0.1 贝塞尔函数

贝塞尔函数是柱坐标系使用分离变量法后自然产生的函数族。

0.1.1 贝塞尔方程

我们以泊松方程为例：(齐次情形)设有一个半径为a 的圆柱体，高为H，处于热平衡状态，侧面绝热，上下表面温度已知，内部无热源。求温度分布？

首先我们写出定解问题：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0, r<R, 0<z<H, 0<\theta<2\pi \\ u_r|_{x^2+y^2}=0 \\ u(x,y,0)=g_1(r,\theta), u(x,y,H)=g_2(r,\theta) \end{cases}$$

我们使用柱坐标系并用分离变离法，在柱坐标系下，齐次泊松方程为

$$\Delta_3 u=\frac{\partial u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial u}{\partial z^2}=0.$$

做分离变量

$$u=ZR\Theta,$$

其中，$Z=Z(z), R=R(r), \Theta=\Theta(\theta)$。则有，

$$-\frac{r^2R''Z+rR'Z+r^2RZ''}{RZ}=\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

不妨设$\frac{\Theta''}{\Theta}=-\lambda$，则有固有值问题

$$\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0, 0\le\theta\le 2\pi \\ \Theta(0)=\Theta(2\pi), \Theta'(0)=\Theta'(2\pi). \end{cases}$$

这是周期边界条件的固有值问题，$k=1, q=0, \rho=1$，由SL 理论，$\lambda_0=0$，$\Theta_0=1$。其余固有值$\lambda_n=n^2, n\ge 1$，对应固有函数$\Theta_n^{(1)}=\cos n\theta, \Theta_n^{(2)}=\sin n\theta, n\ge 1$。将固有值代入原方程，得

$$\frac{r^2R''Z+rR'Z+r^2RZ''}{RZ}=n^2.$$

即：

$$-\frac{Z''}{Z}=\frac{-n^2R+r^2R''+rR'}{r^2R}.$$

我们再用一次分离变量，假设上式为常值$-\mu$，则我们得到固有值问题

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+(\mu r^2-n^2)R=0, r\ge 0 \\ |R(0)|<\infty, R'(a)=0. \end{cases}$$

写成标准形式，有

$$\begin{cases} [rR']'-\frac{n^2}{r}R+\mu rR=0, 0<x<a \\ |R(0)|<\infty, R'(a)=0. \end{cases}$$

我们根据n 的不同取值来讨论：

当$n=0$ 时，$q=0$，两端分别为自然边界条件和II 类边界条件。因而0 是固有值，对应固有函数为$R_0=1$。其余固有值均大于零，我们可以设$x=\sqrt{\mu}r, y(x)=R(x/\sqrt{\mu})$，我们就得到了

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+x^2y=0, x>0. \\ |y(0)|<\infty. \end{cases}$$

上述方程称为零阶贝塞尔方程。

当$n\neq 0$ 时，$q\neq 0$，我们不需要考虑零固有值。所有固有值都大于0，即$\mu>0$。我们可以设$x=\sqrt{\mu}r, y(x)=R(x/\sqrt{\mu})$，我们就得到了

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0, x>0. \\ |y(0)|<\infty. \end{cases}$$

上述方程称为n阶贝塞尔方程。一般ν阶（$\nu\geq 0$）贝塞尔方程的形式为

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0, x>0.$$

写成SL的形式为

$$[xy']'-\frac{\nu^2}{x}y+xy=0, x>0.$$

我们发现除了在0阶的时候需要考虑零固有值外，其他形式都是统一的，因而问题的核心在于解上诉常微分方程。

定理. *如果y_1 和y_2 是上述常微分方程的两个线性无关解，其中一个在0 点有界，则另一个必然在零点无界。*

实际上，我们假设y_1 是定理的有界解，y_2 是无界解，则常微分方程的所有解可以表示为$C_1y_1+C_2y_2$。可以说明，所有有界解都是y_1 的倍数。结合我们的边界条件，y_1 是我们所关心的。其某个特解称为ν-阶贝塞尔函数，记为$J_\nu(x)$。

现在假设我们已经知道了$J_n(x)$，我们回到了n-阶贝塞尔固有值问题。$R(r)=J_n(\sqrt{\mu}r)$。边界条件为

$$|R(0)|<\infty, R'(r)=(J_n(\sqrt{\mu}r))'|_{r=a}=\sqrt{\mu}J_n'(x)|_{x=\sqrt{\mu}a}=0.$$

设$\omega=\sqrt{\mu}$，设$J_n'(\omega a)=0$ 的所有正解为$\omega_{n,1}<\omega_{n,2}\cdots$。则固有值$\mu_{n,m}=\omega_{n,m}^2$，固有函数$R_{n,m}=J(\omega_{n,m}r)$，当$n=0$ 时，按情况讨论零固有值是否存在。将固有值带入Z 的方程，得到

$$Z''-\omega_{n,m}^2Z=0$$

固有值非零时解得

$$Z=C_{n,m,1}e^{\omega_{n,m}z}+C_{n,m,2}e^{-\omega_{n,m}z}.$$

固有值零时解得

$$Z=C+Dz.$$

所以原定解问题的解为

$$u=C+Dz+\sum_{m=1}^{\infty}(C_{0,m,1}^{(1)}e^{\omega_{0,m}z}+C_{0,m,2}^{(1)}e^{-\omega_{0,m}z})J_0(\omega_{0,m}r)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(C_{n,m,1}^{(1)}e^{\omega_{n,m}z}+C_{n,m,2}^{(1)}e^{-\omega_{n,m}z})J_n(\omega_{n,m}r)\Theta_n^{(1)}(\theta)+\cdots.$$

0.2 贝塞尔函数

我们来解ν阶（$\nu > 0$）贝塞尔方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, x > 0.$$

这是一个2阶常微分方程，其解有形式$C_1J_\nu + C_2N_\nu$，其中J_ν 和N_ν 是定义在$(0, +\infty)$ 上线性无关的特解，其中，J_ν 在0 点有界，N_ν 在0 点无界。现在我们找这两特解：不妨设

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\nu}.$$

代入贝塞尔方程，得到

$$(1 + 2\nu)a_1 = 0, n(n + 2\nu)a_n + a_{n-2} = 0.$$

我们只要特解，因而并不关心奇数项。我们有

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}k!(k + \nu)\cdot(k + \nu - 1)\cdots(\nu + 1)}.$$

我们介绍一个函数Γ 函数：

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

该函数在$x \geq 1$ 都有定义，并且有

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = -e^{-t}|_0^\infty = 1.$$

当$x \geq 1$ 时，

$$\Gamma(x + 1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x dt = -\int_0^\infty t^x de^{-t} = -t^x e^{-t}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}dt^x = x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dx = x\Gamma(x).$$

用上述递推公式，我们可以说明$\Gamma(n + 1) = n!$，还可以将Γ 函数的定义推广到全体实数去掉非正整数上。例如

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2})/(-\frac{1}{2}) = -4\Gamma(\frac{3}{2}).$$

实际上

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = \int_0^\infty e^{-s^2}s^{-\frac{1}{2}}ds^2 = 2\int_0^\infty e^{-s^2}s^{-1}ds = \sqrt{\pi}.$$

但是

$$\Gamma(0) = \Gamma(1)/0 = \infty \text{ 以及}\Gamma(-n) = \infty, n \in \mathbb{N},$$

在此不做展开。

有了Γ 函数，我们可以将a_{2k} 记为

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k\Gamma(\nu + 1)a_0}{2^{2k}k!\Gamma(k + \nu + 1)}.$$

取$a_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$，我们得到了贝塞尔方程的第一个特解也是我们最关心的特解：

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k + \nu + 1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k + \nu + 1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

J_ν 一般没有显式表达式，但我们有

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

实际上，当k 为正整数时。

$$\Gamma(\frac{1}{2}+k)=\Gamma(\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2k-1}{2}=\frac{\sqrt{\pi}(2k-1)!!}{2^k}.$$

从而

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\frac{1}{2}+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\frac{\sqrt{\pi}(2k+1)!!}{2^{k+1}}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}.$$

整理得

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\frac{\sqrt{\pi}(2k+1)!!}{2^{k+1}}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

