第六章习题解答

TA_滕子涵

6.2

0.6μm工艺、5mm长、4λ宽的金属导线，它的薄层电阻为 0.08$\Omega/\square$而电容为 0.2$fF/\mu m$。为这条导线建立一个 3 段π模型。

薄层电阻定义：

一块均匀平板导电材料的电阻可以表示成：

$$R=\frac{\rho}{t}\frac{l}{w} \tag{6.1}$$

式中，ρ 为电阻率①。上式还可重写成：

$$R=R_{\square}\frac{l}{w} \tag{6.2}$$

上式中 $R_{\square}=\rho/t$ 为薄层电阻(sheet resistance)，单位为 $\Omega/\square$。注意，方块是无量纲的量，它相应于一块长度和宽度相等的平板。这样表示比较方便，因为电阻率和厚度是工艺特征，它不受电路设计者的控制，因此可以提取出来作为单纯的薄层电阻参数。

为了得到在某一层上导体的电阻，可以用薄层电阻乘以这一导体的长宽比。例如，图6.6中两种形状的电阻相等，因为虽然它们的尺寸不同，但它们的长宽比相同。非矩形的形状可以划分成几个形状较简单的区域，然后就可以计算这些区域的电阻[Horowitz83]。

表6.2为纯金属在室温下的体电阻率(bulk electrical resistivity)[Bakoglu90]。导线中使用的金属薄膜的电阻率

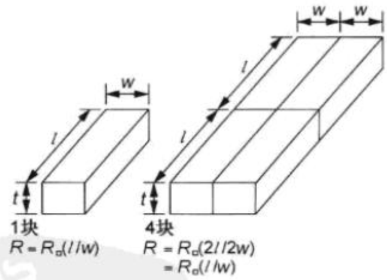


图6.6 两个导体具有相同的电阻

1λ的长度：

它由多晶硅线条的最小宽度确定。例如，一个180 nm工艺的多晶硅最小宽度(因而晶体管的沟道长度)为0.18 μm，因此可以采用$\lambda=0.09$ μm的设计规则。① λ设计规则必然是保守的，因为它们把尺

解：

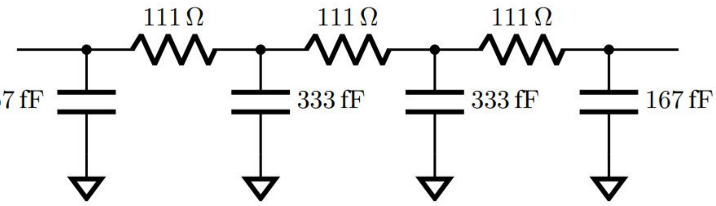
导线电阻：

$$R=0.08\times\left(\frac{5mm}{1.2\mu m}\right)\Omega=333.3\Omega$$

导线电容：

$$C=5mm\times 0.2fF/\mu m=1fF$$

3 段模型将上述参数均分到 3 个“π”上即可，作图如下：



6.5 推导式(6.27) ~ 式(6.30)。假设最前端的驱动器及最末端的接收器与中继器有相同的尺寸，所以总延时是小分段延时的 N 倍。

并补充推导 6. 31 式。

课本内容：

图 6.27 为一段导线的模型，插入中继器后导线的 Elmore 延时为：

$$t_{pd}=N\left[\frac{R}{W}\left(C_w\frac{l}{N}+CW\left(1+p_{\mathrm{inv}}\right)\right)+R_w\frac{l}{N}\left(\frac{C_w}{2}\frac{l}{N}+CW\right)\right] \tag{6.26}$$

