2.5 初等函数 ★★★ 熟记

2.5.1 指数函数

定义 设 $z = x + \mathrm{i}\,y$, $x, y \in \mathbb{R}$, 则定义指数函数为

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\,y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y}。$$

例 1) $\mathrm{e}^{2+3\mathrm{i}} = \mathrm{e}^2(\cos 3 + \mathrm{i}\sin 3)$。 参见P32例1中的2).

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\alpha+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\alpha}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\alpha}$。

3) $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1$。

4) $\mathrm{e}^{-2+\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = \mathrm{e}^{-2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\mathrm{e}^2}\mathrm{i}$。

5) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}} = \cos 2k\pi + \mathrm{i}\sin 2k\pi = 1$。

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\, e^{iy}, \quad x, y \in \mathbb{R}.}$$

- $\mathrm{Re}(e^z) = e^x \cos y = e^{\mathrm{Re}\,z}\cos\left(\mathrm{Im}\,z\right)$,

  $\mathrm{Im}(e^z) = e^x \sin y = e^{\mathrm{Re}\,z}\sin\left(\mathrm{Im}\,z\right)$。

- $\left| e^z \right| = e^x = e^{\mathrm{Re}\,z} > 0,$ 熟记

  $\mathrm{Arg}\, e^z = y + 2k\pi = \mathrm{Im}\,z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$。

证明: $\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} = e^x(\cos y - i\sin y)$

$$= e^x\left\{\cos(-y) + i\sin(-y)\right\}$$

$$= e^{x-iy} = e^{\bar{z}}。$$

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x e^{iy}, \quad x, y \in \mathbb{R}.}$$

e^z 是单值函数(根据定义)，且具有如下性质：

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$(复数域)，$e^z \neq 0$. 这是因为$\left|e^z\right| = e^{\mathrm{Re}\,z} \neq 0$。

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在，e^∞ 无意义.

证：

$$e^z = \begin{cases} e^x \to +\infty, & \mathrm{Im}\,z = 0,\ z = x \to +\infty\text{时}, \\ e^x \to 0, & \mathrm{Im}\,z = 0,\ z = x \to -\infty\text{时}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{cases}$$

故 $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 无意义。

同理，$\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z}{e^z}$ 不存在，因为

$\mathrm{Im}\,z = 0$, $z = x \to +\infty$时，$\dfrac{z}{e^z} \to 0$；　$z = x \to -\infty$时，$\dfrac{z}{e^z} \to \infty$。

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x e^{iy}, \quad x, y \in \mathbb{R}.}$$

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$(复数域)，$e^z \neq 0$。$\left(因为\left|e^z\right| = e^{\text{Re}z} \neq 0。\right)$

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在，e^∞ 无意义。

(3) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$，$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$。

证：设 $z_1 = x_1 + i\,y_1$，$z_2 = x_2 + i\,y_2$，$x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$，

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \left(e^{x_1} e^{iy_1}\right) \cdot \left(e^{x_2} e^{iy_2}\right)$$

$$= \left(e^{x_1} e^{x_2}\right) e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)}$$

$$= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}。$$

$$\boxed{\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)=\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y},\ \ x,y\in\mathbb{R}.}$$

(1) $\forall z\in\mathbb{C}$，$\mathrm{e}^z\neq 0$。$\left(因\left|\mathrm{e}^z\right|=\mathrm{e}^x\neq 0。\right)$

(2) $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^z$ 不存在，e^∞ 无意义。(3) $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$，$\mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}=\mathrm{e}^{z_1+z_2}$。

(4) e^z 是以$2\pi\mathrm{i}$为周期的周期函数，即

$$\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^z,\quad \forall z\in\mathbb{C},\ \forall k\in\mathbb{Z}。$$

证明：$\forall k\in\mathbb{Z}$，$\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}=\cos 2k\pi+\mathrm{i}\sin 2k\pi=1$。

由(3)得，

$$\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^z\cdot\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^z。$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{z}=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^{x}(\cos y+\mathrm{i}\sin y)=\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y},\ \ x,y\in\mathbb{R}.}$$

(1) $\forall z\in\mathbb{C}$，$\mathrm{e}^{z}\neq 0$。$\left(\text{因}\left|\mathrm{e}^{z}\right|=\mathrm{e}^{x}\neq 0\text{。}\right)$

(2) $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^{z}$ 不存在，e^{∞} 无意义。(3) $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$，$\mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}=\mathrm{e}^{z_1+z_2}$。

(4) e^{z} 以$2\pi\mathrm{i}$为周期, 即$\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{z}$，$\forall z\in\mathbb{C}$，$\forall k\in\mathbb{Z}$。

(5) $\mathrm{e}^{z_1}=\mathrm{e}^{z_2}\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}$，使得$z_1=z_2+2k\pi\mathrm{i}$.

证明: 充分性 ”$\Leftarrow$”. 直接由(4)得出.

必要性 ”$\Rightarrow$”. 若 $\mathrm{e}^{z_1}=\mathrm{e}^{z_2}$，则由(3)得

$$1=\frac{\mathrm{e}^{z_1}}{\mathrm{e}^{z_2}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-z_2}}{\mathrm{e}^{-z_2}}=\frac{\mathrm{e}^{z_1-z_2}}{\mathrm{e}^{0}}=\mathrm{e}^{x_1-x_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y_1-y_2)}\text{，故}$$

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{x_1-x_2}=1,\\ y_1-y_2=0+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z},\end{cases}\quad\begin{cases}x_1=x_2,\\ y_1=y_2+2k\pi,\end{cases}\quad\text{故}z_1=z_2+2k\pi\mathrm{i}\text{。}$$

$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y),\ x,y\in\mathbb{R}}$ 性质

(1) $\forall z\in\mathbb{C}$(复数域), $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \neq 0,\quad e^z \neq 0.$

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在，e^{∞} 无意义. (3) 加法公式 $e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{(z_1+z_2)}$.

(4) e^z 是以$2\pi i$为周期的周期函数, 即$e^{z+2k\pi i} = e^z,\ \forall k\in\mathbb{Z}.$

(5) $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}$, 使得$z_1 = z_2 + 2k\pi i$.