———

为了求另一个特解，我们不妨假设另一个特解为

$$y=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{n-\nu}.$$

带入贝塞尔方程，得到

$$n(n-2\nu)a_n+a_{n-2}=0.$$

我们可以将a_{2k} 记为

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k\Gamma(-\nu+1)a_0}{2^{2k}k!\Gamma(k-\nu+1)}.$$

取$a_0=\frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$，我们得到了贝塞尔方程的另一个特解：

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{2k-\nu}}{2^{2k-\nu}k!\Gamma(k-\nu+1)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}.$$

当ν 不是整数时，

$$\lim_{x\to0+}J_{-\nu}(x)=\infty.\ \lim_{x\to0+}J_\nu(x)=0$$

因而J_ν 与$J_{-\nu}$ 线性无关。但是当$\nu=n$ 为非负整数的时候

$$\begin{aligned}J_{-n}(x)&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\\&=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k-n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\\&=(-1)^n\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+n+1)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}=(-1)^nJ_n(x).\end{aligned}$$

J_n 与J_{-n} 线性相关。为了解决这个问题。当ν 不是整数时，我们令

$$N_\nu(x) = \frac{J_v(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu(x)}}{\sin(\nu\pi)}.$$

ν-阶贝塞尔方程的所有解可以表示为$C_1 J_v + C_2 N_\nu$。对于非负整数

$$N_n(x) = \lim_{\nu\to n} N_\nu(x) = \lim_{\nu\to n} \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu(x)}}{\sin(\nu\pi)}.$$

这个极限是是$\frac{0}{0}$ 的形式，可以用洛必达法则，得

$$N_n(x) = \frac{\cos(\nu\pi)\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}(x) - \pi J_\nu(x)\sin(\nu\pi) - \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}(x)}{\pi\cos(\pi\nu)}|_{\nu=n} = \frac{\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}(x) - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}(x)}{\pi}|_{\nu=n}.$$

J_ν 称为第一类ν-阶贝塞尔函数；N_ν 称为第二类ν-阶贝塞尔函数或者诺伊曼函数。在这本书中我们重点关注J_n 特别是J_0。

——

0.3 贝塞尔函数的性质

0.3.1 母函数

$\exp(\frac{x}{2}(\xi - \frac{1}{\xi}))$ 称为贝塞尔函数的母函数。我们有

$$\exp(\frac{x}{2}(\xi - \frac{1}{\xi})) = \exp(\frac{x}{2}\xi)\exp(-\frac{x}{2}\frac{1}{\xi}) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x\xi}{2})^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{x}{2\xi})^n\right)$$

依ξ 的次数展开得：

$$\begin{aligned}\exp(\frac{x}{2}(\xi + \frac{1}{\xi})) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}(\frac{x\xi}{2})^{n+k}\frac{(-1)^k}{k!}(\frac{x}{2\xi})^k + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\frac{x\xi}{2})^k\frac{(-1)^{n+k}}{(n+k)!}(\frac{x}{2\xi})^{n+k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}(\frac{x}{2})^{2k+n}\right)\xi^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}(\frac{x}{2})^{2k+n}\right)\xi^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}J_n(x)\xi^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_n(x)\xi^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}J_n(x)\xi^n + \sum_{n=1}^{\infty}J_{-n}(x)\xi^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\xi^n.\end{aligned}$$

注意到如果将母函数看成一个ξ的复函数，则母函数在$\xi \neq 0$ 解析，并且$\xi = 0$ 是母函数的孤立奇点，可以洛朗展开：

$$\exp(\frac{x}{2}(\xi + \frac{1}{\xi})) = \sum_{-\infty}^{\infty}a_n\xi^n$$

用洛朗展开的公式

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}d\xi, n = 0, \pm1, \pm2, \cdots,$$

其中C 是围绕孤立奇点a 的闭路（见书本86页）。在这里取$f(\xi)=\exp(\frac{x}{2}(\xi-\frac{1}{\xi}))$，取$C$ 为单位圆，即$\xi=e^{\theta i},0\le\theta<2\pi$，取$a=0$。则有

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\exp(\frac{x}{2}(e^{\theta i}-\frac{1}{e^{\theta i}}))}{(e^{\theta i}-0)^{n+1}}de^{\theta i}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\exp(x\sin\theta i)}{e^{n\theta i}}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp((x\sin\theta-n\theta)i)d\theta.$$

注意到$\exp((x\sin\theta-n\theta)i)=\cos(x\sin\theta-n\theta)+i\sin(x\sin\theta-n\theta)$ 以及$\sin(x\sin\theta-n\theta)$ 为θ 的奇函数和周期2π 的函数，我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x\sin\theta-n\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x\sin\theta-n\theta)d\theta=0.$$

所以

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)d\theta=J_n(x).$$

称之为整阶贝塞尔函数的积分表示。

利用母函数可以证明很多贝塞尔函数的性质。

$$J_0(0)=1,J_n(0)=0,n\neq 0.$$

又例如

$$J_n(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_{n+k}(x)J_{-k}(y).$$

实际上一方面

$$\exp(\frac{x+y}{2}(\xi-\frac{1}{\xi}))=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x+y)\xi^n.$$

另一方面

$$\exp(\frac{x+y}{2}(\xi-\frac{1}{\xi}))=\exp(\frac{x}{2}(\xi-\frac{1}{\xi}))\exp(\frac{y}{2}(\xi-\frac{1}{\xi}))=(\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\xi^n)(\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(y)\xi^n).$$

依ξ 的阶数展开得

$$\exp(\frac{x+y}{2}(\xi-\frac{1}{\xi}))=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_{n+k}(x)\xi^{n+k}J_{-k}(y)\xi^{-k}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_{n+k}(x)J_{-k}(y)\xi^n.$$

对照得：

$$J_n(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_{n+k}(x)J_{-k}(y).$$

0.3.2 微分关系与递推公式

贝塞尔函数J_ν满足以下性质：

(1) $(x^\nu J_\nu)'=x^\nu J_{\nu-1}=x^\nu J_\nu'+\nu x^{\nu-1}J_\nu$;

(2) $(\frac{J_\nu}{x^\nu})'=-\frac{J_{\nu+1}}{x^\nu}=\frac{J_\nu'}{x^\nu}-\frac{\nu J_\nu}{x^{\nu+1}}$.

整理得

(1) $J_{\nu-1} = J'_\nu + \nu x^{-1} J_\nu$;

(2) $J_{\nu+1} = -J'_\nu + \nu x^{-1} J_\nu$.

我们证明之：

证明. *(1).* 首先

$$x^\nu J_\nu(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} (\frac{x}{2})^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} k!\Gamma(k+\nu+1)} x^{2k+2\nu}.$$

对x 求导得

$$(x^\nu J_\nu(x))' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+2\nu)}{2^{2k+\nu} k!\Gamma(k+\nu+1)} x^{2k+2\nu-1} = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu-1} k!\Gamma(k+\nu)} x^{2k+\nu-1} = x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

(2). 同理

$$\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} (\frac{x}{2})^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} k!\Gamma(k+\nu+1)} x^{2k}.$$

需要注意得是$k=0$ 项为常数项，求导后为0，为了避免误导造成错误，我们单独提出来考虑，当然如果$k!$ 写成$\Gamma(k+1)$ 那么就没必要啰嗦了。求导得

$$\begin{aligned}
(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu})' &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{2^{2k+\nu} k!\Gamma(k+\nu+1)} x^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu-1} (k-1)!\Gamma(k+\nu+1)} x^{2k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+\nu+1} k!\Gamma(k+\nu+2)} x^{2k+1} = -x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu+1} k!\Gamma(k+\nu+2)} x^{2k+\nu+1} \\
&= -x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+(\nu+1)+1)} (\frac{x}{2})^{2k+(\nu+1)} = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).
\end{aligned}$$

由微分关系，我们可以得到递推公式

(1) $J'_\nu = \frac{1}{2}(J_{\nu-1} - J_{\nu+1})$;

(2) $\frac{2\nu}{x} J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}$.

