2.18 1) 求下列每个连续时间信号的自相关函数：

a) $x(t)=\cos\omega_0 t$　　b) 如图所示的信号 $x(t)$　　c) 如图所示 $x(t)$

解：

(a) $R_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\,x(t-\tau)\,dt$

$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\omega_0 t\cos(\omega_0 t-\omega_0\tau)\,dt$

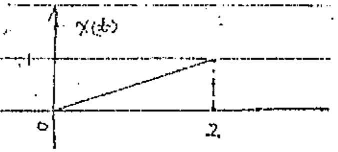
$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\cos(2\omega_0 t-\omega_0\tau)+\cos\omega_0\tau]\,dt$

$=\frac{1}{4\pi}\left[\sin(2\omega_0 t-\omega_0\tau)/2\omega_0+\cos\omega_0\tau\cdot t\right]\Big|_0^{2\pi}$

$=\frac{1}{4\pi}[(\sin(4\pi\omega_0-\omega_0\tau)+\sin\omega_0\tau)/2\omega_0+2\pi\cos\omega_0\tau]$

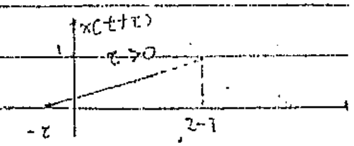
(b)

$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,x(t+\tau)\,dt$

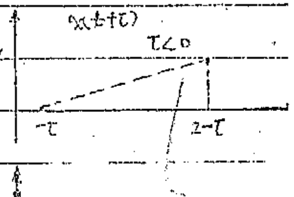


作图解：如图

函数法：$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t & 0\le t\le 2\\ 0 & t<0,\ t>2\end{cases}$



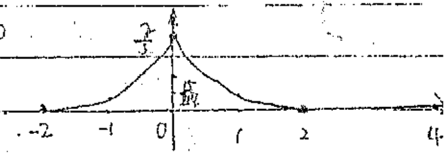
$\therefore$ $x(t+\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t+\tau) & -\tau\le t\le 2-\tau\\ 0 & t<-\tau,\ t>2-\tau\end{cases}$



当 $\tau>2$ 时 $x(t)\cdot x(t+\tau)=0$, $\tau<-2$, $x(t)x(t+\tau)=0$

$\therefore$ $0\le\tau\le 2$ 时　$R_x(\tau)=\int_0^{2-\tau}\frac{1}{2}t\cdot\frac{1}{2}(t+\tau)\,dt$

$=\frac{(2-\tau)^3}{12}+\frac{(2-\tau)^2\tau}{8}+0$

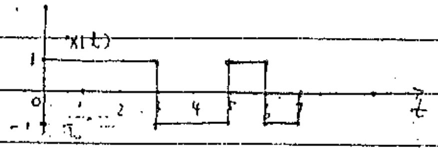


$-2\le\tau<0$ 时　$R_x(\tau)=\int_{-\tau}^{2}\frac{1}{2}t\cdot\frac{1}{2}(t+\tau)\,dt$

$=\frac{2}{3}+\frac{\tau}{2}-\frac{\tau^3}{24}$

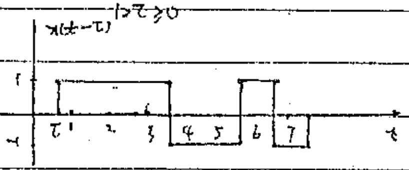
$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)\,dt$$

$$x(t)=\begin{cases} 1 & 0\le t<3,\ 5\le t<6 \\ 0 & t<0,\ t\ge 7 \\ -1 & 3\le t<5,\ 6\le t<7 \end{cases}$$

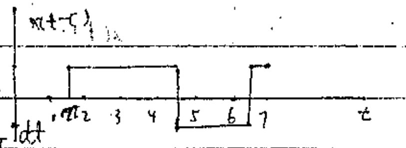


当$\tau>0$时：

$$x(t-\tau)=\begin{cases} 1 & \tau\le t<3+\tau,\ 5+\tau\le t<6+\tau \\ 0 & t<\tau,\ t\ge 7+\tau \\ -1 & 3+\tau\le t<5+\tau,\ 6+\tau\le t<7 \end{cases}$$

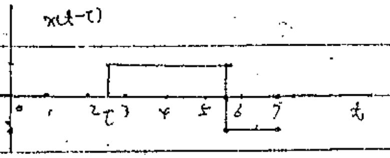


当$0\le\tau<1$时：
$$R_x(\tau)=\int_\tau^3 dt-\int_3^{3+\tau}dt+\int_{3+\tau}^5 dt-\int_5^{5+\tau}dt+\int_{5+\tau}^6 dt-\int_6^{6+\tau}dt+\int_{6+\tau}^7 dt$$
$$=3-\tau-\tau+2-\tau-\tau+1-\tau-\tau+1-\tau$$
$$=7-7\tau$$

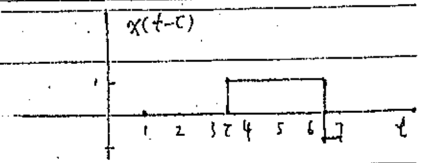


当$1\le\tau<2$时：
$$R_x(\tau)=\int_\tau^3 dt-\int_3^{\tau+3}dt+\int_{\tau+3}^5 dt-\int_5^6 dt+\int_6^{5+\tau}dt-\int_{5+\tau}^7 dt$$
$$=3-\tau-\tau+2-\tau-1+\tau-1-2+\tau$$
$$=1-\tau$$

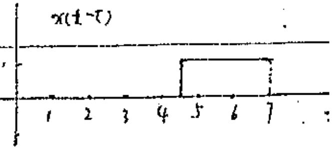
当$2\le\tau<3$时：
$$R_x(\tau)=\int_\tau^3 dt-\int_3^5 dt+\int_5^{3+\tau}dt-\int_{3+\tau}^6 dt+\int_6^7 dt$$
$$=3-\tau-2+\tau-2-3+\tau+1$$
$$=-3+\tau$$



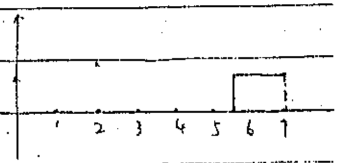
当$3\le\tau<4$时：
$$R_x(\tau)=-\int_\tau^5 dt+\int_5^6 dt-\int_6^{3+\tau}dt+\int_{3+\tau}^7 dt$$
$$=-5+\tau+1+3-\tau+4-\tau$$
$$=3-\tau$$



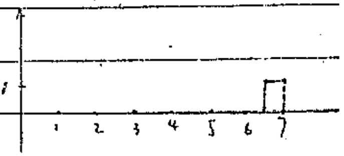
当$4\le\tau<5$时
$$R_x(\tau)=-\int_\tau^5 dt+\int_5^6 dt-\int_6^7 dt$$
$$=-5+\tau+1-1$$
$$=\tau-5$$



当$5\le\tau<6$时
$$R_x(\tau)=\int_\tau^6 dt-\int_6^7 dt=6-\tau-1$$
$$=5-\tau$$

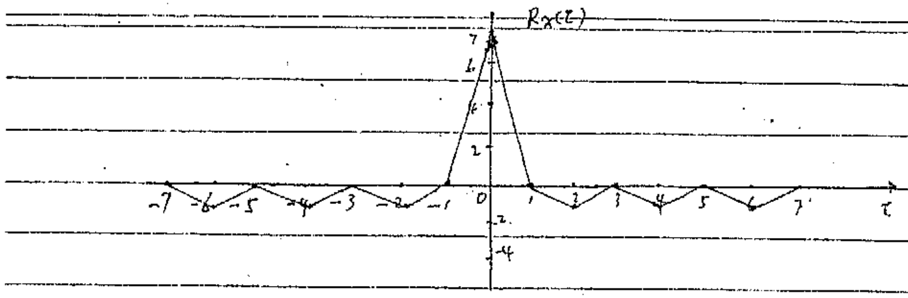


当$6\le\tau<7$时：
$$R_x(\tau)=-\int_\tau^7 dt=\tau-7$$



当 $\tau>7$时 $R_x(\tau)=0$

综上所述作图利用$R_x(\tau)$的偶对称性画出$\tau<0$部分图像。



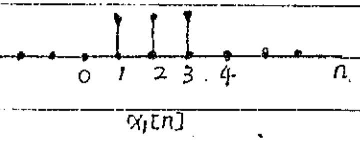
对如图所示的离散时间信号 $x[n]$, $x_2[n]$, $x_3[n]$ 和 $x_4[n]$ 分别计算它们的自相关序列

$x[n]$为实能量信号，其自相关函数为:

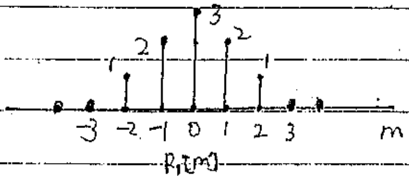
$$R_x[m]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+m]\,x[n]$$

i) 列表法:

	0	1	2	3	4	
m=0	0	1	1	1	0	3
m=-1	0	0	1	1	1	2
m=-2	0	0	0	1	1	1
m=-3	0	0	0	0	1	0

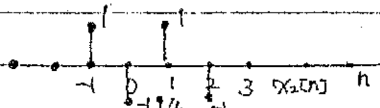


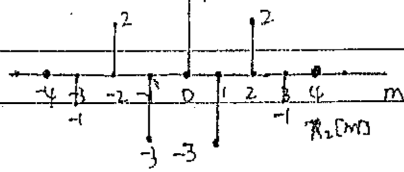
作出图



ii)

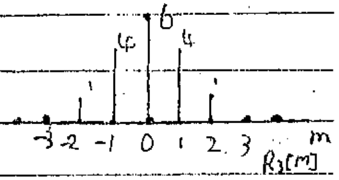
	-1	0	1	2	3	
	1	-1	1	-1	0	
m=0	1	-1	1	-1	0	4
m=-1	0	1	-1	1	-1	-3
m=-2	0	0	1	-1	1	2
m=-3	0	0	0	1	-1	-1
m=-4	0	0	0	0	1	0





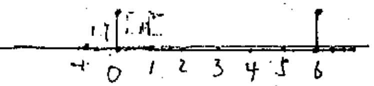
iii)

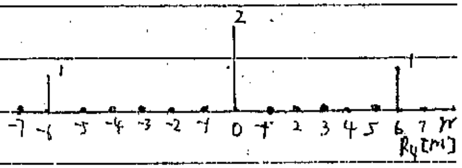
	-1	0	1	2	
	1	2	1	0	
m=0	1	2	1	0	6
m=-1	0	1	2	1	4
m=-2	0	0	1	2	1
m=-3	0	0	0	1	0



iv)

	0	1	2	3	4	5	6	
	1	0	0	0	0	0	1	
m=0	1	0	0	0	0	0	1	2
m=-1	0	1	0	0	0	0	0	0
m=-6	0	0	0	0	0	0	1	1
m=-7	.	.	.	.	.	.	0	0





2.31 判断用下列输入关系描述的每一个系统是否可逆，如果可逆的，试写出其逆系统的输出关系，如果不可逆，试写出使该系统具有相同输出的两个输入信号:

解: 2) $y=n\,x[n]$ 不可逆 $n=0$时 $x[0]=1$与$x[0]=2$的输出$y[0]=0$

4) $y(t)=x(t)u(t)$ 不可逆 $x(t)$与$x(t)$在 $t\geq 0$ 且 $t<0$ 具有相同输出

6) $y[n]=x[2n]$ 可逆

$z[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m]\, Sa(\frac{\pi}{2}(n-m2))$

$x[n/2]$

8) $y[n]=x_{(2)}[n]$ （可逆 $z[n]=y[n]\cdot R_2(n)$）都换。

10) $y(t)=|x(t)|$ 不可逆 $x(t)=1$ 与 $x(t)=-1$ 有相同输出

12) $y(t)=\int_{-\infty}^{3t} x(\tau)d\tau$ 可逆 $z(t)=\frac{dy(t)}{dt}\cdot\frac{1}{3}$；$z(t)=z(\frac{t}{3})$ ∴ $z(t)=\frac{dy(\frac{t}{3})}{dt}$

14) $y[n]=x[n]\{u[n]-u[n-1]\}$ 不可逆 $x[n]=1$ 与 $x[n]=\begin{cases}1 & n\ge 0\\ -1 & n<0\end{cases}$ 有相同的输出

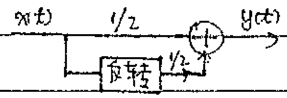
16) $y[n]=\begin{cases}x[n+1] & n\ge 0\\ x[n] & n<0\end{cases}$ 不可逆 $x[n]=\begin{cases}1 & n=0,1\\ 0 & n\ne 0,1\end{cases}$ 与 $x[n]=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n\ne 1\end{cases}$

具有相同的输出.

2.33 1) 试求出图P2.33所示的每个系统的输出输入之间的显式信号变换表达式。

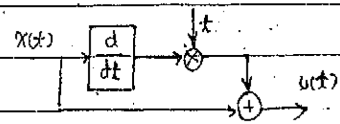
2) 在弄清图中每个系统功能的基础上，试画出其等效的系统。

解: (a) $\frac{1}{2}(x(t)+x(-t))=y(t)$

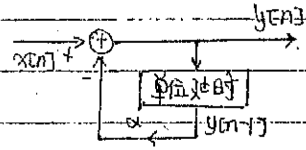


(a)

(c) $t\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=y(t)$



(e) $x[n]-\alpha y[n-1]=y[n]$



2.42 下列系统哪些是增量线性的？说明理由。如果某个系统是增量线性的，针对如示的增量线性系统结构，指出相应的线性系统 $L\{x\}$ 和零输入响应 $y_{zi}(t)$ 或 $y_{zi}[n]$

1) $y[n]=n+x[n]+2x[n+4]$

解: $y_1[n]-y_2[n]=n+x_1[n]+2x_1[n+4]-(n+x_2[n]+2x_2[n+4])$

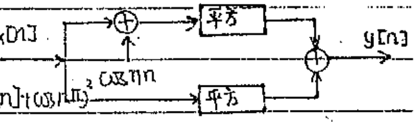
$=(x_1[n]-x_2[n])+2(x_1[n+4]-x_2[n+4])$ ∴为线性增量

∴ $y_{zi}[n]=n$ $L\{x\}$为 $y_L[n]=x[n]+2x[n+4]$

3) 如图所示系统

求出输入输出关系式:

$x^2[n]+(x[n]+\cos n\pi)^2=y[n]$



∴ $y_1[n]-y_2[n]=x_1^2[n]-x_2^2[n]+(x_1[n]+\cos n\pi)^2-(x_2[n]+\cos n\pi)^2$

$=(x_1[n]-x_2[n])(x_1[n]+x_1[n])+(x_1[n]-x_2[n])(x_1[n]+x_2[n]+2\cos n\pi)$

$= (x_1[n]-x_1[n])(2x_1[n]+2x_2[n]+2\cos n\pi)$ 为非线性增量系统

5) $y[n]=\begin{cases} n/2, & n=2l \\ \frac{n-1}{2}+\sum_{k=-\infty}^{(n-1)/2} x[k], & n\neq 2l \end{cases} \quad l=0,\pm1,\pm2\cdots$

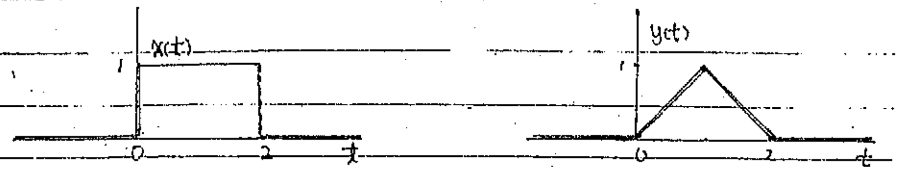
$y_1[n]-y_2[n]=\begin{cases} 0 & n=2l \\ \sum_{k=-\infty}^{(N-1)/2} x_1[k]-\sum_{k=-\infty}^{(N-1)/2} x_2[k] & n\neq 2l \end{cases} \quad l=0,\pm1,\pm2\cdots$

为 线性增量系统：

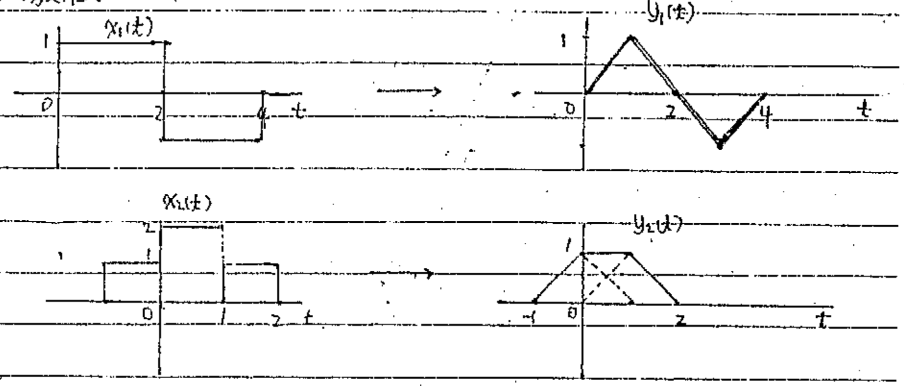
$y_{zi}(n)=\begin{cases} n/2 & n=2l \\ \frac{n-1}{2} & n\neq 2l \end{cases} \quad l=0,\pm1\cdots$

$y_{L}(n)=\begin{cases} 0 & n\neq 2l \\ \sum_{k=-\infty}^{(n-1)/2} x[k], & n\neq 2l \end{cases} \quad l=0,\pm1\cdots$

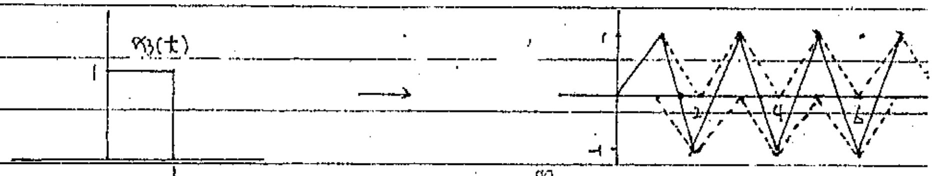
3.1 已知一个连续时间LTI系统对如图所示信号 $x(t)$ 的响应是(2)图所示 $y(t)$



1) 对如图所示的 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，分别确定该系统对它们的的响应 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$，并画出它们的波形。



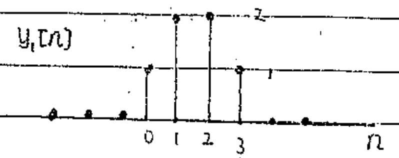
2) 试求系统如图所输入 $x_3(t)$ 的响应 $y_3(t)$ 并概画出其波形。



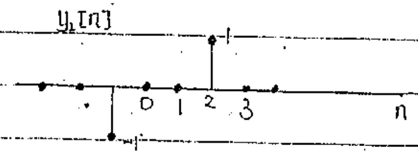
$x_3(t)= x(t)-x(t-1)+x(t-2)-x(t-3)\cdots+(-1)^n x(t-n)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x(t-n)$

2 解: (b) $x_1[n]=x[n]+x[n-1] \Rightarrow y_1[n]=y[n]+y[n-1]$

∴

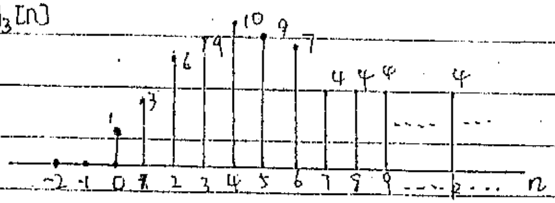


(d) $x_2[n]=x[n]-x[n+1] \Rightarrow y_2[n]=y[n]-y[n+1]$



(e) $x_3[n]=x[n]+2x[n-1]+3x[n-2]+4x[n-3]+3x[n-4]+2x[n-5]+\cdots+2x[n-k]$ $k\geq 5$, $k\to\infty$

∴ $y_3[n]$



3 1) $x[n]=h[n]=u[n]$

解: 解析法 $y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]h[n-m]$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u[m]u[n-m]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}u[m]u[n-m]$$

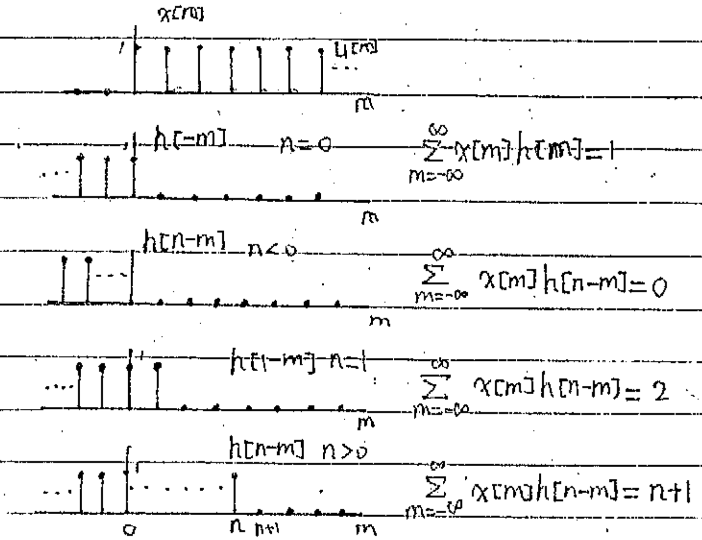
$n=0$ $y[n]=1$

$n<0$ $y[n]=0$ $\Rightarrow$ $y[n]=\begin{cases}1 & 0\leq m\leq n\ (n\geq 0)\\ 0 & m>n;\ n<0\end{cases}$

$n=1$ $y[n]=2$

∴ $y[n]=n+1$ $n\geq 0$

图解法:



3) $x(t)=\cos\omega t\, u(-t)$, $h(t)=u(t)$

解:

∴ $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega\tau\, u(-\tau)u(t-\tau)d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{0}\cos\omega\tau\, u(t-\tau)d\tau$$

令 $t-\tau\geq 0 \Rightarrow \tau\leq t$

对t展开讨论: i: $t=0$时 $\therefore y(0)=\int_{-\infty}^{0}\cos\omega\tau\, u(-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{0}\cos\omega\tau\, d\tau$

$$= \sin\omega\tau/\omega \Big|_{-\infty}^{0}$$

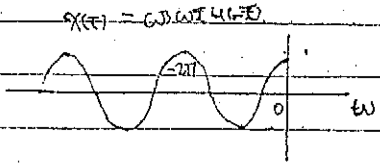
$$= \sin(\infty\omega)/\omega$$

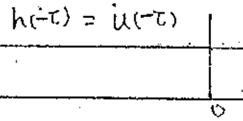
ii: $t<0$时:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\cos\omega\tau\, d\tau=\frac{\sin\omega t}{\omega}+\frac{\sin\infty\omega}{\omega}$$

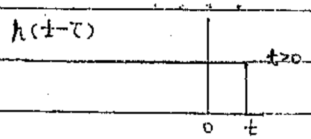
ii $t>0$时: $y(t)=\int_{-\infty}^{0}\cos\omega\tau\, d\tau=\frac{\sin\infty\omega}{\omega}$

图解法:

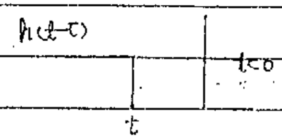




$t=0$ $y(0)=\int_{-\infty}^{0}\cos\omega\tau\, d\tau$



$y(t)=\int_{-\infty}^{0}\cos\omega\tau\, d\tau$



$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\cos\omega\tau\, d\tau$

5) $x(t)=e^{t}u(-t)$, $h(t)=u(-t)$

解: 解析法:

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\tau}u(-\tau)h(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\tau}u(-\tau)u(-(t-\tau))\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\tau}u(-\tau)u(\tau-t)\,d\tau=\int_{-\infty}^{0}e^{\tau}u(\tau-t)\,d\tau$$

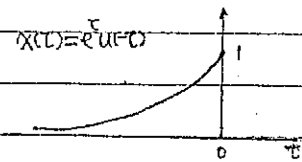
$t=0$时, $y(0)=\int_{-\infty}^{0}e^{\tau}u(\tau)\,d\tau=0$

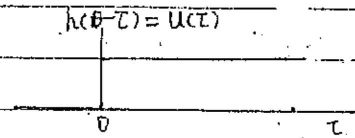
$t<0$时:

$$y(t)=\int_{t}^{0}e^{\tau}\,d\tau=1-e^{t}$$

$t>0$时: $y(t)=0$

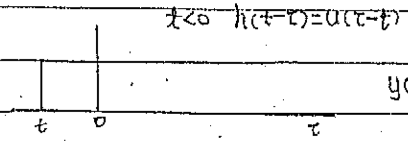
图解法:



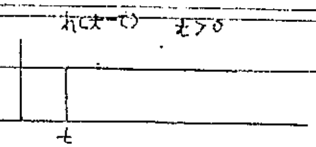


$t=0$

$y(0)=0$

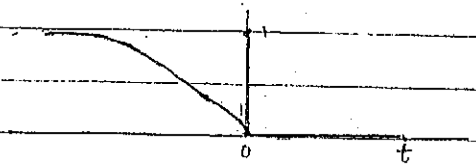


$y(t)=\int_{t}^{0}e^{\tau}\,d\tau=1-e^{t}$



$y(t)=0$

$y(t)$图:



3.4 对于 $a=b$ 和 $a\neq b$ 的两种情况，用解析法计算如下卷积和或卷积积分，根据画出它们的波形或序列图。

1) $a^n u[n] * b^n u[n]$ 2) $e^{-at}u(t) * e^{-bt}u(t)$

解 1) $a\neq b$ $a^n u[n] * b^n u[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a^m u[m]\, b^{n-m} u[n-m]$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a^m b^{n-m} u[n-m] \quad ①$$

$n=0$； ①式 $= \sum_{m=0}^{\infty} a^m b^{-m} u[-m] = 1$

$n<0$； ①式 $= 0$

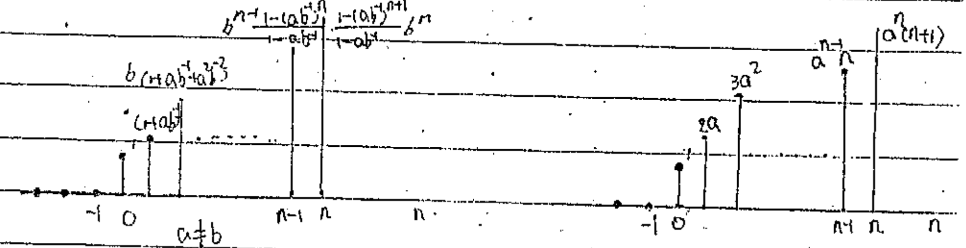
$n>0$； ①式 $= \sum_{m=0}^{n} a^m b^{n-m} = b^n \frac{1-(ab^{-1})^{n+1}}{1-ab^{-1}}$

$a=b$ 时 可令①式中 b 为 a 则可得：

卷积和：$\sum_{m=0}^{\infty} a^n u[n-m]$

同理可讨论得：

$$\sum_{m=0}^{\infty} a^n u[n-m] = \begin{cases} 0 & n<0 \\ 1 & n=0 \\ a^n(n+1) & n>0 \end{cases}$$



2) 令 $y(t) = e^{-at}u(t) * e^{-bt}u(t) \quad a\neq b$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau}u(\tau)\cdot e^{-b(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-a\tau} e^{b(\tau-t)} u(t-\tau)\,d\tau \quad ②$$

$t=0$ 时 ②式 $= \int_0^{\infty} e^{-a\tau} e^{b\tau} u(-\tau)\,d\tau = 0$

$t<0$ 时 $y(t) = \int_0^{\infty} e^{-a\tau} e^{b(\tau-t)}\cdot 0\, d\tau = 0$

$t>0$ $y(t) = \int_0^{t} e^{-a\tau} e^{b(\tau-t)}\,d\tau = e^{-bt}\int_0^{t} e^{(b-a)\tau}\,d\tau$

$= e^{-bt} \cdot \frac{e^{(b-a)\tau}}{b-a}\Big|_0^t$

$= e^{-bt}\left(e^{(b-a)t}/b-a - \frac{1}{b-a}\right)$

$= \frac{e^{-at}}{b-a} - e^{-bt}/b-a$

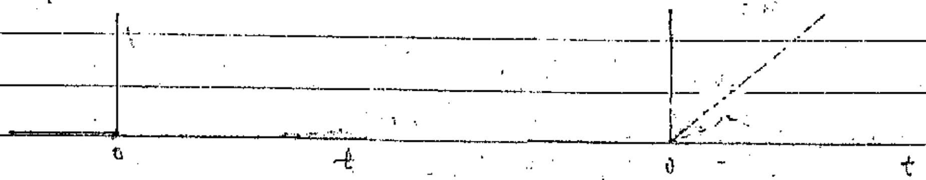
$a=b$; $y'(t) = \int_0^{\infty} e^{-a t} u(t-\tau)\,d\tau$

