电磁场与波课程第二次习题课

2023/11/30

第3-A章 作业

1、设介电常数为ε，电导率为σ的非理想介质中的恒定电流密度为$\vec{J}_f$，介质是线性和各向同性的，如果介质是不均匀的，证明介质中存在自由电荷，且体密度如下所示：

(参考PPT CH3-A P19)

$$\rho_f = \vec{J}_f \cdot \nabla\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$$\because \nabla\cdot\vec{J}_f = \nabla\cdot\left(\sigma\vec{E}\right) = \sigma\nabla\cdot\vec{E} + \vec{E}\cdot\nabla\sigma = 0 \quad \therefore \nabla\cdot\vec{E} = -\frac{\vec{E}\cdot\nabla\sigma}{\sigma}$$

结合 $\nabla\cdot(\vec{A}f) = f\nabla\cdot\vec{A} + \nabla f\cdot\vec{A}$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\because \nabla\cdot\vec{D} = \rho_f = \nabla\cdot\left(\varepsilon\vec{E}\right) = \varepsilon\nabla\cdot\vec{E} + \vec{E}\cdot\nabla\varepsilon$$

$$\therefore \rho_f = -\varepsilon\frac{\vec{E}\cdot\nabla\sigma}{\sigma} + \vec{E}\cdot\nabla\varepsilon = \vec{J}_f\cdot\left(-\varepsilon\frac{\nabla\sigma}{\sigma^2} + \frac{\nabla\varepsilon}{\sigma}\right) = \vec{J}_f\cdot\nabla\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

电介质的特性（见教材P38/PPT CH2 P29）

线性：极化强度P的各分量与电场强度E的各分量成线性关系

各向同性：介质特性与外加场E的方向无关

均匀：介电常数与空间位置无关

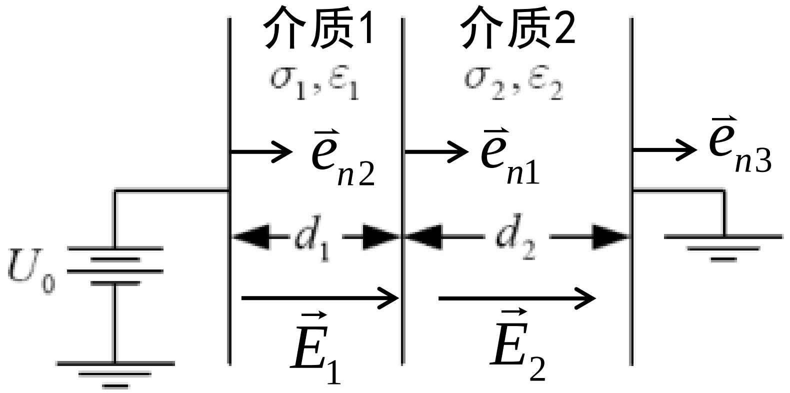
线性各向同性介质：$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ $\vec{J}_f = \sigma\vec{E}$

注：在不均匀情况下，ε和σ是标量

恒定电流场方程（电源外）：$\nabla\times\vec{E} = 0$ $\nabla\cdot\vec{J} = 0$

第3-A章 作业

2、如图，设在一个极板面积为S的平行板电容器中充有两层非理想的介质。在两极板间加上恒定电压U_0，求：①每种介质中的电场强度$\vec{E}$及不同介质分界面上的自由电荷密度ρ_{sf}



在介质1和介质2分界面上：$\begin{cases} E_1 d_1 + E_2 d_2 = U_0 \\ \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \dfrac{\sigma_2 U_0}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \\ E_2 = \dfrac{\sigma_1 U_0}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} \end{cases}$

$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$ ×

$\vec{e}_{n1} \cdot (\vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n}) = \rho_{sf1}$

恒定电流场边界条件：
（见PPT CH3-A P20）

$$J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$$

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \frac{J_{1n}}{\sigma_1} = \frac{J_{2n}}{\sigma_2}$$

$$\Rightarrow \rho_{sf1} = D_{2n} - D_{1n} = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \frac{U_0}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}(\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2)$$

在左极板和介质1分界面上：

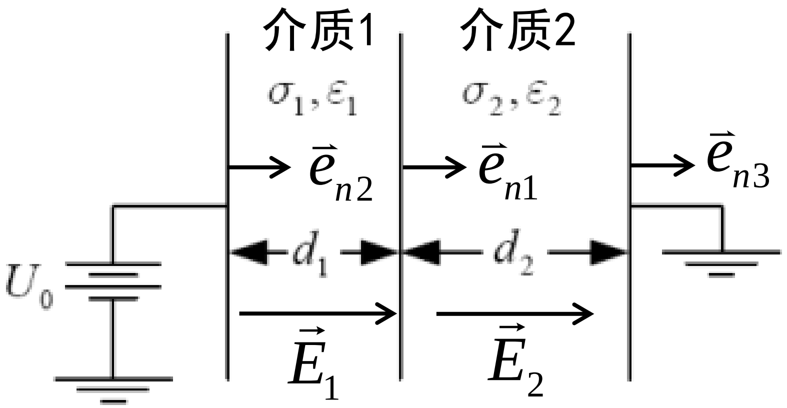
$$\rho_{sf2} = \varepsilon_1 E_1 - 0 = \frac{\varepsilon_1 \sigma_2 U_0}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

在右极板和介质2分界面上：

$$\rho_{sf3} = 0 - \varepsilon_2 E_2 = -\frac{\varepsilon_2 \sigma_1 U_0}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

