{d}\theta_{ap}(\omega)}{\mathrm{d}\omega} > 0$$

特点6的证明：对实稳定全通系统，当频率ω从0变到π时， N阶全通系统的相位的改变为$N\pi$。

一阶系统　　极点：$p_1 = re^{\mathrm{j}\theta} = r$，$\theta = 0$，$|r| < 1$

$$H_1(z) = \frac{z^{-1} - r}{1 - rz^{-1}}$$

$$\theta_1(\omega) = -\omega - 2\arctan\frac{r\sin(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)}$$

当频率从0变化到π，相位改变为：

$$\Delta\theta_1(\omega) = \theta_1(0) - \theta_1(\pi) = \pi$$

二阶系统

$$H_2(z) = \frac{z^{-1} - re^{\mathrm{j}\theta}}{1 - re^{\mathrm{j}\theta}z^{-1}}\frac{z^{-1} - re^{-\mathrm{j}\theta}}{1 - re^{-\mathrm{j}\theta}z^{-1}}$$

极点：　　$p_{1,2} = re^{\pm\mathrm{j}\theta}$，$\theta \neq 0$，$|r| < 1$

$$\theta_2(\omega) = -2\omega - 2\arctan\frac{r\sin(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)} - 2\arctan\frac{r\sin(\omega + \theta)}{1 - r\cos(\omega + \theta)}$$

当频率从0变化到π，相位改变为：

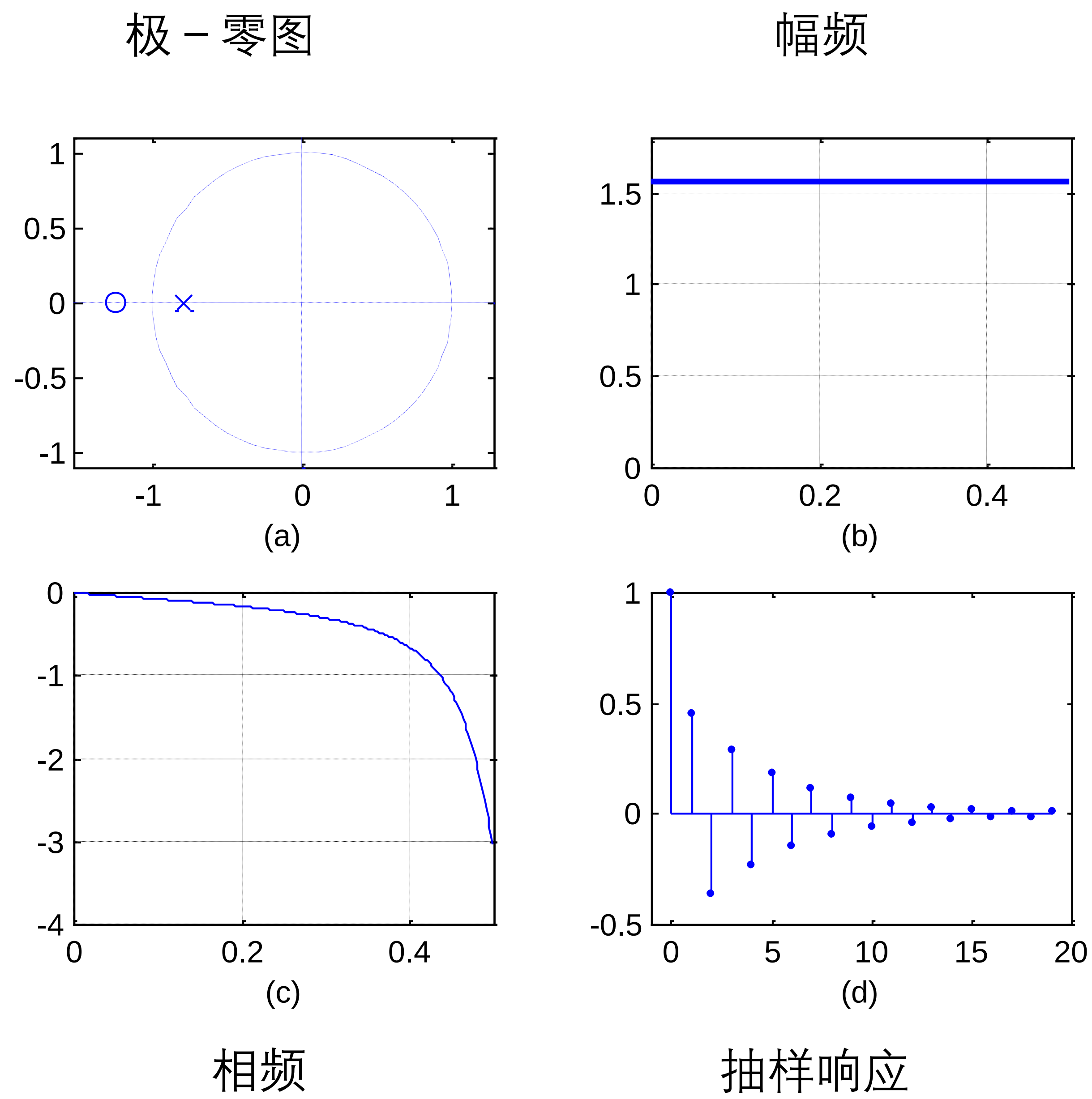
$$\Delta\theta_2(\omega) = \theta_2(0) - \theta_2(\pi) = 2\pi$$