$t=0 \quad y(0)=0$

$t<0 \quad y(t)=0$

$t>0 \quad y(t) = \int_0^t e^{-a t} d\tau = t e^{-at}$

令 $b-a>0$



5 用列表计算法计算下列各对离散时间序列的卷积和 $y[n] = x[n]*h[n]$

1) $x[n]$ 和 $h[n]$ 的序列值列表分别如下

n	0	1	2	3	其他n
x[n]	1	0	-2	1	0

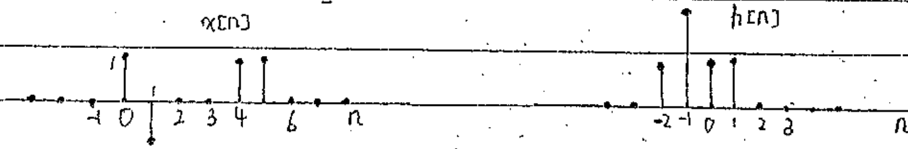
n	-1	0	1	其他n
h[n]	1	-1	1	0

解:

		1	0	-2	1	0		x[m]	
1	-1	1						h[n-m]	1
	1	-1	1						-1
		1	-1	1					-3
			1	-1	1				3
				1	-1	1			3
					1	-1	1		1

$\therefore h[n] = 1,-1,-1,3,3,1 \quad n=-1,0,1,\cdots,4$ 其余 $h[n]=0$

2) $x[n]$ 和 $h[n]$ 如图



解:

```
x[n]       1 -1 0 0 1 1
h[n]   ×        1 2 1 1
        1 -1 0 0 1 1
+    1 -1 0 0 1 1
   2 -2 0 0 2 2
 1 -1 0 0 1 1
 1 1 -1 0 0 3 3 2 1
```

$\because y[n] = x[n]*h[n]$ 的起始移动点是 $n=-2$ 点,

$\therefore y[n] = 1,1,-1,0,0,3,3,2,1 \quad n=-2,-1,0,\cdots\cdots 6$

其余 $y[n]=0$

3.6 利用卷积的性质，试求下列各对离散时间序列的卷积 $y[n]=x[n]*h[n]$，并根据画出 $y[n]$ 的序列图

2) $x[n]=(-1)^n u[n]$ ， $h[n]=u[n]-u[n-6]$

解 $$(-1)^n u[n]*u[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m u[m]*u[n-m]$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m u[n-m]$$
$$= \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \quad n\geq 0$$
$$= \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}u[n]$$

根据卷积时移性质：

$$\therefore\ (-1)^n u[n]*u[n-6] = \frac{1-(-1)^{n-5}}{2}u[n-6]$$

$$\therefore\ x[n]*h[n] = (-1)^n u[n]*u[n] - (-1)^n u[n]*u[n-6]$$
$$= \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}u[n] - \frac{1-(-1)^{n-5}}{2}u[n-6]$$

(4) $x[n]=\begin{cases}(1/2)^n & n\geq 0\\ 4^n & n<0\end{cases}$ $\quad h[n]=u[n]-u[-n]$

解：令 $x_1[n]=\begin{cases}(\frac{1}{2})^n & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}=(\frac{1}{2})^n u[n]$ $\quad x_2[n]=\begin{cases}0 & n\geq 0\\ 4^n & n<0\end{cases}=4^n u[-n]$

$$\therefore\ x[n]=x_1[n]+x_2[n]$$

$$\therefore\ x[n]*h[n]=(x_1[n]+x_2[n])*(u[n]-u[-n])$$
$$= x_1[n]*u[n]-x_1[n]*u[-n]+x_2[n]*u[n]-x_2[n]*u[-n]$$

由上题： $$\frac{1}{2}^n u[n]*u[n] = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}u[n]$$

$$\frac{1}{2}^n u[n]*u[-n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^m u[m]\cdot u[-(n-m)]$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^m u[m-n]$$
$$= \begin{cases}\frac{1-0}{\frac{1}{2}}=2 & n\leq 0\\ \frac{(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}^{(n-1)} & n>0\end{cases}$$
$$= 2u[-n]+(\frac{1}{2})^{n-1}u[n]$$

$$4^n u[-n]*u[n] \overset{令n'=-n}{=\!=\!=} 4^{-n'}u[n']*u[-n'] = (\frac{1}{4})^n u[n]*u[n]$$

由上式中分析知： $$= \frac{4}{3}u[-n]+\frac{(\frac{1}{4})^{n-1}}{3}u[n]$$
$$\overset{代回n'=-n}{=\!=\!=} \frac{4}{3}u[n]+\frac{(\frac{1}{4})^{-n-1}}{3}u[-n]$$

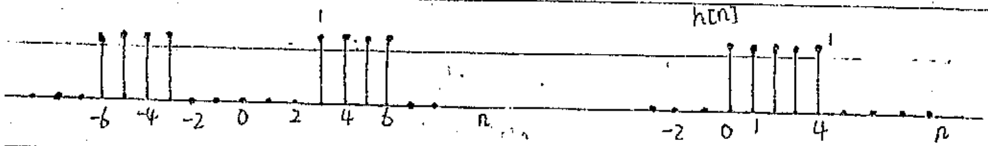
$$4^n u[-n]*u[n] \overset{令n'=-n}{=\!=\!=} 4^{-n}u[n]*u[n]$$
$$= \frac{1-(\frac{1}{4})^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}u[n]$$
$$= \frac{4}{3}(1-(\frac{1}{4})^{n+1})u[n]$$
$$\overset{令n'=-n}{=\!=\!=} \frac{4}{3}(1-(\frac{1}{4})^{-n+1})u[-n]$$

$$\therefore\ x[n]*h[n] = 2(1-(\frac{1}{2})^{n+1})u[n]-2u[-n]-(\frac{1}{2})^{n-1}u[n]+\frac{4}{3}u[n]+\frac{4^{n+1}}{3}u[-n]$$
$$-\frac{4}{3}(1-(\frac{1}{4})^{-n+1})u[-n]$$

$\int_{0}^{t} 2e^{-2\tau}d\tau \Rightarrow -e^{-2\tau}\Big|_0^t = -e^{-2t}+1$

$\frac{2e^{-2(t+1)}}{e^2}\Big|_0^t = \frac{1}{e^2}(-e^{-2t})\Big|_0^t = \frac{1}{e^2}(1-e^{-2t})u(t) = (e^{-2}-e^{-2t+2})$

(6) $x[n]$



解由图知

$x[n] = u[n+6]-u[n+2]+u[n-3]-u[n-7]$

$h[n] = u[n]-u[n-5]$

$\therefore \quad x[n]*h[n] = (u[n+6]-u[n+2]+u[n-3]-u[n-7])(u[n]-u[n-5])$

$\because \quad u[n]*u[n] = (n+1)u[n]$

根据时移性质:

$x[n]*h[n] = (n+7)u[n+6]-(n+3)u[n+2]+(n-2)u[n-3]-(n-6)u[n-7]$

$\quad - (n+2)u[n+1]+(n-2)u[n-3]-(n-7)u[n-8]+(n-1)u[n-12]$

1 利用卷积的性质,计算下列各对连续时间信号的卷积积分 $y(t)=x(t)*h(t)$:

√2) $x(t) = 2e^{-2t}u(t-1) \qquad h(t)=u(t+1)$

解 $u(t)*u(t) = \int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty}u(t-\tau)d\tau = tu(t)$

$2e^{-2t}u(t-1)*u(t+1) \overset{令t+1=T}{=\!=\!=} 2e^{-2(T-1)}u(T-2)*u(T)$

$= \int_{-\infty}^{T} 2e^{-2(\tau-1)}u(\tau-2)d\tau$

$T\geq 2 \quad$ 上式 $= \int_2^T 2e^{-2(\tau-1)}d\tau$

$= -e^{-2\tau+2}\Big|_2^T$

$= (-e^{-2T+2}+e^{-2})$

$\therefore$ 结果 代还

$\therefore$ 原卷积结果 $=(-e^{-2t}+e^{-2})u(t)$

5) $x(t) = \begin{cases} \sin\pi t & 0\leq t\leq 2 \\ 0 & t<0, t>2 \end{cases} \qquad h(t)=u(t-1)-u(t-3)$

解: $x(t) = \sin\pi t(u(t)-u(t-2))$

$\sin\pi t\, u(t)*u(t-1) \overset{令T=t-1}{=\!=\!=} \sin\pi(t+1)u(t+1)*u(t)$

$= \int_{-\infty}^{t}\sin\pi(\tau+1)u(\tau+1)d\tau$

$= \int_{-1}^{t}\sin\pi(\tau+1)d\tau$

$= -\frac{\cos\pi(\tau+1)}{\pi}\Big|_{-1}^{t}$

$= \frac{\cos\pi t+1}{-\pi}$ 代回 $t-1=T$

$= \frac{-\cos\pi t+1}{\pi}u(t-1)$

$\sin\pi t\, u(t)*u(t-3) \overset{时移性质}{=\!=\!=} \frac{-\cos\pi t+1}{\pi}u(t-3)$

$$\sin\pi t\,u(t-2)*u(t-1) = \sin\pi t\,u(t)*\delta(t-2)*u(t)*\delta(t-1)$$
$$= \sin\pi t\,u(t)*u(t)*\delta(t-3)$$
$$= \int_{-\infty}^{t}\sin\pi\tau\,u(\tau)\,d\tau * \delta(t-3)$$
$$= \left(-\frac{\cos\pi\tau}{\pi}\Big|_0^t\right)u(t)*\delta(t-3)$$
$$= \frac{-\cos\pi(t-3)+1}{\pi}u(t-3)$$
$$= \frac{\cos\pi t+1}{\pi}u(t-3)$$

同理,时移: $\sin\pi t\,u(t-2)*u(t-3) = \frac{+\cos\pi t+1}{\pi}u(t-5)$

综上 $$x(t)*h(t) = \frac{-\cos\pi t+1}{\pi}u(t-1) - \frac{-\cos\pi t+1}{\pi}u(t-3) - \frac{\cos\pi t+1}{\pi}u(t-3) + \frac{\cos\pi t+1}{\pi}u(t-5)$$
$$= \frac{-\cos\pi t+1}{\pi}u(t-1) - \frac{2}{\pi}u(t-3) + \frac{\cos\pi t+1}{\pi}u(t-5)$$

7) $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_0(t-4n)$, $h(t)=u(t)$, 其中: $x_0(t) = \begin{cases}\cos\pi t & 0\le t\le 2\\ 0 & t<0,\ t>2\end{cases}$

解: $$x_0(t) = \cos\pi t\,(u(t)-u(t-2))$$
$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty}x_0(t)*\delta(t-4n) = x_0(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-4n)$$
$$= x_0(t)*\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-4n)$$

$$\therefore\ x(t)*h(t) = x_0(t)*\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-4n)*u(t)$$
$$= x_0(t)*u(t)*\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-4n)$$
$$= \left(\cos\pi t\,u(t)*u(t) - \cos\pi t\,u(t-2)*u(t)\right)*\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-4n)$$

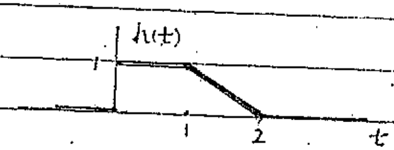
$$\cos\pi t\,u(t)*u(t) = \int_{-\infty}^{t}\cos\pi\tau\,u(\tau)\,d\tau = \int_0^t\cos\pi\tau\,u(\tau)\,d\tau$$
$$= \frac{\sin\pi\tau}{\pi}\Big|_0^t u(t)$$
$$= \frac{\sin\pi t}{\pi}u(t)$$

$$\cos\pi t\,u(t-2)*u(t) = \int_{-\infty}^{t}\cos\pi\tau\,u(\tau-2)\,d\tau = \int_2^t\cos\pi\tau\,d\tau$$
$$= \frac{\sin\pi\tau}{\pi}\Big|_2^t u(t-2)$$
$$= \frac{\sin\pi t}{\pi}u(t-2)$$

代入知

$$\therefore\ x(t)*h(t) = \frac{\sin\pi t}{\pi}(u(t)-u(t-2))*\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-4n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\pi(t-4n)}{\pi}(u(t-4n)-u(t-4n-2))$$

10) $x(t) = \begin{cases}|\sin\pi t| & 0\le t\le 2\\ 0 & t<0,\ t>2\end{cases}$. $h(t)$如图所示



解: 由$x(t)$表达式知:

$$x(t) = \sin\pi t\,(u(t)-u(t-1)) + (-\sin\pi t)(u(t-1)-u(t-2))$$
$$= \sin\pi t\,(u(t)-u(t-1)) + \sin\pi(t-1)(u(t-1)-u(t-2))$$

由图知 $h(t)$: $$h(t) = (u(t)-u(t-1)) - (t-2)(u(t-1)-u(t-2))$$
$$= u(t) - (t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$$

$$\sin\pi t\,u(t)*u(t) = \int_{-\infty}^{t}\sin\pi\tau\,u(\tau)\,d\tau = \int_0^t\sin\pi\tau\,d\tau$$

$$= -\frac{\cos\pi\tau}{\pi}\Big|_0^t u(t)$$

$$= \frac{1-\cos\pi t}{\pi}u(t)$$

$$\sin\pi t\,u(t) * t\,u(t) = \sin\pi t\,u(t) * u(t) * u(t)$$

$$= \frac{1-\cos\pi t}{\pi}u(t) * u(t)$$

$$= \int_0^t \frac{1-\cos\pi\tau}{\pi}d\tau\, u(t)$$

$$= \left(\frac{t}{\pi} + \left(\frac{-\sin\pi\tau}{\pi^2}\right)\Big|_0^t\right)u(t)$$

$$= \left(\frac{t}{\pi} - \frac{\sin\pi t}{\pi^2}\right)u(t)$$

时移性知: $\sin\pi t\,u(t) * (t-1)u(t-1) = \left(\frac{t-1}{\pi} + \frac{\sin\pi t}{\pi^2}\right)u(t-1)$

$\sin\pi t\,u(t) * (t-2)u(t-2) = \left(\frac{t-2}{\pi} + \frac{-\sin\pi t}{\pi^2}\right)u(t-2)$

$$\sin\pi t\,u(t-1) * u(t) = \int_1^t \sin\pi\tau\,d\tau = -\frac{\cos\pi\tau}{\pi}\Big|_1^t u(t-1)$$

$$= \frac{-\cos\pi t-1}{\pi}u(t-1)$$

又∵ $\sin\pi t\,u(t-1) = -\sin\pi(t-1)u(t-1)$

∴

$$\sin\pi t\,u(t-1) * (t-1)u(t-1) = -\left(\frac{t-2}{\pi} - \frac{\sin\pi t}{\pi^2}\right)u(t-2)$$

$$\sin\pi t\,u(t-1) * (t-2)u(t-2) = -\left(\frac{t-3}{\pi} + \frac{\sin\pi t}{\pi^2}\right)u(t-3)$$

综上可知:

则: $\sin\pi t(u(t)-u(t-1)) * (u(t)-(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2))$

$$= \frac{1-\cos\pi t}{\pi}u(t) - \left(\frac{t}{\pi} - \frac{\sin\pi t}{\pi^2}\right)u(t) + \left(\frac{t-2}{\pi} - \frac{\sin\pi t}{\pi^2}\right)u(t-2)$$

$$+ \frac{\cos\pi t+1}{\pi}u(t-1) - \left(\frac{t-2}{\pi} - \frac{\sin\pi t}{\pi^2}\right)u(t-2) + \left(\frac{t-3}{\pi} + \frac{\sin\pi t}{\pi^2}\right)u(t-3)$$

$$= \frac{1-\cos\pi t}{\pi}u(t) + \left(\frac{\sin\pi t}{\pi^2} + \frac{\cos\pi t+1-t}{\pi}\right)u(t-1) + \left(\frac{t-3}{\pi} + \frac{\sin\pi t}{\pi^2}\right)u(t-3)$$

∴ $\sin\pi(t-1)(u(t-1)-u(t-2)) * (u(t)-(t-1)u(t-1)+(t-2)u(t-2))$

$$= \frac{1+\cos\pi t}{\pi}u(t-1) + \left(\frac{-\sin\pi t}{\pi^2} + \frac{-\cos\pi t+1-t+1}{\pi}\right)u(t-2) + \left(\frac{t-4}{\pi} - \frac{\sin\pi t}{\pi^2}\right)u(t-$$

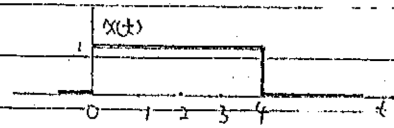
$$= \frac{1+\cos\pi t}{\pi}u(t-1) - \left(\frac{\sin\pi t}{\pi^2} + \frac{\cos\pi t+t-2}{\pi}\right)u(t-2) + \left(\frac{t-4}{\pi} - \frac{\sin\pi t}{\pi^2}\right)u(t-4)$$

综合以上各式知:

∴ $x(t) * h(t) = \frac{1-\cos\pi t}{\pi}u(t) + \left(\frac{\sin\pi t}{\pi^2} + \frac{2\cos\pi t+2-t}{\pi}\right)u(t-1) - \left(\frac{\sin\pi t}{\pi^2} + \frac{\cos\pi t+t-2}{\pi}\right)u(t$

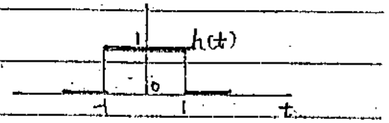
$$+ \left(\frac{t-4}{\pi} - \frac{\sin\pi t}{\pi^2}\right)u(t-4)$$

(3) $x(t)$和$h(t)$如图所示。



解: $x(t) = u(t) - u(t-4)$

$h(t) = u(t+1) - u(t-1)$



$x(t) * h(t) = (u(t)-u(t-4)) * (u(t+1)-u(t-1))$

$= u(t)*u(t+1) - u(t)*u(t-1) - u(t-4)*u(t+1) + u(t-4)*u(t-1)$

$= u(t)*u(t)*\delta(t+1) - u(t)*u(t)*\delta(t-1) - u(t)*u(t)*\delta(t-4)*\delta(t+1)$

$\quad + u(t)*u(t)*\delta(t-4)*\delta(t-1)$

$= (t+1)u(t+1) - (t-1)u(t-1) - (t-3)u(t-3) + (t-5)u(t-5)$

3.9 对于图中的离散时间LTI系统互联：

1) 试用$h_1[n]$, $h_2[n]$, $h_3[n]$, $h_4[n]$和$h_5[n]$表示总系统的单位冲激响应。

2) 若图中的$h_1[n] = 4(1/2)^n\{u[n]-u[n-3]\}$,

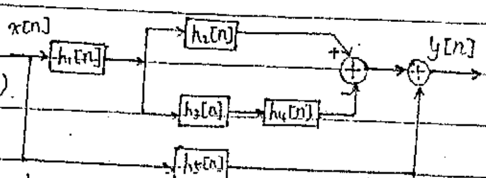
$h_2[n]=h_3[n]=(n+1)u[n]$, $h_5[n]=\delta[n]-4\delta[n-3]$, $h_4[n]$为单位延时时，试求$h[n]$

能否用卷积的结合律，分配律和交换律等性质，简化$h[n]$的计算

3) $x[n]$如图所示，试求2)题给定系统对它的响应$y[n]$，并概画出序列图

解：

1)

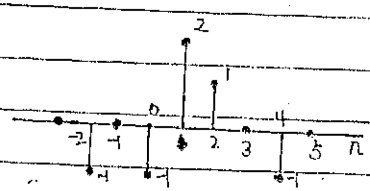


$h[n] = h_1[n]*(h_2[n]-h_3[n]*h_4[n])$

$\quad + h_5[n]$

$= h_1[n]*h_2[n] - h_1[n]*h_3[n]*h_4[n] + h_5[n]$

2) 代入$h[n]$的值



$h[n] = 4(\frac{1}{2})^n(u[n]-u[n-3])*(n+1)u[n]$

$- 4(\frac{1}{2})^n(u[n]-u[n-3])*(n+1)u[n]*(\delta[n-1]) + \delta[n] - 4\delta[n-3]$

$$4(\tfrac{1}{2})^n u[n]*(n+1)u[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 4(\tfrac{1}{2})^m u[m]\cdot(n-m+1)u[n-m]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} 4(\tfrac{1}{2})^m (n-m+1)u[n-m]$$

$$= \sum_{m=0}^{n} 4(\tfrac{1}{2})^m (n-m+1)\cdot u[n] \qquad ①$$

其中$\sum_{m=0}^{n} 4m(\frac{1}{2})^m = \sum_{m=0}^{m} 2m(\frac{1}{2})^{m-1} = 2\sum_{m=0}^{n} m(\frac{1}{2})^{m-1}$

$\underline{\underline{令\frac{1}{2}=x}}\ 2\sum_{m=0}^{n} m(x)^{m-1}$

$= 2(\sum_{m=0}^{n} m(x)^{m-1})'$

$= 2(\frac{1-x^{n+1}}{1-x})'$

$= \frac{1-nx^n+nx^{n+1}+1-x^n}{(1-x)^2}\cdot 2$

$\because$ 令$x=\frac{1}{2}$ $= 8(-\frac{n}{2}(\frac{1}{2})^n+1-(\frac{1}{2})^n)$

$= -4n(\frac{1}{2})^n+8-8(\frac{1}{2})^n$

$\sum_{m=0}^{n} 4(\frac{1}{2})^m(n+1) = (n+1)\sum_{m=0}^{n} 4(\frac{1}{2})^m$

$= 4(n+1)\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$

$= 8n-4n(\frac{1}{2})^n+8-4(\frac{1}{2})^n$

$\therefore$ ①式 $= -(-4n(\frac{1}{2})^n+8-8(\frac{1}{2})^n) + (8n-4n(\frac{1}{2})^n+8-4(\frac{1}{2})^n)$

$= (8n+4(\frac{1}{2})^n)u[n]$

$$4(\tfrac{1}{2})^n u[n-3] * (n+1)u[n] = 4(\tfrac{1}{2})^n u[n-3] * u[n] * u[n]$$

$$= \sum_{m=3}^{n} 4(\tfrac{1}{2})^m u[n-3] * u[n]$$

$$= 8(1-4(\tfrac{1}{2})^n) u[n-3] * u[n]$$

$$= 8u[n-3]*u[n] - 8\cdot 4(\tfrac{1}{2})^n u[n-3]*u[n]$$

$$= 8(n-2)u[n-3] - 8\cdot 8(1-4(\tfrac{1}{2})^n)u[n-3]$$

$$= (8n-80+32(\tfrac{1}{2})^n)u[n-3]$$

$$\therefore\ 4(\tfrac{1}{2})^n(u[n]-u[n-3]) * (n+1)u[n] = (8n+4(\tfrac{1}{2})^n)u[n] - (8n-80+32(\tfrac{1}{2})^n)u[n-3] \quad ②$$

$$-4(\tfrac{1}{2})^n(u[n]-u[n-3]) * (n+1)u[n] * \delta[n-1] = (8n-88+64(\tfrac{1}{2})^n)u[n-4] - (8n-8+8(\tfrac{1}{2})^n)u[n-1] \quad ③$$

综上知：

$$h[n] = ② + ③ + h_5[n]$$

$$= (8n+4(\tfrac{1}{2})^n)u[n] - (8n-80+32(\tfrac{1}{2})^n)u[n-3] + (8n-88+64(\tfrac{1}{2})^n)u[n-4] - (8n-8+8(\tfrac{1}{2})^n)u[n-1] + \delta[n] - 4\delta[n-3]$$

(3) $h[0] = 1+4 = 5$ $\quad h[1] = 8+2-8+8-4 = 6$ $\quad h[2] = 16+1-16+8-2 = 7$

$h[3] = 24+\frac{1}{2}-(24-80+4)-(24-8+1)-4 = 58\frac{1}{2}$

$h[4] = 32+\frac{1}{4}-(32-80+2)+(32-88+4)-(32-8+\frac{1}{2}) = 1\frac{3}{4}$

$h[5] = (40+\frac{1}{8})-(40-80+1)+(40-88+2)-(40-8+\frac{1}{4}) = 1\frac{-1}{8} = \frac{7}{8}$

$n \geq 4$ 时 $h[n] = (8n+4(\tfrac{1}{2})^n) - (8n-80+32(\tfrac{1}{2})^n) + (8n-88+64(\tfrac{1}{2})^n) - (8n-8+8(\tfrac{1}{2})^n)$

$$= 28(\tfrac{1}{2})^n$$

3.12 一个由如下输入输出变换关系描述的系统：

$$y(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x(\tau-2)\,d\tau$$

1) 试证明它是 LTI 系统，并求出其单位冲激响应 $h(t)$。

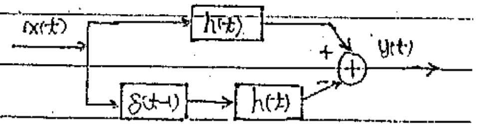
2) 当 $x(t) = u(t+1) - u(t-2)$ 时，试求它的输出 $y(t)$。

3) 考虑图中所表示的3个LTI系统的互联，其中 $h(t)$ 与1)小题中相同，当输入仍为2)小题给出的 $x(t)$ 时，用下述两种方法求互联系统的输出

a) 先计算互联系统的单位冲激响应，然后用卷积积分计算输出

b) 利用2)小题的结果和卷积的性质，试不通过计算卷积，直接写出输出。

解：



1) 线性：

比例性：$y'(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} k e^{\tau} x(\tau-2)\,d\tau$

$$= k\, e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x(\tau-2)\,d\tau$$

可加性：$y_1(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x_1(\tau-2)\,d\tau$，$y_2(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x_2(\tau-2)\,d\tau$

当 $x(t) = x_1(t)+x_2(t)$；$y(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}(x_1(\tau-2)+x_2(\tau-2))\,d\tau$

$$= e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x_1(\tau-2) + e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x_2(\tau-2)\,d\tau = y_1(t)+y_2(t)$$

∴ 时不变性：令 $x_1(t)=x(t-t_0)$

$$y'(t)=e^{-t}\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}x_1(\tau-2)d\tau$$
$$=e^{-t}\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}x(\tau-t_0-2)d\tau$$
$$\overset{令\tau-t_0=T}{=}e^{-t}\int_{-\infty}^{t-t_0}e^{T+t_0}x(T-2)dT$$
$$=e^{-t}e^{t_0}\int_{-\infty}^{t-t_0}e^{T}x(T-2)dT$$
$$=e^{-(t-t_0)}\int_{-\infty}^{t-t_0}e^{\tau}x(\tau-2)d\tau$$
$$=y(t-t_0)$$

∴ 系统是LTI系统

$$h(t)=e^{-t}\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}\delta(\tau-2)d\tau=e^{-t}\int_{-\infty}^{t}e^{2}\delta(\tau-2)d\tau$$
$$=e^{2-t}u(t-2)$$

2) $y(t)=x(t)*h(t)=(u(t+1)-u(t-2))*e^{2-t}u(t-2)$

$$u(t)*e^{2-t}u(t-2)=\int_{-\infty}^{t}e^{2-\tau}u(\tau-2)d\tau$$
$$=\int_{2}^{t}e^{2-\tau}d\tau\ u(t-2)$$
$$=-e^{2-\tau}\Big|_{2}^{t}\cdot u(t-2)$$
$$=(1-e^{2-t})u(t-2)$$

根据时移性质：

$$u(t+1)*e^{2-t}u(t-2)=(1-e^{1-t})u(t-1)$$
$$u(t-2)*e^{2-t}u(t-2)=(1-e^{4-t})u(t-4)$$

$$\therefore\ y(t)=(1-e^{1-t})u(t-1)-(1-e^{4-t})u(t-4)$$

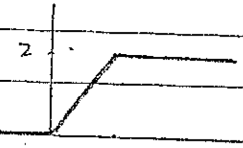
3) $h'(t)=h(t)-h(t)*\delta(t-1)=h(t)-h(t-1)$

$$=e^{2-t}u(t-2)-e^{3-t}u(t-3)$$

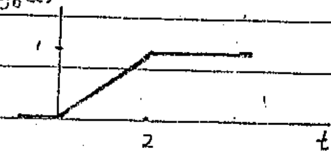
$$y'(t)=x(t)*h'(t)=x(t)*h(t)-x(t)*h(t-1)$$
$$=y(t)-y(t-1)$$
$$=(1-e^{1-t})u(t-1)-(1-e^{4-t})u(t-4)-(1-e^{2-t})u(t-2)+(1-e^{5-t})u(t-5)$$

3.15 某连续时间LTI系统的单位冲激响应为 $h_0(t)$，并且当输入是 $x_0(t)$ 时，输出 $y_0(t)$ 如图所示，对下列每个LTI系统的单位冲激响应 $h(t)$ 和系统输入 $x(t)$，判断是否给出了确定输出 $y(t)$ 所需的足够多信息，若确定 $y(t)$ 是可能的，概画出它的波形。

1) $x(t)=2x_0(t)$　$h(t)=h_0(t)$；$y(t)=2y_0(t)$



(1)

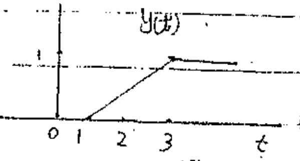


(3) $x(t) = x_0(t-2)$ $\quad h(t) = h_0(t+1)$

$x(t)*h(t) = x_0(t)*\delta(t-2)*h_0(t)*\delta(t+1)$

$= x_0(t)*h_0(t)*\delta(t-1)$

$= y_0(t-1)$



(3)

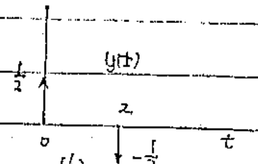
(6) $x(t) = x_0'(t)$, $h(t) = h_0'(t)$

$x(t)*h(t) = x_0'(t)*h_0'(t)$

$= (x_0(t)*h_0'(t))'$

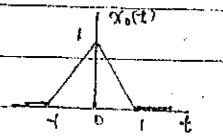
$= (x_0(t)*h_0(t))''$

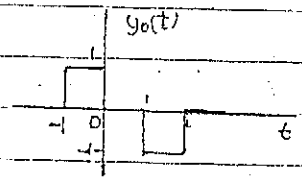
$= y_0''(t)$

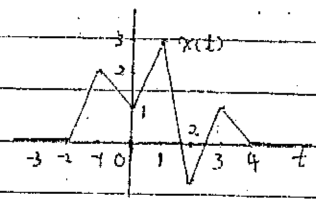


(6)

3.22.