第3-A章 作业

2、如图，设在一个极板面积为S的平行板电容器中充有两层非理想的介质。在两极板间加上恒定电压U_0，求：②求该电容器的漏电导G



$$\left.\begin{aligned} &G=\frac{I}{U_0} \\ &\mathrm{I}=JS=\sigma_1 E_1 S \\ &U_0=\frac{(\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1)\mathrm{E}_1}{\sigma_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow G=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1}S$$

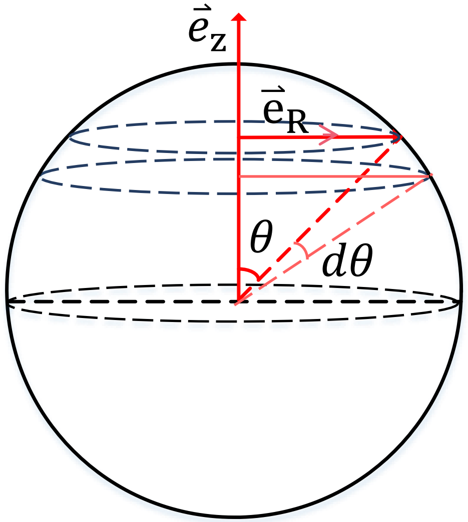
③若介质的参数满足$\sigma_1\varepsilon_2=\sigma_2\varepsilon_1$，求该电容器的漏电导G与电容C的比值

$$C_1=\frac{\mathrm{Q}_1}{\mathrm{U}_1}=\frac{\rho_{sf1}\cdot S}{E_1 d_1}=\frac{\varepsilon_1 E_1 S}{E_1 d_1}=\frac{\varepsilon_1 S}{d_1},\quad C_2=\frac{\mathrm{Q}_2}{\mathrm{U}_2}=\frac{\rho_{sf2}\cdot S}{E_2 d_2}=\frac{\varepsilon_2 E_2 S}{E_2 d_2}=\frac{\varepsilon_2 S}{d_2}\Rightarrow\quad C=\frac{C_1 C_2}{C_1+C_2}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}S$$

$$\therefore\frac{G}{C}=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1}\cdot\frac{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}\left(\mathrm{or}\ \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}\right)$$

第4章 作业

4.12 如图，一半径为a的导体球带静电量为q，以角速度ω绕它的直径旋转，求磁矩



方法一：

在θ角处取一个环带，设其上的电荷量为dq　　旋转一圈后，设环带处的电流为 dI

$$\mathrm{dq}=\rho_s dS=\frac{q}{4\pi a^2}\left(2\pi a\sin\theta\cdot ad\theta\right)=\frac{q}{2}\sin\theta d\theta \Rightarrow \mathrm{dI}=\frac{\mathrm{dq}}{T}=\frac{qw}{4\pi}\sin\theta d\theta$$

在θ角处环带旋转产生的磁矩$d\vec{m}$

$$\mathrm{d}\vec{\mathrm{m}}=\mathrm{dI}\cdot\vec{\mathrm{S}}=\frac{qwa^2}{4}\sin^3\theta d\theta\cdot\vec{e}_z \Rightarrow \vec{\mathrm{m}}=\int d\vec{m}=\int_0^\pi\frac{qwa^2}{4}\sin^3\theta d\theta\cdot\vec{e}_z=\frac{qwa^2}{3}\vec{e}_z$$

等效磁偶极矩/磁矩
(见教材P124/PPT CH4 P26)

$$\vec{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\iiint_V\vec{r}'\times\vec{J}'dV'=I\vec{S}$$

方法二：

在球面上取一个面元dS，则其上的电荷密度为 $\rho_s=\frac{q}{4\pi a^2}$

面元的线速度为 $\vec{v}=\mathrm{wasin}\theta\vec{e}_\varphi \Rightarrow$ **面电流密度为** $\vec{\mathrm{J}}_s=\rho_s\vec{v}=\frac{qw\sin\theta}{4\pi a}\vec{e}_\varphi$

$$\Rightarrow \vec{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\iint_S\left(\mathrm{asin}\theta\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{R}}\right)\times\vec{\mathrm{J}}_s\mathrm{dS}=\vec{\mathrm{e}}_z\frac{1}{2}\int_0^\pi 2\pi a\sin\theta\frac{qw\sin\theta}{4\pi a}a^2\sin\theta d\theta=\frac{qwa^2}{3}\vec{e}_z$$

第4章 作业

4.14 半径为a的磁介质球，中心在坐标原点，磁化到$\vec{M}=(Az^2+B)\vec{e}_z$，其中A，B为常数，求等效磁化电流和磁荷

等效的磁化电流体密度 $\vec{J}_m=\nabla\times\vec{M}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & Az^2+B\end{vmatrix}=0$