(6) e^z在全平面解析，且$\left(e^z\right)' = e^z$.

详细证明见P32例1中的2).

例 设 $z=x+\mathrm{i}\,y$, 求(1) $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}+z^2}\right|$; (2) $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}+z^2}\right)'$.

解 (1) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}+z^2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}+(x+\mathrm{i}\,y)^2}=\mathrm{e}^{x^2-y^2+\mathrm{i}(2xy+1)}$

$$=\mathrm{e}^{x^2-y^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2xy+1)},$$ 故

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}+z^2}\right|=\mathrm{e}^{x^2-y^2};$$

(2)有复合函数求导法则得

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}+z^2}\right)'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}+z^2}\left(\mathrm{i}+z^2\right)'=2z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}+z^2}.$$

2.5.2. 三角函数和双曲函数

$\forall y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y} = \cos y - \mathrm{i}\sin y$,

将两式相加、相减后，可解出cos*y*和sin*y*:

$$\cos y = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\right), \quad \sin y = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\right)。$$

推广到*y*取复数的情性，即

$\forall z \in \mathbb{C}$, 定义

余弦函数 $\cos z = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$,

正弦函数 $\sin z = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$。

P 35

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{余弦函数} \cos z = \dfrac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right), \\ \hline \text{正弦函数} \sin z = \dfrac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)。 \end{array}}$$

类似地，

因 $\forall y \in \mathbb{R}$， $\operatorname{ch} y = \dfrac{1}{2}\left(e^{y}+e^{-y}\right)$， $\operatorname{sh} y = \dfrac{1}{2}\left(e^{y}-e^{-y}\right)$，故

$\forall z \in \mathbb{C}$，定义

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{双曲余弦函数} \operatorname{ch} z = \dfrac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right), \\ \hline \text{双曲正弦函数} \operatorname{sh} z = \dfrac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)。 \end{array}}$$

P 35

$\Rightarrow \cos iz = \operatorname{ch} z$， $\sin iz = -\dfrac{1}{i}\operatorname{sh} z = i \operatorname{sh} z$。

$\operatorname{ch} iz = \cos z$， $\operatorname{sh} iz = i \sin z$。 熟背

余弦 $\cos z=\dfrac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$，	双曲余弦 $\operatorname{ch} z=\dfrac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)$，
正弦 $\sin z=\dfrac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$。	双曲正弦 $\operatorname{sh} z=\dfrac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)$。

- $\cos z$，$\sin z$，$\operatorname{ch} z$，$\operatorname{sh} z$ 在全平面处处解析，

$$(\cos z)'=-\sin z,\quad (\sin z)'=\cos z,$$

$$(\operatorname{ch} z)'=\operatorname{sh} z,\quad (\operatorname{sh} z)'=\operatorname{sh} z。$$

P 35　熟记

证：因 e^{z}, e^{iz} 在全平面解析，故 $\cos z, \sin z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ 在全平面解析，

$$(\cos z)'=\frac{1}{2}\left\{\left(e^{iz}\right)'+\left(e^{-iz}\right)'\right\}=\frac{1}{2}\left\{e^{iz}\cdot i+e^{-iz}\cdot(-i)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}i\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)=-\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)=-\sin z。$$

同理，$(\sin z)'=\cos z$，$(\operatorname{ch} z)'=\operatorname{sh} z$，$(\operatorname{sh} z)'=\operatorname{sh} z$。

余弦 $\cos z=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$,

正弦 $\sin z=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$。

双曲余弦 $\operatorname{ch} z=\frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)$,

双曲正弦 $\operatorname{sh} z=\frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)$。

1) $\cos z,\sin z$ 以 2π 为周期， $\operatorname{ch} z,\operatorname{sh} z$ 以 $2\pi i$ 为周期, 即

$\cos(z+2\pi)=\cos z$, $\sin(z+2\pi)=\sin z$.

$\operatorname{ch}(z+2\pi i)=\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh}(z+2\pi i)=\operatorname{sh} z$。

P 35 熟记

证：因 $e^{z+2k\pi i}=e^{z}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$，故

$$\cos(z+2\pi)=\frac{1}{2}\left\{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}\right\}=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$$

$=\cos z$。同理可证,

$\sin(z+2\pi)=\sin z$, $\operatorname{ch}(z+2\pi i)=\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh}(z+2\pi i)=\operatorname{sh} z$。

余弦 $\cos z=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$,	双曲余弦 $\operatorname{ch} z=\frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)$,
正弦 $\sin z=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$。	双曲正弦 $\operatorname{sh} z=\frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)$。

2)(零点) (*a*) $\{z \mid \sin z=0\}=\{n\pi, n\in\mathbb{Z}\}=\{0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots\}$。

(*b*) $\{z \mid \cos z=0\}=\{n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}\}=\{\pm\frac{1}{2}\pi,\pm\frac{3}{2}\pi,,\cdots\}$。

证: (*b*) $\cos z=0 \Leftrightarrow e^{iz}=-e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz}=-1$

$\Leftrightarrow z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R},\ e^{-2y+2ix}=e^{-2y}e^{2ix}=e^{\pi i}$

$\Leftrightarrow z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R},\ y=0, 2x=\pi+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow z=n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}$。故得(*b*)。同理可证(*a*), 以及

(*c*) $\{z \mid \operatorname{ch} z=0\}=\{\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)i,\ n\in\mathbb{Z}\}=\{\pm\frac{1}{2}\pi i,\pm\frac{3}{2}\pi i,\cdots\}$。

(*d*) $\{z \mid \operatorname{sh} z=0\}=\{n\pi i, n\in\mathbb{Z}\}=\{0,\pm\pi i,\pm2\pi i,\cdots\}$。

余弦 $\cos z=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$,

正弦 $\sin z=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$。

双曲余弦 $\operatorname{ch} z=\frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)$,

双曲正弦 $\operatorname{sh} z=\frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)$。

2)(零点) (*a*) $\{z|\sin z=0\}=\{n\pi, n\in\mathbb{Z}\}=\{0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots\}$。

(*b*) $\{z|\cos z=0\}=\left\{n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\pm\frac{1}{2}\pi,\pm\frac{3}{2}\pi,,\cdots\right\}$。

(*c*) $\{z|\operatorname{ch} z=0\}=\left\{\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)i,\ n\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\pm\frac{1}{2}\pi i,\pm\frac{3}{2}\pi i,\cdots\right\}$。

(*d*) $\{z|\operatorname{sh} z=0\}=\{n\pi i, n\in\mathbb{Z}\}=\{0,\pm\pi i,\pm2\pi i,\cdots\}$。

P 36　熟背 ★★★

$\Rightarrow$ 若 $\operatorname{Im} z\neq0$, 则 $\cos z\neq0$, $\sin z\neq0$.