以及

$$J'_0(x) = J_{-1}(x) = -J_1(x).$$

因而，整阶贝塞尔函数包括其导数总能用J_0, J_1 表出。这也是作业和考试答案的要求，尽量用J_0，J_1 表示。例如

$$J'_1 = \frac{1}{2}(J_0 - J_2) = \frac{1}{2} J_0 - \frac{1}{2}(\frac{2}{x} J_1 - J_0) = J_0 - \frac{1}{x} J_1.$$

当然我们也可以用微分关系求J'_1

$$(xJ_1)' = xJ_0 = J_1 + xJ'_1.$$

得到
$$J_1' = J_0 - \frac{1}{x}J_1.$$
两者是一致的。又例如
$$J_3 = \frac{4}{x}J_2 - J_1 = \frac{4}{x}(\frac{2}{x}J_1 - J_0) - J_1 = (\frac{8}{x^2} - 1)J_1 - \frac{4}{x}J_0$$

例子1. 计算积分$\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)dx, a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$. 并计算$L[J_0(t)], L[J_1(t)]$.

解. 用贝塞尔函数的积分表达式。
$$\begin{aligned}
2\pi\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)dx &= \int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-ax}\cos(bx\sin\theta)d\theta dx \\
&= \int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-ax}e^{ibx\sin\theta}d\theta dx \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{x(-a+ib\sin\theta)}dxd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1}{-a+ib\sin\theta}e^{x(-a+ib\sin\theta)}|_0^\infty d\theta \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{-1}{-a+ib\sin\theta}d\theta \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{a+ib\sin\theta}{a^2+b^2\sin^2\theta}d\theta \\
&= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{a}{a^2+b^2\sin^2\theta}d\theta.
\end{aligned}$$
设$t = \tan\theta$，则$dt = d(\tan\theta) = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$，带入得
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{a}{a^2+b^2\sin^2\theta}d\theta = \int_{-\infty}^\infty\frac{a\cos^2\theta}{a^2+b^2\sin^2\theta}dt = \int_{-\infty}^\infty\frac{a}{a^2+(a^2+b^2)t^2}dt.$$
设$s = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}t$，带入上式，得到
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{a}{a^2+b^2\sin^2\theta}d\theta = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{1+s^2}ds = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\arctan s|_{-\infty}^\infty = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$
从而
$$\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)dx = \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$
如果用留数定理，可以说明
$$L[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, Re(p) > 0.$$
实际上当$Rep > 0$ 时
$$L[J_0(t)](p) = \int_0^\infty e^{-pt}J_0(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}e^{-pt}\cos(t\sin\theta)d\theta dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{p}{p^2+(p^2+1)t^2}dt.$$

$\frac{p}{p^2+(p^2+1)t^2}$ 作为复函数有两个一阶极点$t_1, t_2 = \pm\frac{pi}{\sqrt{p^2+1}}$，一个在上半平面（$t_1$），一个在下半平面（$t_2$）。

$$Res(\frac{1}{p^2+(p^2+1)t^2}, t_1) = \lim_{t\to t_1} \frac{p}{p^2+(p^2+1)t^2} \times (t-t_1) = \frac{p}{(p^2+1)(t-t_2)}|_{t=t_1} = \frac{p}{(p^2+1)(t_1-t_2)}.$$

$$L[J_0(t)](p) = \frac{1}{\pi} \times 2\pi i Res(\frac{1}{p^2+(p^2+1)t^2}, t_1) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

另当$Rep > 0$ 时

$$L[J_1(t)] = \int_0^\infty e^{-pt}J_1(t)dt = -\int_0^\infty e^{-pt}J_0'(t)dt = -e^{-pt}J_0(t)|_0^\infty - p\int_0^\infty e^{-pt}J_0(t)dt = 1 - pL[J_0(t)].$$

即

$$L[J_1(t)] = \frac{\sqrt{1+p^2}-p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

例子2. $n \geq 2$，证明

$$\int_0^x x^n J_0(x)dx = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1}J_0(x) - (n-1)^2x^2\int_0^x x^{n-2}J_0(x)dx.$$

证明. 这是书后面的作业。

$$\int_0^x x^n J_0(x)dx = \int_0^x x^{n-1}xJ_0(x)dx = \int_0^x x^{n-1}(xJ_1(x))'dx = x^nJ_1(x) - (n-1)\int_0^x x^{n-1}J_1(x)dx.$$

用微分关系$J_1(x) = -(J_0(x))'$，得

$$\int_0^x x^{n-1}J_1(x)dx = -\int_0^x x^{n-1}J_0'(x)dx = x^{n-1}J_0(x) + (n-1)\int_0^x x^{n-2}J_0(x)dx.$$

综合以上所述，证明结论。

实际上，对任意整数m, n：

$$\int x^m J_n(x)dx = \int x^{m-n}x^nJ_n(x)dx = \int x^{m-n-1}(x^{n+1}J_{n+1}(x))'dx$$
$$= x^mJ_{n+1}(x) - (m-n-1)\int x^{m-1}J_{n+1}(x)dx.$$

结合例子2，可以说明最终$\int x^mJ_n(x)dx$ 总能表示成，$J_0, J_1, \int J_0$ 的组合。当$m+n$ 为奇数时候，尾巴项为

$$\int xJ_0dx = \int (xJ_1)'dx = xJ_1.$$

当$m+n$ 为偶数的时候，尾巴项$\int J_0dx$ 没法消掉。

0.3.3 渐近公式与零点

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0, x \geq 0.$$

设$u=\sqrt{x}y$，得

$$y'=\frac{u'}{x^{1/2}}-\frac{u}{2x^{3/2}},y''=\frac{u''}{x^{1/2}}-\frac{u'}{x^{3/2}}+\frac{3u}{4x^{5/2}}.$$

得到

$$u''+(1+\frac{1/4-\nu^2}{x^2})u=0.$$

当$|x|$ 非常大得时候，可以近似得认为

$$u''+u=0.$$

其通解为

$$u=C_1\cos x+C_2\sin x=A\cos(x+\theta).$$

实际上，进一步地推导可以证明（略）

$$J_v(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}),$$

$$N_v(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}).$$

从而可以发现J_v, J_v', J_v+hJ_v' 都有无穷多正零点。这说明我们选取的边界条件总有可数无限个固有值。

0.4 贝塞尔方程的固有值问题

现在我们考虑贝塞尔方程的固有值问题，

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+(\mu x^2-\nu^2)y=0, 0<x<a \\ |y(0)|<\infty, \alpha y(a)+\beta y'(a)=0. \end{cases}$$

SL型为，

$$[xy']'-\frac{\nu^2}{x}+\mu xy=0.$$

需要注意的是$\rho=x$，因而内积为$\langle f,g\rangle=\int_0^a f(x)g(x)xdx$。

由上节讨论可得，该方程的解为

$$y=C_1J_\nu(\sqrt{\mu}x)+C_2N_\nu(\sqrt{\mu}x).$$

代入边界条件，$C_2=0$。设$\omega=\sqrt{\mu}$，则边界条件为

$$\alpha J_\nu(\omega a)+\beta\omega J_\nu'(\omega a)=0.$$

上诉方程有无数解，我们假设所有解为$(0=\omega_0<)\omega_1<\cdots$。

$$(\text{固有值}\mu_0=0,\ \text{对应固有函数}Y_0=1)$$

$$\text{固有值}\mu_n=\omega_n^2,\ \text{对应固有函数}Y_n=J_\nu(\omega_n x).$$

需要注意的是只有当$\alpha=0,\nu=0$时，$\omega_0=0$存在。

我们需要以$\{J_\nu(\omega_n x)\}_n$为正交基做傅里叶展开，$(0,a)$ 的函数$f(x)$ 展开为

$$f=\text{可能的常数项}+\sum_{n=1}^{\infty}f_nJ_\nu(\omega_n x).$$

为了计算系数，我们需要计算$\int_0^a xJ_v^2(\omega_n)dx$，为此对下式乘以$2y'$

$$x[xy']'+(\omega^2x^2-\nu^2)y=0.$$

得到

$$2[xy'][xy']'+(\omega^2x^2-\nu^2)2yy'=0.$$

即

$$([xy']^2)'+(\omega^2x^2-\nu^2)(y^2)'=0.$$

从0 到a 做积分，得到：

$$\int_0^a([xy']^2)'dx=-\int_0^a(\omega^2x^2-\nu^2)(y^2)'dx=-(\omega^2x^2-\nu^2)y^2|_0^a+\int_0^a 2\omega^2xy^2dx.$$

上式左边$=[xy']^2|_0^a=(ay'(a))^2$，从而

$$\int_0^a xy^2dx=\frac{(ay'(a))^2+(\omega^2a^2-\nu^2)y(a)^2+\nu^2y(0)^2}{2\omega^2}.$$