解: 1) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x_0(t-n)$

由图: $x(t)|_{t\le -2} = x(t)|_{t\ge 4} = 0$

分别取 $t=-2,-3,-4,\cdots-\infty$ 和 $t=4,5,6\cdots\infty$ 均为整数代入 $x(t)$ 中

得 $a_n = 0$ ($n \le -2$, $n \ge 4$)

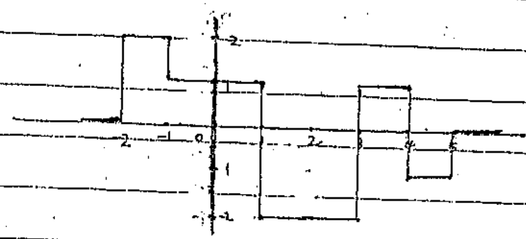
进一步化简知: $x(t) = a_{-1}x_0(t+1) + a_0x_0(t) + a_1x_0(t+1) + a_2x_0(t+2) + a_3x_0(t+$

分别代入 $t=-1,0,1,2,3$ 知:

$a_{-1}=2$, $a_0=1$, $a_1=3$, $a_2=-1$, $a_3=1$

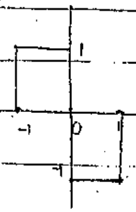
$\therefore x(t) = 2x_0(t+1) + x_0(t) + 3x_0(t-1) - x_0(t-2) + x_0(t-3)$

2) $y(t) = 2y_0(t+1) + y_0(t) + 3y_0(t-1) - y_0(t-2) + y_0(t-3)$

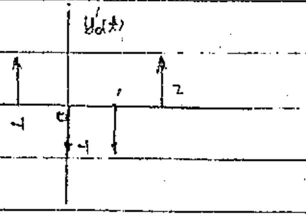


3)

$x_0'(t)$ 如图:



∴ $y_0'(t)$



$x_1(t) = x_0'(t-1)+2x_0'(t-2)+3x_0'(t-3)+\cdots n x_0'(t-n)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} n x_0'(t-n)$

∴ $s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n y_0'(t-n)$ ∴ $h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n y_0''(t-n)$

∵ $t u(t) = \int_0^{t} u(t)dt$

∴ $y_{-1}(t) = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} n y_0'(t-n) = n\sum_{n=1}^{\infty} y_0(t-n)$

3.26 对下列输入输出关系描述的系统：试判断它们是否线性？是否时不变？是否因果是否稳定：

2) $y[n] = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} x[n-k]$

解 线性:

令 $x'[n]=kx[n]$ ∴ $y' = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} kx[n-k] = \frac{k}{N+1}\sum_{k=0}^{N} x[n-k]$

$= ky[n]$ 可加性同理可证

时不变

令 $x_1[n]=x[n-n_0]$ $y_1[n] = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} x[n-n_0-k]$

$= y[n-n_0]$

令 $x[n]=\delta[n]$ ∴ $h[n] = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} \delta[n-k]$

当 $n<0$ 时 $h[n]=0$ ∴ 满足因果性

又∵ $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]| = \underbrace{\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{N+1}}_{N+1个} = 1<\infty$

∴满足稳定性

5) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(2\tau+1)u(t-\tau)d\tau$

线性: 比例性

$y'(t) = \int_{-\infty}^{t} kx(2\tau+1)u(t-\tau)d\tau = k\int_{-\infty}^{t} x(2\tau+1)u(t-\tau)d\tau$

可加性 $y_0(t)=\int_{-\infty}^{t}(x_1(2\tau+1)+x_2(2\tau+1))u(t-\tau)d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{t}x_1(2\tau+1)u(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{t}x_2(2\tau+1)u(t-\tau)d\tau$$

$$=y_1(t)+y_2(t)$$

时不变性:

令 $x(t)=x(t-t_0)$ 代入原式

$$y'(t)=\int_{-\infty}^{t}x(2\tau-2t_0+1)u(t-\tau)d\tau$$

令 $\tau-t_0=T$ 代换

$$=\int_{-\infty}^{t-t_0}x(2T+1)u(t-T-t_0)dT$$

$$=\int_{-\infty}^{t-t_0}x(2\tau+1)u(t-t_0-\tau)d\tau$$

$$=y(t-t_0)$$

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(2\tau+1)u(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t}\delta(2\tau+1)d\tau$$

$$=u(t+\tfrac{1}{2})$$

∴ 非因果

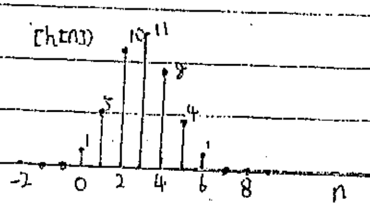
∵ $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt\to\infty$ ∴ 非稳定

33) 如图所示的三个离散时间因果LTI的系统的级联，已知 $h_2[n]=u[n]-u[n-2]$

1) 试求第一个LTI系统的单位冲激响应 $h_1[n]$

2) 试若整个系统的输入为 $x[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$，试求输出 $y[n]$，并粗略画出其波形

$x[n]\to\boxed{h_1[n]}\to\boxed{h_2[n]}\to\boxed{h_1[n]}\to y[n]$



解:

1) $h[n]=h_1[n]*h_2[n]*h_1[n]$

$$=h_1[n]*((u[n]-u[n-2])*(u[n]-u[n-2]))\quad ①$$

$u[n]*u[n]=(n+1)u[n]$ ∴由时移性质 $u[n]*u[n-2]=(n-1)u[n-2]$

$u[n-2]*u[n-2]=(n-3)u[n-4]$

∴ ① $=(n+1)u[n]-2(n-1)u[n-2]+(n-3)u[n-4]$

令 ①$=h'[n]$ ∴ $h'[0]=1$, $h'[1]=2$, $h'[2]=1$, $h'[3]=0$, $h'[4]=0\cdots$

∴ $h'[n]$的非零点有3个，又∵ $h[n]$中非零点数目为7

∴ $h_1[n]$中非零点数为 $7+1-3=5$

令 $h_1[n]=a_0\delta[n]+a_1\delta[n-1]+a_2\delta[n-2]+a_3\delta[n-3]+a_4\delta[n-4]$

$$\begin{array}{ccccccc} & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ & & \times & 1 & 2 & 1 & \\ \hline & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ & 2a_0 & 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 & 2a_4 & \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & & \\ \hline a_0 & 2a_0+a_1 & a_0+2a_1+a_2 & a_1+2a_2+a_3 & a_2+2a_3+a_4 & a_3+2a_4 & a_4 \end{array}$$

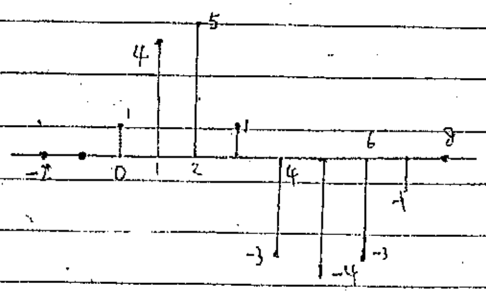
对应图中h[n]数据得:

$a_0=1 \quad a_1=5-2a_0=3 \quad a_2=10-2a_1-a_0=3$

$a_3=11-2a_2-a_1=2 \quad a_4=1$

$\therefore \ h_1[n]=\delta[n]+3\delta[n-1]+3\delta[n-2]+2\delta[n-3]+\delta[n-4]$

2) LTI系统: $(\delta[n]-\delta[n-1]) * h[n] = h[n]-h[n-1]$ 代入图中数据作图



3.32 3) 已知某连续时间LTI系统对 $x(t)=(\sin t)u(t)$ 的响应是 $y(t)=(e^{t}-1)u(t)$，系统 $h(t)$ 是什么?

解: $X(s)=\dfrac{1}{s^2+1} \qquad Re\{s\}>0$

$Y(s)=\left(\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{1}{s}\right) \quad Re\, s>1$

$\therefore H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{s^2+1}{s-1}+\dfrac{s^2+1}{s}$

$=\dfrac{(s-1)^2+2s}{s-1}+s+\dfrac{1}{s}$

$=\dfrac{2s}{s-1}+\dfrac{1}{s}+2s-1$

$=\dfrac{2(s-1)+2}{s-1}+\dfrac{1}{s}+2s-1$

$=1+\dfrac{2}{s-1}+\dfrac{1}{s}+2s \qquad Re\{s\}>1$

$\therefore h(t)=\mathcal{L}^{-1}(H(s))=\delta(t)+2e^{t}u(t)+u(t)+2\delta'(t)$

3.34 试求分别满足如下方程的连续时间信号 $f(t)$:

1) $f(t)*tu(t)=(t+e^{-t}+1)u(t)$

解：原式 $= f(t)*u(t)*u(t)$

$\therefore\ f(t)*u(t)*\delta(t)=(1+(-e^{-t}))u(t)+(t+e^{-t}+1)\delta(t)$

$\therefore\ f(t)*u(t) = (1-e^{-t})u(t)+2\delta(t)$

$f(t)*\delta(t) = (1-e^{-t})\delta(t)+e^{-t}u(t)+2\delta'(t)$

$\therefore\ f(t) = e^{-t}u(t)+2\delta'(t)$

2) $f(t)*e^{-t}u(t)=(1-e^{-t})u(t)$

解：

$f(t)*(-e^{-t}u(t)+\delta(t)e^{-t}) = -f(t)*e^{-t}u(t)+f(t)*\delta(t)$

$= (e^{-t}-1)u(t)+f(t)$

又 $\because\ f(t)*(e^{-t}u(t))'=((1-e^{-t})u(t))'=\delta(t)(1-e^{-t})+e^{-t}u(t)$

$= e^{-t}u(t)$

$\therefore\ f(t)= e^{-t}u(t)-(e^{-t}-1)u(t)=u(t)$

$y(t) = (1+2t)e^{-t}$

$y''(t)+2y'(t)+5y(t)=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=1$

解: $\lambda^2+2\lambda+5=0$ $\lambda=-1\pm 2j$

令 $y(t)=(A\cos 2t+B\sin 2t)e^{-t}$

代入初始值:

$$\begin{cases} A=1 \\ 2B-A=1 \end{cases} \therefore \begin{cases} A=1 \\ B=1 \end{cases}$$

$\therefore$ $y(t) = (\cos 2t+\sin 2t)e^{-t}$

a) $y[n]+\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=0$, $y[0]=1$, $y[-1]=-6$

解: $\lambda^2+\frac{3}{4}\lambda+\frac{1}{8}\lambda^0=0$

$\lambda_1=\frac{-1}{4}$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ $y[n]=A_1(-\frac{1}{4})^n+A_2(-\frac{1}{2})^n$

代入初始值: $\begin{cases} A_1+A_2=1 \\ -4A_1-2A_2=-6 \end{cases} \therefore \begin{cases} A_1=2 \\ A_2=-1 \end{cases}$

$\therefore$ $y[n]=2(-\frac{1}{4})^n-(-\frac{1}{2})^n$

c) $y[n]-2y[n-1]+y[n-2]=0$, $y[0]=1$, $y[10]=21$

解: $\lambda^2-2\lambda+1=0$ $\lambda=1$ (二重)

令 $y[n]=(A_1+A_2n)1^n=A_1+A_2n$

$$\therefore \begin{cases} A_1=1 \\ A_1+A_2\cdot 10=21 \end{cases} \therefore \begin{cases} A_1=1 \\ A_2=2 \end{cases}$$

$\therefore$ $y[n]=(1+2n)1^n$

e) $y[n]+y[n-2]=0$; $y[0]=1$, $y[1]=2$

解: $\lambda^2+1=0$ $\lambda=\pm j$

令 $y[n]=A_1j^n+A_2(-j)^n$ $=(A_1+A_2(-1)^n)j^n$

代入 $\begin{cases} A_1+A_2=1 \\ A_1+A_2(-j)=-j2 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} A_1=\frac{1-2j}{2} \\ A_2=\frac{1+2j}{2} \end{cases}$

∴ $y[n]=\frac{1-2j}{2}j^n+\frac{1+2j}{2}(-j)^n$

已知用差分方程 $y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]$ 描述的离散时间系统，试用递推法求如下两组附加条件下，当输入分别为 $x_1[n]=(\frac{1}{3})^n$ 和 $x_2[n]=(\frac{1}{3})^n u[n]$ 时的输出 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$，并比较所求的结果

1) $y[-1]=0$，$y[-2]=0$　　2) $y[-1]=4$，$y[-1]=8$

1) 写成后推方程：

$$y[n]=x[n]+\frac{3}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]$$

$n\geq 0$ 时：

$n=0$　$y[0]=x[0]+\frac{3}{4}y[-1]-\frac{1}{8}y[-2]$

$=1+0-0=1$

$n=1$ 时　$y[1]=x_1[1]+\frac{3}{4}y[0]-\frac{1}{8}y[-1]$

$=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-0=\frac{13}{12}$

$n=2$ 时　$y[2]=x_1[2]+\frac{3}{4}y[1]-\frac{1}{8}y[0]=\frac{1}{9}+\frac{3}{4}\cdot\frac{13}{12}-\frac{1}{8}=\frac{-1}{72}+\frac{13}{16}=\frac{115}{144}$

...... 改成前推方程：$y[n-2]=8x[n]+6y[n-1]-8y[n]$

$n<0$　$n=-1$　$y[-1]=x[-1]+\frac{3}{4}y[-2]-\frac{1}{8}y[-3]$

∴ $y[-3]=8\cdot 3+6\cdot 0-8\cdot 0=24$

$n=-2$　$y[-4]=8x[-2]+6y[-3]-8y[-2]=8\cdot 9+6\cdot 24=216$

$n=-3$　$y[-5]=8x[-3]+6y[-4]-8y[-3]=8\cdot 27+6\cdot 216-8\cdot 24=1320$

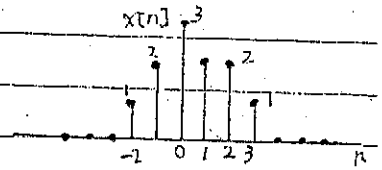
......

对 $x[n]=(\frac{1}{3})^n u[n]$ 时　$n\geq 0$ 部分 $x[n]=(\frac{1}{3})^n$ 相同

当 $n<0$ 时：$n=-1$　$y[-3]=0+0+0=0$

$n=-2$　$y[-4]=0+0+0=0$ ......

∴ $y_2[n]$ 与 $y_1[n]$ 仅在 $n<0$ 时不一样



4.6 一个由如下差分方程描述的起始松弛LTI系统：

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]+2x[n-2]$$

试用差分方程递推解法求该系统对图中所示的输入 $x[n]$ 的响应。

解：作前推方程：

$$y[n]=x[n]+2x[n-2]-2y[n-1]$$

∵起始松弛 $n=0$，$y[0]=x[0]+2x[-2]-0=3+2=5$.

$n=1$ $y[1]=x[1]+2x[-1]-2y[0]=2+4-10=-4$

$n=2$ $y[2]=x[2]+2x[0]-2y[1]=2+6+8=16$

$n=3$ $y[3]=x[3]+2x[1]-2y[2]=1+4-32=-27$

$n=4$ $y[4]=x[4]+2x[2]-2y[3]=0+4+54=58$

$n=5$ $y[5]=x[5]+2x[3]-2y[4]=0+2-116=-114$

$n=6$ $y[6]=x[6]+2x[4]-2y[5]=228$

$n=7$ $y[7]=\cdots=-456$

$\vdots$

$n=n$ $y[n]=14\cdot(-1)^n 2^{n-1}$

试求下列微分方程描述的因果LTI系统的单位冲激响应$h(t)$

(2) $y''(t)+2y'(t)+y(t)=x(t)$

解: 法1)

非递归系统: $h_1(t)=\delta(t)$

递归系统: $\begin{cases} h_2''(t)+2h_2'(t)+1=0 \\ h_2'(0^+)=1,\ h_2(0^+)=0 \end{cases}$ ①

由① $\lambda^2+2\lambda+1=0$ $\therefore \lambda=-1$ (二重)

令 $h_2(t)=(A_1+A_2t)e^{-t}u(t)$

代入条件: $\begin{cases} A_1=0 \\ -A_1+A_2=1 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} A_1=0 \\ A_2=1 \end{cases}$

$\therefore$ $h_2(t)=te^{-t}u(t)$

$\therefore$ $h(t)=h_1(t)*h_2(t)=\delta(t)*te^{-t}u(t)=te^{-t}u(t)$

法2) 令 $y''(t)=a\delta(t)+b\Delta u$

$y'(t)=a\Delta u$

即 $a\delta(t)+(a+b)\Delta u=\delta(t)$

$\therefore a=1,\ b=-1$

$\therefore$ $y'(0^+)=1$, $y(0)=0$

$\therefore$ $\lambda^2+2\lambda+1=0$ $\therefore \lambda=-1$ (二重)

同理可解 $h(t)=te^{-t}u(t)$

4) $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=x(t)$

令 $y''(t)=a\delta(t)+b\Delta u$, $y'(t)=a\Delta u$

$a\delta(t)+(2a+b)\Delta u=\delta(t)$ ∴ $a=1$, $b=-2$

∴ $y'(0^+)=1$, $y(0^+)=0$

特征方程: $\lambda^2+2\lambda+2=0$ ∴ $\lambda=-1\pm j$

∴ $h(t)=e^{-t}(A_1\cos t+A_2\sin t)$

代入初始值: $A_1=0$ $A_2=1$

∴

$h(t)=e^{-t}\sin t\,u(t)$

0 试求下列差分方程描述的因果LTI系统的单位冲激响应h[n]:

2) $y[n]+(2/3)y[n-1]-(1/3)y[n-2]=x[n]$

解: $\lambda^2+\frac{2}{3}\lambda-\frac{1}{3}\lambda=0$ $(\lambda+1)(\lambda-\frac{1}{3})=0$ ∴ $\lambda=-1$, $\lambda=\frac{1}{3}$

令 $y[n]=A_1(-1)^n+A_2(\frac{1}{3})^n$, $y[0]=1$, $y[-1]=0$

可求: $A_1=-\frac{3}{4}$, $A_2=\frac{1}{4}$

$h_1[n]=(-\frac{3}{4}(-1)^n+\frac{1}{4}(\frac{1}{3})^n)u[n]$

∴ $h(n)=h_1[n]*\delta[n]=(-\frac{3}{4}(-1)^n+\frac{1}{4}(\frac{1}{3})^n)u[n]$

5) $y[n]+y[n-1]-2y[n-2]=x[n]$

解: $\lambda^2+\lambda-2=0$ $\lambda=1$ $\lambda=-2$

∴ 令 $y_1[n]=A_1 1^n+A_2(-2)^n$ $y_1[0]=1$, $y_1[-1]=0$

∴ $A_1+A_2=1$, $+A_1-\frac{A_2}{2}=0$ ∴ $A_1=\frac{1}{3}$, $A_2=\frac{2}{3}$

∴ $y_1[n]=(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(-2)^n)u[n]$

$h[n]=y_1[n]*\delta[n]=(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(-2)^n)u[n]$

4.11 试用1)两个因果LTI系统级联的方法 2)方程两边奇异项系数匹配的方法,求下列微分方程描述的连续时间因果LTI系统的h(t)。

a) $y'(t)+2y(t)=3x'(t)+x(t)$

解:

法1): $\lambda+2=0$ $\lambda=-2$

$y_1(t)=Ae^{-2t}$ $y(0)=1$

∴ $A=1$ ∴ $h_1(t)=e^{-2t}u(t)$

∴ $h(t)=h_1(t)*(\delta(t)+3\delta'(t))=e^{-2t}u(t)+3\delta(t)-6e^{-2t}u(t)$

$=3\delta(t)-5e^{-2t}u(t)$

1

法2) 令 $y'(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u$ $y(t)=a\delta(t)+b\Delta u$

$a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u+2a\delta(t)+2b\Delta u=3\delta'(t)+\delta(t)$

$a=3$ $b=-5$ $c=10$

$h_1(t)=Ae^{-2t}$, $h_1(0^+)=-5$ $\therefore A=-5$

$\therefore$ 令 $h_1(t)=3\delta(t)+(-5e^{-2t})u(t)$

d) $y'''(t)+y''(t)-y'(t)-y(t)=2x''(t)+3x'(t)-x(t)$

法1) $\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=0$ $(\lambda-1)(\lambda+1)^2=0$ $\lambda=1$, $\lambda=-1$(二重)

$y_1(t)=A_1e^{t}+(A_2+A_3t)e^{-t}$ $y_1''(0)=1$ $y_1'(0)=0$ $y(0)=0$

$\therefore$ $A_1=\frac{1}{4}$ $A_2=-\frac{1}{4}$, $A_3=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ $h_1(t)=(\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}te^{-t})u(t)$

$h(t)=h_1(t)*(2\delta''(t)+3\delta'(t)-\delta(t))=(e^{t}+e^{-t}+te^{-t})u(t)$

法2) 令 $y'''(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+d\Delta u$ $y''(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u$

$y'(t)=a\delta(t)+b\Delta u$ $y(t)=a\Delta u$

$\therefore$ $a=2$ $b=1$ $c=0$ $d=3$

$\therefore$ $y(0)=2$ $y'(0)=1$ $y''(0)=0$

$y_1(t)=(e^{t}+(1+t)e^{-t})u(t)=(e^{t}+e^{-t}+te^{-t})u(t)$

f) $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=\int_{-\infty}^{t}2e^{-2(t-\tau)}x(\tau)d\tau$

解: 法1) $\lambda^2+4\lambda+3=0$ $\lambda=-1$, $\lambda=-3$

$y_1(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-3t}$, $y_1'(0)=1$, $y_1(0)=0$

$A_1+A_2=0$, $-A_1-3A_2=1$ $\therefore A_1=\frac{1}{2}$ $A_2=-\frac{1}{2}$

$\therefore h_1(t)=(\frac{1}{2}e^{-t}+(-\frac{1}{2}e^{-3t}))u(t)$

$h_2(t)=\int_{-\infty}^{t}2e^{-2(t-\tau)}\delta(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}2e^{2\tau}\delta(\tau)d\tau\cdot e^{-2t}$

$=2e^{-2t}u(t)$

$h_1(t)*h_2(t)=2(\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)*e^{-2t}u(t)$

$=2\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2}e^{-\tau}-\frac{1}{2}e^{-3\tau})u(\tau)\cdot e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$

$=2\int_{0}^{\infty}(\frac{1}{2}e^{-\tau}-\frac{1}{2}e^{-3\tau})e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$

$=2\int_{0}^{t}(\frac{1}{2}e^{-\tau}-\frac{1}{2}e^{-3\tau})e^{+2\tau}d\tau\cdot e^{-2t}$

$=2\int_{0}^{t}(\frac{1}{2}e^{\tau}-\frac{1}{2}e^{-\tau})d\tau\cdot e^{-2t}u(t)$

$=2(\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})e^{-2t}\cdot u(t)$

$=2(\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}-e^{-2t})u(t)$

$\therefore$ $h(t)=2(\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}-e^{-2t})u(t)=(e^{-t}+e^{-3t}-2e^{-2t})u(t)$

法2)

4.12 试用：1)递推算法；2)两个因果LTI系统级联的方法；3)方程两边序列项系数匹配的方法，用下列差分方程描述的离散时间因果LTI系统的$h[n]$：

a) $y[n]-y[n-2]=x[n]+2x[n-1]$

解：法1) 将向差分方程：$y[n]=x[n]+2x[n-1]+y[n-2]$

后推方程

$n=0$ $h[0]=\delta[0]+2\delta[-1]+h[-2]=1$

$n=1$ $h[1]=\delta[1]+2\delta[0]+h[-1]=2$

$n=2$ $h[2]=\delta[2]+2\delta[1]+h[0]=1$

$n=3$ $h[3]=\delta[3]+2\delta[2]+h[1]=2$

⋮

法2) 非递归：$h_1[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]$

递归：$\lambda^2-1=0$ $\lambda=\pm1$

令 $h_2[n]=A_1 1^n+A_2(-1)^n$ $h_2[0]=1$ $h_2[-1]=0$

$\therefore A_1+A_2=1$，$A_1+(-A_2)=0$ $A_1=\frac{1}{2}, A_2=\frac{1}{2}$

$\therefore h_2[n]=\frac{1}{2}(1+(-1)^n)$

$\therefore h[n]=h_2[n]*h_1[n]=(\frac{1}{2}(1+(-1)^n)+(1+(-1)^{n-1}))u[n]$

法3) 令 $h[n]=C_0\delta[n]+(A_1 1^n+A_2(-1)^n)u[n]$

$\therefore h[n-2]=C_0\delta[n-2]+(A_1+A_2(-1)^n)u[n-2]$

$\therefore$ 代入原方程：

$$C_0\delta[n]+(A_1+A_2(-1)^n)u[n]-C_0\delta[n-2]-(A_1+A_2(-1)^n)u[n-2]=\delta[n]+2\delta[n-1]$$

$$-C_0\delta[n-2]+C_0\delta[n]+A_1\delta[n]+A_1\delta[n-1]+A_2\delta[n]-A_2\delta[n-1]=\delta[n]+2\delta[n-1]$$

待定系数法：$C_0=0$ $C_0=0$

$C_0+A_1+A_2=1$ $\therefore$ $A_1=\frac{3}{2}$

$A_1-A_2=2$ $A_2=\frac{-1}{2}$

$\therefore h[n]=(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n)u[n]$

d) $y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=2x[n]-6x[n-1]+6x[n-2]$

解 法3) $\lambda^2-5\lambda+6=0$ $\lambda=2, \lambda=3$

令 $h[n]=C_0\delta[n]+(A_1 2^n+A_2 3^n)u[n]$

$h[n-1]=C_0\delta[n-1]+(A_1 2^{n-1}+A_2 3^{n-1})u[n-1]$

$h[n-2]=C_0\delta[n-2]+(A_1 2^{n-2}+A_2 3^{n-2})u[n-2]$

代入方程：

$$\therefore C_0\delta[n]+(A_1 2^n+A_2 3^n)u[n]-5C_0\delta[n-1]-(5A_1 2^{n-1}+5A_2 3^{n-1})u[n-1]+6\delta[n-2]+(6A_1 2^{n-2}+6A_2 3^{n-2})u[n-2]$$

$$=2\delta[n]-6\delta[n-1]+6\delta[n-2]$$

比较系数：

$$C_0+A_1+A_2=2 \qquad C_0=1$$

$$-3A_1-2A_2-5C_0=-6 \quad \therefore \quad A_1=-1$$

$$6C_0=6 \qquad A_2=2$$

$$\therefore\ h[n]=\delta[n]+(2\cdot3^n-2^n)u[n]$$

法2) $h_1[n]=2\delta[n]-6\delta[n-1]+6\delta[n-2]$

令 $h_2[n]=(A_12^n+A_23^n)$ $h_2[0]=1$ $h_2[-1]=0$

$\therefore$ $A_1+A_2=1$, $\frac{A_1}{2}+\frac{A_2}{3}=0$ $\therefore$ $A_1=-2$, $A_2=3$

$\therefore\ h_2[n]=(3^{n+1}-2^{n+1})u[n]$

$h[n]=h_2[n]*h_1[n]=2(3^{n+1}-2^{n+1})u[n]-6(3^n-2^n)u[n-1]+6(3^{n-1}-2^{n-1})u[n-2]$

$=\cdots\cdots$

15) 由如下微分方程和起始条件表征的离散时间因果系统：

$$y''(t)+2y'(t)+y(t)=x(t)\ ;\ y(0_-)=1,\ y'(0_-)=2$$

1) $x(t)=u(t)$ 2) $x(t)=e^{-3t}u(t)$ 时的系统输出 $y(t)$，$t\geq0$。并指出其零输入响应和零状态响应

解：$\because$ 零输入响应冲激：$\lambda^2+2\lambda+1=0$ $\lambda=-1$(二阶)

$y_{zi}(t)=(A_1+A_2t)e^{-t}$ $y_{zi}(0)=1$, $y_{zi}'(0)=2$

$A_1=1$, $-A_1+A_2=2$ $\therefore$ $A_2=3$

$\therefore\ y_{zi}(t)=(1+3t)e^{-t}u(t)$

零状态冲激响应：

$h_{zs_1}(t)=(A_1'+A_2't)e^{-t}$ $h_{zs_1}'(0)=1$, $h_{zs_1}(0)=0$

$A_1'=0$, $-A_1'+A_2'=1$ $\therefore$ $A_2'=1$

$\therefore\ h_{zs_1}(t)=te^{-t}$

又 $\because$ $h_{zs_2}(t)=\delta'(t)$

$h_{zs}(t)=h_{zs_1}(t)*h_{zs_2}(t)=(e^{-t}-te^{-t})u(t)$

1) 当 $x(t)=u(t)$ 时 $y_{zi}(t)=(1+3t)e^{-t}$

$y_{zi}(t)=x(t)*h_{zi}(t)=\int_{-\infty}^{t}(1+3t)e^{-t}u(t)dt=\int_0^t(1+3t)e^{-t}dt$