若 $\operatorname{Re} z\neq0$, 则 $\operatorname{ch} z\neq0$, $\operatorname{sh} z\neq0$.

余弦 $\cos z=\dfrac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$，正弦 $\sin z=\dfrac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$。

实三角函数恒等式在复变数情形仍然成立：

(3) $\sin(-z)=-\sin z,\quad \cos(-z)=\cos z,\quad \sin^2 z+\cos^2 z=1,$

$$\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2,$$

$$\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2,\cdots$$

P 36 熟记

证明 根据定义。如

$$\sin z_1\cos z_2=\frac{1}{4i}\left(e^{iz_1}-e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}+e^{-iz_2}\right)$$

$$=\frac{1}{4i}\left\{e^{i(z_1+z_2)}+e^{i(z_1-z_2)}-e^{-i(z_1-z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}\right\}$$ 。类似地，

$$\cos z_1\sin z_2=\frac{1}{4i}\left\{e^{i(z_2+z_1)}+e^{i(z_2-z_1)}-e^{-i(z_2-z_1)}-e^{-i(z_2+z_1)}\right\}。$$

故 $\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2=\dfrac{1}{2i}\left\{e^{i(z_2+z_1)}-e^{-i(z_2+z_1)}\right\}=\sin(z_1+z_2)$。

例. 求$\cos(3-2\mathrm{i})$。

解 由三角函数公式得

$$\cos(3-2\mathrm{i}) = \cos 3\cos 2\mathrm{i} + \sin 3\sin 2\mathrm{i}$$

$$= \cos 3\,\mathrm{ch}\,2 + \mathrm{i}\sin 3\,\mathrm{sh}\,2。$$

$\cos \mathrm{i}z = \mathrm{ch}\,z$， $\sin \mathrm{i}z = \mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,z$。

$\mathrm{ch}\,\mathrm{i}z = \cos z$， $\mathrm{sh}\,\mathrm{i}z = \mathrm{i}\sin z$。

熟背

双曲余弦 $\mathrm{ch}\, z=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}\right)$, 双曲正弦 $\mathrm{sh}\, z=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}\right)$。

实双曲函数恒等式在复变数情形仍然成立：

$$\mathrm{sh}(-z)=-\mathrm{sh}\, z,\quad \mathrm{ch}(-z)=\mathrm{ch}\, z,\quad \mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=1,$$

$$\mathrm{sh}(z_1+z_2)=\mathrm{sh}\, z_1\, \mathrm{ch}\, z_2+\mathrm{ch}\, z_1\, \mathrm{sh}\, z_2, \cdots$$

$$\mathrm{sh}(z_1-z_2)=\mathrm{sh}\, z_1\, \mathrm{ch}\, z_2-\mathrm{ch}\, z_1\, \mathrm{sh}\, z_2, \cdots$$

P 36

熟记

证明 根据定义。

- 当$z\neq n\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots$时，

$$\operatorname{ctg} z \triangleq \frac{\cos z}{\sin z},\quad \text{解析},\qquad \underline{(\operatorname{ctg} z)'=-\frac{1}{\sin^2 z}}.$$

证明 首先$\sin z,\cos z$在全平面解析。

当$z\neq n\pi, n\in\mathbb{Z}$时， $\sin z\neq 0,$

故$\operatorname{ctg} z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$解析。

且$$(\operatorname{ctg} z)'=\frac{(\cos z)'\sin z-\cos z(\sin z)'}{\sin^2 z}$$

$$=\frac{-\sin^2 z-\cos^2 z}{\sin^2 z}=-\frac{1}{\sin^2 z}.$$

- 当$z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$时， $\operatorname{ctg} z \triangleq \dfrac{\cos z}{\sin z}$解析,

$$(\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}。$$

同理可证,

- 当$z \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$时， $\operatorname{tg} z \triangleq \dfrac{\sin z}{\cos z}$， 解析,

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}。$$

- 当$z \neq n\pi \mathrm{i}$, $n \in \mathbb{Z}$时, $\operatorname{cth} z \triangleq \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$解析, $(\operatorname{cth} z)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$。

- 当$z \neq \left(n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}$, $n \in \mathbb{Z}$时, $\operatorname{th} z \triangleq \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$解析, $(\operatorname{th} z)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$。

$\mathrm{sh}\,x$，$\mathrm{ch}\,x$在$\mathbb{R}$ 中无界，故$\mathrm{sh}\,z$，$\mathrm{ch}\,z$在复平面 无界。

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$, 有界, 但是

$|\sin z|$和$|\cos z|$复平面无界。

证：当$z = \mathrm{i}\,y$, $y \in \mathbb{R}$时，

$$\cos \mathrm{i}\,y = \mathrm{ch}\,y,$$

故当$y \to \infty$时，$|\cos \mathrm{i}\,y| = \mathrm{ch}\,y \to \infty.$

故 $|\cos z|$在复平面无界。

同理 $|\sin z|$在复平面无界。

例1. 求$\sin z$的实部，虚部和模。

解: 设$z = x + \mathrm{i}\, y,\ x, y \in \mathbb{R}$, 则由三角函数公式得

$$\sin z = \sin(x + \mathrm{i}\, y) = \sin x \cos(\mathrm{i}\, y) + \cos x \sin(\mathrm{i}\, y)$$

$$= \sin x \operatorname{ch} y + \mathrm{i} \operatorname{sh} y \cos x。$$

故 $\operatorname{Re}(\sin z) = \sin x \operatorname{ch} y$， $\operatorname{Im}(\sin z) = \operatorname{sh} y \cos x$。

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y \cos^2 x}$$

$$= \sqrt{(1 - \cos^2 x)\operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y \cos^2 x}$$

$$= \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x(\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y)} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}。$$

也可以按$\sin z$的定义计算。

2. 对数函数(指数函数的反函数)

定义:设复数$z\neq 0$已知, 满足方程 $e^w=z$ 的复数 w ,

称为 z 的对数函数, 记为 $w=\text{Ln}z$.