（见教材P127/PPT CH4 P33）

等效的磁化电流面密度 $\vec{J}_{sm}=\vec{M}\times\vec{e}_n=\vec{M}\times\vec{e}_r=\left(Az^2+B\right)\vec{e}_z\times\vec{e}_r=\left(A\left(r\cos\theta\right)^2+B\right)\sin\theta\vec{e}_\phi$

$$\vec{e}_z=\cos\theta\vec{e}_r-\sin\theta\vec{e}_\theta$$

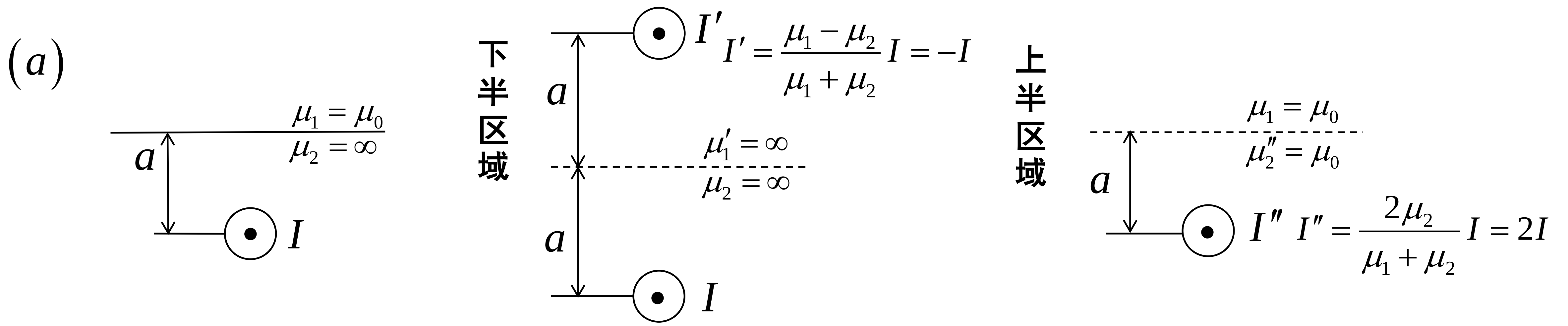
等效的磁荷体密度 $\rho_m=-\nabla\cdot\vec{M}=-\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\dfrac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\dfrac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)\cdot\left(\left(Az^2+B\right)\vec{e}_z\right)=-2Az$

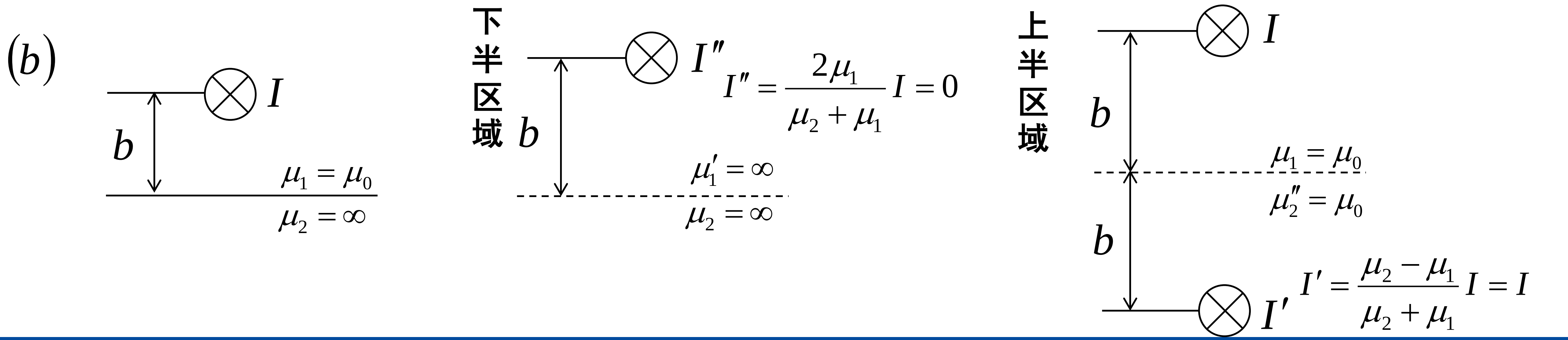
（见教材P132,133/PPT CH4 P48）

等效的磁荷面密度 $\rho_{sm}=\vec{M}\cdot\vec{e}_n=\vec{M}\cdot\vec{e}_r=\left(Az^2+B\right)\vec{e}_z\cdot\vec{e}_r=\left(A\left(r\cos\theta\right)^2+B\right)\cos\theta$

第4章 作业

4. 16 画出下面各图中的镜像电流，并注明电流的方向、大小和计算区域 **(参考教材P136 例4-12)**

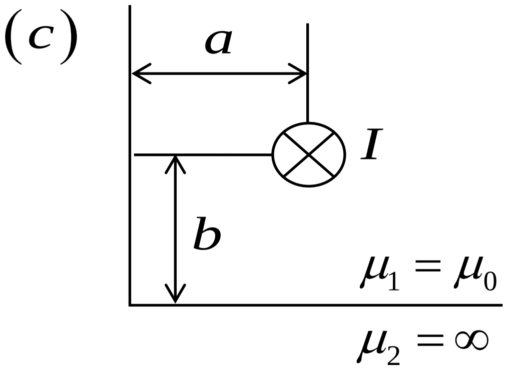




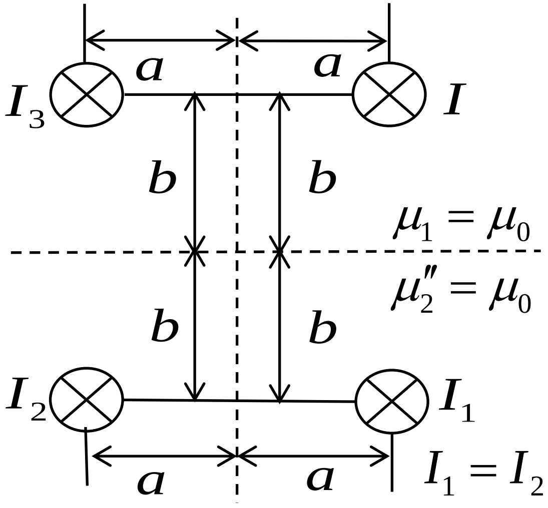
第4章 作业

4.16 画出下面各图中的镜像电流，并注明电流的方向、大小和计算区域 (参考教材P136 例4-12)