法：零输入响应的一致性

$3(-te^{-t}-e^{-t})\big|_0^t+(-e^{-t})\big|_0^t=3(1-te^{-t}-e^{-t})-e^{-t}+1$

$=(-3te^{-t}-4e^{-t})+4=(4-3te^{-t}-4e^{-t})u(t)$

$y_{zs}(t)=x(t)*h_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{t}(1-\tau)e^{-\tau}u(\tau)d\tau=\int_0^t(1-\tau)e^{-\tau}d\tau$

$=\tau e^{-\tau}+e^{-\tau}\big|_0^t-e^{-\tau}\big|_0^t=te^{-t}+e^{-t}-1-e^{-t}+1$

$=te^{-t}u(t)$

$\therefore$ ~~$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=(4-2te^{-t}-4e^{-t})u(t)$~~

$\therefore$ ~~$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=(1-2te^{-t}-4e^{-t})u(t)$~~

$y(t)=(1+3t)e^{-t}+te^{-t}=(1+4t)e^{-t}$

当 $x(t)=e^{-3t}u(t)$ 时

$y_{zi}(t)$ ~~$=(1+3t)e^{-t}u(t)*e^{-3t}u(t)$~~ $=\int_{-\infty}^{\infty}(1+3\tau)e^{-\tau}u(\tau)e^{-3(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$

$=\int_0^t(1+3\tau)e^{-\tau}e^{-3(t-\tau)}d\tau$

$=e^{-3t}\int_0^t(1+3\tau)e^{2\tau}d\tau=e^{-3t}(\frac{e^{2\tau}}{2}\Big|_0^t+\frac{3}{2}\tau e^{2\tau}-\frac{3}{4}e^{2\tau}\Big|_0^t)$

~~$=e^{-3t}(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{3}{2}te^{2t})u(t)$~~

$y_{zi}=(1+3t)e^{-t}+$

$y_{zs}(t)=(1-t)e^{-t}u(t)*e^{-3t}u(t)=\int_0^t(1-\tau)e^{-\tau}e^{-3t+3\tau}d\tau$

$=e^{-3t}\int_0^t(1-\tau)e^{2\tau}d\tau=e^{-3t}(\frac{e^{2\tau}}{2}\Big|_0^t-(\frac{\tau}{2}e^{2\tau}-\frac{e^{2\tau}}{4})\Big|_0^t)u(t)$

$=e^{-3t}(\frac{3e^{2t}}{4}-\frac{3}{4}-\frac{te^{2t}}{2})u(t)$

$=(\frac{3}{4}e^{-t}-\frac{3}{4}e^{-3t}-\frac{t}{2}e^{-t})u(t)$

$\therefore y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$

~~$=e^{-3t}(-\frac{1}{2}e^{2t}+te^{2t}-\frac{1}{2})u(t)$~~

$=1e^{-t}+3te^{-t}+\frac{3}{4}e^{-t}-\frac{3}{4}e^{-3t}-\frac{t}{2}e^{-t}$

$=\frac{7}{4}e^{-t}+\frac{5}{2}te^{-t}-\frac{3}{4}e^{-3t}$

8 对于下列用微分方程或差分方程描述的因果LTI系统，试画出用三种基本单元(加法器、数乘器、积分器或离散时间单位延时)的直接II型实现的方框图。

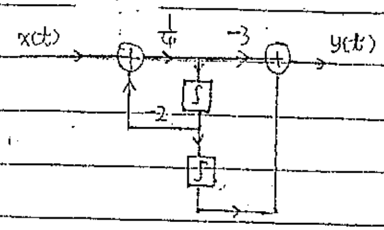
1) $4y''(t)+2y'(t)=x(t)-3x''(t)$

1) $\int x(t)-3x'(t)=4y'(t)+2y(t)$

$\iint x(t)-3x(t)=4y(t)+2\int y(t)$

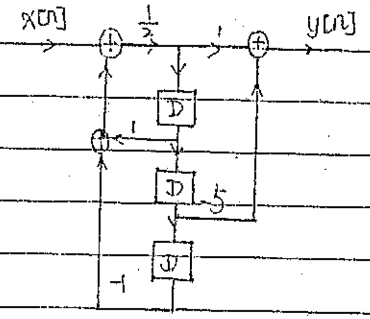
$\therefore\quad y(t)=\frac{1}{4}(\iint x(t)-3x(t)-2\int y(t))$

画出结构图：



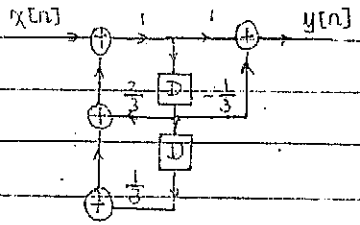
4) $2y[n]-y[n-1]+y[n-3]=x[n]-5x[n-2]$

$\therefore\ y[n]=\frac{1}{2}(x[n]-5x[n-2]+y[n-1]-y[n-3])$



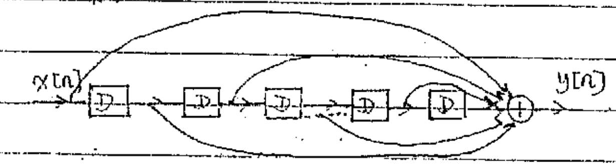
6) $y[n]-(2/3)y[n-1]-(1/3)y[n-2]=x[n]-(1/3)x[n-1]$

$y[n] = x[n] - \frac{1}{3}x[n-1] + \frac{2}{3}y[n-1] + \frac{1}{3}y[n-2]$



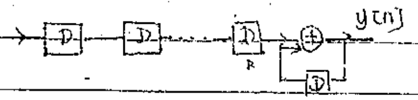
9. 试用最少数目的三种基本单元（相加器、数乘器、积分器或离散时间单位延时）构成的系统方框图。

1) $y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]$



2) $y[n-1] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k-1]$

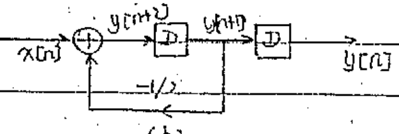
$\therefore y[n] = y[n-1] + x[n-k]$



4.20. 对于下列方程与框图表示的因果LTI系统，试求它们的单位冲激响应 $h(t)$ 和 $h[n]$.

(b)

解：由框图列出方程



(b)

$-\frac{1}{2}y[n+1] + x[n] = y[n+2]$

$y[n+2] + \frac{1}{2}y[n+1] = x[n]$

令 $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n-2]$

$\therefore$ 递归系统 $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = 0$

$\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda = 0 \quad \therefore \alpha = 0 \quad \lambda = -\frac{1}{2}$

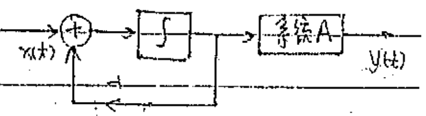
$\therefore h_1[n] = A_1(-\frac{1}{2})^n u[n] \; h_1[0] = 1, \; h_1[-1] = 0$

$\therefore h_1[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n]$

$\therefore$ 非递归系统 $h_2[n] = \delta[n-2]$

$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = (-\frac{1}{2})^{n-2} u[n-2]$

(e) $\begin{cases} y'(t) + 2y(t) = v(t) \\ x(t) - v(t) = v'(t) \end{cases}$



系统A的微分方程表示为

$y'(t) + 2y(t) = v(t)$

(e)

$\therefore x(t) - y'(t) - 2y(t) = y''(t) + 2y'(t)$

$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t)$

采用两系统级联法：

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \therefore \lambda = -1, \; \lambda = -2$

∴ $h_1(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$ $h_1'(0)=1,\ h_1(0)=0$

代入: $A_1+A_2=0$, $-A_1-2A_2=1$ ∴ $A_1=1$, $A_2=-1$

∴ $h_1(t)=(e^{-t}+(-e^{-2t}))u(t)$

$h_2(t)=\delta(t)$

∴ $h(t)=h_1(t)*h_2(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

5.1 用稳态正弦电路的相量分析方法说明：LTI系统对复指数输入的响应仍是一个相同的复指数。

1) 如图所示的RC积分电路，其输入输出信号 $v_i(t)$ 和 $v_o(t)$ 均为电压，试列出它们的微分方程。

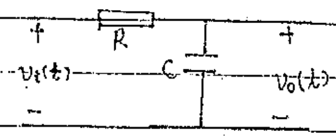
2) 当 $v_i(t)=e^{j\omega_0 t}$ 时，解微分方程，求出电路的稳态响应 $v_o(t)$。

3) 当 $v_i(t)=V_i\cos(\omega_0 t+\varphi_i)$ 时，解微分方程，求出电路的稳态响应 $v_o(t)$。

4) 请用正弦稳态电路的相量分析法，求出当用2),3)小题所给输入电压 $v_i(t)$ 时，该电路的稳态输出电压 $v_o(t)$

解:

1) $RC\frac{dv_o(t)}{dt}+v_o(t)=v_i(t)$



2) 由1)知 $v_i(t)=e^{j\omega t}$ 时，方程为

$$RC\frac{dv_o(t)}{dt}+v_o(t)=e^{j\omega_0 t}$$

$\lambda RC+1=0$ ∴ $\lambda=\frac{-1}{RC}$

∴ 齐次通解: $v_o(t)_h=A_1e^{-\frac{1}{RC}t}$

设特解为 $v_o(t)_p=A_2e^{j\omega_0 t}$ 代入方程:

$$RCA_2e^{j\omega_0 t}(j\omega_0)+A_2e^{j\omega_0 t}=e^{j\omega_0 t}$$

∴ $A_2=\frac{1}{1+j\omega_0 RC}$

∴ 非齐次方程解

$$v_o(t)=v_o(t)_h+v_o(t)_p=A_1e^{-\frac{1}{RC}t}+\frac{1}{1+j\omega_0 RC}e^{j\omega_0 t}$$

∴ 稳态响应为 $v_o(t)=\frac{1}{1+j\omega_0 RC}e^{j\omega_0 t}$

3) $RC\frac{dv_o(t)}{dt}+v_o(t)=V_i\cos(\omega_0 t+\varphi_i)$

齐次解: $v_o(t)_h=A_1e^{-\frac{1}{RC}t}$

令特解为 $v_o(t)_p=A_2\cos(\omega_0 t+\varphi_i)$

$$-RCA_2\sin(\omega_0 t+\varphi_i)\omega_0+A_2\cos(\omega_0 t+\varphi_i)=V_i\cos(\omega_0 t+\varphi_i)$$

$A_2\sqrt{1+R^2C^2}\cos(\omega_0 t+\psi_i+\arctan RC) = v_i\cos(\omega_0 t+\phi_i)$

$\therefore A_2 = \dfrac{v_2}{\sqrt{1+R^2C^2}} \qquad \psi_i = \phi_i - \arctan RC$

$\therefore \quad v_0(t) = v_0(t)_h + v_0(t)_p = A_1 e^{-\frac{1}{RC}t} + \dfrac{v_2}{\sqrt{1+R^2C^2}}\cos(\omega_0 t+\phi_i-\arctan RC)$

$\therefore$ 稳态响应为: $\dfrac{v_2}{\sqrt{1+R^2C^2}}\cos(2\omega_0 t+\phi_i-\arctan RC)$

4) 略

5.4 试求下列连续时间周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶级数表示,并计算它们的傅里叶级数系数 F_k。根据画出每一组系数的模 $|F_k|$ 的相位 θ_k 并加以必要的标注。

1) $\tilde{x}(t) = \cos(\pi(t-1)/4)$

$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2}(e^{j(\pi(t-1)/4)} + e^{-j\frac{\pi(t-1)}{4}}) = \frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi t}{4}-j\frac{\pi}{4}} + e^{-j\frac{\pi t}{4}+j\frac{\pi}{4}})$

$= \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{4}t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi}{4}t}$

令 $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \tilde{x}_0(t) = \sum_{k=-1}^{1} F_k e^{j\omega_0 tk} \qquad F_{-1} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}},\ F_0 = 0 \quad F_1 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$

$\therefore \quad |F_{-1}| = \frac{1}{2} \quad \theta_{-1} = \frac{\pi}{4}\ ; \quad |F_1| = \frac{1}{2},\ \theta_1 = -\frac{\pi}{4}$

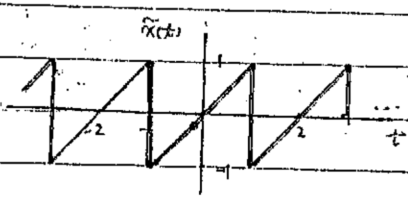
3) $\tilde{x}(t) = \sin^2(2\pi t) = \dfrac{1-\cos 4\pi t}{2} = \frac{1}{2} - (\dfrac{e^{j4\pi t}+e^{-j4\pi t}}{4})$

令 $\omega_0 = 4\pi$

$\therefore \tilde{x}(t) = \sum_{k=-1}^{1} F_k e^{jk\omega_0 t} \quad F_{-1} = \frac{-1}{4}\ |F_{-1}| = \frac{1}{4} \quad \theta_{-1} = \pi,\ F_0 = \frac{1}{2},\ F_1 = -\frac{1}{4}\ |F_1| = \frac{1}{4}\ \theta_1 =$

5) $\tilde{x}(t)$ 是如图所示的信号

由傅立叶级数计算公式:



$F_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} \tilde{x}(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt \qquad \langle T=2\rangle$

$= \frac{1}{2}\int_{\langle 2\rangle} t e^{-jk\pi t}dt$

$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t \frac{1}{-jk\pi} de^{-jk\pi t} = \frac{1}{2}(t\frac{e^{-jk\pi t}}{-jk\pi}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{e^{-jk\pi t}}{-jk\pi}dt)$

$= \frac{1}{2}(\frac{-e^{-jk\pi}}{jk\pi} - \frac{e^{jk\pi}}{jk\pi}) - \frac{1}{2}\frac{e^{-jk\pi t}}{(jk\pi)^2}\Big|_{-1}^{1}$

$= -\frac{\frac{1}{2}\cdot 2\cos k\pi}{jk\pi} - \frac{1}{2}\frac{e^{-jk\pi}-e^{jk\pi}}{(jk\pi)^2} = \frac{-\cos k\pi}{jk\pi} - \frac{1}{2}\frac{-2j\sin k\pi}{(jk\pi)^2} \quad k=0,\pm1,\pm2$

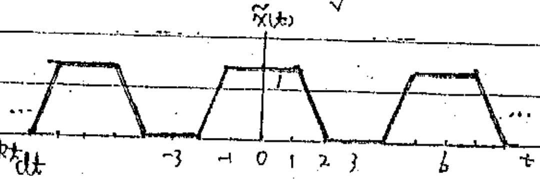
$= \frac{-\cos k\pi}{jk\pi} = \frac{(-1)^{k+1}}{jk\pi} = \frac{j(-1)^k}{k\pi} = \frac{(-1)^k}{k\pi}e^{j\frac{\pi}{2}}$

$\therefore \quad \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\pi}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{jk\pi t} \overset{令\omega_0=\pi}{=\!=} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\pi}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{jk\omega_0 t}$

$\therefore \quad |F_k| = \frac{(-1)^k}{k\pi} \quad k=0,\pm1,\pm2\cdots \qquad \theta_k = \frac{\pi}{2}$

7) $\tilde{x}(t)$ 是如图所示的周期信号

由图知 $T=6$



$\therefore F_k = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3}\tilde{x}(t)e^{-j\frac{\pi}{3}kt}dt$

$= \frac{1}{6}\int_{-3}^{-2}0\cdot dt + \frac{1}{6}\int_{-2}^{-1}(t+2)e^{-j\frac{\pi}{3}kt}dt$ (1)

$+\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}e^{-j\frac{\pi}{3}kt}dt$ (2) $+\frac{1}{6}\int_{1}^{2}(-t+2)e^{-j\frac{\pi}{3}kt}dt$ (3) $+\frac{1}{6}\int_{2}^{3}0\cdot dt$ ①

先计算 $\int e^{-j\frac{\pi}{3}kt}dt = \frac{e^{-j\frac{\pi}{3}kt}}{-j\frac{\pi}{3}k}+C$ $\int te^{-j\frac{\pi}{3}kt}dt = \int t\frac{1}{-j\frac{\pi}{3}k}de^{-j\frac{\pi}{3}kt}$

$= \frac{t}{-j\frac{\pi}{3}k}e^{-j\frac{\pi}{3}kt} - \int\frac{e^{-j\frac{\pi}{3}kt}}{-j\frac{\pi}{3}k}dt = \frac{t}{-j\frac{\pi}{3}k}e^{-j\frac{\pi}{3}kt} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{3}kt}}{(-j\frac{\pi}{3}k)^2}+C$

$\therefore (1) = \frac{1}{6}\left(\frac{t}{-j\frac{\pi}{3}k}e^{-j\frac{\pi}{3}kt} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{3}kt}}{(-j\frac{\pi}{3}k)^2}\right)\Big|_{-2}^{-1} + \frac{2}{6}\left(\frac{1}{-j\frac{\pi}{3}k}e^{-j\frac{\pi}{3}kt}\right)\Big|_{-2}^{-1}$

$= \left(\frac{1}{6}\frac{t}{-j\frac{\pi}{3}k}e^{-j\frac{\pi}{3}kt} - \frac{1}{6}\frac{e^{-j\frac{\pi}{3}kt}}{(-j\frac{\pi}{3}k)^2}\right)\Big|_{-2}^{-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{e^{j\frac{\pi}{3}k}-e^{j\frac{2\pi}{3}k}}{-j\frac{\pi}{3}k}\right)$

$= \frac{1}{6}\left(\frac{-e^{j\frac{\pi}{3}k}}{-j\frac{\pi}{3}k} - \frac{e^{j\frac{\pi}{3}k}}{(-j\frac{\pi}{3}k)^2} - \frac{-2e^{j\frac{2\pi}{3}k}}{-j\frac{\pi}{3}k} + \frac{e^{j\frac{2\pi}{3}k}}{(-j\frac{\pi}{3}k)^2}\right) + \frac{j(e^{j\frac{\pi}{3}k}-e^{j\frac{2\pi}{3}k})}{\pi k}$

$= \frac{1}{6}\left(\frac{e^{j\frac{\pi}{3}k}}{j\frac{\pi}{3}k} - \frac{2e^{j\frac{2\pi}{3}k}}{j\frac{\pi}{3}k} + \frac{e^{j\frac{\pi}{3}k}}{(\frac{\pi}{3}k)^2} - \frac{e^{j\frac{2\pi}{3}k}}{\frac{\pi}{3}k}\right) + \frac{j(e^{j\frac{\pi}{3}k}-e^{j\frac{2\pi}{3}k})}{\pi k}$

$(2) = \frac{1}{6}\left(\frac{e^{-j\frac{\pi}{3}kt}}{-j\frac{\pi}{3}k}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{6}\left(\frac{e^{-j\frac{\pi}{3}k}}{-j\frac{\pi}{3}k} - \frac{e^{j\frac{\pi}{3}k}}{-j\frac{\pi}{3}k}\right) = \frac{1}{6(-j\frac{\pi}{3}k)}\cdot -2\sin\frac{\pi}{3}k\cdot j$

$= \frac{2\sin\frac{\pi}{3}k}{2\pi k} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}k}{\pi k}$

$(3) = -\frac{1}{6}\left(\frac{t}{-j\frac{\pi}{3}k}e^{-j\frac{\pi}{3}kt} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{3}kt}}{(-j\frac{\pi}{3}k)^2}\right)\Big|_{1}^{2} + \frac{2}{6}\left(\frac{e^{-j\frac{\pi}{3}kt}}{-j\frac{\pi}{3}k}\right)\Big|_{1}^{2}$

$= \frac{1}{6}\left(\frac{2e^{-j\frac{2\pi}{3}k}}{j\frac{\pi}{3}k} + \frac{e^{-j\frac{2\pi}{3}k}}{(-j\frac{\pi}{3}k)^2} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{3}k}}{j\frac{\pi}{3}k} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{3}k}}{(-j\frac{\pi}{3}k)^2}\right) + \left(\frac{e^{-j\frac{2\pi}{3}k}-e^{-j\frac{\pi}{3}k}}{-j\pi k}\right)$

最 ① = (1)+(2)+(3) 可得原 F_k 的值

3.5 直流稳压电源中整流电路的系统模型如图所示，图中的整流器可以是半波整流器或全波整流器。半波整流器和全波整流器的输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 的信号变换关系分别为：

$$y(t)=\begin{cases} x(t) & x(t)\ge 0 \\ 0, & x(t)<0 \end{cases} \quad 或 \quad y(t)=|x(t)|$$

低通滤波器的输出为 $v(t)$。

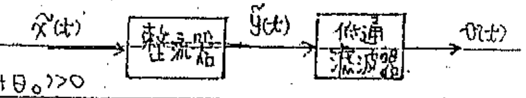
1) 当 $x(t)=A\cos(100\pi t+\theta_0)$ 时，试分别求半波和全波整流器的输出 $y(t)$ 中的直流分量，以及基波分量的大小和频率。

2) 假设整流器后接的低通滤波器的频率响应 $H(\omega)$ 为：

$$H(\omega)=1/(j\omega+2\pi)$$

试计算当用全波整流和半波整流时，输出 $v(t)$ 中直流分量 v_0 和基波分量 v_1 之比，按此计算结果，你能对用半波整流器和全波整流器时的整流性能得出什么结论？

解：



1) $-\frac{\pi}{2}\le 100\pi t+\theta_0\le\frac{\pi}{2}$ 时 $\cos(100\pi t+\theta_0)>0$

即 $\frac{-\frac{\pi}{2}-\theta_0}{100\pi}\le t\le\frac{\frac{\pi}{2}-\theta_0}{100\pi}$ 又 $\because T=\frac{2\pi}{100\pi}=\frac{1}{50}$

$\therefore$ $\tilde{y}(t)$的傅立叶级数：

$$\tilde{F}_k=\frac{2}{100}\int_{-\frac{1}{100}}^{\frac{1}{100}}\tilde{y}(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt$$

$$=\frac{1}{50}\int_{-\frac{1}{200}-\frac{\theta_0}{100\pi}}^{\frac{1}{200}-\frac{\theta_0}{100\pi}}A\cos(100\pi t+\theta_0)e^{-jk(100\pi)t}dt$$

令 $k=0$ 可求

$$\tilde{F}_0=\frac{1}{50}\int_{-\frac{1}{200}-\frac{\theta_0}{100\pi}}^{\frac{1}{200}-\frac{\theta_0}{100\pi}}A\cos(100\pi t+\theta_0)dt$$

$$=\frac{A}{50}\left(\frac{\sin(100\pi t+\theta_0)}{100\pi}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{200}-\frac{\theta_0}{100\pi}}^{\frac{1}{200}-\frac{\theta_0}{100\pi}}$$

$$=\frac{A}{50}\cdot\frac{1}{100\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{A}{2500\pi}$$

即为直流分量，半波整流时

5.7 试求下列周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的离散傅里叶级数 $\tilde{F}_k$，并概略画出幅度 $|\tilde{F}_k|$ 和相位 $\tilde{\theta}_k$ 的图形。

2) $\tilde{x}[n]=\cos(2\pi n/3)+\sin(2\pi n/7)$

$$\tilde{F}_k=\frac{1}{N}\sum_{n\in\langle N\rangle}\tilde{x}[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$=\frac{1}{}\sum$$

$$\cos(2\pi n/3)=\frac{1}{2}(e^{j2\pi n/3}+e^{-j2\pi n/3}),\quad \sin\frac{2\pi n}{7}=\frac{1}{2j}(e^{j2\pi n/7}-e^{-j2\pi n/7})$$

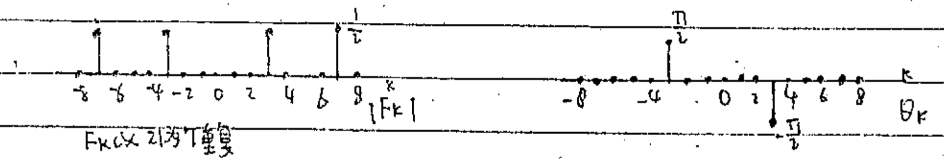
$$\therefore\ \tilde{x}[n]=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi n}{3}}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi n}{3}}+\frac{1}{2e^{j\frac{\pi}{2}}}e^{j2\pi n/7}-\frac{1}{2e^{j\frac{\pi}{2}}}e^{-j2\pi n/7}$$

令 $\Omega_0=\frac{2\pi}{21}$

$$=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{21}\cdot 7n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{21}n\cdot 7}+\frac{1}{2}e^{j(-\frac{\pi}{2})}e^{j\frac{2\pi}{21}\cdot 3n}-\frac{1}{2}e^{j(-\frac{\pi}{2})}e^{-j\frac{2\pi}{21}\cdot 3n}$$

$$\therefore\ \tilde{F}_7=\frac{1}{2},\ \tilde{F}_{-7}=\frac{1}{2}\quad \tilde{F}_3=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}},\ \tilde{F}_{-3}=-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}e^{j\pi-j\frac{\pi}{2}}$$

$\therefore$ $|\tilde{F}_k|$ 如图，θ_k 如图：



F_k 以 21为周期重复

4) $\tilde{x}[n]$ 分别以7为周期，其一个周期内为：$\tilde{x}[n]=\begin{cases}1 & 0\le n\le 4\\ 0 & 5\le n\le 6\end{cases}$

解

$$\tilde{F}_k=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{6}\tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{7}nk}$$

$$=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{4}e^{-j\frac{2\pi}{7}nk}$$

$$=\frac{1}{7}\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{7}5k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{7}k}}$$

$$=\frac{1}{7}\frac{e^{-j\frac{\pi}{7}5k}(e^{j\frac{\pi}{7}5k}-e^{-j\frac{\pi}{7}5k})}{e^{-j\frac{\pi}{7}k}(e^{j\frac{\pi}{7}k}-e^{-j\frac{\pi}{7}k})}$$

$$=\frac{1}{7}\frac{e^{-j\frac{\pi}{7}5k}\sin\frac{\pi}{7}5k}{e^{-j\frac{\pi}{7}k}\sin\frac{\pi}{7}k}$$

$$=\frac{1}{7}\frac{\sin\frac{\pi}{7}5k}{\sin\frac{\pi}{7}k}e^{-j\frac{\pi}{7}4k}$$

$$\therefore\ |\tilde{F}_k|=\frac{1}{7}\frac{\sin\frac{\pi}{7}5k}{\sin\frac{\pi}{7}k}\qquad \theta_k=-\frac{\pi}{7}4k$$

5.8 已知周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的周期为$N=4$，且它在一个周期内的序列值为$\tilde{x}[0]=1$, $\tilde{x}[1]=0$, $\tilde{x}[2]=2$和 $\tilde{x}[3]=-1$。

1) 利用离散傅里叶级数的综合公式，当$n=0,1,2,3$时，写出4个DFS系数$\tilde{F}_k$，$0\le k\le 3$作为四个未知数的代数方程组，求解该代数方程组，并求得$\tilde{x}[n]$的DFS系数$\tilde{F}_k$，$k\in Z$。

2) 利用DFS的分析公式，计算$\tilde{x}[n]$的DFS系数$\tilde{F}_k$，$k\in Z$，验证这两种求DFS系数的方法。

3) 计算一个周期为4的DFS系数$\tilde{F}_0=1$，$\tilde{F}_1=0$，$\tilde{F}_2=2$和$\tilde{F}_3=-1$合成的周期序列$\tilde{x}[n]$

解：1) 利用综合公式列方程

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}[0]\\ \tilde{x}[1]\\ \tilde{x}[2]\\ \tilde{x}[3]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\ 1&w&w^2&w^3\\ 1&w^2&w^4&w^6\\ 1&w^3&w^6&w^9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{F}_0\\ \tilde{F}_1\\ \tilde{F}_2\\ \tilde{F}_3\end{pmatrix}\qquad w=e^{j\frac{2\pi}{4}}=j$$

此方程的增广矩阵：

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\ 1&j&-1&-j&0\\ 1&-1&1&-1&2\\ 1&-j&-1&j&-1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\ 0&j-1&-2&-j-1&-1\\ 0&-2&0&-2&1\\ 0&-2&4&-2&-3\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\ 0&j-1&-2&-j-1&-1\\ 0&-2&0&-2&1\\ 0&0&-4&0&-4\end{array}\right]$$

$$\therefore\begin{cases}-4\tilde{F}_2=-4\\ -2\tilde{F}_1-2\tilde{F}_3=1\\ (j-1)\tilde{F}_1-2\tilde{F}_2-(j+1)\tilde{F}_3=-1\\ \tilde{F}_0+\tilde{F}_1+\tilde{F}_2+\tilde{F}_3=1\end{cases}\qquad\therefore\begin{cases}\tilde{F}_0=\frac{1}{2}\\ \tilde{F}_1=\frac{-(1+j)}{4}\\ \tilde{F}_2=1\\ \tilde{F}_3=\frac{-(1-j)}{4}\end{cases}$$

2) 利用分析公式：

$$\tilde{F}_k=\frac{1}{N}\sum_{n\in\langle N\rangle}\tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