令$w=u+iv$, 则由 $e^w=z$ 得,

$e^{u+iv}=e^u e^{iv}=z$。故$e^u=|z|$, $u=\ln|z|$,

$v=\text{Arg}\,z=\arg z+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$,

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Ln}\,z&=\ln|z|+i\,\text{Arg}\,z\\&=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\text{。}\end{aligned}}$$

P 38　熟记

$w=\text{Ln}\,z$是无穷多值函数. 每个 k, 对应 $\text{Ln}z$ 的一个分支.

$k=0$分支记为: $\ln z=\ln|z|+i\arg z$, 称为$\text{Ln}\,z$的主值,

其中$-\pi<\arg z\leq\pi$.

非零复数都有对数.

$$w=\operatorname{Ln} z=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

主值：$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z,\ -\pi<\arg z\leq\pi.$

P 38

熟记

例 求 $\operatorname{Ln} x\ (x>0)$, $\operatorname{Ln}\mathrm{i}$及相应主值.

解 (1) $x>0,\ \arg x=0.\ \operatorname{Ln} x=\ln x+2k\pi\mathrm{i},\ k\in\mathbb{Z}.$

令$k=0$得 $\operatorname{Ln} x$主值=$\ln x$。

主值与实函数中正数的对数一致.

) $\operatorname{Ln}\mathrm{i}=\ln|\mathrm{i}|+\mathrm{i}(\arg\mathrm{i}+2k\pi)=\ln 1+\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\pi+2k\pi\right)$

$$=\mathrm{i}\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad k\in\mathbb{Z}。$$

令$k=0$得主值 $\ln\mathrm{i}=\frac{\pi}{2}\mathrm{i}$。

$$w=\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

主值：$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z,\ -\pi<\arg z\leq\pi.$

P 38 熟记

例 求$\mathrm{e}^{w}=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$的全部解。

解 $w=\mathrm{Ln}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)=\ln\left|1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right|+\mathrm{i}\left\{\arg(1+\mathrm{i}\sqrt{3})+2k\pi\right\}$

$$=\ln\left(\sqrt{1+3}\right)+\mathrm{i}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1}+2k\pi\right)$$

$$=\ln 2+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right),\quad k\in\mathbb{Z}。$$

对数函数的性质 P 38 熟记

(1) $\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$， $(z_1, z_2 \neq 0)$.

(2) $\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2 \quad (z_1, z_2 \neq 0)$, $\mathrm{Ln}\dfrac{1}{z} = -\mathrm{Ln}\, z, \quad (z \neq 0)$。

证明 (1) $\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \ln|z_1 \cdot z_2| + i\,\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2)$

$$= \ln(|z_1| \cdot |z_2|) + i(\mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2)$$

$$= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2)$$

$$= (\ln|z_1| + i\,\mathrm{Arg}\, z_1) + (\ln|z_2| + i\,\mathrm{Arg}\, z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2.$$

(2) $\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2} = \ln\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| + i\,\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$

$$= \ln|z_1| - \ln|z_2| + i(\mathrm{Arg}\, z_1 - \mathrm{Arg}\, z_2)$$

$$= \{\ln|z_1| + i\,\mathrm{Arg}(z_1)\} - \{\ln|z_2| + i\,\mathrm{Arg}(z_2)\} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2。$$

对数函数主值的连续性和解析性

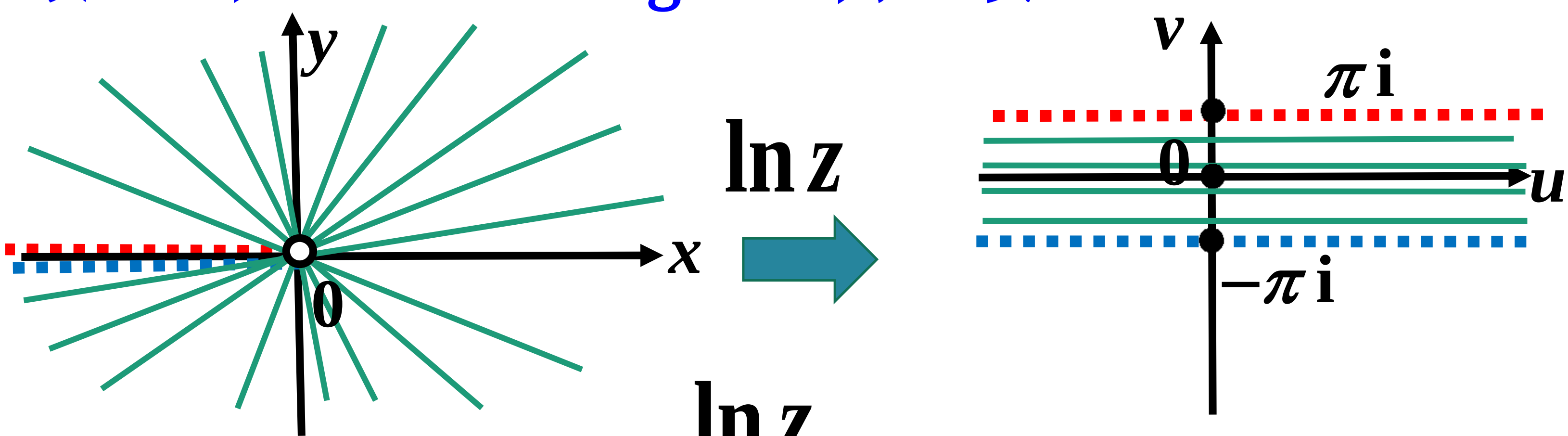
主值：$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z,\quad -\pi < \arg z \le \pi.$