(c)



右上方区域

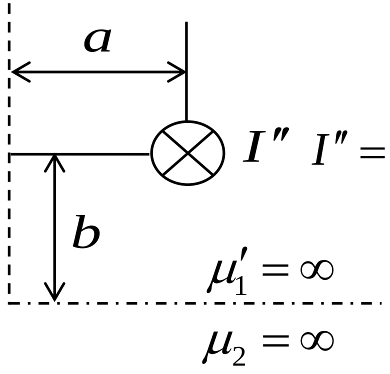


$$I_1=I_2=I_3=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}I=I$$

$\mu_1=\mu_0$

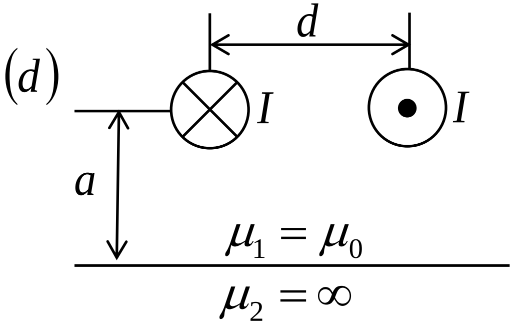
$\mu_2'=\mu_0$

其他区域

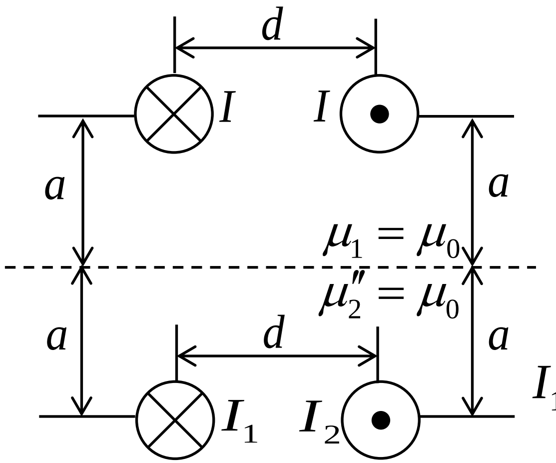


$$I''=\frac{2\mu_1}{\mu_2+\mu_1}I=0$$

(d)

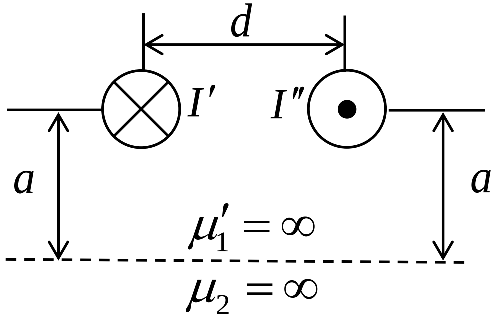


上半区域



$$I_1=I_2=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}I=I$$

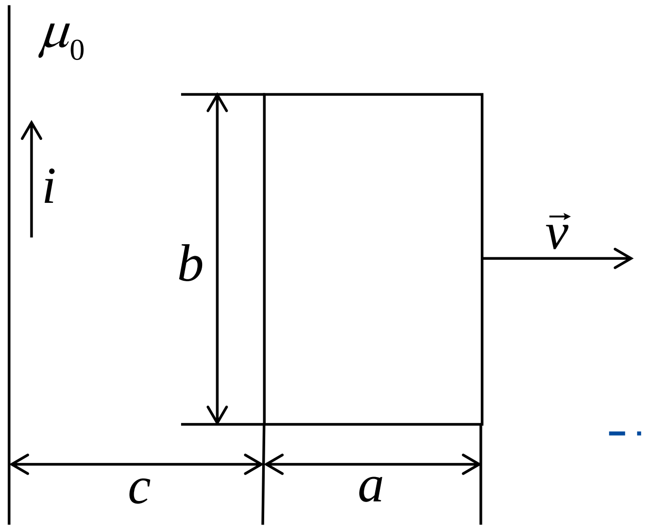
下半区域



$$I'=I''=\frac{2\mu_1}{\mu_2+\mu_1}I=0$$

第5章 作业

5.3 如图，在磁导率为μ_0的媒质中长直导线中的电流为i, 右边有一导线框，求下列各种情况下导线框中的感生电动势：①导体框静止，$i=I_0\cos(wt)$



由安培环路定理，可得距离长直导线r处的磁感应强度

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\vec{e}_\varphi=\frac{\mu_0 I_0\cos(wt)}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$$

则感生电动势

$$\xi=-\frac{d\Phi}{dt}=-\int_S\frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S}=\frac{\mu_0 I_0 w\sin(wt)}{2\pi}\int_c^{c+a}\frac{1}{r}bdr=\frac{\mu_0 I_0 bw\sin(wt)}{2\pi}\ln\frac{a+c}{c}$$