代入$\tilde{x}[n]$的值：

$$\tilde{F}_k=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}\tilde{x}[n]e^{-j\frac{\pi}{2}nk}$$

$$=\frac{1}{4}(1+2e^{-j\pi k}-e^{-j\frac{3\pi}{2}k})$$

$k=0$ $\quad\tilde{F}_0=\frac{1}{4}(1+2-1)=\frac{1}{2}$

$k=1$ $\quad\tilde{F}_1=\frac{1}{4}(1+2e^{-j\pi}-e^{-j\frac{3\pi}{2}})=\frac{1}{4}(1-2-j)=\frac{-(1+j)}{4}$

$k=2$ $\quad\tilde{F}_2=\frac{1}{4}(1+2-e^{-j3\pi})=\frac{1}{4}(3-(-1))=1$

$k=3$ $\quad\tilde{F}_3=\frac{1}{4}(1+2e^{-j3\pi}-e^{-j\frac{9\pi}{2}})=\frac{1}{4}(1-2-e^{-j\frac{\pi}{2}})=\frac{-(1-j)}{4}$

3)
$$\tilde{x}[n]=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{F}_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$\therefore\ \tilde{x}[n]=\sum_{k=0}^{3}\tilde{F}_k e^{j\frac{\pi}{2}nk}$$

$$=e^{j\frac{\pi}{2}n\cdot 0}+2e^{j\frac{\pi}{2}n\cdot 2}-e^{j\frac{\pi}{2}n\cdot 3}$$

$$=1+2e^{j n\pi}-e^{j\frac{3\pi}{2}n}$$

$\therefore\ \tilde{x}[0]=1+2-1=2$

$\tilde{x}[1]=1+2e^{j\pi}-e^{j\frac{3\pi}{2}}=1-2+j=j-1$

$\tilde{x}[2]=1+2e^{2j\pi}-e^{j3\pi}=1+2+1=4$

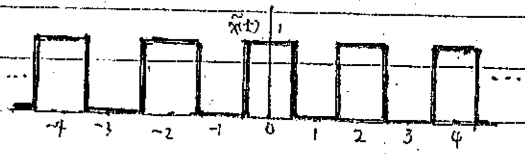
$\tilde{x}[3]=1+2e^{j3\pi}-e^{j\frac{9\pi}{2}}=1-2-j=-1-j$

5.11 对于下列 $h(t)$ 表示的每一个连续时间LTI系统，假定输入信号 $\tilde{x}(t)$ 如图所示的周期方法，试求系统的输出 $\tilde{y}(t)$ 的傅立叶级数系数

1) $h(t)=e^{-at}u(t)$, $a>0$

解: $\tilde{x}(t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} r_1(t-2l)$

其中 $r_1(t)=\begin{cases}1 & |t|<1/2\\ 0 & |t|>1/2\end{cases}$



$\therefore$ $\tilde{x}(t)$ 的傅立叶系数 由课本P7(5.3.4)式知 $\omega_0=\frac{2\pi}{2}=\pi$

$$F_k=\frac{1}{2}Sa\left(\frac{k\pi}{2}\right),\ k=0,\pm1,\pm2\cdots$$

$$\therefore\quad \tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}Sa\frac{k\pi}{2}e^{jk\pi t}$$

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^{\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{j\omega+a}$$

$$\therefore\ \tilde{y}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_kH(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k\frac{1}{jk\pi+a}e^{jk\pi t}$$

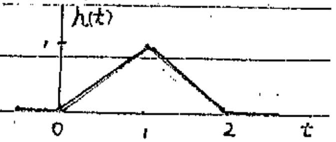
$\therefore$ $\tilde{y}(t)$ 的傅立叶级数系数:

$$F_k'=\frac{1}{2}Sa\frac{k\pi}{2}\cdot\frac{1}{jk\pi+a}$$

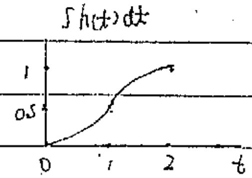
5.13 某连续时LTI系统的单位冲激响应 $h(t)$ 和输入的周期方波信号 $\tilde{x}(t)$ 如图所示，试求：1) 利用卷积积分，获得该LTI系统的输出 $\tilde{y}(t)$;

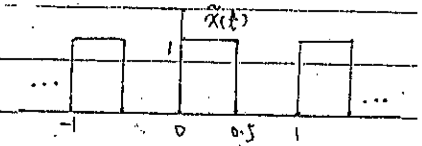
2) 利用周期信号通过LTI系统的傅里叶方法，获得该系统的输出 $\tilde{y}(t)$。

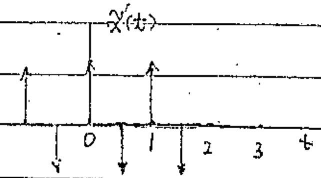
解: 1) $h(t)*\tilde{x}(t)=\int h(t)dt*\tilde{x}'(t)$



由 $h(t)=\begin{cases}t & 0<t<1\\ -t+2 & 1<t<2\end{cases}$ $\int h(t)dt=\begin{cases}\frac{t^2}{2} & 0<t<1\\ -\frac{t^2}{2}+2t-1 & 1<t<2\end{cases}$







$$\tilde{x}'(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\delta(t-n)-\delta\left(t-\frac{2n+1}{2}\right)\right)$$

$\therefore$

$$h(t)*\tilde{x}(t)=\begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{(t-n)^2}{2}-\frac{(t-\frac{2n+1}{2})^2}{2}\right) & 0<t<1\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{(t-n)^2}{2}+2(t-n)-1+\frac{(t-\frac{2n+1}{2})^2}{2}-2(t-\frac{2n+1}{2})-1\right) & 1<t<2\end{cases}$$

2) $\tilde{x}(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{0.5}(t-l-0.25)$ 其中 $r_{0.5}(t) = \begin{cases} 1 & |t|<0.25 \\ 0 & |t|>0.25 \end{cases}$

$k\neq0$时 $F_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi,\ T=1$

$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{x}(t)e^{-j2\pi kt}dt$

$= \int_0^{1/2} e^{-j2k\pi t}dt$

$= \frac{e^{-j2k\pi t}}{-j2k\pi}\Big|_0^{1/2} = \frac{e^{-jk\pi}-1}{-j2k\pi}$

$= \frac{(-1)^k-1}{-j2k\pi}$

$F_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{x}(t)dt = 0.5.$

$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$

$= \int_0^1 te^{-j\omega t}dt + \int_1^2(-t+2)e^{-j\omega t}dt$

$= \int_0^1 \frac{t}{-j\omega}de^{-j\omega t} + \int_1^2 \frac{t}{-j\omega}de^{-j\omega t} + 2\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Big|_1^2$

$= -\frac{t}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}dt + \frac{te^{-j\omega t}}{j\omega}\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}dt + \frac{2e^{-j2\omega}-2e^{-j\omega}}{-j\omega}$

$= -\frac{e^{-j\omega}+0}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2}\Big|_0^1 - \frac{e^{-j\omega t}}{(j\omega)(-j\omega)}\Big|_1^2 + \frac{2e^{-j2\omega}-e^{-j\omega}}{j\omega} - \frac{2e^{-j2\omega}-2e^{-j\omega}}{j\omega}$

$= -\frac{e^{-j\omega}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega}-1}{(-j\omega)^2} + \frac{e^{-j2\omega}-e^{-j\omega}}{(j\omega)^2} + \frac{e^{-j\omega}}{j\omega}$

$= \frac{e^{-j2\omega}-2e^{-j\omega}+1}{(-j\omega)^2} = \frac{(e^{-j\omega}-1)^2}{(-j\omega)^2}$

$\because\ \tilde{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k H(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t} = 0.5\cdot1 + \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty} \frac{(-1)^k-1}{-j2k\pi}\cdot\frac{(e^{-jk2\pi}-1)^2}{-(k2\pi)^2}e^{jk2\pi t}$

$= \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty} \frac{((-1)^k-1)(e^{-jk2\pi}-1)^2}{-j(2k\pi)^3}$

$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=2n+1\\-\infty<n<\infty}} e^{jk\pi(t+2)}\cdot\frac{(e^{-j2k\pi}-1)^2}{(2k\pi)^3} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=2n+1\\-\infty<n<\infty}}$

5.14 本题考察周期序列通过离散时间LTI系统的问题

1) 离散时间LTI系统的单位冲激响应为 $h[n] = (1/2)^{|n|}$，对于下列每个周期输入 $\tilde{x}[n]$ 试求其输出 $\tilde{y}[n]$.

a) $\tilde{x}[n] = \sin\frac{3\pi}{4}n$

解: $\tilde{x}[n] = \frac{1}{2j}(e^{j\frac{3\pi}{4}n} - e^{-j\frac{3\pi}{4}n})$ 取 $N=8$ $\therefore\ \omega_0 = \frac{\pi}{4}$

$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 n3} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 n3}$

$= \frac{-j}{2}e^{j\omega_0 n3} + \frac{j}{2}e^{-j\omega_0 n3} = \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}j}e^{j\omega_0 n3} + \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}j}e^{-j\omega_0 n3}$

由 $h[n] = (1/2)^{|n|}$

$\tilde{H}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n e^{-jn\Omega} + \sum_{n=-\infty}^{-1}(\frac{1}{2})^{-n}e^{-jn\Omega}$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n e^{-jn\Omega} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n e^{jn\Omega}$

$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{\frac{1}{2}e^{j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}$

$= \frac{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}+\frac{1}{2}e^{j\Omega}(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{2}e^{j\Omega})} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}(e^{j\Omega}+e^{-j\Omega})}$

$$\tilde{y}[n]=\sum_{k\in\langle N\rangle}\tilde{F}_k\tilde{H}(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}j}\tilde{H}(3\cdot\frac{\pi}{4})e^{j3\cdot\frac{\pi}{4}n}+\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}j}\tilde{H}(-3\cdot\frac{\pi}{4})e^{j-3\cdot\frac{\pi}{4}n}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}j}\frac{\frac{3}{4}e^{j\frac{3\pi}{4}n}}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}(e^{\frac{3\pi}{4}j}+e^{-\frac{3\pi}{4}j})}+\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}j}\frac{\frac{3}{4}e^{-j\frac{3\pi}{4}n}}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}(e^{-\frac{3\pi}{4}j}+e^{\frac{3\pi}{4}j})}$$

c) $\tilde{x}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta[n-5m]$

$$\tilde{F}_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\delta[n]e^{-j\Omega_0 nk}\qquad \Omega_0=\frac{2\pi}{N}=\frac{2\pi}{5}$$

$$=\frac{1}{5}$$

由上题知 $\tilde{H}(\Omega)=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}(e^{j\Omega}+e^{-j\Omega})}$

$$\tilde{y}[n]=\sum_{k\in\langle N\rangle}\tilde{F}_k\tilde{H}(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}\tilde{H}(k\frac{2\pi}{5})e^{jk\frac{2\pi}{5}n}$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}(e^{jk\frac{2\pi}{5}}+e^{-jk\frac{2\pi}{5}})}e^{jk\frac{2\pi}{5}n}$$

5.15 试求下列每个连续时间信号 $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$，并概画出其幅度频谱 $|X(\omega)|$ 和相位频谱 $\varphi(\omega)$。

1) $e^{at}u(-t),\ a>0$

解:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{at}u(-t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-j\omega t}dt$$

$$=-\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{j\omega t}dt$$

$$=-\left.\frac{e^{(j\omega-a)t}}{j\omega-a}\right|_0^{\infty}=-(\frac{0-1}{j\omega-a})$$

$$=\frac{1}{j\omega-a}$$

3) $\sin\pi t+\cos[2\pi t+\frac{\pi}{4}]$

解: $\sin\pi t=\frac{1}{2j}(e^{j\pi t}-e^{-j\pi t})$

$$\cos[2\pi t+\frac{\pi}{4}]=\frac{1}{2}(e^{j(2\pi t+\frac{\pi}{4})}+e^{-j(2\pi t+\frac{\pi}{4})})$$

$$=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j2\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j2\pi t}$$

$\because$ $e^{j\omega_0 t}\xrightarrow{F}2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$\therefore$ $e^{j\pi t}\longrightarrow 2\pi\delta(\omega-\pi)\qquad e^{-j\pi t}\longrightarrow 2\pi\delta(\omega+\pi)$

$e^{j2\pi t}\longrightarrow 2\pi\delta(\omega-2\pi)\qquad e^{-j2\pi t}\longrightarrow 2\pi\delta(\omega+2\pi)$

$\therefore$ $F(\omega)=\frac{1}{2j}(2\pi\delta(\omega-\pi)-2\pi\delta(\omega+\pi))+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot 2\pi\delta(\omega-2\pi)+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}2\pi\delta(\omega+2\pi)$

$$=\pi j(\delta(\omega+\pi)-\delta(\omega-\pi))+\pi(e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega+2\pi)+e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega-2\pi))$$

4) $x(t)=\begin{cases}1+\cos\pi t, & |t|\le 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$

解: $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

$=\int_{-1}^{1}(1+\cos\pi t)e^{-j\omega t}dt$

$=\int_{-1}^{1}e^{-j\omega t}dt+\int_{-1}^{1}\cos\pi t\, e^{-j\omega t}dt$ ① $=\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{e^{-j\omega t}}{\pi}d\sin\pi t$

$=\frac{e^{-j\omega}-e^{j\omega}}{-j\omega}+\frac{e^{-j\omega t}}{\pi}\sin\pi t\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{\sin\pi t}{\pi}de^{-j\omega t}$

$=\frac{2\sin\omega}{\omega}+\frac{e^{-j\omega}\sin\pi-e^{j\omega}\sin(-\pi)}{\pi}+\int_{-1}^{1}\frac{+j\omega}{\pi^2}e^{-j\omega t}d\cos\pi t$

$=\frac{2\sin\omega}{\omega}+\frac{j\omega}{\pi^2}e^{-j\omega t}\cos\pi t\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{-(j\omega)^2}{\pi^2}\cos\pi t\, e^{-j\omega t}dt$

$=\frac{2\sin\omega}{\omega}+\frac{j\omega}{\pi^2}(-e^{-j\omega}+e^{j\omega})-\frac{\omega^2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\cos\pi t\, e^{-j\omega t}dt$

$=\frac{2\sin\omega}{\omega}+\frac{j\omega}{\pi^2}\cdot 2\sin\omega\cdot j-\frac{\omega^2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\cos\pi t\, e^{-j\omega t}dt$ ②

由①与②式知:

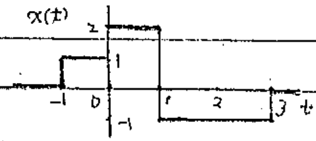
$$\frac{2\sin\omega}{\omega}+\int_{-1}^{1}\cos\pi t\, e^{-j\omega t}dt=\frac{2\sin\omega}{\omega}+\frac{-2\omega\sin\omega}{\pi^2}-\frac{\omega^2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\cos\pi t\, e^{-j\omega t}dt$$

$\therefore\ (1+\frac{\omega^2}{\pi^2})\int_{-1}^{1}\cos\pi t\, e^{-j\omega t}dt=-\frac{\omega\sin\omega}{\pi^2}$

$$\int_{-1}^{1}\cos\pi t\, e^{-j\omega t}dt=-\frac{\omega\sin\omega}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{\pi^2+\omega^2}=-\frac{\omega\sin\omega}{\pi^2+\omega^2}$$

综上: $F(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}-\frac{\omega\sin\omega}{\pi^2+\omega^2}$

9) $x(t)$如图所示:



解: $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

$=\int_{-1}^{0}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{1}2e^{-j\omega t}dt+\int_{1}^{3}(-1)e^{-j\omega t}dt$

$=\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Big|_{-1}^{0}+2\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Big|_{0}^{1}+\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\Big|_{1}^{3}$

$=\frac{(1-e^{j\omega})}{-j\omega}+2\frac{e^{-j\omega}-1}{-j\omega}+\frac{e^{-3j\omega}-e^{-j\omega}}{j\omega}$

$=\frac{1+e^{-j3\omega}-3e^{-j\omega}+e^{j\omega}}{j\omega}$

5.16 对下列每个连续时间信号的频谱$X(\omega)$，试确定该信号$x(t)$，并概略画出波形。

2) $X(\omega)=2[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)]+3[\delta(\omega-2\pi)-\delta(\omega+2\pi)]$

解

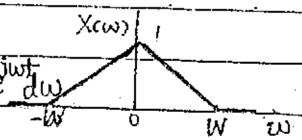
$X(\omega)=\frac{-2}{\pi j}\cdot\pi j[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]+\frac{(-3)}{j\pi}j\pi[\delta(\omega+2\pi)-\delta(\omega-2\pi)]$

$=\frac{2j}{\pi}\sin t-\frac{3}{j\pi}\sin 2\pi t$

$=\frac{2j}{\pi}\sin t+\frac{3j}{\pi}\sin 2\pi t$

3) $X(\omega)$如图所示:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$



$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-W}^{0}\left(\frac{1}{W}\omega+1\right)e^{j\omega t}d\omega+\int_{0}^{W}\left(-\frac{1}{W}\omega+1\right)e^{j\omega t}d\omega\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega t}}{jt}\Big|_{-W}^{0}+\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{0}\frac{1}{W}\omega e^{j\omega t}d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega t}}{jt}\Big|_{0}^{W}+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{W}-\frac{1}{W}\omega e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{\sin Wt}{\pi t}+\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{0}\frac{1}{W}\omega e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{W}-\frac{1}{W}\omega e^{j\omega t}d\omega$$

$\because$ $$\int\omega e^{j\omega t}d\omega=\int\frac{\omega}{jt}de^{j\omega t}=\frac{\omega}{jt}e^{j\omega t}-\int\frac{e^{j\omega t}}{jt}d\omega$$

$$=\frac{\omega}{jt}e^{j\omega t}-\frac{e^{j\omega t}}{(jt)^2}$$

$$=\frac{\omega}{jt}e^{j\omega t}+\frac{e^{j\omega t}}{t^2}$$

$\therefore$ $$\frac{1}{2\pi W}\int_{-W}^{0}\omega e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi W}\left(\frac{\omega}{jt}e^{j\omega t}+\frac{e^{j\omega t}}{t^2}\right)\Big|_{-W}^{0}$$

$$=\frac{1}{2\pi W}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{-We^{jWt}}{jt}-\frac{e^{-jWt}}{t^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi W}\frac{1-jWte^{-jWt}-e^{-jWt}}{t^2}$$

$$\frac{-1}{2\pi W}\int_{0}^{W}\omega e^{j\omega t}d\omega=\frac{-1}{2\pi W}\left(\frac{\omega e^{j\omega t}}{jt}+\frac{e^{j\omega t}}{t^2}\right)\Big|_{0}^{W}$$

$$=\frac{-1}{2\pi W}\left(\frac{We^{jWt}}{jt}+\frac{e^{jWt}}{t^2}-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$=\frac{-1}{2\pi W}\left(\frac{1-e^{jWt}+jte^{jWt}}{t^2}\right)$$

$\therefore$ $$x(t)=\frac{\sin Wt}{\pi t}+\frac{1}{2\pi W}\frac{2-e^{jWt}-e^{-jWt}}{t^2}$$

$$=\frac{\sin Wt}{\pi t}+\frac{1}{2\pi W}\frac{2-2\cos Wt}{t^2}$$

$$=\frac{\sin Wt}{\pi t}+\frac{1-\cos Wt}{\pi Wt^2}$$

5.17 对于下列每一个离散时间序列x[n]，试求其DTFT $\tilde{X}(\Omega)$，并概画出它们的幅度频谱、相位频谱。

2) $u[n]-u[n-5]$

解:

$$\tilde{X}(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-jn\Omega}$$

$$=\sum_{n=0}^{4}x[n]e^{-jn\Omega}$$ 代入x[n]值

$$=\frac{1-e^{-j5\Omega}}{1-e^{-j\Omega}}$$

幅度与相位由零极点位置决定

4) $\sum_{m=0}^{\infty}(1/2)^n\delta[n-3m]$

解:

$$\tilde{X}(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(1/2)^n\delta[n-3m]e^{-jn\Omega}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^n e^{-jn\Omega} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n-3m]$$

$$= (\tfrac{1}{2})^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n-3m]$$

$$= (\tfrac{1}{2})^n u[n] \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n-3m] \quad ①$$

$$(\tfrac{1}{2})^n u[n] \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \quad ②$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \delta[n-3m] \xrightarrow{DTFT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n-3m]\, e^{-jn\Omega}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-j3m\Omega}\, \delta[n-3m]$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-3m] = \frac{2\pi}{3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi}{3}k)$$

①式进一步化为 $= (\tfrac{1}{2})^n u[n] \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n-3m]$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\Omega-\Omega')}} \frac{2\pi}{3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega' - \frac{2\pi}{3}k)\, d\Omega'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} \int_{\langle 2\pi \rangle} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\Omega-\Omega')}} \left(\delta(\Omega') + \delta(\Omega' - \frac{2\pi}{3}) + \delta(\Omega' + \frac{2\pi}{3})\right) d\Omega'$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\langle 2\pi \rangle} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \delta(\Omega') + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega+j\frac{2\pi}{3}}} \delta(\Omega' - \frac{2\pi}{3}) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega-j\frac{2\pi}{3}}} \delta(\Omega' + \frac{2\pi}{3}) \right) d\Omega'$$

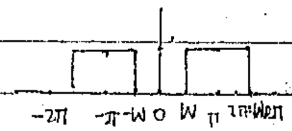
$$\therefore \quad \tilde{X}(\Omega) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega+j\frac{2\pi}{3}}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega-j\frac{2\pi}{3}}} \right)$$

5.18 对下列每个离散时间傅立叶变换 $\tilde{X}(\Omega)$，试确定对应的离散时间序列 $x[n]$，并画出序列图形。

1) $\tilde{X}(\Omega) = 1 - e^{-j3\Omega} + 4e^{j2\Omega} + 3e^{-j6\Omega}$

解 $x[n] = \delta[n] - \delta[n-3] + 4\delta[n+2] + 3\delta[n-6]$

3) $\tilde{X}(\Omega) = \begin{cases} 0 & 0 \le |\Omega| \le W \\ 1 & W < |\Omega| \le \pi \end{cases}$



$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \tilde{X}(\Omega)\cdot e^{jn\Omega}d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{W}^{2\pi-2W} e^{jn\Omega}d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left.\frac{e^{jn\Omega}}{jn}\right|_{W}^{2\pi-2W}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{jn(2\pi-2W)} - e^{jnW}}{jn}$$

$$= \frac{1}{2\pi}((e^{j2\pi n} - e^{j2nW})/jn - e^{jnW}/jn)$$

$$= \frac{1}{2\pi}(1 - e^{j2nW} - e^{jnW})/jn$$

5.21 例5.7中所给出的矩形形状的傅里叶变换在信号与系统分析中起着十分重要的作用

TI系统频率相应具有(5.4.31)式的形式，则称为理想低通滤波器，它对输入信号中频
于W的所有频率分量具有单位增益，而对于输入信号中频率高于W的所有频率分量，其输
阻等于零。

现已知一个连续时间LTI系统的单位冲激响应为

$$h(t)=\frac{\sin(2\pi\times10^3 t)}{\pi t}=2\times10^3 Sa(2\pi\times10^3 t) \quad ①$$

对于下列每一个输入的周期信号 $\tilde{x}(t)$，试求其输出信号。

(1) $\tilde{x}(t)=\cos(\pi\times10^3 t)+\sin(3\pi\times10^3 t)$

∵ 由 $F(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W \\ 0, & |\omega|>W\end{cases} \longrightarrow f(t)=\frac{W}{\pi}Sa\,Wt$

对比①式可知 $W=2\pi\times10^3$ ∴ $F(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<2\pi\times10^3 \\ 0 & |\omega|>2\pi\times10^3\end{cases}$

$\tilde{x}(t)=\frac{1}{2}(e^{j\pi\times10^3 t}+e^{-j\pi\times10^3 t})+\frac{1}{2j}(e^{j3\pi\times10^3 t}-e^{-j3\pi\times10^3 t})$

令 $\pi\times10^3=\omega_0$ ∴上式 $=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j3\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j3\omega_0 t}$

∴ $\tilde{y}(t)=\frac{1}{2}F(\omega_0)e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}F(-\omega_0)e^{-j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}F(3\omega_0)e^{j3\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}F(-3\omega_0)e^{-j3\omega_0 t}$

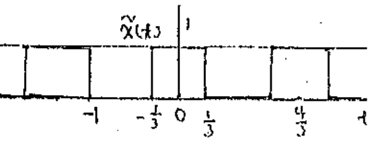
$=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$

$=\cos\pi\times10^3 t$

(3) 周期为4/3 ms的如图所示周期方波

$F_k=\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}\tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ ∵ $T=\frac{4}{3}ms$ ∴ $\omega_0=\frac{2\pi}{\frac{4}{3}}\times10^3=\frac{3\pi}{2}\times10^3$

$=\frac{3}{4}\times10^3\int_{-\frac{1}{3}\times10^{-3}}^{\frac{1}{3}\times10^{-3}}e^{-j\omega_0 tk}dt$



$=\frac{3}{4}\times10^3\cdot\left.\frac{e^{-j\omega_0 tk}}{-j\omega_0 k}\right|_{-\frac{1}{3}\times10^{-3}}^{\frac{1}{3}\times10^{-3}}$

$=\frac{3}{4}\times10^3\,\frac{e^{-j\omega_0 k\frac{1}{3}\times10^{-3}}-e^{j\omega_0 k\frac{1}{3}\times10^{-3}}}{-j\omega_0 k}$

$=\frac{3}{4}\times10^3\,\frac{-2j\sin(\omega_0 k\frac{1}{3}\times10^{-3})}{-j\omega_0 k}=\frac{3}{4}\times10^3\,\frac{2\sin(\frac{3\pi}{2}\times10^3\cdot\frac{1}{3}\times10^{-3}\times k)}{\frac{3}{2}\pi\times10^3 k}$

$=\frac{2\sin\frac{\pi}{2}k}{2\pi k}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\pi k}=\frac{1}{2}Sa\frac{\pi}{2}k$

∵ $\frac{W}{\omega_0}=\frac{2\pi\times10^3}{\frac{3\pi}{2}\times10^3}=\frac{4}{3}$ ∴ k只能取 -1, 0, 1

∴ $\tilde{y}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k H(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$

$=\frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{-\pi}e^{-j\omega_0 t}+\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\pi}e^{j\omega_0 t}$

$=\frac{1}{\pi}(e^{-j\omega_0 t}+e^{j\omega_0 t})+\frac{1}{2}$

$=\frac{2\cos\frac{3\pi}{2}\times10^3 t}{\pi}+\frac{1}{2}$

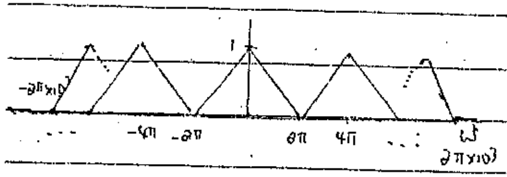
6) 已知下列输入信号 $x(t)$ 或其频谱 $X(\omega)$，试求其输出信号的频谱 $Y(\omega)$。

(2) $X(\omega)=\sin(0.5\times10^{-3}\omega)$

$\because F(\omega)=u(\omega+2\pi\times10^{3})-u(\omega-2\pi\times10^{3})$

$\therefore Y(\omega)=X(\omega)\cdot F(\omega)=\sin(0.5\times10^{-3}\omega)\cdot[u(\omega+2\pi\times10^{3})-u(\omega-2\pi\times10^{3})]$

(3) $X(\omega)$ 如图所示：



) 试求下列离散时间输入信号 $\tilde{x}[n]$ 或 $x[n]$ 时，如下 $h[n]$ 的离散时间 LTI 系统的输出信号 $y[n]$

$$h[n]=\frac{\sin(\pi n/3)}{\pi n}=\frac{1}{3}Sa\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

) 周期为 8 的周期序列值 $\tilde{x}[n]=\begin{cases}1 & |n|\le 2\\ 0 & 3\le n\le 5\end{cases}$

解：由 $h[n]$ 的表达式知

$$\tilde{H}(\Omega)=\begin{cases}1 & |\Omega|<\frac{\pi}{3}\\ 0 & |\Omega|>\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

$$\tilde{F}_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\tilde{x}[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7}\tilde{x}[n]e^{-jk\frac{2\pi}{8}n}$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{2}\tilde{x}[n]e^{-jk\frac{\pi}{4}n}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\tilde{x}[0]+\tilde{x}[1]e^{-jk\frac{\pi}{4}}+\tilde{x}[2]e^{-jk\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(1+e^{-jk\frac{\pi}{4}}+e^{-jk\frac{\pi}{2}}\right)\quad ①$$

$$\because \tilde{x}[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}\tilde{F}_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=0}^{7}\tilde{F}_k e^{jk\frac{\pi}{4}n}$$

$$\therefore \tilde{y}[n]=\sum_{k=0}^{7}\tilde{F}_k\tilde{H}\left(k\frac{2\pi}{4}\right)e^{jk\frac{\pi}{4}n}$$

$$=\tilde{F}_0\tilde{H}(0)+\tilde{F}_{-1}\tilde{H}\left(-\frac{\pi}{4}\right)e^{-j\frac{\pi}{4}n}+\tilde{F}_1\tilde{H}\left(\frac{\pi}{4}\right)e^{j\frac{\pi}{4}n}$$

$$=\tilde{F}_0+\tilde{F}_{-1}e^{-j\frac{\pi}{4}n}+\tilde{F}_1e^{j\frac{\pi}{4}n}$$

分别由①式计算 $\tilde{F}_0=\frac{1}{8}(1+1+1)=\frac{3}{8}$

$$\tilde{F}_1=\frac{1}{8}\left(1+e^{-j\frac{\pi}{4}}+e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{8}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}j-j\right)=\frac{1}{8}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)j\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}j\right)=\frac{\sqrt{2}+1}{8}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\tilde{F}_{-1}=\frac{1}{8}\left(1+e^{j\frac{\pi}{4}}+e^{j\frac{\pi}{2}}\right)$$

分别代入 $\tilde{F}_0,\tilde{F}_1,\tilde{F}_{-1}$ 即可得 $\tilde{y}[n]$

d) $\tilde{x}[n] = 1-2\cos(\pi n/2)+\sin(9\pi n/4)$

$= 1 - 2\cdot\frac{1}{2}(e^{j\pi n/2}+e^{-j\pi n/2}) + \frac{1}{2j}(e^{j9\pi n/4}-e^{-j9\pi n/4})$

∵ $\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{9\pi}{4}$ 均 > $\frac{\pi}{3}$ ∴ 均被滤除 只剩直流分量.