IIR系统的$h(n)$无限长，无法对称，即无法做到**线性相位**。

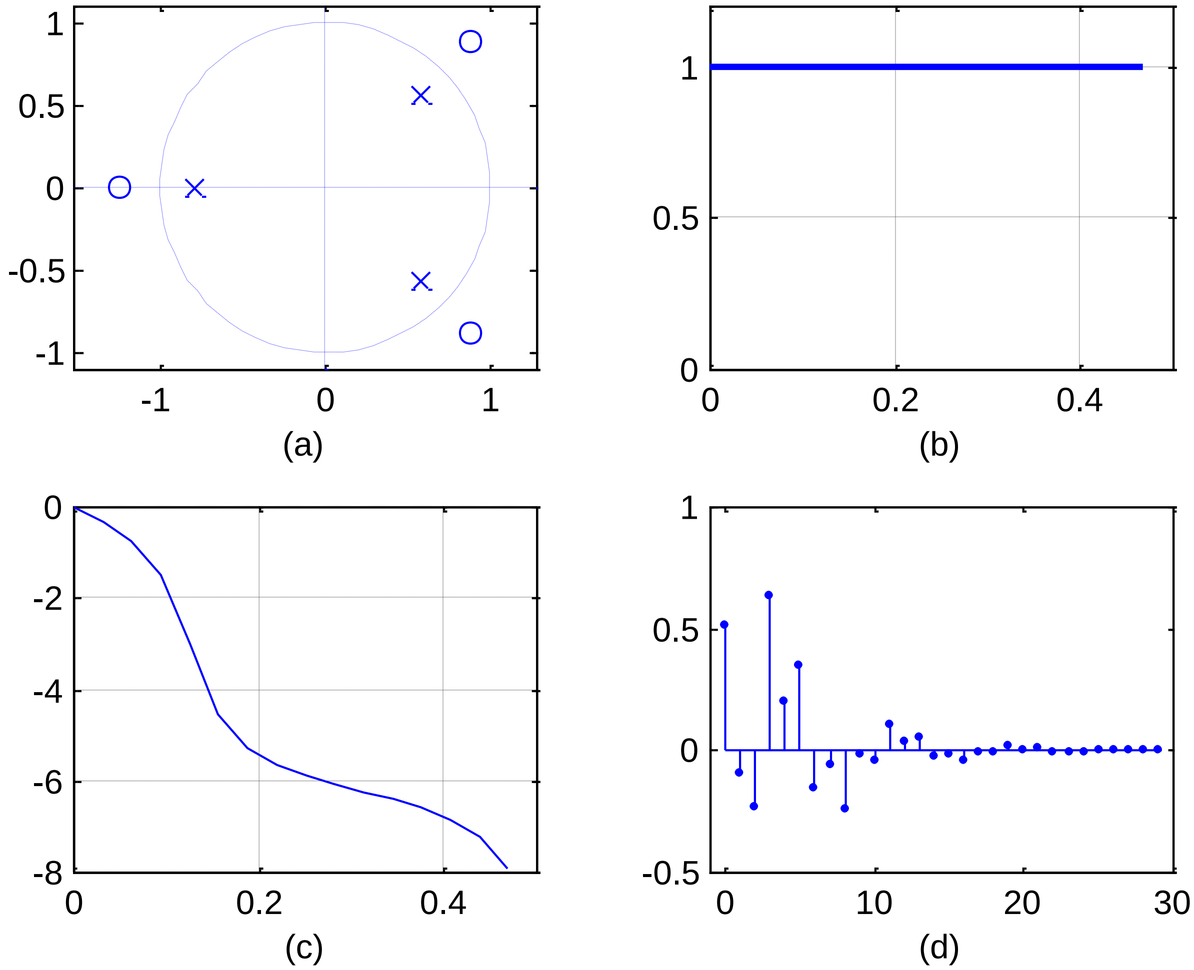
在实际中，容易想到的就是可以用一个全通系统和IIR系统相级联，在不改变幅频响应的情况下对相频响应做矫正，使其接近线性相位。

此外，全通系统还广泛应用在系统分析及一些特殊滤波器的设计方面（如功率互补IIR滤波器组）。

一阶全通系统



极－零图
幅频
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
0
1
(a)
1.5
1
0.5
0
0
0.2
0.4
(b)
0
-1
-2
-3
-4
0
0.2
0.4
(c)
1
0.5
0
-0.5
0
5
10
15
20
(d)
相频
抽样响应



三阶全通系统

最小相位系统

一个离散系统，其极点必须在单位圆内，但对零点没有限制，如果：

1. 所有的零点都在单位圆内：最小相位系统；

2. 所有的零点都在单位圆外：最大相位系统；

3. 单位圆内、外都有零点：混合相位系统。

对于给定的幅频响应，相频响应可以不唯一。

最小、最大相位延时系统

LSI系统的系统函数：

$$H(z) = K\frac{\prod_{m=1}^{M}(1 - c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}$$

$$= Kz^{(N-M)}\frac{\prod_{m=1}^{M}(z - c_m)}{\prod_{k=1}^{N}(z - d_k)}$$

频率响应：

$$H(e^{\mathrm{j}\omega}) = Ke^{\mathrm{j}(N-M)\omega}\frac{\prod_{m=1}^{M}(e^{\mathrm{j}\omega} - c_m)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{\mathrm{j}\omega} - d_k)}$$

$$= \left|H(e^{\mathrm{j}\omega})\right| e^{\mathrm{j}\arg[H(e^{\mathrm{j}\omega})]}$$