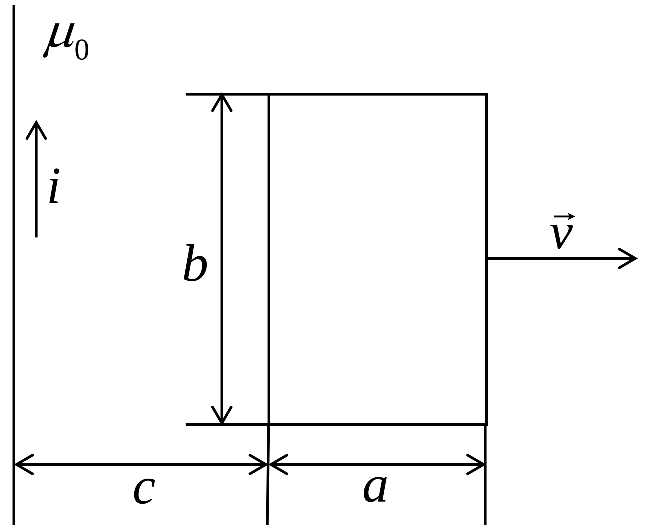
②导体框以速度v运动， $i=I_0$

在t时刻 $\Phi=\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\int_{c+vt}^{a+c+vt}\frac{1}{r}bdr=\frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi}\ln\frac{a+c+vt}{c+vt}$

$$\Rightarrow\quad \xi=-\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\mu_0 I_0 abv}{2\pi(a+c+vt)(c+vt)}$$

第5章 作业

5.3 如图，在磁导率为μ_0的媒质中长直导线中的电流为i，右边有一导线框，求下列各种情况下导线框中的感生电动势：③导体框以速度v运动，$i = I_0 cos(wt)$



$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I_0 b\cos(wt)}{2\pi}\int_{c+vt}^{a+c+vt}\frac{1}{r}dr = \frac{\mu_0 I_0 b\cos(wt)}{2\pi}\ln\frac{a+c+vt}{c+vt}$$

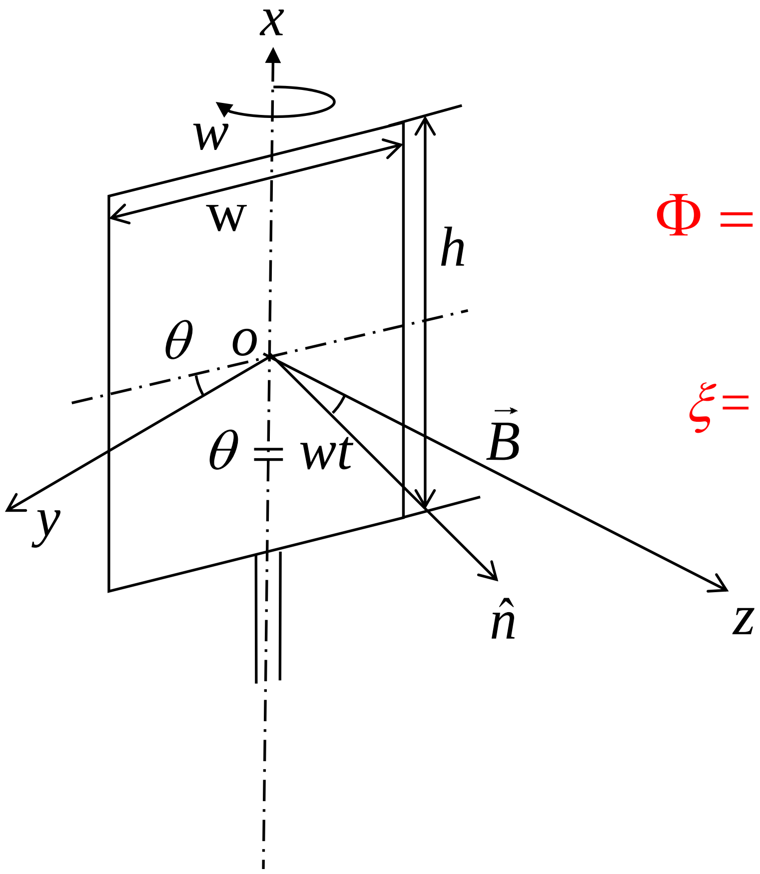
$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi}\left(\frac{av}{(a+c+vt)(c+vt)}\cos(wt) + w\sin(wt)\ln\frac{a+c+vt}{c+vt}\right)$$

第5章 作业

5.4 如图，证明以角速度w在磁场$B_0 sin(wt)\vec{e}_z$中转动线圈中的感生电动势是如下形式

(参考教材P145/PPT CH5 P14)

$$\xi_i = -B_0 Sw\cos(2wt)$$ 其中$S = 2wh$是线圈的面积

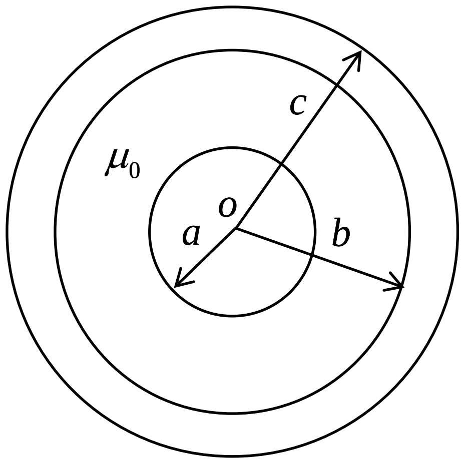


$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S B_0 \sin(wt)\vec{e}_z \cdot \vec{e}_n dS = B_0 S\sin(wt)\cos(wt) = \frac{B_0 S}{2}\sin(2wt)$$

$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{B_0 S}{2}\sin(2wt)\right) = -B_0 Sw\cos(2wt)$$

第5章 作业

5.7 如图，两同轴圆柱导体的内导体半径为a，外导体内半径为b，外半径为c，两导体间真空，求单位长度的电感 (参考PPT CH5 P22)