$\ln|z|$在除去$z=0$的复平面连续，

$\arg z$在除去原点和负实轴的复平面D内连续，

$D:\ -\pi < \arg z < \pi,$

故 $\ln z$在$D:\ -\pi < \arg z < \pi$内连续。



沿负半实轴割开的z平面

$D: -\pi < \arg z < \pi.$

$\xrightarrow{\ln z}$

条形域：$-\pi < \operatorname{Im} w < \pi$

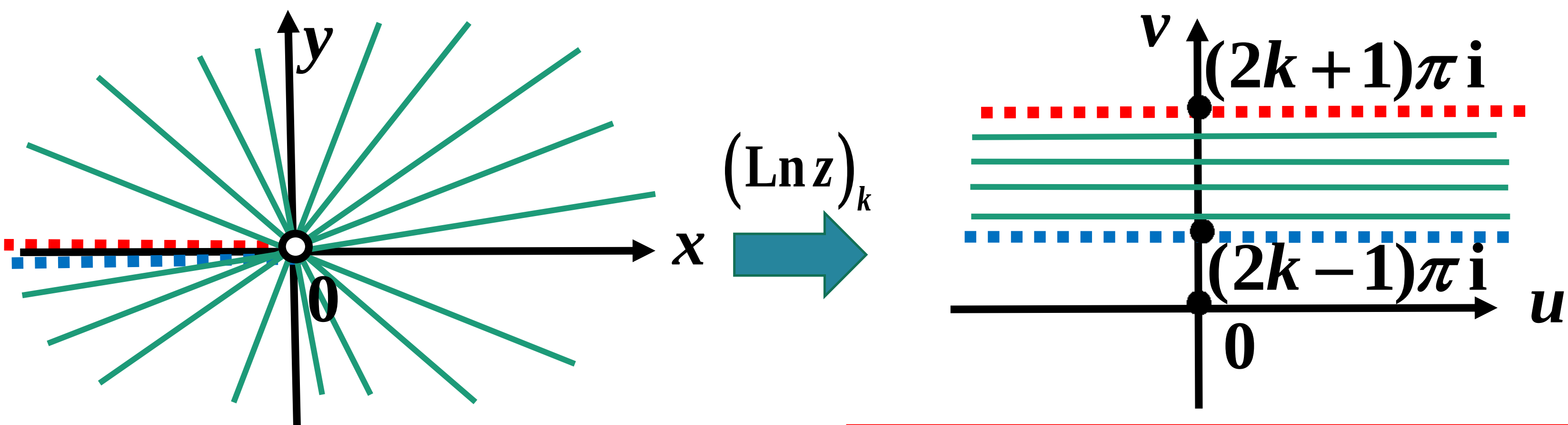
对数函数其他分支的连续性和解析性

$\forall k\in\mathbb{Z}$,记$w_k=(\mathrm{Ln}\,z)_k=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)$,

其中$-\pi<\arg z<\pi$。

在除去原点和负实轴的复平面D：$-\pi<\arg z<\pi$,

$w_k=(\mathrm{Ln}\,z)_k$ 连续。



沿负半实轴割开的z平面

D: $-\pi<\arg z<\pi$.

$\xrightarrow{(\mathrm{Ln}\,z)_k}$

条形域:

$(2k-1)\pi<\mathrm{Im}\,w<(2k+1)\pi$

根据反函数理论，因指数函数处处解析，故

在除去原点和负实轴的复平面D：$-\pi < \arg z < \pi$内，

$\mathrm{Ln}\, z$的主值分支$\ln z$、其它各分支$(\mathrm{Ln}\, z)_k$解析，且

- 对于$w_0 = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i} \arg z$，有 $z = \mathrm{e}^{w_0}$，故

$$(\ln z)' = \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{w_0}\right)'} = \frac{1}{\mathrm{e}^{w_0}} = \frac{1}{z}，$$ 故 $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$。

- 对于$w_k = (\mathrm{Ln}\, z)_k = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi)$，$k \in \mathbb{Z}$，

有$z = \mathrm{e}^{w_k}$，故

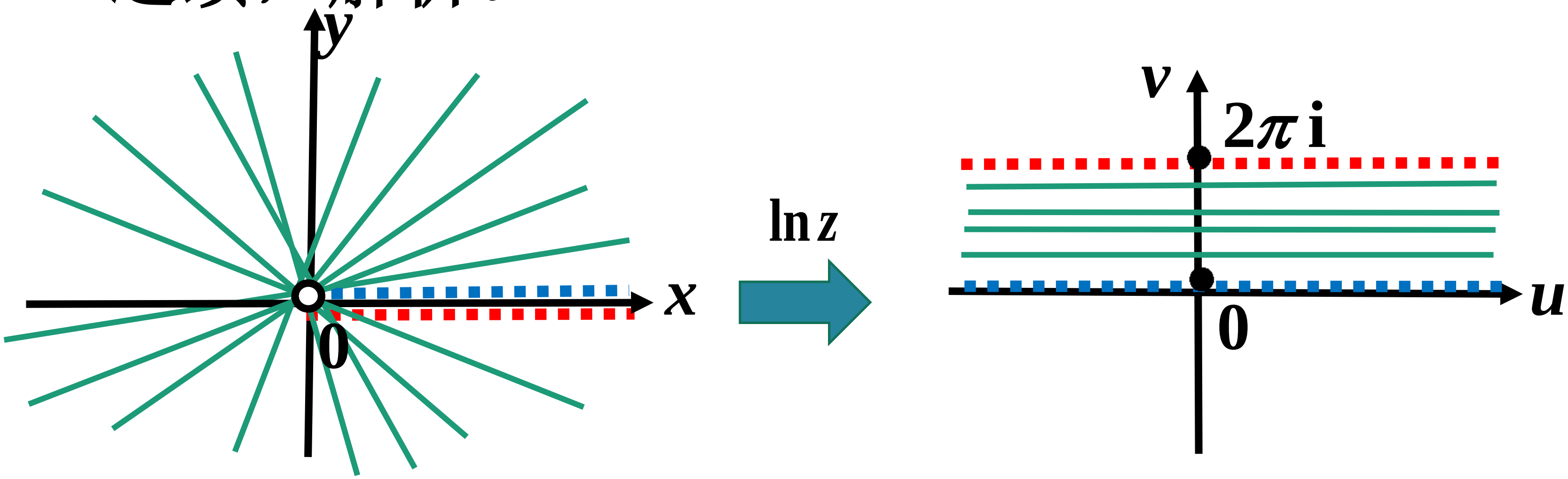
$$\left((\mathrm{Ln}\, z)_k\right)' = \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{w_k}\right)'} = \frac{1}{\mathrm{e}^{w_k}} = \frac{1}{z}，$$ 故$\left((\mathrm{Ln}\, z)_k\right)' = \dfrac{1}{z}$。