- **模：**

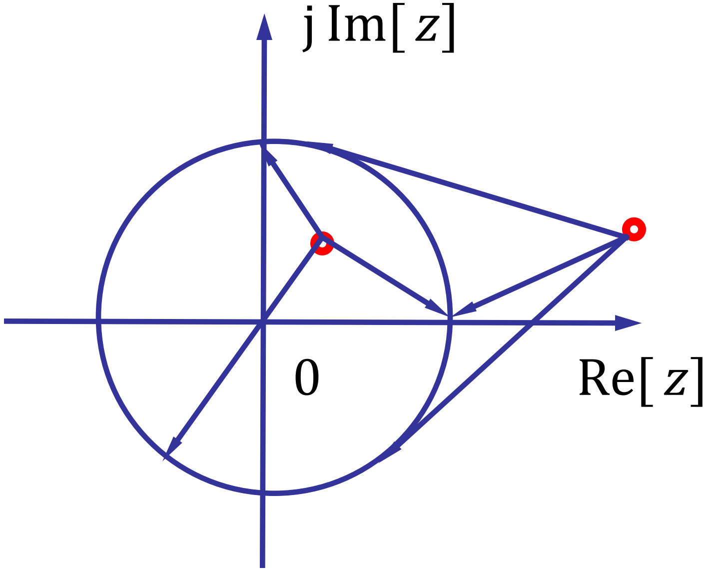
$$\left|\frac{H(e^{\mathrm{j}\omega})}{K}\right| = \frac{\prod_{m=1}^{M}\left|e^{\mathrm{j}\omega} - c_m\right|}{\prod_{k=1}^{N}\left|e^{\mathrm{j}\omega} - d_k\right|} = \frac{\text{各零矢量模的连乘积}}{\text{各极矢量模的连乘积}}$$

- **相角：**

$$\arg\left[\frac{H(e^{\mathrm{j}\omega})}{K}\right] = \sum_{m=1}^{M}\arg[e^{\mathrm{j}\omega} - c_m] - \sum_{k=1}^{N}\arg[e^{\mathrm{j}\omega} - d_k] + (N-M)\omega$$

$$\arg\left[\frac{H(e^{j\omega})}{K}\right] = \sum_{m=1}^{M} \arg[e^{j\omega} - c_m] - \sum_{k=1}^{N} \arg[e^{j\omega} - d_k] + (N - M)\omega$$

当 $\omega = 0 \to 2\pi, \qquad \Delta\omega = 2\pi$



位于单位圆内的零/极矢量角度变化为2π

位于单位圆外的零/极矢量角度变化为 0

$$\arg\left[\frac{H(e^{\mathrm{j}\omega})}{K}\right] = \sum_{m=1}^{M} \arg[e^{\mathrm{j}\omega} - c_m] - \sum_{k=1}^{N} \arg[e^{\mathrm{j}\omega} - d_k] + (N-M)\omega$$

令: 单位圆内零点数为m_{i}

单位圆外的零点数为m_{o} $\quad m_{\mathrm{i}} + m_{\mathrm{o}} = M$

单位圆内的极点数为p_{i}

单位圆外的极点数为p_{o} $\quad p_{\mathrm{i}} + p_{\mathrm{o}} = N$

则:

$$\Delta \arg\left[\frac{H(e^{\mathrm{j}\omega})}{K}\right]_{\Delta\omega=2\pi} = 2\pi(N-M) + 2\pi m_{\mathrm{i}} - 2\pi p_{\mathrm{i}}$$

- 因果稳定系统　　$|z| > r, r < 1$　　$n < 0$时，$h(n) = 0$

全部极点在单位圆内：$p_o = 0$，$p_i = N$

$$\Delta \arg\left[\frac{H(e^{j\omega})}{K}\right]_{\Delta\omega=2\pi} = 2\pi m_i - 2\pi p_i + 2\pi(N - M)$$