∴ ✓ $\frac{9}{4}\pi - 2\pi = \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3}$

$\tilde{y}[n] = 1 + \sin\frac{\pi n}{4}$

e) $x[n] = \delta[n+1]+\delta[n-1]$

$x[n] \xrightarrow{DTFT} e^{j\Omega}+e^{-j\Omega} = \tilde{X}(\Omega)$

$\tilde{X}(\Omega) = 2\cos\Omega$

∴ $\tilde{Y}(\Omega) = \tilde{X}(\Omega)\cdot H(\Omega) = 2\cos\Omega\,(u(\Omega+\frac{\pi}{3})-u(\Omega-\frac{\pi}{3}))$

$y[n] = DTFT^{-1}\tilde{Y}(\Omega) = \frac{1}{3}Sa\frac{\pi(n+1)}{3}+\frac{1}{3}Sa\frac{\pi(n-1)}{3}$

实际更为简捷的计算方法: $y[n] = h[n]*x[n]$

$= h[n]*(\delta[n+1]+\delta[n-1])$

$= \frac{1}{3}Sa\frac{\pi(n+1)}{3}+\frac{1}{3}Sa\frac{\pi(n-1)}{3}$

5.26 对于下列每个时间函数，确定其拉氏变换像函数和收敛域，并概画出零极点图，并说明哪些时间函数，或在什么条件下，其傅立叶变换存在并写出它的傅立叶变换.

1) $\cos(\omega_0 t+\phi_0)u(t)$

解: $\cos(\omega_0 t+\phi_0)u(t) = \frac{1}{2}(e^{j(\omega_0 t+\phi_0)}+e^{-j(\omega_0 t+\phi_0)})u(t)$

∴ $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}(e^{j(\omega_0 t+\phi_0)}+e^{-j(\omega_0 t+\phi_0)})e^{-st}u(t)\,dt$

$= \frac{1}{2}\int_0^\infty(e^{(j\omega_0-s)t+j\phi_0}+e^{-(j\omega_0+s)t+(-j\phi_0)})\,dt$

$= \frac{1}{2}\left(e^{j\phi_0}\frac{e^{(j\omega_0-s)t}}{j\omega_0-s}\Big|_0^\infty + e^{-j\phi_0}\frac{e^{-(j\omega_0+s)t}}{-(j\omega_0+s)}\Big|_0^\infty\right)$ $\quad j\omega_0-s<0 \cap j\omega_0+s>0$ 即 $Re[s]>0$

$= \frac{1}{2}\left(e^{j\phi_0}\frac{e^{(j\omega_0-s)\infty}-1}{j\omega_0-s}+e^{-j\phi_0}\frac{e^{-(j\omega_0+s)\infty}-1}{-(j\omega_0+s)}\right)$ $\quad Re[s]>0$

$= \frac{1}{2}e^{j\phi_0}\frac{1}{s-j\omega_0}+\frac{1}{2}e^{-j\phi_0}\frac{1}{s+j\omega_0}$ $\quad Re[s]>0$

$= \frac{\frac{1}{2}e^{j\phi_0}(s+j\omega_0)+\frac{1}{2}e^{-j\phi_0}(s-j\omega_0)}{s^2+\omega_0^2}$

$= \frac{s(\frac{1}{2}e^{j\phi_0}+\frac{1}{2}e^{-j\phi_0})+\frac{1}{2}j\omega_0(e^{j\phi_0}-e^{-j\phi_0})}{s^2+\omega_0^2}$

$= \frac{s\cos\phi_0-\omega_0\sin\phi_0}{s^2+\omega_0^2}$

$\therefore\ z_1 = \omega_0 \tan\phi_0 \qquad p_1 = j\omega_0 \quad p_2 = -j\omega_0$

严格意义上其傅立叶变换存在.

3) $e^{-at}u(t) + e^{-bt}u(-t) \qquad a>b>0$

$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-at}u(t) + e^{-bt}u(-t))e^{-st}dt$

$= \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{-bt}e^{-st}dt$

$= \frac{1}{s+a} + \frac{-1}{s+b} \qquad -a < Re\{s\} < -b$

$= \frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$

$\therefore$ 零点为 $z=\infty$ (无穷阶) 极点 $p_1=-a,\ p_2=-b$

傅立叶变换不存在, $\because$ 不包括虚轴

5) $f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0<t<T \\ 0, & t<0, t>T \end{cases}$

$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}(u(t)-u(t-T))e^{-st}dt$

$= \int_0^T e^{-at}e^{-st}dt$

$= \frac{e^{-(a+s)t}}{-(a+s)}\Big|_0^T$

$= \frac{e^{-(a+s)T}-1}{-(a+s)} = \frac{1-e^{-(a+s)T}}{s+a} \qquad R_s: Re s > -a$

$\therefore\ z_i = \frac{j2\pi k}{T} - a \quad , k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$

$p_1 = -a$

当 $a>0$ 时, 收敛域包括虚轴 即傅立叶变换存在为:

$F(\omega) = \frac{1-e^{-(j\omega+a)T}}{j\omega+a}$

5.27 对于下列每个离散时间序列, 确定Z变换像函数和收敛域, 并概画出零极点图。同时说明其离散时间傅立叶变换是否存在, 或在什么条件下存在。若傅立叶变换存在, 写出它的傅立叶变

2) $\sum_{l=0}^{\infty} a^n \delta[n-lN]$

解: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a^n \delta[n-lN] z^{-n}$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a^{lN} z^{-n}$

$= \sum_{l=0}^{\infty} a^{lN} z^{-lN}$

$= \frac{1}{1-a^N z^{-N}} \qquad R_s: a^N z^{-N} < 1 \quad \therefore |z|>|a|$

$\therefore\ z_i = \infty \qquad p = a$

当 $|a|<1$ 时 其 DTFT 存在为:

$\tilde{F}(\Omega) = \frac{1}{1-a^N e^{-jN\Omega}}$

$(\ )\ a^n u[n] - b^{-n}u[-n-1]$, $|b|>1>|a|$

解: $F_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n$

$=\frac{1}{1-az^{-1}}\qquad |z|>|a|$

$F_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b^{-n}u[-n-1]z^{-n}$

$=\sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n}z^{-n}$ 令 $m=-n$

$=\sum_{m=1}^{\infty} b^m z^m$

$=\frac{bz}{1-bz}\qquad |z|<\frac{1}{|b|}$

∴ 当 $|a|<|z|<\frac{1}{|b|}$ 时 $a^n u[n]-b^{-n}u[-n-1]$ 收敛 满足 $|a||b|<1$

$F(z)=F_1(z)-F_2(z)=\frac{z}{z-a}+\frac{bz}{bz-1}$

$=\frac{bz^2-z+bz^2-abz}{(z-a)(bz-1)}$

$=\frac{2bz^2-(ab+1)z}{(z-a)(bz-1)}$

$=\frac{z(2bz-ab-1)}{(z-a)(bz-1)}$

∴ $z_1=0$, $z_2=\frac{ab+1}{2b}$ $p_1=a$, $p_2=\frac{1}{b}$

∵ 收敛域 $|a|<|z|<\frac{1}{|b|}$ 包括单位圆 ∴存在 DTFT

5.32 对于下列每一个拉氏变换像函数及其收敛域,试确定它对应的时间函数

1) $\frac{s+1}{s^2+5s+6}$, $Re\{s\}>-2$

解: $\frac{s+1}{s^2+5s+6}=\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{s+3}$ ∵ $Re\{s\}>-2$

∴ $x(t)=(-e^{-2t}+2e^{-3t})u(t)$

3) $\frac{s^2-s+1}{s^2(s-1)}$, $1>Re\{s\}>0$

解: 令 $\frac{s^2-s+1}{s^2(s-1)}=\frac{A_{11}}{s}+\frac{A_{12}}{s^2}+\frac{A_2}{s-1}$

$A_{11}=\left\{\frac{d}{ds}\left[s^2\cdot\frac{s^2-s+1}{s^2(s-1)}\right]\right\}\Big|_{s=0}=\left(\frac{s(s-1)+1}{s-1}\right)'\Big|_{s=0}=1+\frac{-1}{(s-1)^2}\Big|_{s=0}=0$

$A_{12}=s^2\frac{s^2-s+1}{s^2(s-1)}\Big|_{s=0}=-1$

$A_2=\frac{s^2-s+1}{s^2(s-1)}(s-1)\Big|_{s=1}=1$

∴ $\frac{s^2-s+1}{s^2(s-1)}=\frac{-1}{s^2}+\frac{1}{s-1}\qquad 0<Re\{s\}<1$

$=\frac{-1}{s^2}\ (Re\{s\}>0)+\frac{1}{s-1}\ (Re\{s\}<1)$

$= -tu(t) - e^{t}u(-t)$

5.33 由下列给定的z变换像函数及有关信息，并用指定的方法，确定其反z变换变换 f[n]

1) 部分分式展开法，$F(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-(5/2)z^{-1}+z^{-2}}$，且 f[n] 绝对可和。

解：1)

$$F(z) = \frac{1-2z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$\therefore f[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ 或 $f[n] = -(\frac{1}{2})^n u[-n-1]$ 由收敛域确定 $|z|>\frac{1}{2}$，$|z|<\frac{1}{2}$

$\because |z|<\frac{1}{2}$ 时 F(z) 不稳定 ∴不满足 f[n] 绝对可和 故只能

$f[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

2) 部分分式展开法 $F(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}z^{-1}}$ 且收敛域包含单位圆

$$F(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$\because$ 收敛域包含单位圆：

$\therefore f[n] = \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^n u[n] + \frac{1}{3}(-\frac{1}{4})^n u[n]$

5.34 对于下列的z变换像函数及其收敛域，分别用部分分式展开法和幂级数展开法

2) $F(z) = \frac{z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$，$|z|>\frac{1}{2}$

法1) 令 $F_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ $|z|>\frac{1}{2}$ $\therefore f_1[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

$F(z) = zF_1(z)$ $\therefore f[n] = f_1[n+1] = (\frac{1}{2})^{n+1} u[n+1]$

法2)

$$\begin{array}{r|l} & z+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}+\cdots \\ 1-\frac{1}{2}z^{-1} & z \\ & z-\frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2}-\frac{1}{4}z^{-1} \\ \hline & \frac{1}{4}z^{-1} \\ & \frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2} \\ \hline & \frac{1}{8}z^{-2} \\ & \frac{1}{8}z^{-2}-\frac{1}{16}z^{-3} \\ \hline & \frac{1}{16}z^{-3} \end{array}$$

比较z变换定义可知：

$f[n]=0$ $n<-1$ 和 $f[-1]=1$ $f[0]=\frac{1}{2}$ $f[1]=\frac{1}{4}$，$f[2]=\frac{1}{8}\cdots$

3) $F(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$，$|z|>\frac{1}{2}$

法1) $F(z)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\dfrac{0}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ $\quad |z|>\frac{1}{2}$

$\therefore f[n]=(-\frac{1}{2})^n u[n]$

法2)

$$1+(-\tfrac{1}{2}z^{-1})+\tfrac{1}{4}z^{-2}+(-\tfrac{1}{8}z^{-3})+\cdots$$

$1-(1/4)z^{-2}\ )\ \ 1-\frac{1}{2}z^{-1}$

$1-\frac{1}{4}z^{-2}$

$-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}$

$-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-3}$

$\frac{1}{4}z^{-2}-\frac{1}{8}z^{-3}$

$\frac{1}{4}z^{-2}-\frac{1}{16}z^{-4}$

$-\frac{1}{8}z^{-3}+\frac{1}{16}z^{-4}$

$-\frac{1}{8}z^{-3}+\frac{1}{32}z^{-5}$

$\frac{1}{16}z^{-4}-\frac{1}{32}z^{-5}$

由 $F(z)$ 的定义式知：$f[0]=1$，$f[1]=-\frac{1}{2}$，$f[2]=\frac{1}{4}$，$f[3]=-\frac{1}{8}$ ……

5) $F(z)=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$，$|z|>\frac{1}{2}$

解：法1) $F(z)=\dfrac{-3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}+\dfrac{4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$，$|z|>\frac{1}{2}$

$\therefore f[n]=-3(-\frac{1}{4})^n u[n]+4(-\frac{1}{2})^n u[n]$

法2)

$$1+(-\tfrac{5}{4}z^{-1})+(\tfrac{13}{16}z^{-2})+(-\tfrac{29}{64}z^{-3})+\cdots\cdots$$

$1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}\ )\ \ 1-\frac{1}{2}z^{-1}$

$1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}$

$-\frac{5}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}$

$-\frac{5}{4}z^{-1}-\frac{15}{16}z^{-2}-\frac{5}{32}z^{-3}$

$\frac{13}{16}z^{-2}+\frac{5}{32}z^{-3}$

$\frac{13}{16}z^{-2}+\frac{39}{64}z^{-3}+\frac{13}{128}z^{-4}$

$-\frac{29}{64}z^{-3}-\frac{13}{128}z^{-4}$

$-\frac{29}{64}z^{-3}-\frac{87}{256}z^{-4}-\frac{29}{512}z^{-5}$

$\frac{61}{256}z^{-4}+\frac{29}{512}z^{-5}$

……

类似知：$f[0]=1$，$f[1]=-\frac{5}{4}$，$f[2]=\frac{13}{16}$，$f[3]=-\frac{29}{64}$ ……

6.1 试利用连续或离散时间傅立叶的性质确定下列时间函数 $f(t)$ 或序列 $f[n]$ 的连续或离散时间傅立叶变换.

1) $\cos\pi(t+\frac{1}{4})+j\sin 2\pi t$

解：

$\frac{1}{2}(e^{j\pi(t+\frac{1}{4})}+e^{-j\pi(t+\frac{1}{4})})+\frac{1}{2}(e^{j2\pi t}-e^{-j2\pi t})$

$\overset{CFT}{=}\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j\pi t}+\frac{1}{2}e^{j2\pi t}-\frac{1}{2}e^{-j2\pi t}$

$\overset{CFT}{=}\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega-\pi)2\pi+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega+\pi)2\pi+\frac{1}{2}2\pi\delta(\omega-2\pi)-\frac{1}{2}2\pi\delta(\omega+2\pi)$

3) $[te^{-2t}\cos 4t]u(t)$

解:

$$\cos 4t \xleftrightarrow{F} \pi[\delta(\omega+4)+\delta(\omega-4)]$$

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega+2}$$

$$\therefore \cos 4t\cdot e^{-2t}u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}\pi[\delta(\omega+4)+\delta(\omega-4)]\cdot\frac{1}{j\omega+2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{j(\omega+4)+2}+\frac{1}{j(\omega-4)+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4+2j\omega}{(j\omega+2)^2+4^2}$$

$$=\frac{j\omega+2}{(j\omega+2)^2+4^2}$$

$$\because -jtf(t) \xrightarrow{CFT} \frac{d}{d\omega}F(\omega) \quad \therefore tf(t) \xrightarrow{F} j\frac{d}{d\omega}F(\omega)$$

$$\therefore te^{-2t}\cos 4t\,u(t) \xrightarrow{CFT} j\frac{d}{d\omega}\frac{j\omega+2}{(j\omega+2)^2+4^2}$$

$$=\frac{(j\omega+2)^2-4^2}{((j\omega+2)^2+4^2)^2}$$

5) $e^{1-t}u(t-1)$

令 $t-1=T$ ∴ 原式 $=e^{-T}u(T) \xrightarrow{CFT} \frac{1}{j\omega+1}$

$$\therefore e^{1-t}u(t-1) \xrightarrow{CFT} \frac{1}{j\omega+1}e^{-j\omega}$$

7) $(\frac{1}{2})^{-n}u[2-n]$

解:

$$(\tfrac{1}{2})^{-n}u[2-n]=2^n u[-(n-3)-1]=\frac{2^{n-3}u[-(n-3)-1]}{2^{-3}}=8\cdot[2^{n-3}u[-(n-3)-1]]$$

$$\because -2^n u[-n-1] \xrightarrow{ZT} \frac{1}{1-2z^{-1}} \quad |z|<2$$

$$\therefore 2^n u[-n-1] \xrightarrow{ZT} \frac{1}{2z^{-1}-1} \quad |z|<2$$

$$\therefore 8(2^{n-3}u[-(n-3)-1]) \xrightarrow{ZT} 8\cdot\frac{1}{2z^{-1}-1}\cdot z^{-3}$$

$$=\frac{8}{2z^2-z^3}$$

∵收敛域包括单位圆，∴序列的DTFT存在. 令 $z=e^{j\Omega}$

$$\therefore (\tfrac{1}{2})^{-n}u[2-n] \xrightarrow{DTFT} \frac{8}{2e^{2j\Omega}-e^{3j\Omega}}$$

9) $(2t+1)e^{-t}u(t-1)$

解:

$$(2t+1)e^{-t}u(t-1)=(2(t-1)+3)e^{-(t-1)-1}u(t-1)$$

$$=\frac{2(t-1)e^{-(t-1)}u(t-1)+3e^{-(t-1)}u(t-1)}{e}$$

由: $te^{-t}u(t) \xrightarrow{CFT} \frac{1}{(j\omega+1)^2}$

$$\therefore (t-1)e^{-(t-1)}u(t-1) \xrightarrow{CFT} \frac{1}{(j\omega+1)^2}e^{-j\omega}$$

$e^{-t}u(t) \xrightarrow{CFT} \frac{1}{j\omega+1}$

$e^{-(t-1)}u(t-1) \xrightarrow{CFT} \frac{1}{j\omega+1}e^{-j\omega}$

$\therefore (2t+1)e^{-t}u(t-1) \xrightarrow{CFT} \frac{2}{e(j\omega+1)^2}e^{-j\omega} + \frac{3}{e(j\omega+1)}e^{-j\omega}$

1 $(1-2n)(1/2)u[n+1]$

解:

$-\frac{1}{2}(-2(n+1)+3)u[n+1] = -(n+1)u[n+1] + \frac{3}{2}u[n+1]$

$u[n] \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$

由 $-jnf[n] \xrightarrow{DTFT} \frac{d}{d\Omega}F(\Omega)$

$\therefore -jnu[n] \xrightarrow{DTFT} \frac{-je^{-j\Omega}}{(1-e^{-j\Omega})^2} + \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta'(\Omega-2\pi k)$ $\therefore nu[n] \xrightarrow{DTFT} \frac{e^{-j\Omega}}{(1-e^{-j\Omega})^2} + j\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta'(\Omega-2\pi k)$

$\therefore u[n+1] \xrightarrow{DTFT} \left(\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)\right)e^{j\Omega}$

$(n+1)u[n+1] \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{(1-e^{-j\Omega})^2} + j\pi e^{j\Omega}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta'(\Omega-2\pi k)$

$\therefore (1-2n)(1/2)u[n] \xrightarrow{DTFT} \frac{-1}{(1-e^{-j\Omega})^2} - j\pi e^{j\Omega}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta'(\Omega-2\pi k) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)\right)e^{j\Omega}$

13 $[1+\cos(\pi n/4)]2^n u[-n]$

解: $-2^n u[-n-1] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-2z^{-1}}$ $|z|<2$

$2^n u[-n] = 2^n u[-(n-1)-1] = 2\,2^{n-1}u[-(n-1)-1]$

$\therefore 2^n u[-n] \xrightarrow{Z} 2\frac{1}{2z^{-1}-1}\cdot z^{-1} = \frac{2}{2-z}$ ①

$\cos(\pi n/4) \xrightarrow{DTFT} \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\delta(\Omega+\frac{\pi}{4}-2\pi k)+\delta(\Omega-\frac{\pi}{4}-2\pi k)\}$

由①式知 $2^n u[-n] \xrightarrow{DTFT} \frac{2}{2-e^{j\Omega}}$

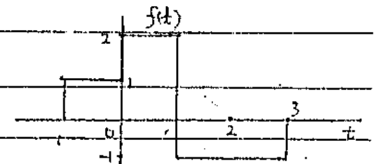
$\therefore \cos\pi n/4 \cdot 2^n u[-n] \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\delta(\Omega+\frac{\pi}{4}-2\pi k)+\delta(\Omega-\frac{\pi}{4}-2\pi k)\} * \frac{2}{2-e^{j\Omega}}$

$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{2-e^{j(\Omega+\frac{\pi}{4}-2\pi k)}} + \frac{2}{2-e^{j(\Omega-\frac{\pi}{4}-2\pi k)}}\right)$

$= \frac{2}{2-e^{j(\Omega+\frac{\pi}{4})}} + \frac{2}{2-e^{j(\Omega-\frac{\pi}{4})}}$

$\therefore [1+\cos(\pi n/4)]2^n u[-n] \xrightarrow{DTFT} \frac{2}{2-e^{j\Omega}} + \frac{2}{2-e^{j(\Omega+\frac{\pi}{4})}} + \frac{2}{2-e^{j(\Omega-\frac{\pi}{4})}}$

14 f(t)如图所示:



解: 由图给出f(t)的表达式

$f(t) = [u(t+1)-u(t)] + 2(u(t)-u(t-1)) - (u(t-1)-u(t-2))$

$-(u(t-2)-u(t-3))$

$$u(t) \xrightarrow{CFT} \frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$u(t-1) \xrightarrow{CFT} (\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega))e^{-j\omega}$$

$$\therefore (u(t)+u(t-1)) \xrightarrow{CFT} \frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)+\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}+\pi\delta(\omega)e^{-j\omega}$$

$$(u(t+1)+u(t)) \xrightarrow{CFT} (\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)+\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}+\pi\delta(\omega)e^{-j\omega})e^{j\omega}$$

$$-(u(t-1)+u(t-2)) \xrightarrow{CFT} -(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)+\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}+\pi\delta(\omega)e^{-j\omega})e^{-j\omega}$$

$$-(u(t-2)+u(t-3)) \xrightarrow{CFT} -(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)+\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}+\pi\delta(\omega)e^{-j\omega})e^{-2j\omega}$$

$$f(t) \xrightarrow{CFT} \frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)+\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}+\pi\delta(\omega)e^{-j\omega}+\frac{e^{j\omega}}{j\omega}+\pi\delta(\omega)e^{j\omega}+\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)-$$

$$(\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}+\pi\delta(\omega)e^{-j\omega}+\frac{e^{-2j\omega}}{j\omega}+\pi\delta(\omega)e^{-j\omega 2}+\frac{e^{-j2\omega}}{j\omega}+\pi\delta(\omega)e^{-j2\omega}+\frac{e^{-j3\omega}}{j\omega}+\pi\delta(\omega)e^{-j3\omega})$$

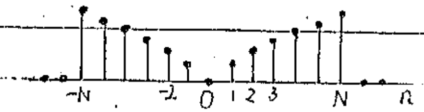
$$=\frac{2}{j\omega}+\frac{2\cos\omega}{j\omega}+4\pi\delta(\omega)-(\frac{e^{-j\omega}+2e^{-j2\omega}+e^{-j3\omega}}{j\omega}+4\pi\delta(\omega))$$

$$=\frac{2+2\cos\omega-e^{-j\omega}-2e^{-j2\omega}-e^{-j3\omega}}{j\omega}$$

$$=\frac{2+2\cos\omega-e^{-j\omega}(1+2e^{-j\omega}+e^{-j2\omega})}{j\omega}$$

$$=\frac{2+2\cos\omega-e^{-j\omega}(1+e^{-j\omega})^2}{j\omega}.$$

17 $f[n]$如圖所示：



解：由圖知$f[n]$表达式

$$f[n]=\frac{-n}{N}(u(n+N)-u(n))$$

$$+\frac{n}{N}(u[n]-u[n-(N+1)])$$

$$\therefore nu(n) \xrightarrow{DTFT} \frac{e^{-j\Omega}}{(1-e^{-j\Omega})^2}+j\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta'(\Omega-2\pi k)$$

$$u(n) \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$$

$$n u(n+N) = (n+N)u(n+N) - Nu(n+N)$$

$$=(\frac{e^{-j\Omega}}{(1-e^{-j\Omega})^2}+j\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta'(\Omega-2\pi k))e^{jN\Omega}-N(\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k))e^{jN\Omega}$$

$$nu(n-(N+1)) = (n-(N+1))u[n-(N+1)]+(N+1)u[n-(N+1)]$$

$$=(\frac{e^{-j\Omega}}{(1-e^{-j\Omega})^2}+j\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta'(\Omega-2\pi k))e^{-j(N+1)\Omega}+(N+1)(\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k))e^{-j\Omega(N+1)}$$

$$\therefore f[n] \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{N}(-nu(n+N)+2nu[n]-nu[n-(N+1)]) \xrightarrow{DTFT}$$

$$\frac{1}{N}(Ne^{jN\Omega}(\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k))-(\frac{e^{-j\Omega}}{(1-e^{-j\Omega})^2}+j\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta'(\Omega-2\pi k))e^{jN\Omega}$$

$$+\frac{2e^{-j\Omega}}{(1-e^{-j\Omega})^2}+2j\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta'(\Omega-2\pi k)-((\frac{e^{-j\Omega}}{(1-e^{-j\Omega})^2}+j\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta'(\Omega-2\pi k))e^{-j(N+1)\Omega}+(N+1)$$

$$(\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k))e^{-j\Omega(N+1)})$$

19 $f[n]=\begin{cases} n & |n|\le N \\ 0 & |n|>N \end{cases}$

解:

$$f[n] = n\left(u[n+N]-u[n-(N+1)]\right)$$

由上题的结论知

$$f[n] \xrightarrow{DTFT} \left(\frac{e^{-j\Omega}}{(1-e^{-j\Omega})^2}+j\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta'(\Omega-2\pi k)\right)e^{jN\Omega}-Ne^{jN\Omega}\left(\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2k\pi)\right)$$

$$-\left(\frac{e^{-j\Omega}}{(1-e^{-j\Omega})^2}+j\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta'(\Omega-2k\pi)\right)e^{-j(N+1)\Omega}+(N+1)\left(\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2k\pi)\right)e^{-j(N+1)\Omega}$$

21 $x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\delta(t-nT)$

解: $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n\delta(t-nT)\cdot u(t)$

$$\therefore x(t) \xrightarrow{CFT} a^n\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{T}n\right)*\left(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right)\frac{1}{2\pi}$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n\left(\frac{1}{j(\omega-\frac{2\pi}{T}n)}+\pi\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{T}n\right)\right)$$

23 $\dfrac{\sin^2\pi t}{\pi^2t^2}$

解: $\dfrac{\sin^2\pi t}{\pi^2t^2}=\left(\dfrac{\sin\pi t}{\pi t}\right)^2=Sa^2\pi t=\dfrac{2\pi}{2\pi}Sa\dfrac{2\pi t}{2}$

$$\because \frac{\sin\pi t}{\pi t}\xrightarrow{CFT}F(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\pi\\ 0 & |\omega|>\pi\end{cases}$$

$$\frac{\sin^2\pi t}{\pi^2t^2}=\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\frac{\sin\pi t}{\pi t}\xrightarrow{CFT}\frac{1}{2\pi}F(\omega)*F(\omega)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(u(\omega+\pi)-u(\omega-\pi)\right)*\left(u(\omega+\pi)-u(\omega-\pi)\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(u(\omega+\pi)*u(\omega+\pi)-2u(\omega+\pi)*u(\omega-\pi)+u(\omega-\pi)*u(\omega-\pi)\right)$$

$$\because u(\omega)*u(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)d\tau=\int_0^{\omega}d\tau=\omega u(\omega)$$

$$\therefore u(\omega+\pi)*u(\omega+\pi)=(\omega+2\pi)u(\omega+2\pi)$$

$$u(\omega+\pi)*u(\omega-\pi)=\omega u(\omega)$$

$$u(\omega-\pi)*u(\omega-\pi)=(\omega-2\pi)u(\omega-2\pi)$$

代入 $=\dfrac{1}{2\pi}\left((\omega+2\pi)u(\omega+2\pi)-2\omega u(\omega)+(\omega-2\pi)u(\omega-2\pi)\right)$

$$=\begin{cases}1-\dfrac{|\omega|}{2\pi} & |\omega|<2\pi\\ 0 & |\omega|>2\pi\end{cases}$$