带入$y=J_\nu(\omega x)$ 及$\nu^2J_\nu(0)^2=0$，得

$$\int_0^a xy^2dx=\frac{a^2\omega^2J_\nu'^2(\omega a)+(\omega^2a^2-\nu^2)J_\nu^2(\omega a)}{2\omega^2}.$$

$\mathcal{N}_\nu^2=\langle J_\nu(\omega x),J_\nu(\omega x)\rangle=\int_0^a xJ_\nu^2(\omega x)dx$:

(α) $\alpha\neq 0,\beta=0$: 此时$J_\nu(\omega a)=0$，得到$\mathcal{N}_\nu^2=\frac{a^2}{2}J_\nu'^2(\omega a)=\frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega a)$；

(β) $\alpha=0,\beta\neq 0$:此时$J_\nu'(\omega a)=0$，得到$\mathcal{N}_\nu^2=\frac{(\omega^2a^2-\nu^2)J_\nu^2(\omega a)}{2\omega^2}=\frac{1}{2}(a^2-\frac{v^2}{\omega^2})J_\nu^2(\omega a)$；

(γ) $\alpha\neq 0,\beta\neq 0$: 此时，设$h=\frac{\beta}{\alpha}$，有$J_\nu(\omega a)+h\omega J_\nu'(\omega a)=0$，得到$\mathcal{N}_\nu^2=\frac{1}{2}(\frac{a^2}{h^2\omega^2}+a^2-\frac{v^2}{\omega^2})J_\nu^2(\omega a)$。

特别地，当$\nu=0$ 时候：

(α) $\alpha\neq 0,\beta=0$: $\mathcal{N}_0^2=\frac{a^2}{2}J_1^2(\omega a)$；

(β) $\alpha=0,\beta\neq 0$: $\mathcal{N}_0^2=\frac{a^2}{2}J_0^2(\omega a)$；

(γ) $\alpha\neq 0,\beta\neq 0$:$\mathcal{N}_0^2=\frac{1}{2}(\frac{a^2}{h^2\omega^2}+a^2)J_0^2(\omega a)$。

例子3. 设$J_0(x)=0$ 得所有正根为$0<\omega_1<\omega_2<\cdots$，分别将$(0,1)$ 上得函数$1,x^2$ 分解为$J_0(\omega_i x)$ 的级数。

解. ω_i^2 以及$J_0(\omega_i)$ 为对应如下零阶贝塞尔固有值问题的固有值和固有函数

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+\mu x^2y=0, 0\le x\le 1\\ |y(0)|<\infty, y(1)=0. \end{cases}$$

边界条件为I 类边界条件，所以$\mathcal{N}_{0,i}^2=\frac{1}{2}J_1^2(\omega_i)$。

首先对1 分解：

$$\langle 1, J_0(\omega_i x)\rangle=\int_0^1 1J_0(\omega_i x)xdx=\frac{1}{\omega_i^2}\int_0^{\omega_i}J_0(x)xdx=\frac{1}{\omega_i^2}\int_0^{\omega_i}(xJ_1(x))'dx=\frac{J_1(\omega_i)}{\omega_i}.$$

从而

$$1=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\langle 1, J_0(\omega_i x)\rangle}{\mathcal{N}_{0,i}^2}J_0(\omega_i x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{\omega_iJ_1(\omega_i)}J_0(\omega_i x).$$

再对x^2 做分解：

$$\langle x^2, J_0(\omega_i x)\rangle=\int_0^1 x^3J_0(\omega_i x)dx=\frac{1}{\omega_i^4}\int_0^{\omega_i}J_0(x)x^3dx.$$

$$\begin{aligned}\langle x^2, J_0(\omega_i x)\rangle=\int_0^1 x^3J_0(\omega_i x)dx&=\frac{1}{\omega_i^4}\int_0^{\omega_i}x^3J_0(x)dx\\ &=\frac{1}{\omega_i^4}\int_0^{\omega_i}x^2(xJ_1(x))'dx\\ &=\frac{1}{\omega_i^4}\left(\int_0^{\omega_i}x^2d(xJ_1(x))\right)\\ &=\frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3J_1(x)|_0^{\omega_i}-2\int_0^{\omega_i}x^2J_1(x)dx\right)\\ &=\frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3J_1(x)|_0^{\omega_i}-2\int_0^{\omega_i}(x^2J_2(x))'dx\right)\\ &=\frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3J_1(x)|_0^{\omega_i}-2x^2J_2(x)|_0^{\omega_i}\right)\\ &=\frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3J_1(x)-4xJ_1(x)+2x^2J_0(x)\right)|_0^{\omega_i}.\end{aligned}$$

注意到$J_0(\omega_i)=0$，

$$\langle x^2, J_0(\omega_i x)\rangle=\frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3J_1(x)-4xJ_1(x)+2x^2J_0(x)\right)|_0^{\omega_i}=\frac{2}{\omega_iJ_1(\omega_i)}-\frac{8}{\omega_i^3J_1(\omega_i)}.$$

$$x^2=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\langle x^2, J_0(\omega_i x)\rangle}{\mathcal{N}_{0,i}^2}J_0(\omega_i x)=\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{2}{\omega_iJ_1(\omega_i)}-\frac{8}{\omega_i^3J_1(\omega_i)})J_0(\omega_i x).$$

例子4. 设$J_0'(x)=0$ 得所有正根为$0<\omega_1<\omega_2<\cdots$，将$(0,1)$ 上的函数$1,x^2$ 分解为$1,J_0(\omega_i x)$ 的级数。

解. $0,\omega_i^2$ 和其对应的$1,J_0(\omega_i)$ 为如下零阶贝塞尔固有值问题的固有值和固有函数

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+\mu x^2y=0, 0\le x\le 1\\ |y(0)|<\infty, y'(1)=0. \end{cases}$$

边界条件为II 类边界条件，所以$\mathcal{N}_{0,i}^2 = \frac{1}{2}J_0^2(\omega_i)$。

首先对1 分解：就是1。

再对x^2 做分解：首先求常数固有函数1 的系数

$$\langle 1, 1\rangle = \int_0^1 1^2 x dx = \frac{1}{2}.$$

$$\langle x^2, 1\rangle = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

所以常数项系数$= \frac{\langle x^2,1\rangle}{\langle 1,1\rangle} = \frac{1}{2}$。

$$\begin{aligned}
\langle x^2, J_0(\omega_i x)\rangle = \int_0^1 x^3 J_0(\omega_i x)dx &= \frac{1}{\omega_i^4}\int_0^{\omega_i} x^3 J_0(x)dx \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\int_0^{\omega_i} x^2 (xJ_1(x))' dx \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\left(\int_0^{\omega_i} x^2 d(xJ_1(x))\right) \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3 J_1(x)|_0^{\omega_i} - 2\int_0^{\omega_i} x^2 J_1(x)dx\right) \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3 J_1(x)|_0^{\omega_i} - 2\int_0^{\omega_i} (x^2 J_2(x))' dx\right) \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3 J_1(x)|_0^{\omega_i} - 2x^2 J_2(x)|_0^{\omega_i}\right) \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}\left(x^3 J_1(x) - 4xJ_1(x) + 2x^2 J_0(x)\right)|_0^{\omega_i}.
\end{aligned}$$

注意到$J_0'(\omega_i) = -J_1(\omega_i) = 0$：

$$\begin{aligned}
\langle x^2, J_0(\omega_i x)\rangle &= \frac{1}{\omega_i^4}(x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4xJ_1(x))|_0^{\omega_i} \\
&= \frac{1}{\omega_i^4}(\omega_i^3 J_1(\omega_i) + 2\omega_i^2 J_0(\omega_i) - 4\omega_i J_1(\omega_i)) \\
&= \frac{2J_0(\omega_i)}{\omega_i^2}.
\end{aligned}$$

从而

$$x^2 = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\langle x^2, J_0(\omega_i x)\rangle}{\mathcal{N}_{0,i}^2}J_0(\omega_i x) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{4}{\omega_i^2 J_0(\omega_i)}J_0(\omega_i x).$$

例子5 (零阶贝塞尔固有值问题). 有一个处于热平衡的理想金属圆柱，半径高均为1，上下底温度分别为$1-r^2, 0$，侧面温度为0，无热源，求圆柱体内的温度分布。