$$= 2\pi m_i - 2\pi M \qquad = -2\pi m_o \leq 0$$

相位延时系统

1）全部零点在单位圆内：　$m_i = M, m_o = 0$

$\Delta \arg[] = 0$　　为最小相位延时系统

2）全部零点在单位圆外：　$m_i = 0, m_o = M$

$\Delta \arg[] = -2\pi M$　　为最大相位延时系统

考虑

先叙述性质1，其理解和证明要用到性质4

讲解性质4，再证明性质1

然后理解性质2和3

最后回到性质4，简单总结全通系统的应用

最小相位系统的性质

1. 在具有相同幅频响应的因果稳定的滤波器集合中，最小相位滤波器具有最小的相位偏移。

接下来先看性质4，再证明性质1，证明中用到全通系统的相位函数的特点。

例：如下两个系统具有相同的幅频响应：

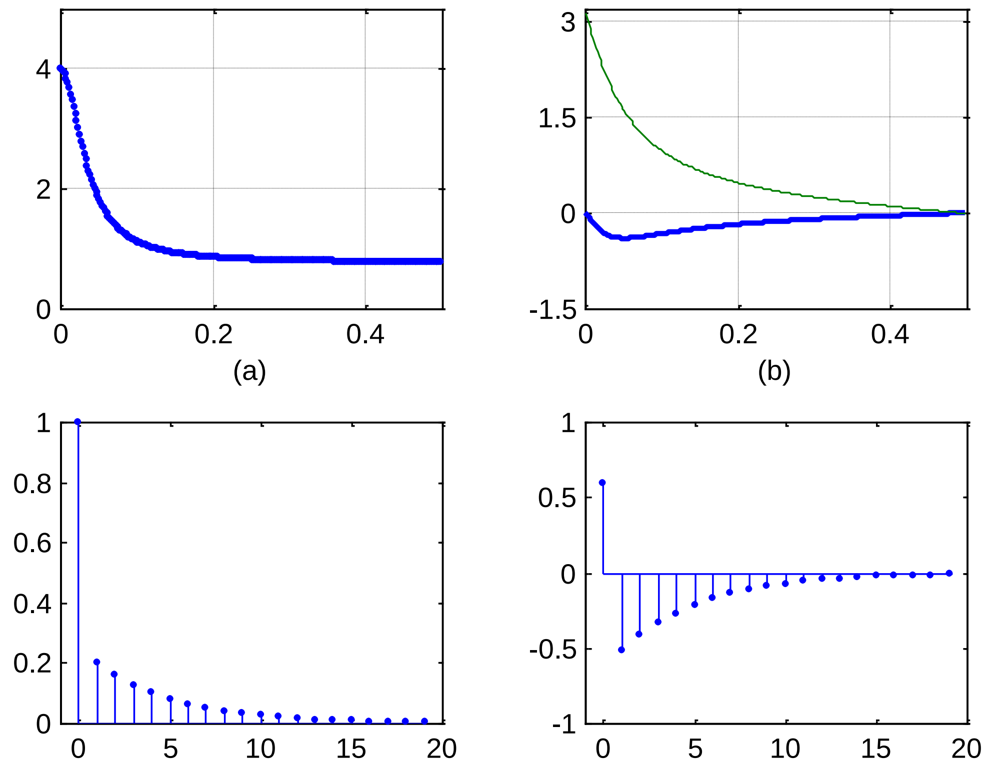
$$H_1(z) = \frac{z-b}{z-a} = \frac{1-bz^{-1}}{1-az^{-1}}, \quad |a|<1, \quad |b|<1$$

$$H_2(z) = \frac{bz-1}{z-a} = \frac{b-z^{-1}}{1-az^{-1}}, \quad |a|<1, \quad |b|<1$$

哪一个是最小相位系统

$$H_1(z) = \frac{z-b}{z-a} = \frac{1-bz^{-1}}{1-az^{-1}}, \quad |a|<1, \ \ |b|<1$$

$$H_2(z) = \frac{bz-1}{z-a} = \frac{b-z^{-1}}{1-az^{-1}}, \quad |a|<1, \ \ |b|<1$$



(a) (b) (c) (d)

2. 在所有具有相同幅频响应的离散系统中，最小相位系统的$h(n)$具有最小的延迟。

令：
$$E(M) = \sum_{n=0}^{M} h^2(n) \quad 0 \le M < \infty$$
累计能量

有：
$$\sum_{n=0}^{M} h^2{}_{min}(n) \ge \sum_{n=0}^{M} h^2(n)$$

所以，最小相位系统的单位抽样响应又称最小延迟序列。

思考：具有线性相位的FIR系统是否是最小相位系统？

例. 三个系统:

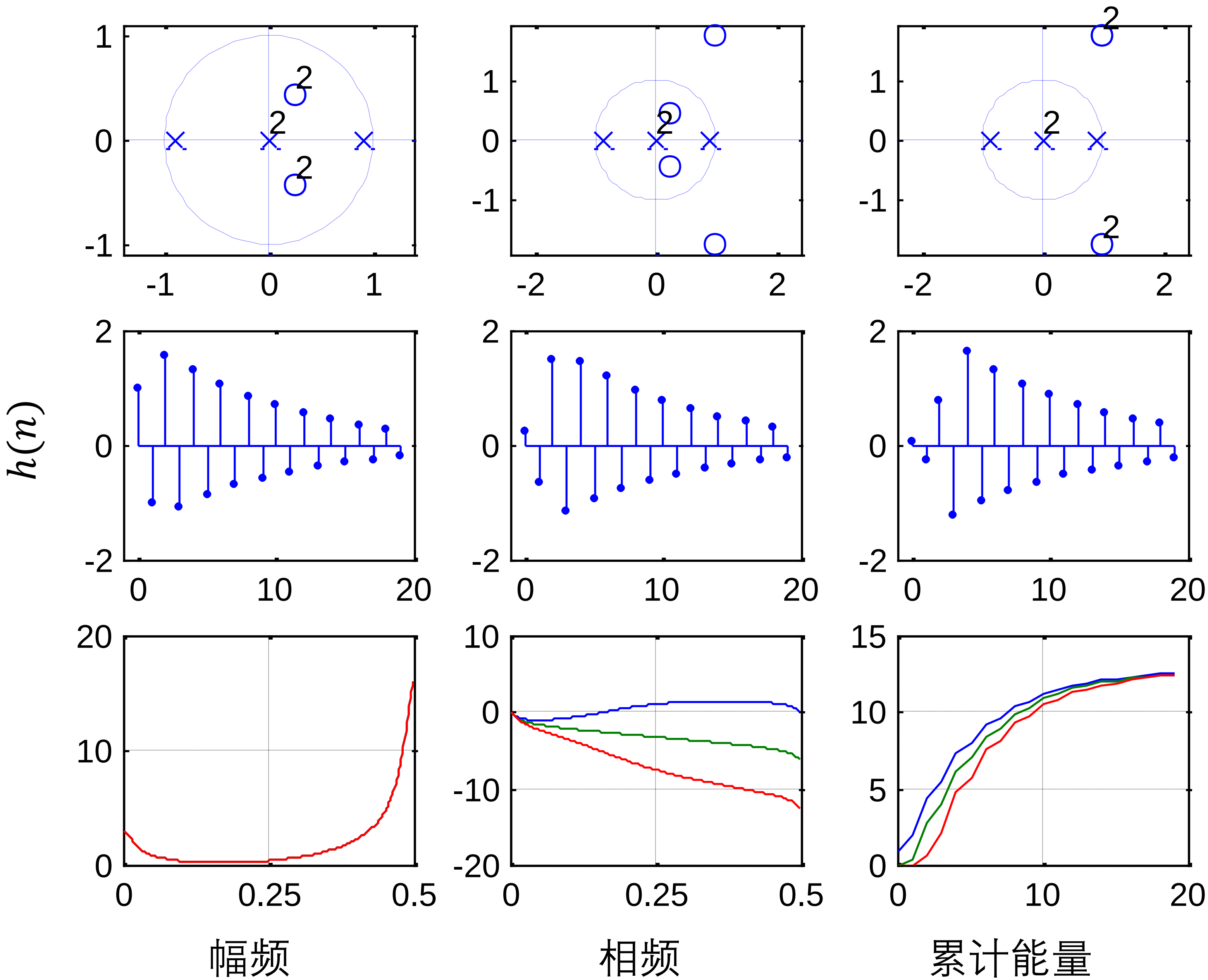
$$H_1(z)=\frac{(1-0.5e^{\mathrm{j}\pi/3}z^{-1})^2(1-0.5e^{-\mathrm{j}\pi/3}z^{-1})^2}{1-0.81z^{-2}}$$