若取$0<\arg z<2\pi$,则

在除去原点和正实轴的复平面D：$0<\arg z<2\pi$内，

$$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z,\qquad 0<\arg z<2\pi,$$

连续，解析。



沿正半实轴割开的z平面 $0<\arg z<2\pi$ $\xrightarrow{\ln z}$ 条形域: $0<\mathrm{Im}\,w<2\pi$。

2.5.7. 一般幂函数

设 $z\in\mathbb{Z}$，$z\neq 0$，α 为任意一个复数，定义幂函数

$$z^{\alpha}=\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{Ln}\,z}=\mathrm{e}^{\alpha\{\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)\}},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

$\boxed{\text{背熟}}$

(1) 当$\alpha\in\mathbb{Z}^{+}$(正整数)时, 与普通幂函数z^n 一致，因为

$$z^n=\mathrm{e}^{n\mathrm{Ln}\,z}=\mathrm{e}^{n\ln|z|+\mathrm{i}n\arg z+2nk\pi\mathrm{i}}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{2kn\pi\mathrm{i}}=1}$$

$$=\mathrm{e}^{\ln|z|^n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\arg z}=|z|^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\arg z}.$$

$\boxed{\text{2.5.1小节}}$

z^n：单值函数，处处解析，$(z^n)'=nz^{n-1}$。

(2) 当$\alpha=\frac{1}{n}$，n是正整数时，$z^{\frac{1}{n}}$与根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 一致，因为

$$z^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}\, z}=e^{\frac{1}{n}\left\{\ln|z|+i\left(\arg z+2k\pi\right)\right\}}=e^{\frac{1}{n}\ln|z|}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}$$

$$=\left(\sqrt[n]{|z|}\right)\exp\left\{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right\},\quad k\in 0,1,2,\cdots,n-1。$$

故$z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$，是 n 值函数。

在除去原点和负实轴的复平面D：$-\pi<\arg z<\pi$ 内，

$\forall k=0,1,2,\cdots,n-1$。

$$w_k\triangleq\left(z^{\frac{1}{n}}\right)_k=\left(\sqrt[n]{|z|}\right)\exp\left\{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right\},\quad -\pi<\arg z<\pi。$$

连续，解析，

$$w_k{}'=\left(z^{\frac{1}{n}}\right)_k{}'=\left(e^{\frac{1}{n}(\mathrm{Ln}\, z)_k}\right)'=\left(e^{\frac{1}{n}(\mathrm{Ln}\, z)_k}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{nz}\left(z^{\frac{1}{n}}\right)_k。$$

(3) 当α是有理数，即$\alpha=\frac{m}{n}$(既约)，$m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}^{+}$ 时，

$$z^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{z^m}=\sqrt[n]{|z|^m \exp\{\mathrm{i}m\arg z\}}$$

$$=\left(\sqrt[n]{|z|^m}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\,\frac{m\arg z+2k\pi}{n}\right\},\quad k=0,1,2,\cdots n-1.$$

$z^{\frac{m}{n}}$是 n 值函数。

(4) 当α是无理数或一般复数($\operatorname{Im}\alpha\neq 0$)时，

$$z^{\alpha}=e^{\alpha\operatorname{Ln} z}=e^{\alpha\{\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)\}},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots。$$

因当α是无理数或$\operatorname{Im}\alpha\neq 0$时，$\forall k\in\mathbb{Z}$, $k\alpha$ 不是整数, $e^{2k\alpha\pi\mathrm{i}}\neq 1$,

故 z^{α} 是无穷多值函数.

(4) 当α是无理数或一般复数($\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$)时，

$$z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{Ln}\, z} = \mathrm{e}^{\alpha\{\ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi)\}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots。$$

因当α是无理数或$\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$时，$\forall k \in \mathbb{Z}$, $k\alpha$ 不是整数, $\mathrm{e}^{2k\alpha\pi\mathrm{i}} \neq 1$,

故 z^{α} 是无穷多值函数.

例 $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\{\ln|\mathrm{i}| + \mathrm{i}(\arg \mathrm{i} + 2k\pi)\}}$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left\{0 + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right\}} = \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

i^{i} 是无穷多值函数.