解. 由对称性，容易知道温度分布与角度无关，不妨设温度$u = u(r,z)$。因而可以写出定解问题

$$\begin{cases}
\Delta_3 u = \frac{\partial u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z^2} = 0, 0 \le r \le 1, 0 \le z \le 1 \\
u|_{r=1} = 0. \\
u(0,z) = 0, u(1,z) = 1 - r^2.
\end{cases}$$

分离变量，$u(r,z)=R(r)Z(z)$，有

$$-\frac{Z''}{Z}=\frac{rR''+R'}{rR}.$$

设上式为常值$-\mu$，得到固有值问题

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+\mu r^2R=0, 0\le r\le 1\\ |R(0)|<\infty, R(1)=0.\end{cases}$$

这是零阶的贝塞尔固有值问题，因为有一个边界条件是I 类边界条件。因而零不是固有值，设

$$J_0(\omega)$$

的所有正解为$0<\omega_1<\omega_2<\cdots$。则对应固有值$\omega_n^2$，固有函数$J_0(\omega_n r)$，将固有值带入$Z_n$ 的方程，得到：

$$Z_n''-\omega_n^2Z_n=0.$$

$Z_n=A_ne^{\omega_n z}+B_ne^{-\omega_n z}$。从而

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_ne^{\omega_n z}+B_ne^{-\omega_n z})J_0(\omega_n r).$$

求系数，

$$u(r,1)=1-r^2=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{8}{\omega_i^3J_1(\omega_i)})J_0(\omega_i x), u(r,0)=0.$$

对照得

$$\begin{cases} A_n+B_n=0\\ A_ne^{\omega_n}+B_ne^{-\omega_n}=\frac{\langle 1-r^2, J_0(\omega_n r)\rangle}{\langle J_0(\omega_n r), J_0(\omega_n r)\rangle}=\frac{8}{\omega_n^3J_1(\omega_n)}\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_n=\frac{8}{(e^{\omega_n}-e^{\omega_n})\omega_n^3J_1(\omega_n)}\\ B_n=-\frac{8}{(e^{\omega_n}-e^{\omega_n})\omega_n^3J_1(\omega_n)}.\end{cases}$$

从而

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(e^{\omega_n}-e^{\omega_n})\omega_n^3J_1(\omega_n)}(e^{\omega_n z}-e^{-\omega_n z})J_0(\omega_n r)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{sh(\omega_n)\omega_n^3J_1(\omega_n)}sh(\omega_n z)J_0(\omega_n r).$$

例子6. 有一半径为1 的无限长金属圆柱，初始温度为$1-r^2$，热传导系数/密度/比热都是1，侧面绝热，无热源，求圆柱体的温度变化。

解. 容易知道温度分布与角度无关与z 无关，不妨设温度$u=u(t,r)$。因而可以写出定解问题

$$\begin{cases} u_t=\frac{\partial u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}, 0\le r\le 1, t>0\\ u_r|_{r=1}=0, t>0.\\ u(0,r)=1-r^2.\end{cases}$$

分离变量，设$u=T(t)R(r)$，得

$$\frac{T'}{T}=\frac{rR''+R'}{rR}.$$

左边为t 得函数，右边为r 得函数，因而为常数，设为$-\lambda$，得到零阶固有值问题

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+\lambda r^2R=0, 0\le r\le 1\\ |R(0)|<\infty, R'(1)=0. \end{cases}$$

和

$$T'+\lambda T=0.$$

边界条件分别为自然边界条件和II 类边界条件，因为$\lambda_0=0$ 为固有值，对应固有函数为$R_0=1$。设

$$J_0'(\omega)=0$$

得所有正解为$\omega_1<\omega_2<\cdots$，则固有值为ω_n^2，对用固有函数为$R_n=J_0(\omega_n r)$。代入固有值，解T_n 的微分方程

$$T_n'+\omega_n^2T_n=0$$

得$T_0=A_0$ 和$T_n=A_ne^{-\omega_n^2t}$，$n\ge 1$。所以定解问题得解为

$$u(t,r)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-\omega_n^2t}J_0(\omega_n r).$$

将$1-r^2$ 做展开

$$1-r^2=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\omega_n^2J_0(\omega_n)}J_0(\omega_n r).$$

对照得：

$$A_0=\frac{1}{2}, A_n=-\frac{4}{\omega_n^2J_0(\omega_n)}, n\ge 1.$$

所以

$$u(t,r)=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\omega_n^2J_0(\omega_n)}e^{-\omega_n^2t}J_0(\omega_n r).$$

0.5 勒让德固有值问题

在球坐标系，尤其是存在轴对称性的时候做变量分离，我们会碰到勒让德函数。

设有一个半径为a 的金属球，内部无热源，表面的温度已知，为$f(\cos(\theta))$，$(r,\theta,\varphi), r\in[0,R], \theta\in[0,\pi], \varphi\in[0,2\pi)$ 为球极坐标系，$x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$。内部无热源，金属球处于热平衡，求温度分布？

在球极坐标下，拉普拉斯有如下形式：

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}.$$

很多物理问题，特别是静电场中的问题，都有轴对称性，这时候，解不依赖于φ，拉普拉斯可以化简为：

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right),$$

其中$u=u(r,\theta)$。

例如上述例子，设$u=u(r,\theta)$ 为温度分布，首先写出定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(a,\theta) = f(\cos\theta) \end{cases}$$

分离变量，设$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，则有

$$\frac{1}{r^2}[r^2R']'\Theta+\frac{R}{r^2\sin\theta}[\sin\theta\Theta']'=0.$$

即

$$-\frac{[r^2R']'}{R}=\frac{[\sin\theta\Theta']'}{\sin\theta\Theta}.$$

为常值，设为$-\lambda$。得到固有值问题

$$(I) \qquad \begin{cases} [\sin\theta\Theta']'+\lambda\sin\theta\Theta=0 \\ |\Theta(0)|<\infty, |\Theta(\pi)|<\infty. \end{cases}$$

以及微分方程

$$-\frac{[r^2R']'}{R}=-\lambda.$$

做变量替换$x=\cos\theta$，则$x\in[-1,1]$，$\theta=\arccos x$。

$$\frac{d}{d\theta}=\frac{d}{d\arccos x}=-\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}, \sin\theta=\sqrt{1-x^2}.$$

所以

$$[\sin\theta\Theta']'=\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\Theta)=-\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}(-(1-x^2)\frac{d}{dx}\Theta)=\sqrt{1-x^2}(-2x\frac{d\Theta}{dx}+(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}).$$

令$y(x)=\Theta(arccosx)$，则$\Theta(\theta)=y(\cos\theta)$，得到固有值问题

$$(II) \qquad \begin{cases} (1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0 \\ |y(\pm1)|<\infty. \end{cases}$$

这是勒让德方程得固有值问题。其SL 型为

$$[(1-x^2)y']'+\lambda y=0.$$

$k=1-x^2$，$q=0$，$\rho=1$，两个边界条件都是自然边界条件，因而零是固有值，其他固有值都大于零。所有固有值都可以表示成$n(n+1)$，实际上只有当n 是非负整数的时候才有有界解，为了说明这件事情，我们还是像贝塞尔函数那样找两个线性无关的特解，假设解具有形式

$$y=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i.$$

带入固有值问题得

$$\sum_{i=0}^{\infty}i(i-1)a_ix^{i-2}-\sum_{i=0}^{\infty}i(i-1)a_ix^i-\sum_{i=0}^{\infty}2ia_ix^i+n(n+1)\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i=0.$$

从而

$$(i+2)(i+1)a_{i+2}-i(i-1)a_i-2ia_i+n(n+1)a_i=0.$$

即

$$a_{i+2}=\frac{(i-n)(i+n+1)}{(i+2)(i+1)}a_i.$$

令$a_0=a_1=1$，奇偶项分离，我们可以得到两个特解

$$y_1(x)=\sum_i a_{2i}x^{2i},$$

$$y_2(x)=\sum_i a_{2i+1}x^{2i+1}.$$

由递推公式：

$$\lim_{i\to\infty}|\frac{a_{2i}}{a_{2i-2}}|=\lim_{i\to\infty}|\frac{a_{2i+1}}{a_{2i-1}}|=1.$$