$$H_2(z)=\frac{(1-0.5e^{\mathrm{j}\pi/3}z^{-1})(1-0.5e^{-\mathrm{j}\pi/3}z^{-1})(0.5e^{-\mathrm{j}\pi/3}-z^{-1})(0.5e^{\mathrm{j}\pi/3}-z^{-1})}{1-0.81z^{-2}}$$

$$H_3(z)=\frac{(0.5e^{\mathrm{j}\pi/3}-z^{-1})^2(0.5e^{-\mathrm{j}\pi/3}-z^{-1})^2}{1-0.81z^{-2}}$$

它们具有相同的幅频响应，试判断，那一个是最小相位系统？最大相位系统？混合相位系统？

注意：为保证系统具有相同的幅频响应（相同的定标），$H_1(z), H_2(z), H_3(z)$ 的表达式。

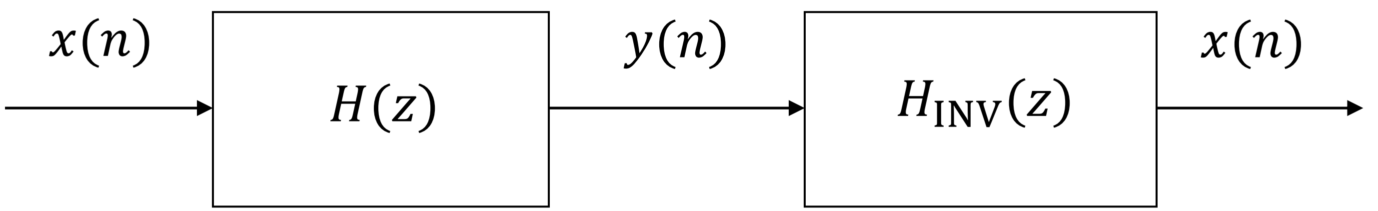

h(n)
幅频
相频
累计能量

3. 对于稳定因果系统，当且仅当其是最小相位系统时，该系统才有逆系统；

令：
$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

记：
$$H_{\mathrm{INV}}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{D(z)}{N(z)}$$

$\Rightarrow$ $H(z)$的逆系统



Deconvolution(反卷积)

System identification(系统辨识)

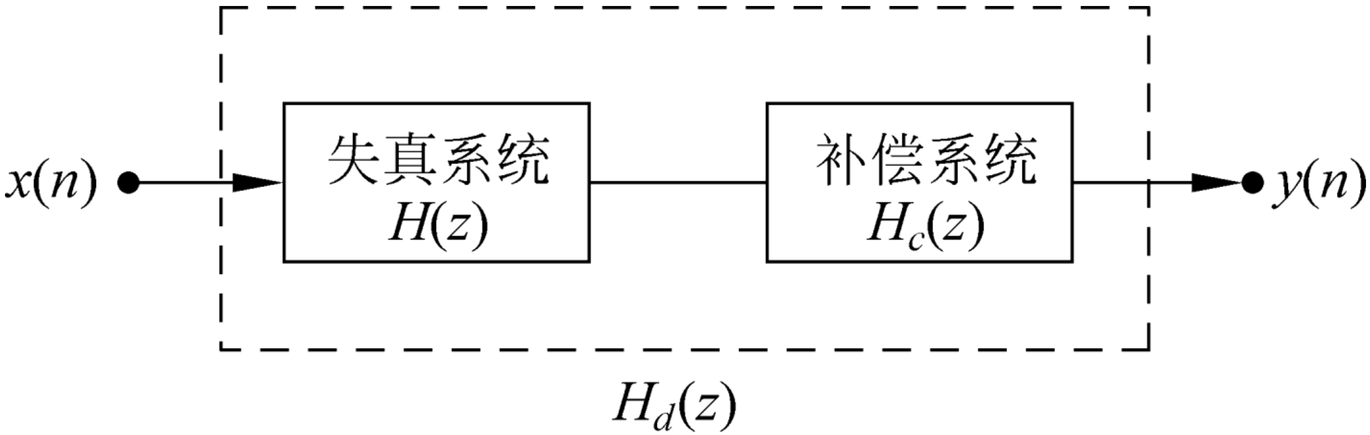
逆滤波器在信号检测及解卷积中有重要应用。例如，信号检测中的信道均衡器实质上就是设计信道的近似逆滤波器。

回顾信号与系统中对因果系统的描述

- 若系统的单位脉冲响应是因果信号，则系统是因果的;
- 一个DTLTI系统当且仅当系统函数的ROC是在一个圆的外边，且包括无限远点，则系统是因果的;
- 一个具有有理系统函数的LTI系统，要是因果的，当且仅当
  - ROC位于最外层极点外边某一个圆的外面;
  - 若系统函数表示成z的多项式之比，其分子的阶次不能大于分母的阶次。