(4) 当α是无理数或一般复数($\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$)时，

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Ln}\, z} = e^{\alpha\{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)\}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

是无穷多值函数。

例 $(-2)^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\,\mathrm{Ln}(-2)}$

$$\boxed{\arg(-2) = \pi}$$

$$= e^{\sqrt{3}\{\ln 2 + i(\pi + 2k\pi)\}}$$

$$= e^{\sqrt{3}\ln 2}\, e^{i\sqrt{3}(2k+1)\pi}$$

$$= e^{\sqrt{3}\ln 2}\left\{\cos\sqrt{3}(2k+1)\pi + i\sin\sqrt{3}(2k+1)\pi\right\},$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

是无穷多值函数。

(4) 当α是无理数或一般复数($\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$)时，

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Ln}\, z} = e^{\alpha\{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)\}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots。$$

例 $$(-1-2i)^{2-3i} = e^{(2-3i)\mathrm{Ln}(-1-2i)}$$

$$= e^{(2-3i)\{\ln|-1-2i| + i\{\arg(-1-2i) + 2k\pi\}\}}$$

$$= e^{(2-3i)\left\{\ln\sqrt{5} + i\left(-\pi + \mathrm{arctg}\frac{-2}{-1} + 2k\pi\right)\right\}} = e^{(2-3i)\left\{\frac{1}{2}\ln 5 + i\{\mathrm{arctg}\, 2 + (2k-1)\pi\}\right\}}$$

$$= e^{\ln 5 + 3\mathrm{arctg}\, 2 + 3(2k-1)\pi + i\left\{2\mathrm{arctg}\, 2 + \underline{2(2k-1)\pi} - \frac{3}{2}\ln 5\right\}}$$

$$\boxed{e^{2(2k-1)\pi i} = 1.}$$

$$= 5e^{3\mathrm{arctg}\, 2 + 3(2k-1)\pi}\, e^{i\left\{2\mathrm{arctg}\, 2 - \frac{3}{2}\ln 5\right\}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

它是无穷多值函数.

作业

P44−45

11 (2),(3)(提示：与相关实函数类似地分析即可)

13 (2) (3)

14(1),(3)

(先求使分母等于0的点, 当分母$\neq$0时, 可微, 利用商的求导公式求导)。

15(1)　16

17 (1),　(3)

e^z 单叶性区域

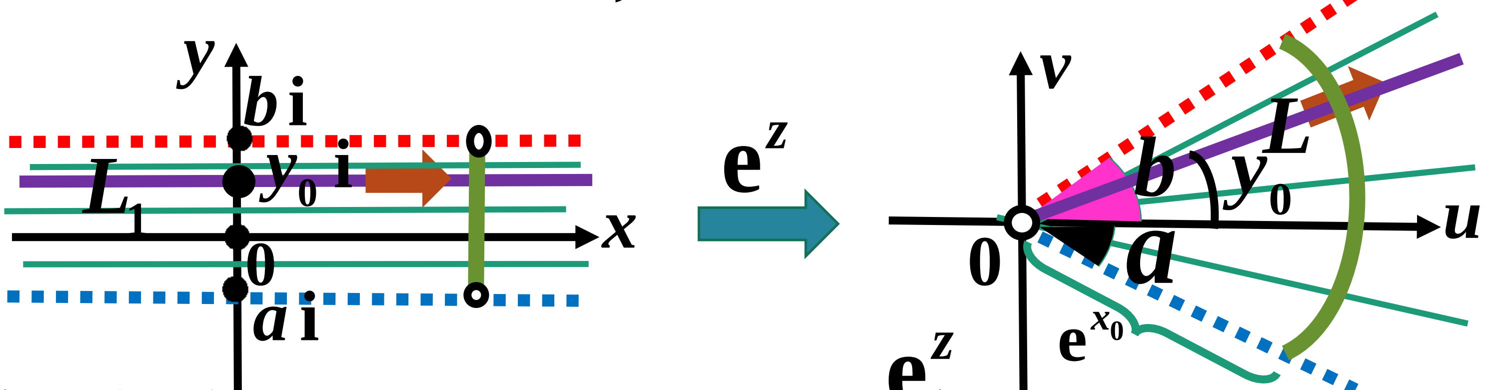
e^z：单值函数

(5) $e^{z_1}=e^{z_2}\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}$, 使得$z_1=z_2+2k\pi i$.

(7) e^z在全平面解析.

$$D\text{是}e^z\text{单叶性区域}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{不存在不同的}z_1,\ z_2\in D,\ \text{满足:}\\ z_1=z_2+2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

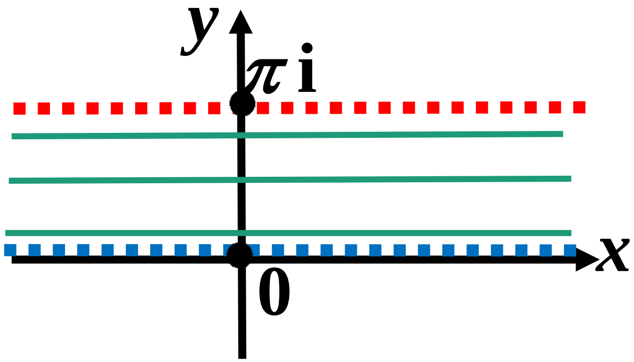
条形性域$a<\operatorname{Im}z<b$, $b-a\le 2\pi$ 是e^z的单叶性区域.



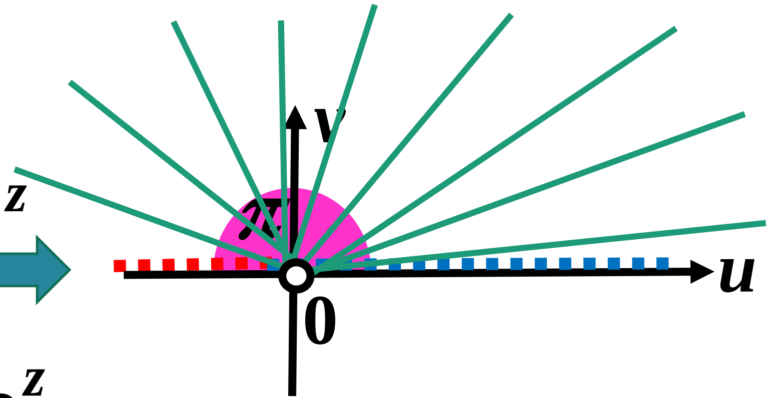
条形性域$a<\operatorname{Im}z<b$, $b-a\le 2\pi$ $\xrightarrow{e^z}$ 角域$a<\arg w<b$.

直线L_1: $\operatorname{Im}z=y_0$, $a<y_0<b$ $\xrightarrow{e^z}$ 不含原点的射线L：$\arg w=y_0$.