所以y_1 与y_2 得收敛半径至少都是1。并且y_1 为非零偶函数，y_2 为非零奇函数，y_1 和y_2 线性无关。即勒让德方程得所有解可以表示为

$$C_1y_1+C_2y_2.$$

当n 为非负整数得时候，我们按照奇偶性来讨论，1). $n=2k$ 为偶数，此时

$$a_{2k+2}=\frac{(2k-n)(2k+n+1)}{(2k+2)(2k+1)}a_{2k}=0.$$

顺带可以说明$a_{2i}=0,i=k+1,\cdots$. 即y_1 为多项式，因而$|y_1(\pm1)|<\infty$。2) 当n 为奇数得时候，也有类似讨论，在此略去。

当n 不是整数的时候，可以证明

$$\lim_{i\to\infty}a_{2i}=c_1\neq0,\lim_{i\to\infty}a_{2i+1}=c_2\neq0.$$

$y_1(1)$ 收敛性与$c_1\sum_i 1^{2i}$ 一致，极限趋向于$+\infty$ 或者$-\infty$。因为是偶函数，因而$y_1(1)=y_1(-1)=+\infty$ 或者$-\infty$。反之，y_2 的±1 的取值也是$\pm\infty$ 但符号相反。所以此时，y_1 和y_2 无论怎么线性组合，在±1 的取值都不可能同时有界，所以此时$n(n+1)$ 不是固有值。

所以（II）的固有值为

$$\lambda_n=n(n+1),n=0,1,2,\cdots.$$

λ_n 对应的固有函数为

$$y_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

证明. 设$Y=(x^2-1)^n$，则

$$(x^2-1)Y'=2nx(x^2-1)^n=2nxY.$$

两边求$n+1$ 阶求导，用莱布尼兹求导公式得

$$\begin{aligned}[(x^2-1)Y']^{(n+1)}&=C_{n+1}^0(x^2-1)Y^{(n+2)}+C_{n+1}^1 2xY^{(n+1)}+C_{n+1}^2 2Y^{(n)}\\&=(x^2-1)Y^{(n+2)}+2(n+1)xY^{(n+1)}+n(n+1)Y^{(n)}.\end{aligned}$$

以及

$$[2nxY]^{(n+1)} = 2nxY^{(n+1)} + 2n(n+1)Y^{(n)}.$$

对照得并用$y_n = Y^{(n)}$ 替换得到

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda_n y = 0.$$

———

我们一般在y_n 前添加一个常数因子。

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} y_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

$p_n(x)$ 称为勒让德多项式，如果把$(x^2-1)^n$ 展开

$$(x^2-1)^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!}x^{2n-2i}$$

得到

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^i \frac{(2n-2i)!}{2^n i!(n-i)!(2-2i)!}x^{2n-2i}.$$

称为级数表示，$[\cdot]$ 取整符号。

简单计算容易得到

$$p_0(x) = 1,$$

$$p_1(x) = x,$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

$p_n(x)$ 为n 次多项式，当n 为偶数的时候为偶函数，当n 为奇数的时候为奇函数，$p_n(x)$ 的首项系数为$\frac{(2n)!}{2^n n! n!}$。

现在我们已经有了$\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ 以及固有值$\lambda_n = n(n+1)$，

固有值问题(I) 的固有值同样为$\lambda_n = n(n+1)$，固有函数为$\Theta_n = p_n(\cos\theta), n = 1, 2, 3, \cdots$. 将固有值带到$R_n$ 的函数，有

$$-\frac{[r^2 R_n']'}{R_n} = -\lambda_n.$$

即

$$r^2 R_n'' + 2rR_n' - n(n+1)R_n = 0.$$

这是一个欧拉方程，做变量替换$r = e^t$，得到

$$\frac{d^2 R_n}{dt^2} + \frac{dR_n}{dt} - n(n+1)R_n = 0.$$

解之，

$$R_n(r) = A_n e^{nt} + B_n e^{-(n+1)t} = A_n r^n + B_n r^{-n-1}.$$

所以

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n-1})p_n(\cos\theta).$$

在本例子中，$B_n=0$。令$r=a$，得到

$$f(\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_na^np_n(\cos\theta).$$

需要将$f(\cos\theta)$ 做类似傅里叶分解：

$$f(\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}f_np_n(\cos\theta).$$

其中

$$f_n=\frac{\int_0^{\pi}f(\cos\theta)p_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta}{\int_0^{\pi}p_n^2(\cos\theta)\sin\theta d\theta}=\frac{\int_{-1}^{1}f(x)p_n(x)dx}{\int_{-1}^{1}p_n^2(x)dx}.$$

对照得，$A_n=\frac{f_n}{a^n}$ 以及

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(\frac{r}{a})^np_n(\cos\theta).$$

为了求系数，我们需要将连续函数沿着p_n 做傅里叶分解。由SL 理论，$\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ 是一组完备正交基，从而可以把$[-1,1]$上的符合边界条件的连续函数分解为$\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的线性组合，且一致收敛，不符合的也能分解，除了可能边界上不收敛/整体不一致收敛其他都对。从而可以得到几个简单的事实：

(1) 当$m\neq n$ 时候$\int_{-1}^{1}p_n(x)p_m(x)dx=0$；

(2) 设$P_n(x)=a_0+\cdots+a_nx^n$ 为n 次多项式，则$P_n(x)$ 可以由$p_0,p_1,\cdots,p_n$ 线性组合，系数可以用待定系数法确定，且p_n 前面的系数等于$a_n\frac{2^nn!n!}{(2n)!}$；

(3) 如果$m\leq n$，则$\int_{-1}^{1}P_m(x)p_n(x)dx=0$；

(4) 如果多项式$P_n(x)$ 只有奇次项，则展开成$\{p_{2n+1}\}$ 的线性组合；如果多项式$P_n(x)$ 只有偶次项，则展开成$\{p_{2n}\}$ 的线性组合。

例子7. 设有一个半径为a 的金属球，球表面的温度已知，为$f(\cos\theta)=\cos^2(\theta)$，内部无热源，金属球处于热平衡，求温度分布？

解. 取极坐标$(r,\theta,\varphi),r\in[0,a],\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi)$表面温度与$\varphi$无关，由对称性，球内的温度分布也与$\varphi$ 无关，因而可以假设$u=r(r,\theta)$。写出定解问题为：

$$\begin{cases}\Delta u=0,r<a,\theta\in[-\pi,\pi]\\ u|_{r=a}=\cos^2(\theta)\end{cases}$$

由以上讨论可知，

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n-1})p_n(\cos\theta).$$

球心温度有限，因而$B_n=0$，所以

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nr^np_n(\cos\theta).$$

令$r=a$ 得到

$$\cos^2\theta=\sum_{n=0}^{\infty}A_na^np_n(\cos\theta).$$

对照可得，除了p_0,p_2 项之外，其余全部为0。所以

$$\cos^2\theta=A_0+A_2a^2(\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)).$$

解得$A_0=\frac{1}{3},A_2=\frac{2}{3a^2}$。所以

$$u(r,\theta)=\frac{1}{3}+\frac{2r^2}{3a^2}p_2(\cos\theta)=\frac{r^2}{a^2}\cos^2\theta+(\frac{1}{3}-\frac{r^2}{3a^2}).$$

例子8. 设有一个半径为R厚度为$R/2$ 的空心球，外表面的温度为$\cos^2(\theta)$，内表面的温度为$\cos(\theta)$，空心球处于热平衡，求温度分布？

解. 取极坐标$(r,\theta,\varphi),r\in[0,a],\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi)$表面温度与$\varphi$无关，由对称性，空心球内的温度分布也与$\varphi$ 无关，因而可以假设$u=r(r,\theta)$。写出定解问题为：

$$\begin{cases}\Delta u=0,0\leq r\leq a,\theta\in[-\pi,\pi]\\ u|_{r=R}=\cos^2(\theta),\theta\in[-\pi,\pi].\end{cases}$$

由以上讨论可知，

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n-1})p_n(\cos\theta).$$

注意到

$$\cos\theta=p_1(\cos\theta),$$
$$\cos^2\theta=\frac{1}{3}p_0(\cos\theta)+\frac{2}{3}p_2(\cos\theta).$$