性质3的一个应用

若信号在传输过程中由一个LTI系统产生了幅度失真，现采用一个补偿系统来校正幅度失真。



根据性质3，若系统$H(z)$是最小相位系统，则补偿系统$H_c(z)$可以是其逆系统，而且是稳定的，从而可以实现比较完美的幅度失真校正。

若$H(z)$不是最小相位系统呢？

4. 任一非最小相位的因果系统的转移函数均可由一个最小相位系统和一个全通系统 级联而成，即：

$$H(z)=H_{\min}(z)H_{\mathrm{ap}}(z)$$

$1/z_0$， $|z_0|<1$

$$\begin{aligned}H(z)&=H_1(z)(z^{-1}-z_0)\\&=H_1(z)(z^{-1}-z_0)\frac{1-z_0^*z^{-1}}{1-z_0^*z^{-1}}\\&=H_1(z)(1-z_0^*z^{-1})\frac{z^{-1}-z_0}{1-z_0^*z^{-1}}\\&=H_{\min}(z)\frac{z^{-1}-z_0}{1-z_0^*z^{-1}}\\&=H_{\min}(z)H_{\mathrm{ap}}(z)\end{aligned}$$

$\frac{1}{1}$ 型

针对单位圆外零点，引入镜像零极点，共轭、逆的关系，构成一个特殊的全通系统，然后重新组合。

那么，前面问题里的$H_c(z)=?$

5. 设$H(z)$为最小相位系统

令： $H(z) = |H(z)|e^{\mathrm{j}\arg[H(z)]}$

$$\breve{H}(z) = \ln H(z) = \ln|H(z)| + \mathrm{j}\arg[H(z)]$$

则：$\breve{H}_R(e^{\mathrm{j}\omega})$和$\breve{H}_I(e^{\mathrm{j}\omega})$构成一对Hilbert变换

$$\breve{H}_{\mathrm{R}}(e^{\mathrm{j}\omega}) = \breve{h}(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\breve{H}_{\mathrm{I}}(e^{\mathrm{j}\theta})\cot(\frac{\omega-\theta}{2})\mathrm{d}\theta$$
$$\breve{H}_{\mathrm{I}}(e^{\mathrm{j}\omega}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\breve{H}_{\mathrm{R}}(e^{\mathrm{j}\theta})\cot(\frac{\omega-\theta}{2})\mathrm{d}\theta$$

$\breve{H}(z)$、$\breve{H}(e^{\mathrm{j}\omega}) \Rightarrow \breve{h}(n)$

➡ 复倒谱：Cepstrum

全通系统的应用

性质4：校正非稳定系统；相位均衡器

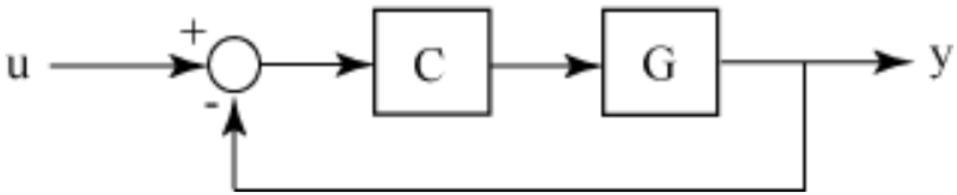
校正一个非稳定系统：级联一个全通系统可以使非稳定滤波器变成一个稳定滤波器。

单位圆外极点： $z = \frac{1}{r} e^{\pm \mathrm{j}\theta}, \quad |r| < 1$

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - re^{\mathrm{j}\theta}}{1 - re^{-\mathrm{j}\theta} z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - re^{-\mathrm{j}\theta}}{1 - re^{\mathrm{j}\theta} z^{-1}}$$

把非稳定系统的单位圆外的极点映射到单位圆内

使一个不稳定系统稳定的重要方法
——反馈校正，基于自动控制原理



（1）被控系统G

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

（2）超前网络C

$$C(s) = k\frac{s+1/2}{s+2}$$

采用如图所示的单位负反馈控制系统，设计一个合适的超前网络C可以稳定被控系统。

```
clear; close all;
G = tf([1],conv([1 1],[1 -2]));
K = 100;
C = tf([K K/2],[1 2]);

%整个系统的传递函数及零极点
sys = feedback(G*C,1,-1)
sys = feedback(G*C,1)
[z,p,k] = zpkdata(sys)
Z = z{:}
P = p{:}
pzmap(sys)
```

零点和极点：
Z = -0.5000
P = -0.2705 + 6.7586i,
-0.2705 - 6.7586i,
-0.4590 + 0.0000i

相位均衡器

校正系统的非线性相位，而不改变系统的幅度特性。

$$H(z) = H_d(z) \cdot H_{ap}(z)$$

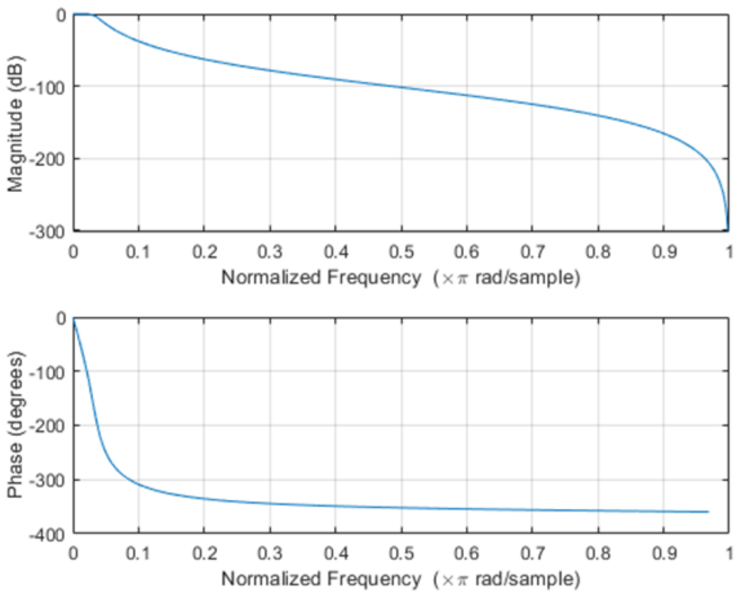
$$H(e^{\mathrm{j}\omega}) = H_d(e^{\mathrm{j}\omega}) \cdot H_{ap}(e^{\mathrm{j}\omega})$$