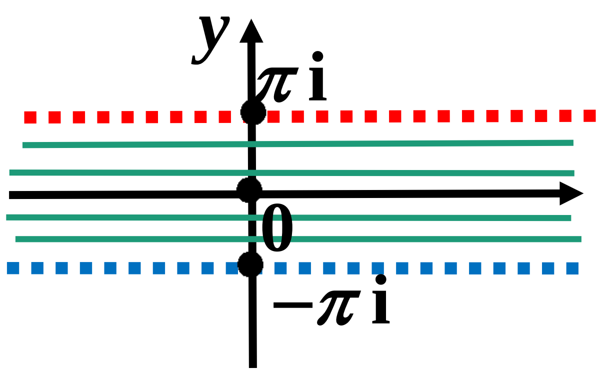
线段：$\operatorname{Re}z=x_0$, $a<\operatorname{Im}z<b$ $\xrightarrow{e^z}$ 圆弧$|w|=e^{x_0}$, $a<\arg w<b$.



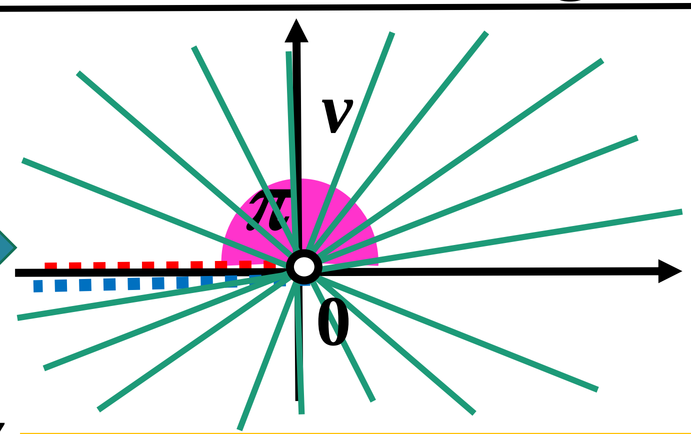
$\xrightarrow{e^z}$



条形性域$0<\mathrm{Im}\,z<\pi$ $\xrightarrow{e^z}$ 上半w平面$0<\arg w<\pi$



$\xrightarrow{e^z}$

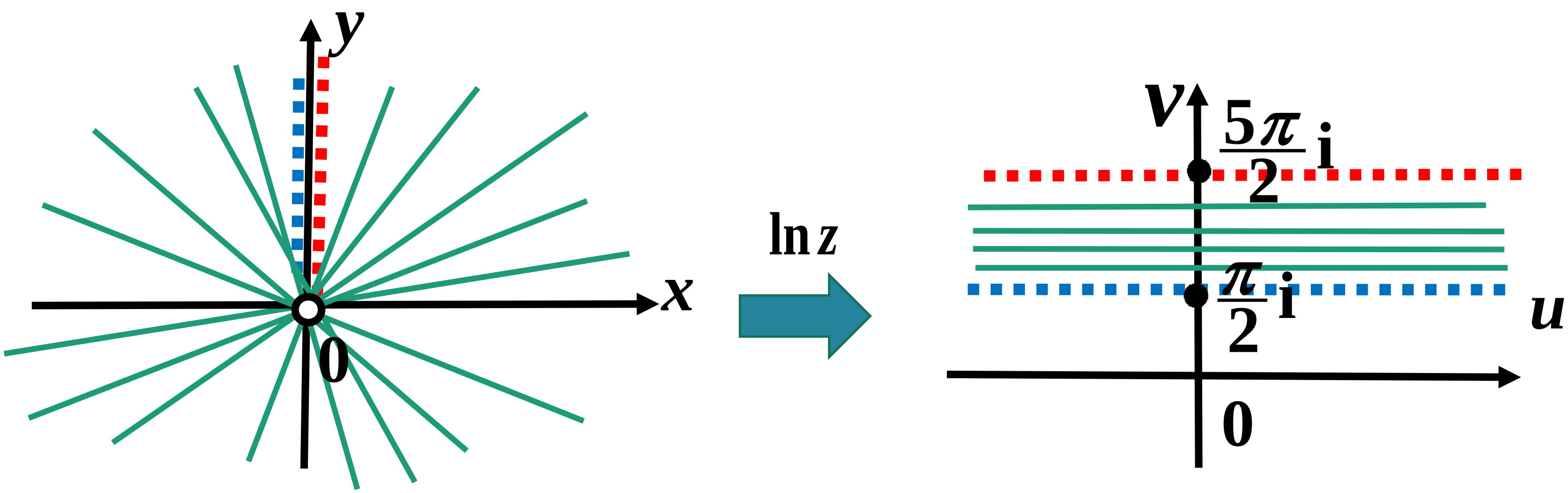


条形性域$-\pi<\mathrm{Im}\,z<\pi$ $\xrightarrow{e^z}$ 割去负半实轴和原点的w平面 $-\pi<\arg w<\pi$

条形性域 $(2k-1)\pi<\mathrm{Im}\,z<(2k+1)\pi$ $\xrightarrow{e^z}$ 割去负半实轴和原点的w平面 $(2k-1)\pi<\arg w<(2k+1)\pi$

在除去原点和上半虚轴的复平面取$\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}$内，则得连续的函数

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z, \quad \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}。$$



沿上半虚轴割开的z平面 $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}$ $\xrightarrow{\ln z}$ 条形域：$\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im}\, w < \frac{5\pi}{2}$。

- $\mathbf{tg}\, z$, $\mathbf{ctg}\, z$ 以π为周期, 即

$$\mathbf{tg}\left(z+\pi\right)=\mathbf{tg}\, z, \quad \mathbf{ctg}\left(z+\pi\right)=\mathbf{ctg}\, z.$$

- $\mathbf{th}\, z$, $\mathbf{cth}\, z$ 以$\pi\,\mathbf{i}$为周期, 即

$$\mathbf{th}\left(z+\pi\,\mathbf{i}\right)=\mathbf{tg}\, z, \quad \mathbf{cth}\left(z+\pi\,\mathbf{i}\right)=\mathbf{ctg}\, z.$$