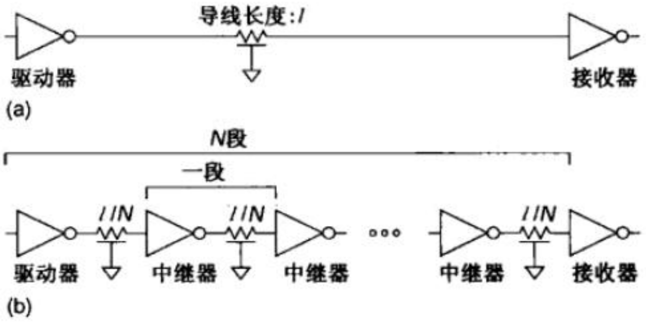


图 6.26 包含和不包含中继器的导线

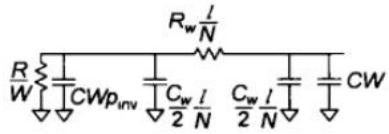


图 6.27 插入中继器后每段导线的等效电路

将式(6.26)对 N 和 W 求导可以求得中继器之间每段导线的最优长度(见习题 6.5)：

$$\frac{l}{N}=\sqrt{\frac{2RC\left(1+p_{\mathrm{inv}}\right)}{R_wC_w}} \tag{6.27}$$

由前面的例 4.10 可知，FO4 反相器的延时为 $5RC$。假设采用折叠式晶体管时 $p_{\mathrm{inv}}\approx0.5$，那么式(6.27)可简化为：

$$\frac{l}{N}=0.77\sqrt{\frac{\mathrm{FO4}}{R_wC_w}} \tag{6.28}$$

一个正确插入中继器的导线具有每单位长度的延时为：

$$\frac{t_{pd}}{l}=\left(2+\sqrt{2\left(1+p_{\mathrm{inv}}\right)}\right)\sqrt{RCR_wC_w}\approx1.67\sqrt{\mathrm{FO4}\,R_wC_w} \tag{6.29}$$

为达到这一延时，反相器采用的 nMOS 管宽度应为：

$$W=\sqrt{\frac{RC_w}{R_wC}} \tag{6.30}$$

传送一位信息所需要的每单位长度能耗取决于导线和中继器的电容：

$$\frac{E}{l}=C_w+NWC\left(1+p_{\mathrm{inv}}\right)=C_w\left(1+\sqrt{\frac{1+p_{\mathrm{inv}}}{2}}\right)V_{\mathrm{DD}}^2\approx1.87C_wV_{\mathrm{DD}}^2 \tag{6.31}$$

换言之，为达最小延时所选取的中继器尺寸将使一条未插入中继器导线的能耗增加 87%。

解：

按照课本上的提示来就可以（课本不完全正确），t_{pd}对 N 求偏导并令式子为 0：

$$\frac{\partial t_{pd}}{\partial N}=RC(1+p_{inv})-\frac{R_WC_Wl^2}{2N^2}=0$$

解得：

$$N=\sqrt{\frac{R_W C_W l^2}{2RC(1+p_{inv})}}$$

得到 6.27 式：

$$\frac{l}{N}=\sqrt{\frac{2RC(1+p_{inv})}{R_W C_W}}$$

6.28 就是代入p_{inv}并换个单位，不再赘述。下面推导 6.29，式子中没有 N 和 W，想到把这两个变量替换掉t_{pd}对 W 求偏导并令式子为 0：

$$\frac{\partial t_{pd}}{\partial W}=R_W Cl-\frac{RC_W l}{W^2}=0$$

解得 6.30 式：

$$W=\sqrt{\frac{RC_W}{R_W C}}$$

考虑到：

$$t_{pd}=\frac{RC_W}{W}\cdot l+\frac{N}{l}RC(1+p_{inv})\cdot l+\frac{R_W C_W}{2}\cdot\frac{N}{l}\cdot l+R_W CW\cdot l$$

两边除以l，把能 N 和 W 替换掉，化简，得 6.29 式：

$$\frac{t_{pd}}{l}=(2+\sqrt{2(1+p_{inv})})\sqrt{RCR_W C_W}$$

传递一位数据需要的能量（看图 6.27）：

$$E=N\cdot\left(CWp_{inv}+\frac{C_W}{2}\cdot\frac{l}{N}+\frac{C_W}{2}\cdot\frac{l}{N}+CW\right)\cdot V_{DD}^2=(N\cdot(1+p_{inv})CW+C_W l)\cdot V_{DD}^2$$