方法一：利用磁链公式 (见PPT CH5 P21)

设内导体电流为I,外导体电流为$-I$

由安培环路定理得到B：

$$\vec{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\vec{e}_\varphi & 0<r\le a\\[2ex] \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi & a<r\le b\\[2ex] \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\dfrac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\right)\vec{e}_\varphi & b<r\le c\\[2ex] 0 & r>c\end{cases} \Rightarrow \psi=\int_S N\vec{B}\cdot d\vec{S}=\begin{cases}\displaystyle\int_0^a \frac{r^2}{a^2}\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}dr=\frac{\mu_0 I}{8\pi} & 0<r\le a\\[2ex] \displaystyle\int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b}{a} & a<r\le b\\[2ex] \displaystyle\int_b^c \left(1-\frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right)\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}dr \\ \displaystyle =\frac{\mu_0 I}{8\pi}\frac{b^2-3c^2}{c^2-b^2}+\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{c^4\ln(c/b)}{\left(c^2-b^2\right)^2} & b<r\le c\\[2ex] 0 & r>c\end{cases}$$

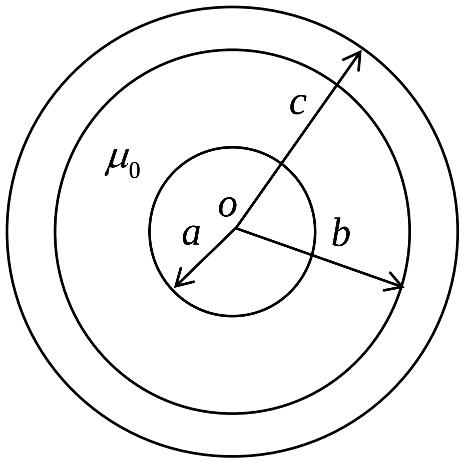
故单位长度的电感为：

$$L=\frac{\psi}{I}==\frac{\mu_0}{8\pi}+\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}+\frac{\mu_0 c^4\ln\dfrac{c}{b}}{2\pi\left(c^2-b^2\right)^2}+\frac{\mu_0\left(b^2-3c^2\right)}{8\pi\left(c^2-b^2\right)}=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}+\frac{\mu_0 c^4\ln\dfrac{c}{b}}{2\pi\left(c^2-b^2\right)^2}-\frac{\mu_0 c^2}{4\pi\left(c^2-b^2\right)}$$

第5章 作业

5.7 如图，两同轴圆柱导体的内导体半径为a，外导体内半径为b，外半径为c，两导体间真空，求单位长度的电感(参考PPT CH5 P22)

方法二：利用磁场能量公式 (见PPT CH5 P23)



$$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\int_s w_m dS=\frac{1}{2\mu}\int_s B^2 dS$$

$$=\frac{1}{2\mu_0}\left(\int_0^a\left(\frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}\right)^2 2\pi r dr+\int_a^b\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 2\pi r dr+\int_b^c\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\right)\right)^2 2\pi r dr\right)$$

$$=\frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I^2}{8\pi}+\frac{I^2}{2\pi}\ln\frac{b}{a}+\frac{I^2c^4\ln\frac{c}{b}}{2\pi\left(c^2-b^2\right)^2}+\frac{I^2\left(b^2-3c^2\right)}{8\pi\left(c^2-b^2\right)}\right)$$

故单位长度的电感为：

$$L=\frac{2W_m}{I^2}==\frac{\mu_0}{8\pi}+\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}+\frac{\mu_0 c^4\ln\frac{c}{b}}{2\pi\left(c^2-b^2\right)^2}+\frac{\mu_0\left(b^2-3c^2\right)}{8\pi\left(c^2-b^2\right)}=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}+\frac{\mu_0 c^4\ln\frac{c}{b}}{2\pi\left(c^2-b^2\right)^2}-\frac{\mu_0 c^2}{4\pi\left(c^2-b^2\right)}$$

第6章 作业

1、从麦克斯韦方程出发，证明：①真空中的电场和磁场强度$\vec{E}$、$\vec{H}$满足方程

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{E}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu_0\dfrac{\partial\vec{J}_f}{\partial t}+\dfrac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho_f \\ \nabla^2\vec{H}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{J}_f \end{cases}$$

（参考PPT CH6 P44-45）

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho_f \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\times\nabla\times\vec{E}=-\mu_0\frac{\partial(\nabla\times\vec{H})}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial\vec{J}_f}{\partial t}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \\ &\nabla\times\nabla\times\vec{E}==\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=\frac{\nabla\rho_f}{\varepsilon_0}-\nabla^2\vec{E} \end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial\vec{J}_f}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho_f$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\times\nabla\times\vec{H}=\nabla\times(\vec{J}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})=\nabla\times\vec{J}_f-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \\ &\nabla\times\nabla\times\vec{H}==\nabla(\nabla\cdot\vec{H})-\nabla^2\vec{H}=-\nabla^2\vec{H} \end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \nabla^2\vec{H}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{J}_f \qquad c^2=\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$$

②在线性各向同性均匀介质中的$\vec{E}$、$\vec{H}$满足如下方程

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{E}-\mu\sigma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\nabla\left(\dfrac{\rho_f}{\varepsilon}\right) \\ \nabla^2\vec{H}-\mu\sigma\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0 \end{cases}$$

在线性各向同性介质中满足 $\vec{J}=\sigma\vec{E}$, $\nabla\times\vec{J}_f=\nabla\times\left(\sigma\vec{E}\right)=-\mu\sigma\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}$