3. 利用拉氏变换或z变换的性质和熟知的一些基本拉氏变换或z变换对，试求下列时间函数f(t)或序列f[n]的拉氏变换或z变换，并概画出收敛域和零、极点图。

2) $a^{-|n|}\operatorname{sgn}[n+2]$ $|a|<1$

解：

$a^{-|n|}\operatorname{sgn}[n+2] = a^{-n}(u[n+2]-u[-(n+2)])$

$= a^{-|n|}u[n+2] - a^{-|n|}u[-(n+2)]$

$= a^{-(n+2)}a^{2}(u[n+2]-u[n]) - a^{n}u[-(n+2)] + a^{-n}u[n]$

$\because a^{-n}u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-a^{-1}z^{-1}}$ $|z|>|a^{-1}| = \frac{1}{|a|}$

$a^{n}u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}}$ $|z|>|a|$

$\therefore a^{n}u[-n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-a^{-1}z}$ $|z|<|a|$

$\therefore a^{-n}\operatorname{sgn}[n+2] \xrightarrow{z} \frac{z^2}{1-a^{-1}z^{-1}}\cdot a^2 - \frac{z^2}{1-az}a^2$ $<|z|$

3) $te^{-a(t-1)}u(t+1)$, $Re\{a\}>0$

解： $te^{-a(t-1)}u(t+1) = ((t+1)e^{-a(t+1)}u(t+1) - e^{-a(t+1)}u(t+1))e^{2a}$

$te^{-at}u(t) \xrightarrow{S} \frac{1}{(S+a)^2}$, $Re\{S\}>Re\{-a\}$

$e^{-at}u(t) \xrightarrow{S} \frac{1}{S+a}$ $Re\{S\}>Re\{-a\}$

$(t+1)e^{-a(t+1)}u(t+1) \xrightarrow{S} \frac{e^S}{(S+a)^2}$ $Re\{S\}>Re\{-a\}$

$e^{-a(t+1)}u(t+1) \xrightarrow{S} \frac{e^S}{S+a}$ $Re\{S\}>Re\{-a\}$

$\therefore te^{-a(t-1)}u(t+1) \xrightarrow{S} \left(\frac{e^S}{(S+a)^2} - \frac{e^S}{S+a}\right)e^{2a}$

$= \frac{1-S-a}{(S+a)^2}e^{2a+S}$ $Re\{S\}>Re\{-a\}$

6) $f[n] = \begin{cases} \cos(\pi n/8), & |n|\le 4 \\ 0, & |n|>4 \end{cases}$

解 $f[n] = (u[n+4]-u[n-5])\cos\pi n/8$

$\cos\frac{\pi}{8}n\,u[n] \xrightarrow{z} \frac{1-\cos\Omega_0 z^{-1}}{1-(2\cos\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$

$f[n] = (u[n+4]-u[n-5])\frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{8}n}+e^{-j\frac{\pi}{8}n})$

$$= \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{8}n}u[n+4] + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{8}n}u[n+4] - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{8}n}u[n-5] - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{8}n}u[n-5]$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{8}(n+4)}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{8}(n+4)}e^{j\frac{\pi}{2}}\right)u[n+4] - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{8}(n-5)}e^{j\frac{5\pi}{8}}u[n-5]$$

$$- \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{8}(n-5)}e^{-j\frac{5\pi}{8}}u[n-5]$$

$$e^{-j\frac{\pi}{8}n}u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-e^{-j\frac{\pi}{8}}z^{-1}} \quad |z|>1$$

$$\because \quad e^{j\frac{\pi}{8}n}u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-e^{j\frac{\pi}{8}}z^{-1}} \quad |z|>|e^{j\frac{\pi}{8}}|=1$$

$$\therefore \quad f[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}\frac{z^{4}}{1-e^{j\frac{\pi}{8}}z^{-1}} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}\frac{z^{4}}{1-e^{-j\frac{\pi}{8}}z^{-1}} - \frac{1}{2}e^{j\frac{5\pi}{8}}\frac{z^{-5}}{1-e^{j\frac{\pi}{8}}z^{-1}} - \frac{1}{2}e^{-j\frac{5\pi}{8}}\frac{z^{-5}}{1-e^{-j\frac{\pi}{8}}z^{-1}}$$

7. $\frac{1-e^{at}}{t}u(-t)$, $a>0$

解: $u(-t) \xrightarrow{s} \frac{1}{-s} \quad Re\{s\}<0$

$$-e^{at}u(-t) \xrightarrow{s} \frac{1}{s-a} \quad Re\{s\}<a$$

$$\therefore \quad u(-t)-e^{at}u(-t) \xrightarrow{s} \frac{1}{s-a}-\frac{1}{s} = \frac{a}{s(s-a)}$$

$$\because \quad -\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{s} \int_{\infty}^{s}F(v)dv$$

$$\therefore \quad \frac{u(-t)-e^{at}u(-t)}{t} \xrightarrow{s} -\int_{\infty}^{s}\left(\frac{1}{v-a}-\frac{1}{v}\right)dv$$

$$= -\left(\ln(v-a)-\ln v\right)\Big|_{\infty}^{s}$$

$$= \ln s - \ln s-a = \ln\frac{s}{s-a} \qquad Re\{s\}<0$$

11. $\frac{1-\sin\pi n}{n}u[-n-1]$

解:

$$\sin(n+1)\pi = -\sin\pi n$$

$$\therefore \quad u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z|>1$$

$$\therefore \quad u[-n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-z} \quad |z|<1$$

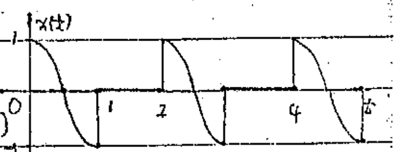
$$u[-(n+1)] \xrightarrow{z} \frac{z}{1-z} \quad |z|<1$$

$$\because \quad \sin\pi n\, u[n] \xrightarrow{z} \frac{\sin\pi\, z^{-1}}{1-(2\cos\pi)z^{-1}+z^{-2}} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{u[-(n+1)]}{n} \xrightarrow{z} -\int_0^z F(v)v^{-1}dv = -\int_0^z \frac{1}{1-v}dv = -\left(-\ln(1-v)\Big|_0^z\right)$$

$$= \ln(1-z) \quad |z|<1$$

13 x(t)如图所示



解由图可写出表达式:

$$x(t) = \cos\pi t\,(u(t)-u(t-1)) + \cos\pi(t-2)(u(t-2)-u(t-3))$$

$$+\cos\pi(t-4)(u(t-4)-u(t-5)) + \cdots + \cos\pi(t-2k)(u(t-2k)-u(t-(2k+1)))$$

$$\cos \pi t\, u(t) \xrightarrow{S} \frac{s}{s^2+\pi^2} \qquad Re\{s\}>0$$

$$\cos \pi t\, u(t-1) = -\cos \pi (t-1)\, u(t-1)$$

$$+\cos \pi (t-1)\,(u(t-1)) \xrightarrow{S} \frac{e^{-s} s}{s^2+\pi^2}$$

$$\therefore \quad \cos \pi t\, u(t) - \cos \pi t\, u(t-1) \xrightarrow{S} \frac{s}{s^2+\pi^2}(1+e^{-s})$$

由时移性

$$\therefore \quad x(t) \xrightarrow{S} \frac{s}{s^2+\pi^2}(1+e^{-s}) + \frac{s}{s^2+\pi^2}(1+e^{-s})e^{-2s} + \frac{s}{s^2+\pi^2}(1+e^{-s})e^{-4s} + \cdots + \frac{s}{s^2+\pi^2}(1+e^{-s})e^{-2ks}$$

$$= \frac{s}{s^2+\pi^2}(1+e^{-s})\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2ks}\right) \qquad Re\{s\}>0$$

16 $\quad 2t e^{-2t} u(2t-1)$

解：

$$2t e^{-2t} u(2t-1) = \frac{(2t-1)e^{-(2t-1)} u(2t-1) + e^{-(2t-1)} u(2t-1)}{e}$$

$$= \frac{2\left(t-\frac{1}{2}\right) e^{-2\left(t-\frac{1}{2}\right)} u\left(2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right) + e^{-2\left(t-\frac{1}{2}\right)} u\left(2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)}{e}$$

$$\because \quad t e^{-t} u(t) \xrightarrow{S} \frac{1}{(s+1)^2} \qquad Re\, s > Re\{-1\} \qquad e^{-t} u(t) \longrightarrow \frac{1}{s+1} \quad Re\{s\}>-1$$

由尺度变换性质

$$f(at) \xrightarrow{S} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$\therefore$

$$2t e^{-2t} u(2t) \xrightarrow{S} \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{s}{2}+1\right)^2} \qquad Re\{s\}>-2$$

$$e^{-2t} u(2t) \xrightarrow{S} \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{s}{2}+1} = \frac{1}{s+2} \qquad Re\{s\}>-2$$

$\therefore$

$$2t e^{-2t} u(2t-1) \xrightarrow{S} \frac{\frac{1}{2\left(\frac{s}{2}+1\right)^2} e^{-\frac{1}{2}s} + \frac{1}{s+2} e^{-\frac{1}{2}s}}{e} \qquad Re\{s\}>-2$$

18 $\quad |n-3|\, u[n]$

解

$$|n-3|\, u[n] = (3-n)(u[n]-u[n-3]) + (n-3)u[n-3]$$

$$= 3u[n] - nu[n] - 3u[n-3] + nu[n-3] + nu[n-3] - 3u[n-3]$$

$$= 3u[n] - 6u[n-3] - nu[n] + 2nu[n-3]$$

$$= 3u[n] - nu[n] + 2(n-3)u[n-3]$$

$$u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z|>1$$

$$nu[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{(1-z^{-1})^2} - \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \qquad |z|>1$$

$$|n-3|\, u[n] \xrightarrow{Z} \frac{3}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + 2\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \cdot z^{-3}$$

$$= \frac{3-3z^{-1}-z^{-1}+2z^{-4}}{(1-z^{-1})^2} \qquad |z|>1$$

$$= \frac{3-4z^{-1}+2z^{-4}}{(1-z^{-1})^2}$$

6.4 确定下列函数的各自逆变的时间函数f(t)或序列f[n]

1) $\cos^2(\omega\tau+\pi/3) = \frac{1+\cos(2\omega\tau+2\pi/3)}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(e^{j(2\omega\tau+2\pi/3)}+e^{-j(2\omega\tau+2\pi/3)})$

$= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{j2\pi/3}e^{j2\omega\tau}+\frac{1}{4}e^{-j2\pi/3}e^{-j2\omega\tau}$

$\therefore\ f(t)=\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{1}{4}e^{j2\pi/3}\delta(t+2\tau)+\frac{1}{4}e^{-j2\pi/3}\delta(t-2\tau)$

2) $\sin^2[(\Omega-\pi)/2] = \frac{1-\cos(\Omega-\pi)}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}(e^{j(\Omega-\pi)}+e^{-j(\Omega-\pi)})$

$= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{-j\pi}e^{j\Omega}-\frac{1}{4}e^{j\pi}e^{-j\Omega}$

$\therefore\ f[n]=\frac{1}{2}\delta[n]+\frac{1}{4}\delta[n+1]+\frac{1}{4}\delta[n-1]$

5) $F(\omega)=\begin{cases}\cos^2(\pi\omega/2W), & |\omega|<W\\ 0 & |\omega|\geq W\end{cases}$

$F(\omega) = \cos^2(\pi\omega/2W)\cdot(u(\omega+W)-u(\omega-W))$

又∵ $\cos^2\pi\omega/2W = \frac{1+\cos\pi\omega/W}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}(e^{j\pi\omega/W}+e^{-j\pi\omega/W})$

其逆变换 $f_1(t) = \frac{1}{2}\delta(t)+\frac{1}{4}\delta(t+\frac{\pi}{W})+\frac{1}{4}\delta(t-\frac{\pi}{W})$

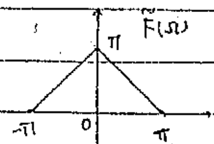
$u(\omega+W)-u(\omega-W)$ 的逆变换为: $\frac{2W}{2\pi}Sa\frac{2Wt}{2} = \frac{W}{\pi}Sa\,Wt = f_1(t)$

$\therefore\ f(t) = f_1(t)*f_2(t)$

$= \frac{1}{2}\frac{W}{\pi}Sa\,Wt+\frac{1}{4}\frac{W}{\pi}Sa\,W(t+\frac{\pi}{W})+\frac{1}{4}\frac{W}{\pi}Sa\,W(t-\frac{\pi}{W})$

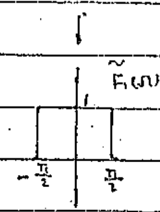
$= \frac{1}{2}\frac{W}{\pi}Sa\,Wt+\frac{1}{4}\frac{W}{\pi}Sa(Wt+\pi)+\frac{1}{4}\frac{W}{\pi}Sa(Wt-\pi)$

6) $\tilde{F}(\Omega)=\begin{cases}\pi-\Omega, & 0<\Omega\leq\pi\\ \pi+\Omega & -\pi\leq\Omega\leq 0\end{cases}$



解: 如图

$\tilde{F}(\Omega) = \tilde{F}_1(\Omega)*\tilde{F}_1(\Omega)$



$\tilde{F}_1(\Omega)$的逆变换 $\tilde{f}_1[n] = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}Sa\frac{\pi}{2}n = \frac{1}{2}Sa\frac{\pi}{2}n$

$\therefore\ f[n] = 2\pi\cdot\frac{1}{2}Sa\frac{\pi}{2}n\cdot\frac{1}{2}Sa\frac{\pi}{2}n$

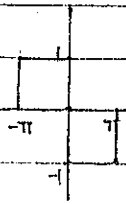
$= \frac{\pi}{2}Sa^2\frac{\pi}{2}n$

9) $\frac{e^{-j2\omega}}{j\omega(j\omega+1)} = (\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{j\omega+1})e^{-j2\omega}$

$\therefore \quad f(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t-2) - e^{-(t-2)}u(t-2)$

11 $\tilde{F}(\Omega) = \begin{cases} -1, & 0 < \Omega < \pi \\ 1, & -\pi < \Omega < 0 \end{cases}$

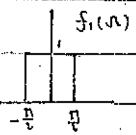
解：$\tilde{F}(\Omega) = (u(\Omega+\pi) - u(\Omega)) - (u(\Omega) - u(\Omega-\pi))$



$u(\Omega-\pi) - u(\Omega) = f_1(\Omega + \frac{\pi}{2})$

$u(\Omega) - u(\Omega-\pi) = f_1(\Omega - \frac{\pi}{2})$

$\because \tilde{f}_1(\Omega) \xrightarrow{CZT^{-1}} f[n] = \frac{1}{2} Sa \frac{\pi}{2} n$



$\therefore \tilde{f}_1(\Omega + \frac{\pi}{2}) \xrightarrow{CZT^{-1}} f_2[n] = \frac{1}{2} Sa \frac{\pi}{2} n \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}n}$

$\tilde{f}_1(\Omega - \frac{\pi}{2}) \xrightarrow{CZT^{-1}} f_3[n] = \frac{1}{2} Sa \frac{\pi}{2} n\, e^{j\frac{\pi}{2}n}$

$\therefore \tilde{F}(\Omega) \xrightarrow{CZT^{-1}} f_2[n] - f_3[n] = \frac{1}{2} Sa \frac{\pi}{2} n \left(e^{-j\frac{\pi}{2}n} - e^{j\frac{\pi}{2}n}\right)$

$= -j\sin\frac{n}{2}\pi\, Sa\frac{\pi}{2}n$

14 $\frac{1}{j+0.8e^{-j\Omega}} - \frac{1}{j-0.8e^{-j\Omega}} = \frac{-1.6e^{-j\Omega}}{(j+0.8e^{-j\Omega})(j-0.8e^{-j\Omega})}$

$= \frac{-1.6e^{-j\Omega}}{-1-0.64e^{-j2\Omega}} = \frac{1.6e^{-j\Omega}}{1+0.64e^{-j2\Omega}}$

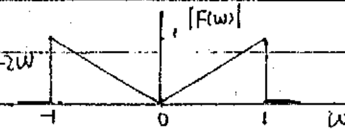
令 $e^{-j\Omega} = z^{-1}$

上式 $= \frac{1.6z^{-1}}{1+0.64z^{-1}}$ $\because$ DTFT 存在 $\therefore$ z变换收敛域必包括单位圆

$\frac{1.6z^{-1}}{1+0.64z^{-1}} \xrightarrow{z^{-1}} 1.6(-0.64)^{n-1}u[n-1]$

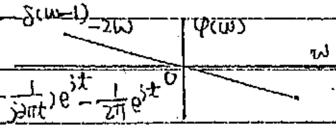
15 F(ω) 的模和幅角如下图所示

解：



$F(\omega) = (-\omega(u(\omega+1) - u(\omega)) + \omega(u(\omega) - u(\omega-1)))e^{-j2\omega}$

$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \delta(\omega+1) - (u(\omega+1) - u(\omega)) + (u(\omega) - u(\omega-1)) - \delta(\omega-1)$



$\frac{dF(\omega)}{d\omega} \xrightarrow{CFT^{-1}} \frac{1}{2\pi}e^{-jt} - (\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{j2\pi t})e^{-jt} + \delta(t) - \frac{1}{j2\pi t} - (\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{j2\pi t})e^{jt} - \frac{1}{2\pi}e^{jt}$

$= \frac{-j\sin t}{\pi} - (\delta(t) - \frac{1}{j\pi t})\cos t + \delta(t) - \frac{1}{j\pi t}$

$\therefore f(t) = (\frac{-j\sin t}{\pi} - (\delta(t) - \frac{1}{j\pi t})\cos t + \delta(t) - \frac{1}{j\pi t}) / -jt$

6.7 对于下列每一个拉氏变换或z变换像函数及其收敛域，试利用拉氏变换或z变换的性质确定他们的反变换.

1) $\dfrac{s^2 e^{-2s-2}}{s^2+2s+5}$ $Re\{s\} > -1$

$$\frac{1}{s^2+2s+5} = \frac{1}{(s+1)^2+2^2} = \frac{2}{(s+1)^2+2^2}\cdot\frac{1}{2} \xrightarrow{s^{-1}} \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\,u(t)$$

$$\frac{s^2}{s^2+2s+5} \xrightarrow{s^{-1}} \frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\,u(t) = (-\frac{3}{2}e^{-t}\sin 2t - 2e^{-t}\cos 2t)u(t)+\delta(t)$$

$$\therefore \frac{s^2e^{-2s}}{s^2+2s+5}\cdot e^{-2} \xrightarrow{s^{-1}} \left((-\frac{3}{2}e^{-(t-2)}\sin 2(t-2) - 2e^{-(t-2)}\cos 2(t-2))u(t-2)+\delta(t-2)\right)e^{-2}$$

3. $\dfrac{2z}{(1-az^{-1})^3}$, $|z|<|a|$

解

$$\frac{2}{(1-az^{-1})^3} \xrightarrow{z^{-1}} -2\frac{(n+2)!}{n!\,2}a^n u[-n-1] = -2\frac{(n+2)(n+1)}{2}a^n u[-n-1]$$

$$= -(n+1)(n+2)a^n u[-n-1]$$

$$\frac{2z}{(1-az^{-1})^3} \xrightarrow{z^{-1}} -(n+2)(n+3)a^{n+1}u[-(n+1)-1]$$

5) $\dfrac{1-e^{-sT}}{s+1}$ $Re\{s\}>-1$

解: $\dfrac{1}{s+1}\xrightarrow{s^{-1}} e^{-t}u(t)$ $\dfrac{-e^{-sT}}{s+1}\xrightarrow{s^{-1}} -e^{-(t-T)}u(t-T)$

$$\therefore \frac{1-e^{-sT}}{s+1}\xrightarrow{s^{-1}} e^{-t}u(t)-e^{-(t-T)}u(t-T)$$

7) $\dfrac{e^s}{s(1-e^{-s})}$, $Re\{s\}>0$

9) $\dfrac{1}{z(1-z^{-N})}$, $|z|>0$

解: $\dfrac{1}{1-z^{-1}} \xrightarrow{z^{-1}} g[n]=u[n]$

$$\frac{1}{1-z^{-N}} \xrightarrow{z^{-1}} f[n] = \begin{cases} g[n/N] & n=lN \\ 0 & n\neq lN\end{cases}$$

$$\frac{1}{z(1-z^{N})} = \frac{z^{-1}}{1-z^{N}} \xrightarrow{z^{-1}} f[n-1] = \begin{cases} f[\frac{n-1}{N}] & n-1 = lN \\ 0 & n-1 \neq lN \end{cases}$$

11) $\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)^2$ $Re\{s\}>0$

解:原式 $= \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2}$

$$\frac{1}{s^2} \xrightarrow{s^{-1}} tu(t)$$

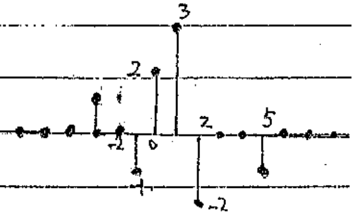
$$\therefore \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2} \xrightarrow{s^{-1}} tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$$

15) $\frac{(a\sin\Omega_0)z^{-2}}{1-(2a\cos\Omega_0)z^{-2}+a^2z^{-4}}$ $|z|>|a|$

解: $\frac{(a\sin\Omega_0)z^{-1}}{(1-(2a\cos\Omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2})} \xrightarrow{z^{-1}} a^n \sin\Omega_0 n\, u[n]$

$$\therefore \frac{(a\sin\Omega_0)z^{-2}}{1-2a\cos\Omega_0 z^{-2}+a^2z^{-4}} \xrightarrow{z^{-1}} \begin{cases} a^{\frac{n}{2}}\sin\Omega_0\frac{n}{2}\,u[\frac{n}{2}] & n=2l \\ 0 & n\neq 2l \end{cases}$$

6.13 已知离散时序列 $x[n]$ 如图所示,它的DTFT $X(\Omega)$ 写成直角坐标形式为 $X(\Omega)=\tilde{R}(\Omega)+j\tilde{I}(\Omega)$,试概画出下列每个离散时间傅立叶变换 $Y(\Omega)$ 相对应的序列 $y[n]$。若 $y[n]$ 是一个复序列,试概画出它的实部和虚部分量。



1) $Y(\Omega) = \tilde{I}(\Omega) - j\tilde{R}(\Omega)$

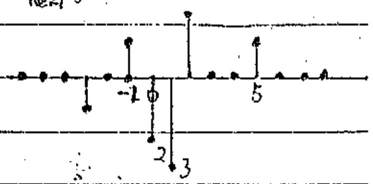
解: $\because f_o[n] \xleftrightarrow{DTFT} j\tilde{I}(\Omega)$

$f_e[n] \xleftrightarrow{DTFT} \tilde{R}(\Omega)$

$$\therefore \tilde{I}(\Omega) \xrightarrow{DTFT^{-1}} -j f_o[n] = j\left(\frac{y[n]-y[-n]}{2}\right)$$

$$-j\tilde{R}(\Omega) \xrightarrow{DTFT^{-1}} -j f_e[n] = -j\left(\frac{y[n]+y[-n]}{2}\right)$$

虚部为:



$$\therefore \tilde{Y}(\Omega) = \tilde{I}(\Omega) - j\tilde{R}(\Omega) \xrightarrow{DTFT^{-1}} -j\,y[n]$$

2) $\tilde{Y}(\Omega) = \tilde{I}(\Omega) + j\tilde{R}(\Omega)e^{j\Omega}$

$$j\tilde{R}(\Omega)e^{j\Omega} \xrightarrow{DTFT^{-1}} j f_e[n+1] = j\left(\frac{y[n+1]+y[-(n+1)]}{2}\right)$$

$$\therefore \tilde{Y}(\Omega) = \tilde{I}(\Omega) + j\tilde{R}(\Omega)e^{j\Omega} \xrightarrow{DTFT^{-1}} -j\frac{y[n]-y[-n]}{2} + j\frac{y[n+1]+y[-(n+1)]}{2}$$

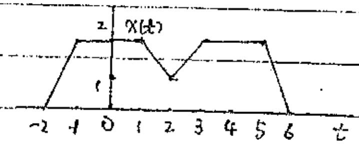
3) $\tilde{Y}(\Omega)=\tilde{R}(\Omega)-[\tilde{R}(\Omega)+\tilde{I}(\Omega)]e^{-j\Omega}$

$$\tilde{R}(\Omega)+\tilde{I}(\Omega) \xrightarrow{DTFT^{-1}} -jf_o[n]+f_e[n]$$

$$-e^{-j\Omega}[\tilde{R}(\Omega)+\tilde{I}(\Omega)] \xrightarrow{DTFT^{-1}} -(-jf_o[n-1]+f_e[n-1])$$

$$\therefore \tilde{Y}(\Omega) \xrightarrow{DTFT^{-1}} f_e[n]+(jf_o[n-1]-f_e[n-1])$$

6.14. 设$X(\omega)$是如图所示的连续时间信号$x(t)$的傅立叶变换，试在不求出$X(\omega)$的情况下，完成下列每一个计算或作图。



1) 求$X(\omega)$的幅角

$x(t+2)$为偶函数 ∴ 令 $x'(t)=x(t+2)$

$\therefore x(t)=x'(t-2)$

$x'(t)$为实偶函数故相位：$\varphi'(\omega)=\varphi'(-\omega)=\begin{cases}0 & X'(\omega)\geq 0\\ \pm\pi & X'(\omega)<0\end{cases}$

$X(\omega)=X'(\omega)e^{-j2\omega}$

$\therefore \varphi(\omega)=\varphi'(\omega)-2\omega=\begin{cases}-2\omega & X'(\omega)\geq 0\\ \pm\pi-2\omega & X'(\omega)<0\end{cases}$

2) $X(0)$的值

解： $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

$\therefore X(0)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt=(6+2)\times 2-1\times 2-1\times 1=13$

3) $\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)d\omega$的值

$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$\therefore x(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)d\omega$

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)d\omega=2\pi x(0)=4\pi$

4) $\int_{-\infty}^{\infty}\omega X(\omega)d\omega$的值

$x(t)\longleftrightarrow X(\omega)$ $x'(t)\longleftrightarrow j\omega X(\omega)$ $\therefore -jx'(t)\longleftrightarrow \omega X(\omega)$

由上题结论知 $\int_{-\infty}^{\infty}\omega X(\omega)d\omega=2\pi(-jx'(0))=0$

5) $\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt$

$=2\pi\left(\int_{-2}^{-1}(2t+4)^2dt+\int_{-1}^{1}4dt+\int_{1}^{2}(-t+3)^2dt+\int_{2}^{3}(t-1)^2dt+\int_{3}^{5}4dt+\int_{5}^{6}(-2t+12)^2dt\right)$

$=2\pi\left(\frac{4}{3}+8+\frac{7}{3}+\frac{1}{3}-4+8+\frac{4}{3}\right)$

$=\frac{52}{3}\cdot 2\pi=\frac{104}{3}\pi$

6) $\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j2\omega}d\omega$的值

$\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j2\omega}d\omega=2\pi x(2)=2\pi$

7) $\int_{-\infty}^{\infty}2X(\omega)\frac{\sin\omega}{\omega}e^{j\omega}d\omega$的值

$X(\omega)\cdot 2\frac{\sin\omega}{\omega} \xleftrightarrow{CFT} x(t) * r_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) r_2(t-\tau)\,d\tau$

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} 2X(\omega)\cdot\frac{\sin\omega}{\omega} e^{j\omega}\,d\omega = 2\pi\, x(t)*r_2(t)\big|_{t=1} = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) r_2(1-\tau)\,d\tau$

$= 2\pi(4-\frac{1}{2}) = \frac{14}{2}\pi$

8) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dX(\omega)e^{j2\omega}}{d\omega}\,d\omega$

$-jt F^{-1}(X(\omega)e^{j\omega}) \xleftrightarrow{CFT} \frac{dX(\omega)e^{j2\omega}}{d\omega}$

$F^{-1}(X(\omega)e^{j\omega}) = x(t+1)$

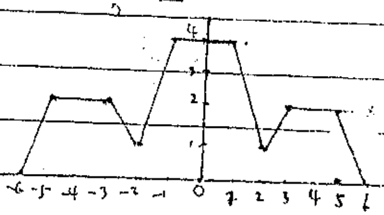
$\therefore F^{-1}(\frac{dX(\omega)e^{j2\omega}}{d\omega}) = -jt\cdot x(t+1)$

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dX(\omega)e^{j2\omega}}{d\omega}\,d\omega = 2\pi(-jt\, x(t+1))\big|_{t=0} = 2\pi(-j\cdot 0\cdot x(1))$

$= 0$

9) 根据画出 $Re\{X(\omega)\}$ 的傅里叶反变换的时间函数图形。

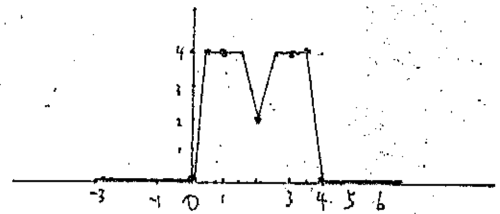
$Re\{X(\omega)\} \xrightarrow{CFT^{-1}} \frac{x(t)+x(-t)}{2}$



10) 根据画出 $X(\omega/2)e^{-j\omega}$ 的傅里叶反变换的时间函数图形.