把N、W和p_inv替换掉，两边除以l，得 6.31 式：

$$\frac{E}{l}=\left(C_W+\frac{N}{l}\cdot CW(i+p_{inv})\right)\cdot V_{DD}^2=C_W\left(1+\sqrt{\frac{1+p_{inv}}{2}}\right)\cdot V_{DD}^2$$

6.6 采用反相器对(即非反相缓冲器)而不是单个反相器重做习题6.5。每对中的第一个反相器具有 W_1 倍的单位宽度。第二个反相器比第一个大 k 倍。试推导式(6.33)~式(6.36)。

课本内容：

遗憾的是，反相中继器将使设计复杂，因为你必须或者保证每条导线上的中继器数目为偶数，或者修改接收逻辑使能接受反相位的输入信号。一些设计者采用一对反相器(即缓冲器)而不是单个反相器来避免这一极性问题。自然，反相器对具有较大的延时。但反相器对中的第一个反相器的尺寸 W_1 可以较小，因而它对驱动它的导线表现出较小的负载。第二个反相器可以较大些，因而有较大的强度驱动它后面的导线。你可以证明第二个反相器的最优尺寸是 $W_2=kW_1$，式中，k 在 $p_{\text{inv}}=0.5$ 时等于2.25。此时在中继器之间的距离将增大至(见习题6.6)：

$$\frac{l}{N}=\sqrt{\frac{2RC\left(k+\frac{1}{k}+2p_{\text{inv}}\right)}{R_wC_w}}\approx 1.22\sqrt{\frac{\text{FO4}}{R_wC_w}} \tag{6.33}$$

每单位长度的延时变为：

$$\frac{t_{pd}}{l}=1.81\sqrt{\text{FO4}\,R_wC_w} \tag{6.34}$$

采用的晶体管宽度为：

$$W_1=\frac{W}{\sqrt{k}},\quad W_2=W\sqrt{k} \tag{6.35}$$

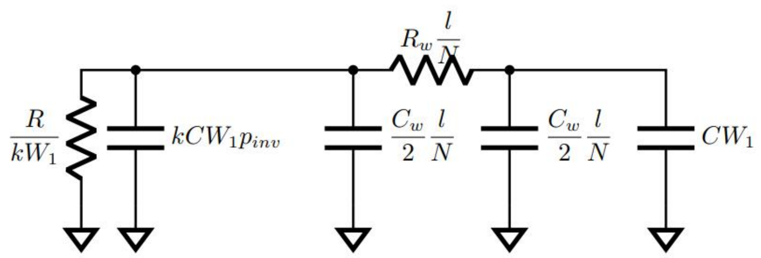
而每单位长度每位信息的能耗为：

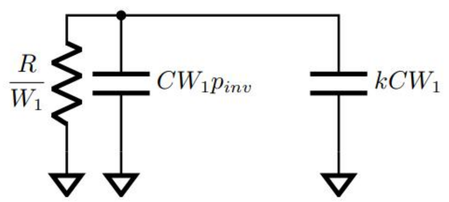
$$\frac{E}{l}\approx 2.2C_wV_{\text{DD}}^2 \tag{6.36}$$

这在一般情况下意味着，采用非反相中继器驱动的导线每单位长度的延时比采用反相中继器时只慢大约8%，但只需要后者大约2/3的中继器，因而简化了平面规划。不过总的中继器面积和功耗会略有增加。

解：

作图如下（注意不要把每段的图连起来，中间应该是断开的，批作业时都算对了）：





Elmore 延时为

$$t_{pd} = N\left[\frac{R}{kW_1}\left(C_w\frac{l}{N} + CW_1(1+kp_{inv})\right) + R_w\frac{l}{N}\left(\frac{C_w}{2}\frac{l}{N} + CW_1\right) + (p_{inv}+k)\,RC\right]$$

将 t_{pd} 对 N 求导得

$$\frac{\partial t_{pd}}{\partial N} = \frac{(1+kp_{inv})}{k}RC - \frac{R_wC_wl^2}{2N^2} + (p_{inv}+k)RC = 0 \Longrightarrow \frac{l}{N} = \sqrt{\frac{2RC(k+\frac{1}{k}+2p_{inv})}{R_wC_w}}$$