代入到①的证明结果中，即完成证明

第6章 作业

6.1 在定义辅助位函数时，若对$\dot{\vec{A}}$，φ的附加条件不是$\nabla\cdot\dot{\vec{A}}=-j\omega\mu\varepsilon\varphi$，而是$\nabla\cdot\dot{\vec{A}}=0$，试求此时$\dot{\vec{A}}$，$\varphi$满足的方程（参考PPT CH6 P37） 复数形式！

$$\begin{cases}\nabla^2\dot{\vec{A}}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\dot{\vec{A}}}{\partial t^2}-\nabla(\nabla\cdot\dot{\vec{A}}+\mu\varepsilon\dfrac{\partial\dot{\varphi}}{\partial t})=-\mu\dot{\vec{J}}\\ \nabla^2\dot{\varphi}+\dfrac{\partial(\nabla\cdot\dot{\vec{A}})}{\partial t}=-\dfrac{\dot{\rho}}{\varepsilon}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\dot{\vec{A}}+\mu\varepsilon w^2\dot{\vec{A}}-\nabla(\nabla\cdot\dot{\vec{A}}+jw\mu\varepsilon\dot{\varphi})=-\mu\dot{\vec{J}}\\ \nabla^2\dot{\varphi}+jw\nabla\cdot\dot{\vec{A}}=-\dfrac{\dot{\rho}}{\varepsilon}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\dot{\vec{A}}+\mu\varepsilon w^2\dot{\vec{A}}-jw\mu\varepsilon\nabla\dot{\varphi}=-\mu\dot{\vec{J}}\\ \nabla^2\dot{\varphi}=-\dfrac{\dot{\rho}}{\varepsilon}\end{cases}$$

2、从麦克斯韦方程出发，推导复波印廷定理（参考教材P187/PPT CH6 P97）

$$\because\ \dot{\vec{S}}_c=\frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^*(\vec{r})$$

$$\therefore\ \nabla\cdot\dot{\vec{S}}_c=\frac{1}{2}\nabla\cdot[\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^*(\vec{r})]=\frac{1}{2}[\vec{H}^*(\vec{r})\cdot\nabla\times\vec{E}(\vec{r})-\vec{E}(\vec{r})\cdot\nabla\times\vec{H}^*(\vec{r})]$$

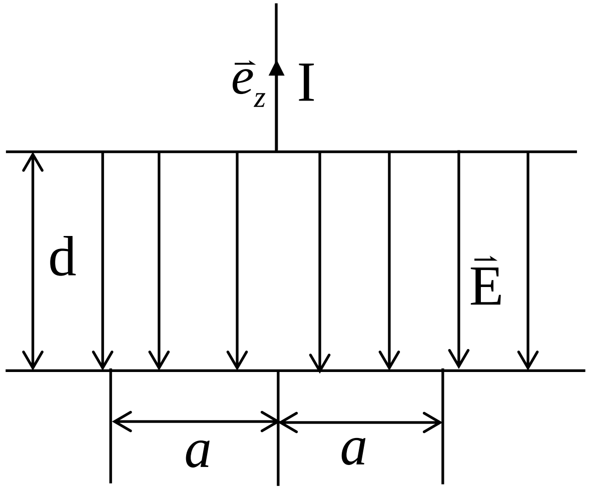
$$=\frac{1}{2}\{\vec{H}^*(\vec{r})\cdot[-jw\vec{B}(\vec{r})]-\vec{E}(\vec{r})\cdot[-jw\vec{D}^*(\vec{r})+\vec{J}^*(\vec{r})]\}=-2jw[\frac{1}{4}\mu|\vec{H}(\vec{r})|^2-\frac{1}{4}\varepsilon|\vec{E}(\vec{r})|^2]-\frac{1}{2}\sigma|\vec{E}(\vec{r})|^2$$

$$=-2jw(\overline{w}_m-\overline{w}_e)-\dot{P}$$

$$-\nabla\cdot\dot{\vec{S}}_c=2jw(\overline{w}_m-\overline{w}_e)+\dot{P}$$

第6章 作业

6.7 如图，一平行圆盘电容器，设放电时场的变化足够慢，波动现象可忽略。在圆盘中心部分，假定电荷均匀分布，已知盘上电荷密度是$\pm\sigma(t)$ ，求圆盘电容器中心部分半径为a的圆筒上流出的能流，并证明在$\frac{d^2\sigma}{dt^2}=0$的假设下，圆筒上流出的能流恰好等于筒内场能的减少率，同时也等于UI



圆盘电容器间的电场：$\vec{E}=-\frac{D}{\varepsilon}\vec{e}_z=-\frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{e}_z \Rightarrow U=Ed=\frac{\sigma}{\varepsilon}d$

中心部分半径为a的圆筒中流出的电流：$I=\vec{J}\cdot\vec{S}=\frac{d\sigma(t)}{dt}\cdot\pi a^2$

$$\Rightarrow \vec{H}=\frac{I}{2\pi a}\vec{e}_\varphi=\frac{1}{2\pi a}\frac{d\sigma(t)}{dt}\cdot\pi a^2\vec{e}_\varphi=\frac{a}{2}\frac{d\sigma(t)}{dt}\vec{e}_\varphi$$

电磁能量密度：$w=w_e+w_m=\frac{1}{2}\varepsilon\left|\vec{E}\right|^2+\frac{1}{2}\mu\left|\vec{H}\right|^2=\frac{\sigma^2(t)}{2\varepsilon}+\frac{\mu\rho^2}{8}[\frac{d\sigma(t)}{dt}]^2$