分别带入R 和$R/2$ 得$A_n=B_n=0,n\geq 3$ 以及

$$\begin{cases}A_0+\frac{B_0}{R}=\frac{1}{3}\\ A_0+\frac{2B_0}{R}=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_1R+\frac{B_1}{R^2}=0\\ \frac{A_1R}{2}+\frac{4B_1}{R^2}=1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_2R^2+\frac{B_2}{R^3}=\frac{2}{3}\\ \frac{A_2R^2}{4}+\frac{8B_2}{R^3}=0.\end{cases}$$

解得$A_0=\frac{2}{3},B_0=-\frac{R}{3},A_1=-\frac{2}{7R},B_1=\frac{2}{7}R^2,A_2=\frac{64}{93R^2},B_2=-\frac{2}{93}R^3$。最终结果我们就直接省略了。

关于半球问题：第一类边界条件奇展开，且只有奇数次项；第二类边界条件偶展开，且只有偶次项。

例子9. *设有一个半径为a 的金属半球，球表面的温度已知，为$\cos^2(\theta)$，内部无热源，金属半球处于热平衡，根据以下情况分别求温度分布？*

(1) 底部绝热；

(2) 底部恒温$=0$。

解. *(1)把半球补成一个完整得球，要使得底部绝热，仅需让球得表面温度上下对称即可，即*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 \le r \le a, \theta \in [-\pi, \pi] \\ u|_{r=R} = \cos^2(\theta). \end{cases}$$

就是上上例子。

(2)把半球补成一个完整得球，要使得底部恒温0，仅需让球得表面温度上下反对称即可，即

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 \le r \le a, \theta \in [-\pi, \pi] \\ u|_{r=R} = \cos^2(\theta), \theta \in [-\pi, 0] \\ u|_{r=R} = -\cos^2(\theta), \theta \in [0, \pi]. \end{cases}$$

我们暂时没法求系数。

0.5.1 勒让德函数的母函数与递推公式

勒让德函数的母函数为

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}, x \in [-1,1], -1 < t < +1.$$

我们尝试对t 在0 点Tayler展开。

$$(1+s)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})!}{k!(-\frac{1}{2}-k)!} s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} s^k.$$

回忆Γ 函数，$\Gamma(x+1) = x!$。所以

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} (t^2-2xt)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} t^k(t-2x)^k.$$

t^n 前面的系数

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} C_k^{n-k}(-2x)^{2k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(2k-n+1)} (-2x)^{2k-n}.$$

注意到

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

所以
$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-k)} = (\frac{1}{2}-k)\times(\frac{1}{2}-(k-1))\times\cdots\times(\frac{1}{2}-1) = \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!}.$$
所以t^n 前系数为
$$= \sum_{k=\lceil\frac{n}{2}\rceil}^{n} \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!}\frac{1}{(n-k)!(2k-n)!}(-2x)^{2k-n}.$$
其中$=\lceil\frac{n}{2}\rceil$ 为不小于$\frac{n}{2}$ 的最小整数。替换$l=n-k$ 则有上式等于
$$\sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^{n-l}(2n-2l)!}{2^{2n-2l}(n-l)!}\frac{1}{l!(n-2l)!}(-2x)^{n-2l} = \sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^l(2n-2l)!}{2^n(n-l)!l!(n-2l)!}x^{n-2l} = p_n(x).$$
所以
$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)t^n.$$
令$x=1$ 得
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$
对照得
$$p_n(1) = 1.$$
令$x=-1$ 得
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(-1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1+2t+t^2}} = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n.$$
对照得
$$p_n(-1) = (-1)^n.$$
令$x=0$ 得
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(0)t^n = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2}-k)}t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!k!}t^{2k}.$$
对照得: n 为奇数，则$p_n(0)=0$；$n=2k$ 为偶数，则$p_n(0)=\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!k!}$。利用母函数可以导出勒让德多项式的递推公式($n\geq 1$)。

(1) $(n+1)p_{n+1}(x) - x(2n+1)p_n(x) + np_{n-1}(x) = 0$；

(2) $np_n(x) - xp'_n(x) + p'_{n-1}(x) = 0$；

(3) $np_{n-1}(x) - p'_n(x) + xp'_{n-1}(x) = 0$；

(4) $p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) = (2n+1)p_n(x)$。

证明. 记$\varphi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$，则
$$\varphi_t = (x-t)\varphi^3,$$
$$\varphi_x = t\varphi^3.$$

先证明*(1)*

$$\varphi_t=\sum_{n=1}^{\infty}np_n(x)t^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)p_{n+1}(x)t^n,$$

$$2t\varphi_t+\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)p_n(x)t^n,$$

$$t\varphi+t^2\varphi_t=\sum_{n=0}^{\infty}np_{n-1}(x)t^n=\sum_{n=1}^{\infty}np_{n-1}(x)t^n.$$

所以

$$\sum_{n\geq 0}((n+1)p_{n+1}(x)-x(2n+1)p_n(x)+np_{n-1}(x))t^n=\varphi_t-2xt\varphi_t-x\varphi+t\varphi+t^2\varphi_t.$$

注意到

$$\varphi_t-2xt\varphi_t+t^2\varphi_t=[1-2xt+t^2](x-t)\varphi^3=(x-t)\varphi.$$

所以$(n+1)p_{n+1}(x)-x(2n+1)p_n(x)+np_{n-1}(x)=0,n\geq 1.$

再证明*(2)*.

$$\varphi_x=\sum_{n=0}^{\infty}p_n'(x)t^n=\sum_{n=1}^{\infty}p_n'(x)t^n.$$

所以

$$t\varphi_t-x\varphi_x+t\varphi_x=\sum_{n\geq 1}(np_n(x)-xp_n'(x)+p_{n-1}'(x))t^n.$$

注意到

$$t\varphi_t-x\varphi_x+t\varphi_x=[t(x-t)-xt+t^2]\varphi^3=0.$$

所以$np_n(x)-xp_n'(x)+p_{n-1}'(x)=0,n\geq 1$。

再证明*(3)*.

$$(t\varphi+t^2\varphi_t)-\varphi_x+tx\varphi_x=\sum_{n\geq 1}(np_{n-1}(x)-p_n'(x)+xp_{n-1}'(x))t^n.$$

注意到

$$(t\varphi+t^2\varphi_t)-\varphi_x+tx\varphi_x=t\varphi+[t^2(x-t)-t+t^2x]\varphi^3=t\varphi-t[1-2xt+t^2]\varphi^3=0.$$

所以$np_{n-1}(x)-p_n'(x)+xp_{n-1}'(x),n\geq 1$。

最后证明*(4)*.

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_x}{t}-t\varphi_x-(2t\varphi_t+\varphi)&=p_1'(x)-p_0(x)+\sum_{n\geq 1}(p_{n+1}'(x)-p_{n-1}'(x)-(2n+1)p_n(x))t^n\\&=\sum_{n\geq 1}(p_{n+1}'(x)-p_{n-1}'(x)-(2n+1)p_n(x))t^n.\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{\varphi_x}{t}-t\varphi_x-(2t\varphi_t+\varphi)=-\varphi+[1-t^2-2t(x-t)]\varphi^3=\varphi+\varphi=0.$$

所以$p_{n+1}'(x)-p_{n-1}'(x)=(2n+1)p_n(x)$。

例子10. $m, n \geq 0$ 正整数，求积分

$$\int_0^1 x^m p_n(x) dx.$$

解. 我们先处理两种简单情形。

$n = 0$ 时候，化为$\int_0^1 x^m p_0(x) dx = \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$.