取 $p_{inv}=0.5, \mathrm{FO4}=5RC, k=2.25$，则

$$\frac{l}{N} \approx 1.22\sqrt{\frac{\mathrm{FO4}}{R_wC_w}}$$

将 t_{pd} 对 W_1 求导得

$$\frac{\partial t_{pd}}{\partial W} = -\frac{RC_wl}{kW_1^2} + R_wCl = 0 \Longrightarrow W_1 = \sqrt{\frac{RC_w}{kR_wC}} = \frac{W}{\sqrt{k}}, kW_1 = \sqrt{k}W$$

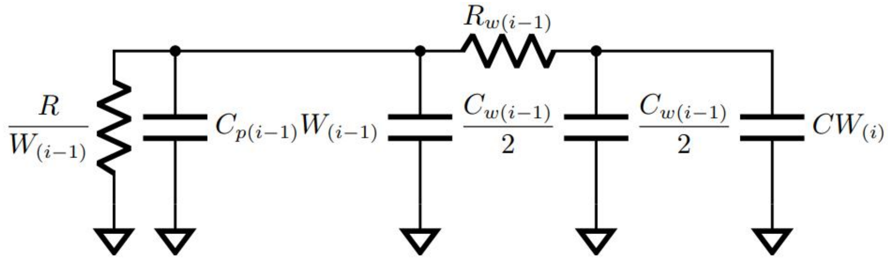
于是

$$\begin{aligned}\frac{t_{pd}}{l} &= \frac{RC_w}{kW_1} + \frac{NRC(k+\frac{1}{k}+2p_{inv})}{l} + \frac{R_wC_wl}{2N} + R_wCW_1\\ &= \sqrt{RCR_wC_w}\cdot\frac{2}{\sqrt{k}} + \sqrt{\frac{RCR_wC_w(k+\frac{1}{k}+2p_{inv})}{2}}\times 2\\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{k}} + \sqrt{2\left(k+\frac{1}{k}+2p_{inv}\right)}\right)\sqrt{RCR_wC_w}\\ &\approx 1.81\sqrt{\mathrm{FO4}R_wC_w}\end{aligned}$$

6.8

证明 P200 公式$C_i(R_{i-1}+R_{w_i-1})=R_i(C_{i+1}+C_{w_i+1})$

解：作图如下：



$(i-1)$ 到 (i) 级 Elmore 延时为

$$t_{pd(i-1)}=\frac{R}{W_{(i-1)}}\left(C_{p(i-1)}W_{(i-1)}+C_{w(i-1)}+CW_{(i)}\right)+R_{w(i-1)}\left(\frac{C_{w(i-1)}}{2}+CW_{(i)}\right)$$

同理，(i) 到 $(i+1)$ 级的 Elmore 延时为

$$t_{pd(i)}=\frac{R}{W_{(i)}}\left(C_{p(i)}W_{(i)}+C_{w(i)}+CW_{(i+1)}\right)+R_{w(i)}\left(\frac{C_{w(i)}}{2}+CW_{(i+1)}\right)$$

令 $T_i=t_{pd(i-1)}+t_{pd(i)}$，对 $W_{(i)}$ 求导得

$$\frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}W_{(i)}}=\frac{RC}{W_{(i-1)}}+R_{w(i-1)}C-\frac{R\left(C_{w(i)}+CW_{(i+1)}\right)}{W_{(i)}^2}=0$$

于是

$$CW_{(i)}\left(\frac{R}{W_{(i-1)}}+R_{w(i-1)}\right)=\frac{R}{W_{(i)}}\left(C_{w(i)}+CW_{(i+1)}\right)$$

令 $R_{(i)}=\frac{R}{W_{(i)}},C_{(i)}=CW_{(i)}$，可得

$$C_{(i)}(R_{(i-1)}+R_{w(i-1)})=R_{(i)}(C_{(i)}+C_{w(i)})$$