能量减少率：$\frac{dW}{dt}=\frac{d}{dt}\left\{\iiint_v wdV\right\}=\frac{\pi a^2 d\sigma(t)}{\varepsilon}\frac{d\sigma(t)}{dt}+\frac{\pi a^4 d\mu}{8}\frac{d\sigma(t)}{dt}\frac{d^2\sigma(t)}{dt^2}=\frac{\pi a^2 d\sigma(t)}{\varepsilon}\frac{d\sigma(t)}{dt}$

总能流：$\iint_S\vec{S}\cdot d\vec{S}=\iint_S\vec{E}\times\vec{H}d\vec{S}=\frac{\pi a^2 d\sigma(t)}{\varepsilon}\frac{d\sigma(t)}{dt}=\frac{d\sigma(t)}{\varepsilon}\times\left(\frac{d\sigma(t)}{dt}\pi a^2\right)=UI=\frac{dW}{dt}$

第6章 作业

3、自由空间中已知电场强度$\vec{E}$的表达式$(\rho_f = 0, \vec{J}_f = 0)$为$\vec{E} = E_{xm}cos(wt - kz)\vec{e}_x + E_{ym}cos(wt - kz)\vec{e}_y$

求：①电场强度$\vec{E}$的复数表达式

$$\vec{E} = E_{xm}\cos(wt-kz)\vec{e}_x + E_{ym}\cos(wt-kz)\vec{e}_y = \mathrm{Re}\left[\left(E_{xm}e^{-jkz}\vec{e}_x + E_{ym}e^{-jkz}\vec{e}_y\right)e^{jwt}\right]$$

$$\dot{\vec{E}} = E_{xm}e^{-jkz}\vec{e}_x + E_{ym}e^{-jkz}\vec{e}_y$$

②磁场强度$\vec{H}$的瞬时和复数表达式

$$\nabla \times \dot{\vec{E}} = -jw\dot{\vec{B}} = -jw\mu_0\dot{\vec{H}}$$

复数形式：$\dot{\vec{H}} = \dfrac{-1}{jw\mu_0}\nabla \times \dot{\vec{E}} = \dfrac{-1}{jw\mu_0}\left(\dfrac{\partial\left(E_{xm}e^{-jkz}\right)}{\partial z}\vec{e}_y - \dfrac{\partial\left(E_{ym}e^{-jkz}\right)}{\partial z}\vec{e}_x\right) = \dfrac{k}{w\mu_0}e^{-jkz}\left(E_{xm}\vec{e}_y - E_{ym}\vec{e}_x\right)$

瞬时形式：$\vec{H} = \mathrm{Re}\left(\dot{\vec{H}}e^{jwt}\right) = \dfrac{kE_{xm}}{w\mu_0}\cos(wt-kz)\vec{e}_y - \dfrac{kE_{ym}}{w\mu_0}\cos(wt-kz)\vec{e}_x$

第6章 作业

3、自由空间中已知电场强度$\vec{E}$的表达式$(\rho_f = 0, \vec{J}_f = 0)$为$\vec{E} = E_{xm}\cos(wt - kz)\vec{e}_x + E_{ym}\cos(wt - kz)\vec{e}_y$

求：③坡印廷矢量$\vec{S}$及其在一个周期内的平均值$\bar{\vec{S}}$

坡印廷矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_{xm}\cos(wt-kz) & E_{ym}\cos(wt-kz) & 0 \\ -\dfrac{kE_{ym}}{\mu\omega}\cos(wt-kz) & \dfrac{kE_{xm}}{\mu\omega}\cos(wt-kz) & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{k}{\mu\omega}\left(E_{xm}^2 + E_{ym}^2\right)\cos^2(wt-kz)\vec{e}_z$

平均坡印廷矢量 $\bar{\vec{S}} = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{2}\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*\right) = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_{xm}e^{-jkz} & E_{ym}e^{-jkz} & 0 \\ -\dfrac{kE_{ym}}{\mu\omega}e^{jkz} & \dfrac{kE_{xm}}{\mu\omega}e^{jkz} & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{k}{2\mu w}\left(E_{xm}^2 + E_{ym}^2\right)\vec{e}_z$

第6章 作业

3、自由空间中已知电场强度$\vec{E}$的表达式($\rho_f = 0, \vec{J}_f = 0$)为$\vec{E} = E_{xm}cos(wt - kz)\vec{e}_x + E_{ym}cos(wt - kz)\vec{e}_y$
求：④电磁场瞬时能量密度w及其在一个周期内的平均值$\bar{w}$

电磁场瞬时能量密度：

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\varepsilon\left|\vec{E}\right|^2 + \frac{1}{2}\mu\left|\vec{H}\right|^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon + \frac{k^2}{\mu w^2})(E_{xm}^2 + E_{ym}^2)\cos^2(wt - kz) = \varepsilon(E_{xm}^2 + E_{ym}^2)\cos^2(wt - kz)$$

电磁场平均能量密度：

$$\bar{w} = \bar{w}_e + \bar{w}_m = \frac{1}{4}\varepsilon\left|\dot{\vec{E}}\right|^2 + \frac{1}{4}\mu\left|\dot{\vec{H}}\right|^2 = \frac{1}{4}(\varepsilon + \frac{k^2}{\mu w^2})(E_{xm}^2 + E_{ym}^2) = \frac{\varepsilon}{2}(E_{xm}^2 + E_{ym}^2)$$