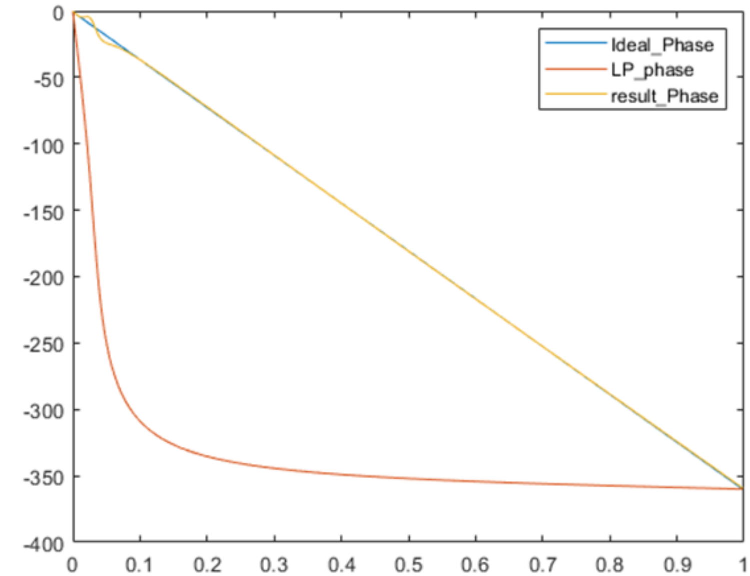
$$= \left|H_d(e^{\mathrm{j}\omega})\right| \cdot \left|H_{ap}(e^{\mathrm{j}\omega})\right| \cdot e^{\mathrm{j}\left[\varphi_d(\omega)+\varphi_{ap}(\omega)\right]}$$

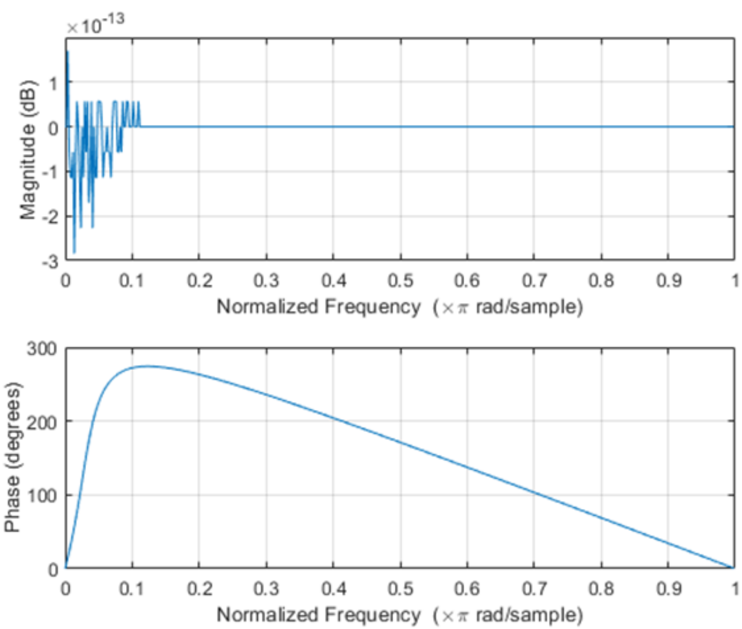
$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \tau_d(\omega) + \tau_{ap}(\omega) = \tau_0$$

$$e^2 = [\tau(\omega) - \tau_0]^2 = \left[\tau_{ap}(\omega) + \tau_d(\omega) - \tau_0\right]^2$$

利用均方误差最小准则求均衡器$H_{ap}(z)$的有关参数







可以采用一些多项式拟合的方法，或者优化方法实现全通滤波器的参数优化。

最小相位系统的应用

由于最小相位系统有着以上特殊的性质，因此有着广泛的应用，特别是在信号建模与系统辨识方面。

要理解，具有相同幅频响应的系统，它们所对应的转移函数可以是不相同的，区别就在于相位（或零点的位置）。

那么，如何由一个最小相位系统得到具有相同幅频响应的最大相位、混合相位系统?