$m = 0, n \geq 1$ 的时候，

$$\int_0^1 p_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} \int_0^1 p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) dx = \frac{-p_{n+1}(0) + p_{n-1}(0)}{2n+1}.$$

特别地，当n 为非零偶数的时候为0。

当$m, n \geq 1$ 的时候，

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^m p_n(x) dx &= \frac{1}{n} \int_0^1 x^m (x p'_n(x) - p'_{n-1}(x)) dx \\
&= \frac{1}{n} \left((x^{m+1} p_n(x) - x^m p_{n-1}(x))|_0^1 - \int_0^1 (m+1) x^m p_n(x) - m x^{m-1} p_{n-1}(x) dx \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(- \int_0^1 (m+1) x^m p_n(x) - m x^{m-1} p_{n-1}(x) dx \right).
\end{aligned}$$

整理得

$$\int_0^1 x^m p_n(x) dx = \frac{m}{m+n+1} \int_0^1 x^{m-1} p_{n-1}(x) dx.$$

$(m, n) \to (m-1, n-1)$ 重复上述过程最终可以化成简单情形。而且容易看出把积分区域换成$[-1, 0]$或者$[-1, 1]$，这种流程依然成立。例如

$$\int_{-1}^1 p_4(x) x^4 dx = \frac{4}{9} \int_{-1}^1 p_3(x) x^3 dx = \frac{4}{21} \int_{-1}^1 p_2(x) x^2 dx = \frac{8}{105} \int_{-1}^1 p_1(x) x^1 dx = \frac{8}{315} \int_{-1}^1 p_0(x) x^0 dx = \frac{16}{315}.$$

0.5.2 勒让德傅里叶展开

在处理勒让德固有值问题的时候，我们需要求

$$\int_{-1}^1 p_n^2(x) dx.$$

为此，我们将母函数平方后从-1 到1 做积分。

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1 - 2xt + t^2} dx = \sum_n \sum_m \int_{-1}^1 p_n(x) p_m(x) t^{m+n} dx.$$

左边原函数$\frac{\ln(1-2xt+t^2)}{-2t}$，所以

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1 - 2xt + t^2} dx = \frac{\ln(1 - 2xt + t^2)}{-2t}|_{-1}^1 = \frac{\ln(1+t) - \ln(1-t)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n}.$$

右边由SL 理论，当$m \neq n$ 的时候$\int_{-1}^1 p_n(x) p_m(x) dx = 0$。所以右边等于

$$\sum_n \left(\int_{-1}^1 p_n^2(x) dx \right) t^{2n}.$$

对照得

$$\int_{-1}^{1} p_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}.$$

例子11. 求积分

$$\int_{-1}^{1} p_4(x)(1+x+2x^2+3x^3+4x^4)dx.$$

解. 可以将$1+x+2x^2+3x^3+4x^4$ 展开为

$$1+x+2x^2+3x^3+4x^4 = C_0p_0+C_1p_1+C_2p_2+C_3p_3+C_4p_4.$$

我们只需要关心C_4，因为

$$p_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

所以$C_4 = \frac{32}{35}$。所以

$$\int_{-1}^{1} p_4(x)(1+x+2x^2+3x^3+4x^4)dx = \frac{32}{35}\int_{-1}^{1} p_4^2(x)d(x) = \frac{32}{35}\times\frac{2}{9} = \frac{64}{315}.$$

至此，由SL理论，任何$(-1,1)$ 上得连续有界函数都可以用勒让德多项式展开。

例子12. 将

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < \alpha \\ 1/2 & x = \alpha \\ 1 & \alpha < x < 1. \end{cases}$$

按勒让德多项式展开。

解.

$$\int_{-1}^{1} f(x)p_0(x)dx = \int_{\alpha}^{1} p_0(x)dx = 1-\alpha.$$

当$n \geq 1$,

$$\int_{-1}^{1} f(x)p_0(x)dx = \frac{1}{2n+1}\int_{\alpha}^{1} p_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}\int_{\alpha}^{1} p'_{n+1}(x)-p'_{n-1}(x)dx = \frac{p_{n-1}(\alpha)-p_{n+1}(\alpha)}{2n+1}.$$

所以

$$f(x) = \frac{1-\alpha}{2}p_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{n-1}(\alpha)-p_{n+1}(\alpha)}{2}p_n(x).$$

现在我们可以处理上节的半球问题。

例子13.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 0 \leq r \leq a, \theta \in [-\pi,\pi] \\ u|_{r=R} = \cos^2(\theta), \theta \in [-\pi, 0] \\ u|_{r=R} = -\cos^2(\theta), \theta \in [0,\pi]. \end{cases}$$

解. 由前面的讨论可知，定解问题的解可以表示为

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n-1})p_n(\cos\theta).$$

因为$|u(0,\theta)|<\infty$，所以$B_n=0$。所以

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}A_nr^np_n(\cos\theta).$$

令$r=R$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_nR^np_n(\cos\theta)=\begin{cases}\cos^2(\theta),\theta\in[-\pi,0]\\ -\cos^2(\theta),\theta\in[0,\pi].\end{cases}$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_nR^np_n(x)=f(x)=\begin{cases}x^2,x\in[0,1]\\ -x^2,x\in[-1,0].\end{cases}$$

我们将$f(x)$ 按勒让德多项式分解

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_np_n(x).$$

其中

$$C_n=\frac{\langle f(x),p_n(x)\rangle}{\langle p_n(x),p_n(x)\rangle}.$$

注意到$f(x)$ 为奇函数，所以当n 为偶数得时候，

$$\langle f(x),p_n(x)\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)p_n(x)dx=0.$$

当n 为奇数得时候，如果$n=1$

$$\langle f(x),p_1(x)\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)p_1(x)dx=2\int_0^1x^2p_1(x)dx=\int_0^1xp_0(x)dx=\int_0^1xdx=\frac{1}{2}.$$

当n 为奇数且$n\geq 3$ 时

$$\begin{aligned}\langle f(x),p_n(x)\rangle&=\int_{-1}^{1}f(x)p_n(x)dx\\ &=2\int_0^1x^2p_n(x)dx=\frac{4}{n+3}\int_0^1xp_{n-1}(x)dx=\frac{4}{(n+3)(n+1)}\int_0^1p_{n-2}(x)dx\\ &=\frac{4(p_{n-3}(0)-p_{n-1}(0))}{(n+3)(n+1)(2n-3)}.\end{aligned}$$

所以

$$u=\frac{r}{2R}p_1(\cos\theta)+\sum_{n\text{ 为奇数},n\geq 3}\frac{4(p_{n-3}(0)-p_{n-1}(0))}{(n+3)(n+1)(2n-3)}(\frac{r}{R})^np_n(\cos\theta).$$

例子14. 一个半径为a 的空心金属球壳内部有一个点电荷$4\pi\epsilon_0q$ (ϵ_0 是真空介电常数)，它与球心的距离为b，求球内电势分布。

解. 假设点电荷处于z 正轴上，则由轴对称性，电势与φ 无关。我们可以把电势分成两部分，一部分是由点电荷产生的电势为

$$\varphi_1(x,y,z)=\frac{q}{\rho(x,y,z)}$$

其中

$$\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}=\sqrt{r^2\sin^2\theta+(r\cos\theta-b)^2}=\sqrt{r^2-2br\cos\theta+b^2}.$$

另一部分是由球壳上的感应电荷产生的电势，满足

$$\begin{cases}\Delta u=0 & x^2+y^2+z^2<a^2\\ u|_{r=a}=-\frac{q}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+(a\cos\theta-b)^2}}\end{cases}$$

上述定解问题的解可以表示为

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}(A_nr^n+B_nr^{-n-1})p_n(\cos\theta).$$

球壳上的感应电荷在球心的电势有界，所以$B_n=0$。所以

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}A_nr^np_n(\cos\theta).$$

我们将边界电势按勒让德多项式进行分解

$$-\frac{q}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+(a\cos\theta-b)^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_np_n(\cos\theta).$$

其中

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\times\int_0^{\pi}-\frac{q}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+(a\cos\theta-b)^2}}p_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta=-\frac{(2n+1)q}{2a}\int_{-1}^{1}\frac{p_n(x)}{\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2-2\frac{b}{a}x}}dx.$$

由母函数公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{p_n(x)}{\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2-2\frac{b}{a}x}}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}p_n(x)p_k(x)(\frac{b}{a})^kdx=(\frac{b}{a})^n\times\frac{2}{2n+1}.$$

所以，

$$C_n=-\frac{b^nq}{a^{n+1}}=A_na^n\Rightarrow A_n=-\frac{b^nq}{a^{2n+1}}.$$

所以

$$u=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^nq}{a^{2n+1}}r^np_n(\cos\theta)=-\frac{q}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{br}{a^2})^np_n(\cos\theta).$$

再次用母函数公式。

$$u=-\frac{q}{a}\times\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{br}{a^2}\cos\theta+(\frac{br}{a^2})^2}}=-\frac{q}{\sqrt{a^2-2br\cos\theta+(\frac{br}{a})^2}}.$$

所以电势

$$\varphi=\varphi_1+u=\frac{q}{\sqrt{r^2-2br\cos\theta+b^2}}-\frac{q}{\sqrt{a^2-2br\cos\theta+(\frac{br}{a})^2}}$$