注意非最小相位系统的一个重要影响

单位圆外的零点对阶跃响应的影响

系统含有单位圆外的零点，是非最小相位系统，单位阶跃响应的初始响应是负的；零点远离单位圆可以减少对系统响应的影响，有更小的初始减少量。

离散时间水轮机系统（包括阀门动力学），系统的传递函数为

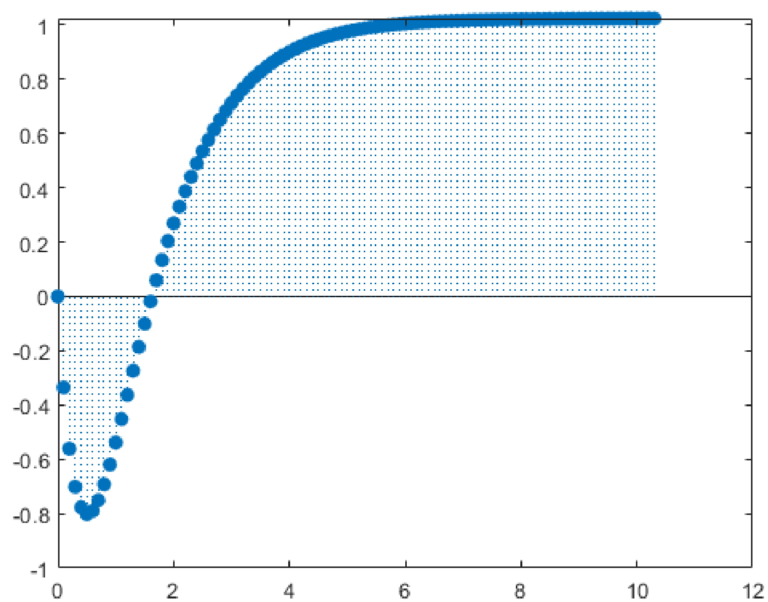
$$G(z)=\frac{-0.3354z+0.3526}{z^2-1.724z+0.7408}$$

根据分子多项式、分母多项式系数、采样周期（例如0.1s）

（1）建立系统的TF对象；

（2）获取零点和极点，并判断系统的稳定性和最小相位情况；

（3）获得阶跃响应，并分析它收敛情况，初始响应情况。

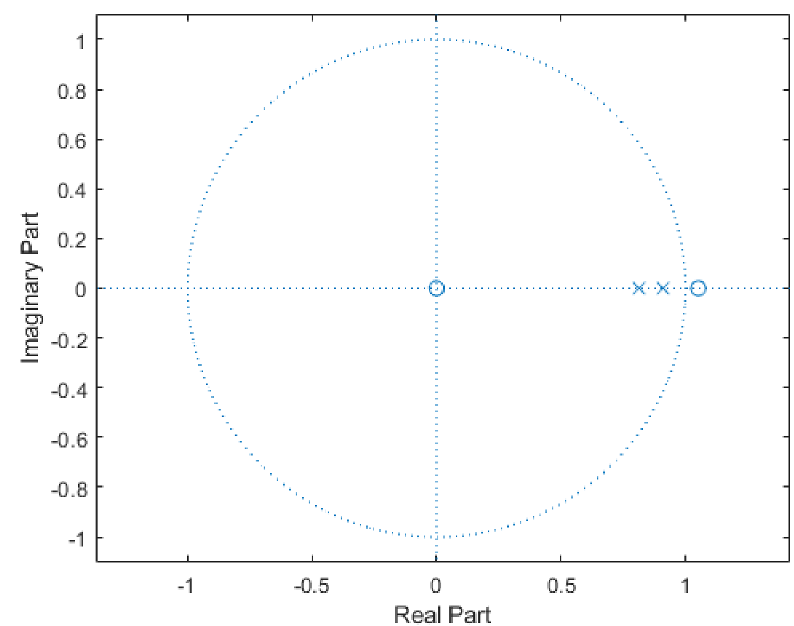


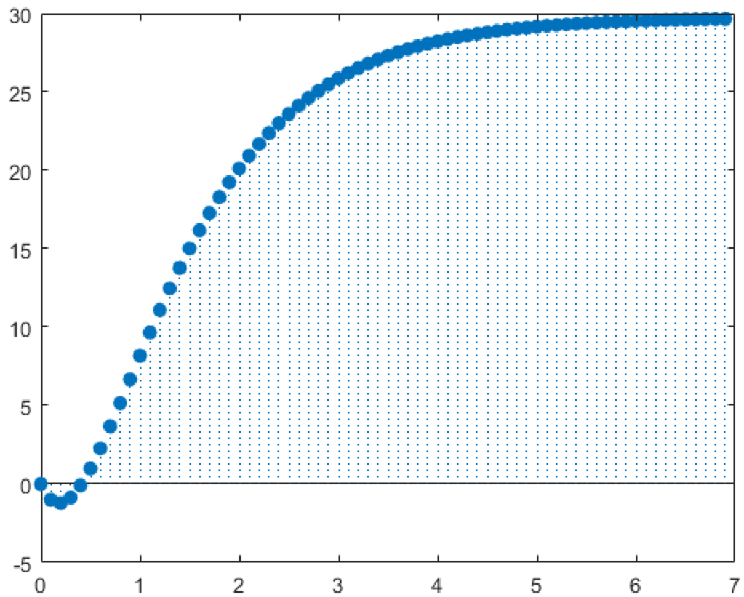

```
clear; close all;
b = [-0.3354 0.3526];
a = [1 -1.724 0.7408];
Ts = 0.1
G = tf(b,a,Ts)
[zG,pG,kG] = zpkdata(G,'v')
zplane(b,a)
[y,k] = step(G);
stem(k,y,'filled',':')
```

圆外零点离单位圆较近，初始响应有较大的负调。

```
>> zG
zG =
    1.0513

>> pG
pG =
    0.9094
    0.8146
```






```
clear; close all;
b = [-1 1.5]; % 将单位圆外零点拉更远
a = [1 -1.724 0.7408];
Ts = 0.1
G = tf(b,a,Ts)
[zG,pG,kG] = zpkdata(G,'v')
zplane(b,a)
[y,k] = step(G);
stem(k,y,'filled',':')
```

使圆外零点远离单位圆，
初始响应的负调减小。

```
>> zG
zG =
   1.5000

>> pG
pG =
   0.9094
   0.8146
```