$\frac{1}{2}X(\frac{\omega}{2}) \xleftrightarrow{CFT} f(at) = f(2t)$

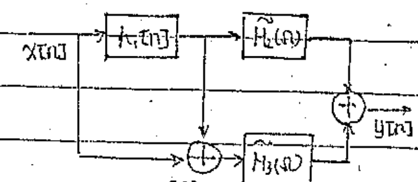
$\therefore X(\frac{\omega}{2})e^{-j\omega} \xleftrightarrow{CFT} 2f(2(t-1)) = 2f(2t-2) = 2x(2t-2)$



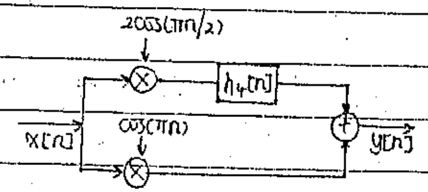
6.16 考虑如图(a)和(b)所示的两个离散时间LTI系统。

1) 对图(a)的系统，若 $\tilde{H}_2(\Omega)$ 和 $\tilde{H}_3(\Omega)$ 如图c,d，并已知 $h_1[n]=\delta[n]-\frac{1}{2}Sa(\frac{\pi n}{2})$，若输入 $x[n]$ 的频谱如图所示，试求输出 $y[n]$，并概略画出其频谱 $\tilde{Y}(\Omega)$

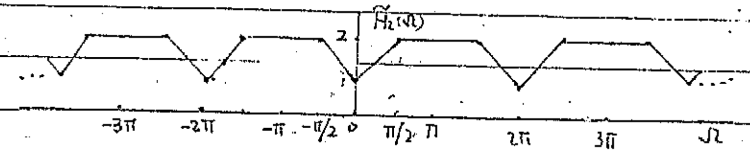
2) 对(b)的系统，若已知 $h_1[n]=\frac{1}{2}Sa(\frac{\pi n}{2})$ 当输入仍与1)小题的输入相同时，试求系统的输出 $y[n]$，并概略画出其频谱。

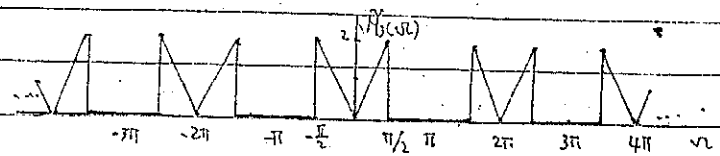


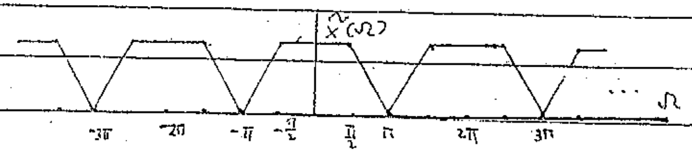
(a)



(b)



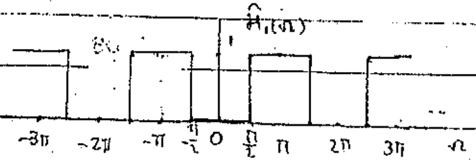




解: 1) $h_1[n] = \delta[n] - \frac{1}{2} Sa(\frac{\pi n}{2})$

$\therefore \tilde{H}_1(\Omega) = 1 - \begin{cases} 1 & 0<|\Omega|<\frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2}<|\Omega|<\pi \end{cases}$

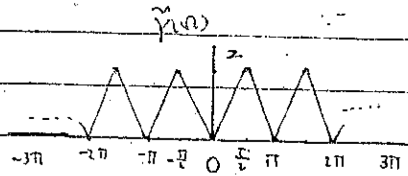
图如:

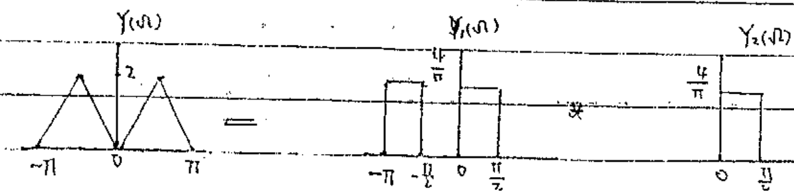


$\tilde{Y}(\Omega) = (\tilde{X}(\Omega) + \tilde{X}(\Omega)\cdot\tilde{H}_1(\Omega))\tilde{H}_3(\Omega) + \tilde{X}(\Omega)\cdot\tilde{H}_1(\Omega)\cdot\tilde{H}_2(\Omega)$

$= \tilde{X}(\Omega)\tilde{H}_3(\Omega) + \tilde{X}(\Omega)\tilde{H}_1(\Omega)(\tilde{H}_2(\Omega)+\tilde{H}_3(\Omega))$

对$\tilde{Y}(\Omega)$作图运算后得:





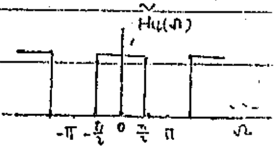
$Y_1(\Omega) \xrightarrow{DTFT^{-1}} \frac{4}{\pi}\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}(Sa\frac{\frac{\pi}{2}n}{2} + Sa\frac{\frac{\pi}{2}n}{2}e^{-\pi n}) = \frac{1}{\pi}(Sa\frac{\pi n}{4} + Sa\frac{\pi n}{4}e^{-\pi n}$

$Y_2(\Omega) \xrightarrow{DTFT^{-1}} \frac{4}{\pi}\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}Sa\frac{\frac{\pi}{2}n}{2} = \frac{1}{\pi}Sa\frac{\pi n}{4}$

$\therefore \tilde{Y}(\Omega) \xrightarrow{DTFT^{-1}} 2\pi\, y_1(n)\cdot y_2(n) = \frac{2}{\pi}Sa^2\frac{\pi}{4}n\,(1+e^{-\pi n})$

即 $y(n) = \frac{2}{\pi}Sa^2\frac{\pi}{4}n(1+e^{-\pi n})$

2) $h_4[n] = \frac{1}{2}Sa\frac{\pi n}{2}$ $\therefore \tilde{H}_4(\Omega) = \begin{cases} 1 & 0<|\Omega|<\frac{\pi}{2} \\ 0 & \pi>|\Omega|>\frac{\pi}{2} \end{cases}$

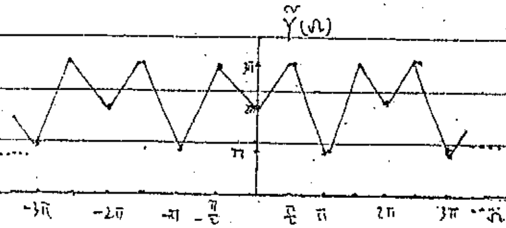


$\cos(\pi n/2) = \frac{1}{2}(e^{j\pi n/2} + e^{-j\pi n/2}) \xleftrightarrow{DTFT} \pi(\delta(\Omega+\frac{\pi}{2}) + \delta(\Omega-\frac{\pi}{2}))$

$\cos\pi n = \frac{1}{2}(e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}) \xleftrightarrow{DTFT} \pi(\delta(\Omega+\pi) + \delta(\Omega-\pi))$

$\therefore$ 由图 $\tilde{Y}(\Omega) = \tilde{X}(\Omega)\,(2\pi(\delta(\Omega+\frac{\pi}{2}) + \delta(\Omega-\frac{\pi}{2}))\cdot\tilde{H}_4(\Omega) + \pi(\delta(\Omega+\pi)+\delta(\Omega-\pi)))$

$\tilde{Y}(\Omega)$如图



$y[n] = 2\pi x[n] + x[n]\cos(n\pi)$

$= x[n](2\pi + \cos n\pi)$

设连续时间信号 $v(t)$ 是由 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 相乘得到的信号，离散时间序列 $v[n]$ 是 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 得到的序列，即

$$v(t) = x_1(t)\cdot x_2(t) \quad 和 \quad v[n] = x_1[n] \times x_2[n]$$

$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别是带限于 f_{M1} 和 f_{M2} Hz 的，如果对 $v(t)$ 周期冲激串抽样，试求满足抽样定理（即 $v(t)$ 能从其中等间隔样本中恢复）的最大抽样间隔 T_{max}。若 $f_{M1}=f_{M2}=2\text{kHz}$，则 x 等于多少 ms（毫秒）。

若 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 分别是带限于 Ω_{M1} 和 Ω_{M2} 的离散时间信号，如果对 $v[n]$ 离散时间抽样满足离散时间时域抽样定理（即 $v[n]$ 能从其等间隔样本中恢复）的最大抽样间隔 x。若 $\Omega_{M1}=\pi/8$，$\Omega_{M2}=\pi/6$，试计算此时的 N_{max}。

1) $\because v(t) = x_1(t)\cdot x_2(t)$ $\therefore v_{max} = 4\text{kHz}$ $\therefore T_{max} < \frac{1}{2v_{max}} = \frac{1}{8k}\text{s} = 1.25\times10^{-4}\text{s}$

$\therefore T_{max}$ 等于 12.5 ms

2) $\Omega_s > 2(\Omega_{M1}+\Omega_{M2}) = \frac{7}{12}\pi$ $\therefore N_{max} < \frac{2\pi}{\Omega_s} = \frac{2\pi}{\frac{7}{12}\pi} = \frac{24}{7}$ 取整

$\therefore N_{max} = 3$ $v[n] = x_1[n] \times x_2[n]$ $\therefore \Omega_m = \min(\Omega_{m1}, \Omega_{m2})$ $\therefore N_{max} = \frac{2\pi}{2\Omega_m} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{8}} = 8$

6.22 本题研究带通信号的抽样问题。若 $x(t)$ 是一连续时间带通信号，其频谱 $X(\omega)$ 如图 (a) 所示，即 $X(\omega)=0$，$\omega<\omega_1$ 和 $\omega>\omega_2$。考虑如图 (c) 的抽样和重构系统，为了讨论方便，假设重构滤波器 $H_r(\omega)$ 是一个理想内插滤波器。

1) 按照抽样定理，抽样间隔为 $T\le\pi/\omega_2$，试概画出 $x_p(t)$ 和 $x_r(t)$ 的频谱。

2) 在 1) 题中会发现，$x_p(t)$ 的频谱高发生混叠还有较大裕度。若 $\omega_2 = m(\omega_2-\omega_1)$，$m\in Z$，$H_r$ 为图 (b) 所示的理想带通滤波器，试概出此时的 $x_p(t)$ 和 $x_r(t)$ 的频谱。

3) 对任意的 ω_1 和 ω_2，$\omega_2>\omega_1$，重构滤波器的 $H_r(\omega)$ 仍为图 (b) 所示。试证明：只要抽样频率 ω_s 或抽样间隔 T 分别满足

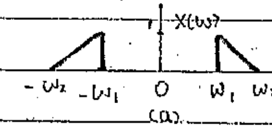
$$\omega_s \ge 2\omega_2/m \quad \text{or} \quad T \le m\pi/\omega_2$$

其中 m 是不大于 $\omega_2/(\omega_2-\omega_1)$ 的最大整数。为使 $x_r(t) = x(t)$，计算重构带通滤波器 $H_r(\omega)$ 的通带增益 A。这就是带通信号的连续时间抽样定理。

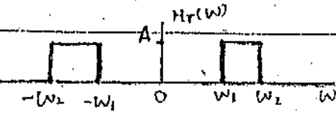
解：(1)

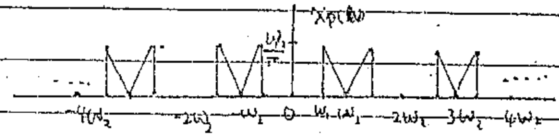
$x_p(t) \xleftrightarrow{CFT} \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega-n\omega_s) = \frac{\omega_2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega-n2\omega_2)$

$x_r(t) = \frac{A\omega_2}{\pi}x(t)$ $\because H_r(\omega)$ 是理想内插滤波器

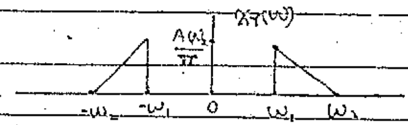


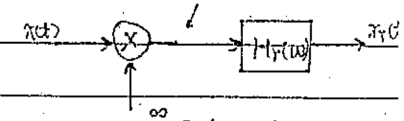
$\therefore$ 作图





$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s)$





$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s)$

2) $x_p(t)$, $x_r(t)$ 同上，只不过将 $\omega_s = m\Delta\omega$ 即可

3) $A\cdot\frac{\omega_c}{m\pi} = 1 \quad \therefore A = \frac{m\pi}{\omega_c}$

4 对于下列用时域或频域表示的连续和离散时间信号，它们是能量受限信号还是功率受限信号？并分别计算它们在单位电阻上消耗的能量或平均功率。

1) 电流信号 $i(t) = \frac{\sin(10^3\pi t)}{\pi(t-10^{-3})}$ mA

解: 能量受限信号

$\sin(10^3\pi(t-10^{-3})) = \sin(10^3\pi t - \pi) = -\sin 10^3\pi t$

$\therefore i(t) = -10^3 \frac{\sin 10^3\pi(t-10^{-3})}{10^3\pi(t-10^{-3})} = -10^3 Sa\, 10^3\pi(t-10^{-3})$

$\therefore I(\omega) = -\Gamma_{2\times10^3\pi}(\omega)\, e^{-j\omega 10^{-3}}$

$$R_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2 d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\times10^3\pi\cdot 1$$
$$= 1\,(mW)$$

3) $X(\omega) = \frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k Sa^2(k\pi)\delta(\omega - 2\times10^3\pi k)$

此信号为功率受限信号

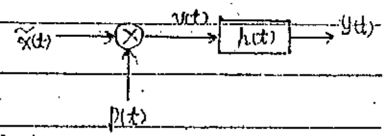
$$X(\omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4}(-1)^k Sa^2(k\pi)\,\delta(\omega - k2\times10^3\pi)$$

$$\therefore P = \frac{1}{T}\int_{<T>}|\tilde{x}(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{4}(-1)^k Sa^2(k\pi)\right)^2$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{16}Sa^4(k\pi)$$
$$= \frac{1}{16}$$

6.32 研究如图所示的系统，其中 $\tilde{x}(t)$ 是周期为 $T=2\pi/\omega_0$ 的实周期信号，其傅立叶级数表示为

$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}$ 和 $h(t) = \frac{\omega_0}{2\pi}Sa(\frac{\omega_0 t}{2})$

$p(t) = \cos\omega_0 t$



1) 试求 y(t)

2) 如果上述 p(t) 修改成 $p(t) = \sin\omega_0 t$，那么 y(t) 将变成什么？

3) 对于如图所示的系统，以及上面已给定的 $\tilde{x}(t)$ 和 $h(t)$，基于上两小题的求解和结果，如果要确定周期信号 $\tilde{x}(t)$ 的任何一个傅里叶级数系数 F_k 的实部，p(t) 应如何选择？如果要确定 F_k 的虚部，p(t) 又应如何选择。

解: $X(\omega) = F(\tilde{x}(t)) = F\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_0 t}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k F\{e^{jk\omega_0 t}\}$

$= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k\delta(\omega - k\omega_0)$

$P(\omega) = F(\cos\omega_0 t) = \pi(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0))$

$$H(\omega) = R_{\omega_0}(\omega) = \begin{cases} 1 & 0<|\omega|<\frac{\omega_0}{2} \\ 0 & |\omega|>\frac{\omega_0}{2} \end{cases}$$

$\therefore$
$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * P(\omega)\cdot R_{\omega_0}(\omega)$$
$$= \frac{2\pi}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k\delta(\omega-k\omega_0) * \pi(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0))\cdot R_{\omega_0}(\omega)$$
$$= \frac{2\pi^2}{2\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k\delta(\omega+\omega_0-k\omega_0) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k\delta(\omega-\omega_0-k\omega_0)\right)\cdot R_{\omega_0}(\omega)$$
$$= \cancel{\frac{2\pi^2}{2\pi}(F_{-1}\delta(\omega+\omega_0)+F_1\delta(\omega-\omega_0))R_{\omega_0}}(\omega)$$
$$= \frac{2\pi^2}{2\pi}(F_{-1}\delta(\omega)+F_1\delta(\omega)\cancel{R_{\omega_0}(\omega)})$$
$$= \frac{2\pi^2}{2\pi}(F_1+F_{-1})\delta(\omega)$$

$$\therefore\ y(t) \xleftrightarrow{CFT} Y(\omega) = \frac{2\pi^2}{2\pi}(F_1+F_{-1})\delta(\omega)$$
$$\therefore\ y(t) = \frac{2\pi^2}{2\pi}(F_1+F_{-1})\cdot\frac{1}{2\pi}$$
$$= \frac{\pi}{2\pi}(F_1+F_{-1}) = \frac{1}{2}(F_1+F_{-1})$$

$\because$ $P(\omega) = F(\sin\omega_0 t) = \pi j(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0))$

$\therefore$

$$Y(\omega) = \frac{2\pi}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k\delta(\omega-k\omega_0) * \pi j(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0))\ R_{\omega_0}(\omega)$$
$$= \frac{2\pi^2 j}{2\pi}(F_1\delta(\omega)-F_{-1}\delta(\omega))R_{\omega_0}(\omega)$$
$$= \pi j(F_1-F_{-1})\delta(\omega)$$

$$\therefore\ y(t) \xrightarrow{CFT} Y(\omega)$$
$$\therefore\ y(t) = \frac{\pi j}{2\pi}(F_1-F_{-1}) = \frac{j}{2}(F_1-F_{-1})$$

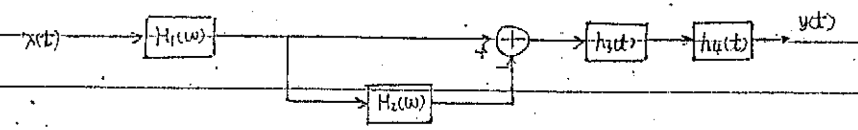
(3) 若确定任一个F_k的实部，$\because$ $x(t)$为实周期信号 $\therefore$ $F_k=F_{-k}^*$

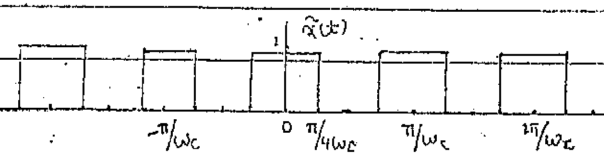
$\therefore$ 只需取 $p(t)=\cos k\omega_0 t$

若要确定F_k的虚部，则

$$p(t) = -\sin k\omega_0 t$$

7.4 考虑如图所示的四个连续时间LTI系统的互联系统，已知：





$$H_1(\omega) = \begin{cases} j\omega/2, & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c \end{cases},\quad h_3(t) = \frac{\sin 3\omega_c t}{\pi t},\quad H_2(\omega) = e^{-j(2\pi/\omega_c)\omega},\quad h_4(t) = u(t)$$

1) 如果输入$x(t)$是如图所示的周期方波，此时输出$y(t)$是什么

) 求整个系统的频率响应 $H(\omega)$ 和单位冲激响应 $h(t)$，并根据画出它们的函数图形

1) $T = \frac{\pi}{\omega_c}$ $\therefore \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\omega_c$

令 $x(t) = r_{\frac{\pi}{2\omega_c}}(t)$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-k\tfrac{\pi}{\omega_c}) = x(t)\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k\tfrac{\pi}{\omega_c})$$

$$\therefore\ x(t) \xleftrightarrow{CFT} \frac{\pi}{2\omega_c} Sa\frac{\frac{\pi}{2\omega_c}\omega}{2} = \frac{\pi}{2\omega_c} Sa\frac{\pi\omega}{4\omega_c}$$

$$\therefore\ \tilde{x}(t) \xleftrightarrow{CFT} \frac{\pi}{2\omega_c} Sa\frac{\pi\omega}{4\omega_c} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\omega_c\,\delta(\omega-2\omega_c k)\cdot\frac{1}{2\pi}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2} Sa\frac{\pi}{4\omega_c}(\omega-2\omega_c k)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{\frac{\pi}{2\omega_c}}(t-k\tfrac{\pi}{\omega_c})$$

$$\because\ x(t) \xleftrightarrow{CFT} \frac{\pi}{2\omega_c} Sa\frac{\pi\omega}{4\omega_c}$$

$$\therefore\ \tilde{x}(t) \xleftrightarrow{CFT} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{2\omega_c} Sa\frac{\pi\omega}{4\omega_c}\cdot e^{-jk\frac{\pi}{\omega_c}\omega}$$

$$h_3(t) = \frac{\sin 3\omega_c t}{\pi t} = \frac{3\omega_c}{\pi}\frac{\sin 3\omega_c t}{3\omega_c t} \xleftrightarrow{CFT} R_{6\omega_c}(\omega) \qquad h_4(t) \xleftrightarrow{CFT} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\because\ Y(\omega) = (\tilde{X}(\omega)H_1(\omega) - \tilde{X}(\omega)H_1(\omega)H_2(\omega))\,H_3(\omega)\,H_4(\omega)$$

$$= \tilde{X}(\omega)H_1(\omega)(1-H_2(\omega))\,H_3(\omega)\,H_4(\omega)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{2\omega_c} Sa\frac{\pi\omega}{4\omega_c} e^{-jk\frac{\pi}{\omega_c}\omega}\cdot j\omega/2\, R_{2\omega_c}(\omega)\cdot(1-e^{-j(2\pi/\omega_c)\omega})\cdot R_{6\omega_c}(\omega)\cdot(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega))$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{2\omega_c} Sa\frac{\pi\omega}{4\omega_c} e^{-jk\frac{\pi}{\omega_c}\omega}\cdot(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{\omega_c}\omega}+\frac{\pi}{2}j\omega\,\delta(\omega)-\frac{j\omega}{2}\pi e^{-j\frac{2\pi}{\omega_c}\omega}\delta(\omega))\,R_{2\omega_c}(\omega)$$

$$\therefore\ y(t) = (\tfrac{1}{2}\tilde{x}(t) - \tfrac{1}{2}\tilde{x}(t-\tfrac{2\pi}{\omega_c})) * \frac{2\omega_c}{2\pi} Sa\,\omega_c t = 0$$

2) $$H(\omega) = (H_1(\omega) - H_1(\omega)H_2(\omega))\cdot H_3(\omega)\cdot H_4(\omega)$$

$$= (j\omega/2\, R_{2\omega_c}(\omega) - j\omega/2\, R_{2\omega_c}(\omega)e^{-j2\pi/\omega_c\,\omega})\cdot R_{6\omega_c}(\omega)\cdot(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega))$$

$$= \frac{1}{2}R_{2\omega_c}(\omega) - \frac{1}{2}R_{2\omega_c}(\omega)e^{-j2\pi/\omega_c\,\omega}$$

$$\therefore\ h(t) = \frac{1}{2}\frac{\omega_c}{\pi}Sa\,\omega_c t - \frac{1}{2}\frac{\omega_c}{\pi}Sa(\omega_c(t-\tfrac{2\pi}{\omega_c}))$$

7.6 已知某连续时间 LTI 系统的如下信息：当输入为反因果信号 $x(t)=0$，$t>0$ 时，它的像函数 $X(s)$ 和系统输出信号 $y(t)$ 为

$$X(s) = \frac{s+2}{s-2} \quad 和 \quad y(t) = -\frac{1}{3}e^{-t}u(t) - \frac{2}{3}e^{2t}u(-t)$$

1) 试求该系统的单位冲激响应 $h(t)$ 和单位阶跃响应 $s(t)$

2) 如果该系统的输入为 $x(t)=e^{3t}$，$-\infty<t<-\infty$，试确定系统的输出 $y(t)$。

3) 写出该 LTI 系统的微分方程表示。

解：

1) $$X(s) = \frac{4}{s-2} + 1 \qquad Re\{s\}<2$$

$$\therefore\ x(t) = -4e^{2t}u(-t) + \delta(t)$$

$$Y(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{s+(-2)} \qquad -1 < Re\{s\} < 2$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\frac{1}{3}\frac{-1}{s+1}+\frac{2}{3}\frac{1}{s-2}}{\frac{s+2}{s-2}}=\frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\quad -1<Re\{s\}<2$$

$$\therefore h(t)=-e^{-t}u(t)+2e^{-2t}u(t)$$

$$=-(e^{-t}u(t)-2e^{-2t}u(t))$$

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{t}(2e^{-2t}-e^{-t})u(t)dt$$

$$=\int_{0}^{t}(2e^{-2t}-e^{-t})dt\cdot u(t)$$

$$=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

2) $y(t)=x(t)*h(t)=e^{3t}*(2e^{-2t}u(t)-e^{-t}u(t))$

$$=e^{3t}*2e^{-2t}u(t)-e^{3t}*e^{-t}u(t)$$

$$e^{3t}*2e^{-2t}u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{3\tau}\cdot 2e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$$=2e^{-2t}\int_{-\infty}^{t}e^{5\tau}d\tau$$

$$=2e^{-2t}\left.\frac{e^{5\tau}}{5}\right|_{-\infty}^{t}$$

$$=2e^{-2t}\frac{(e^{5t}-0)}{5}$$

$$=\frac{2}{5}e^{3t}$$

$$e^{3t}*e^{-t}u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{3\tau}\cdot e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$$=e^{-t}\int_{-\infty}^{t}e^{4\tau}d\tau$$

$$=e^{-t}(\frac{e^{4t}}{4}-0)$$

$$=\frac{e^{3t}}{4}$$

$$\therefore y(t)=\frac{2}{5}e^{3t}-\frac{e^{3t}}{4}$$

$$=\frac{3}{20}e^{3t}$$

3) $H(s)=\frac{-s^{-1}}{1+s^{-1}}+\frac{2s^{-1}}{1+2s^{-1}}$

$$=\frac{-s-2+2s+2}{(s+1)(s+2)}=\frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

$$=\frac{s}{s^2+3s+2}$$

LTI系统的微分方程

$$\therefore \frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2=\frac{dx(t)}{dt}$$

7.9 假设某离散时间LTI系统对输入$(n+2)(1/2)^n u[n]$的响应是$(1/4)^n u[n]$，如果当该系统的输出是$s[n]=-(-1/2)^n u[n]$，系统的输入是什么？

解：

$$(n+2)(\frac{1}{2})^n u[n]=(n)(\frac{1}{2})^n u[n]+2\cdot(\frac{1}{2})^n u[n]=(n+1)(\frac{1}{2})^n u[n]+(\frac{1}{2})^n u[n]$$

$$\xrightarrow{z}\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$(\frac{1}{4})^n u[n]\xrightarrow{z}\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\quad |z|>\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ H(z)=\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}{\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}=\frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}{2(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2}$$

$$S[n]=-(-1/2)^n u[n]\xrightarrow{z}-\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\qquad |z|>\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad X(z)=\left(\frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}{2(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2}\right)\left(-\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right)=-\frac{2(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}\qquad |z|>\frac{1}{2}$$

$$X(z)=\frac{A_1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{A_{12}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{A_{22}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

$$A_1=-\frac{2(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}\bigg|_{z^{-1}=-2}=-\frac{2(1+\frac{1}{2})^2}{(1+1)^2}=-\frac{9}{8}$$

$$A_{12}=-\frac{-1}{(2)^{-1}}\left\{\frac{d}{dz^{-1}}\frac{2(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right\}\bigg|_{z^{-1}=2}=-\frac{5}{8}$$

$$A_{22}=-\frac{2(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\bigg|_{z^{-1}=2}=-\frac{2(1-\frac{1}{2})^2}{1+1}=-\frac{1}{4}$$

$\therefore$

$$x(t)=-\frac{9}{8}(-\frac{1}{2})^n u[n]-\frac{5}{8}(\frac{1}{2})^n u[n]-\frac{1}{4}(n+1)(\frac{1}{2})^n u[n]$$

7.10 考虑如下微分方程描述的连续时间LTI系统

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+\frac{d^2y(t)}{dt^2}-4\frac{dy(t)}{dt}-4y(t)=3\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\frac{dx(t)}{dt}-4x(t)$$

1) 试写出该系统的系统函数 $H(s)$ 并画出 $H(s)$ 的零极点图。

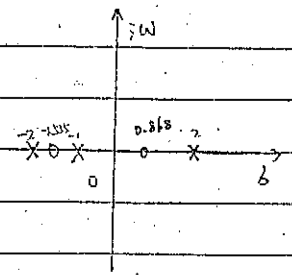
2) 对于该系统的系统下列的每一种附加信息确定它的单位冲激响应：

a) 系统是稳定的　b) 系统是因果的　c) 系统是反因果的

解

1) 由方程写出 $H(s)=\dfrac{3s^2+2s-4}{s^3+s^2-4s-4}$

$$=\frac{3s^2+2s-4}{(s-2)(s+2)(s+1)}$$



2) a) 系统是稳定， 收敛域为 $-1<Re\{s\}<2$ 收敛域应包括虚轴

$$H(s)=\frac{3s^2+2s-4}{(s+2)(s+1)(s-2)}=\frac{3s^2+2s-4}{(s+1)(s-2)(s+2)}$$

$$=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}$$

$$h(t)=e^{-t}u(t)-e^{2t}u(-t)+e^{-2t}u(t)$$

b) b系统是因果； $Re\{s\}>2$

$$h(t)=(e^{-t}+e^{2t}+e^{-2t})u(t)$$

c) 系统是反因果的 $Re\{s\}<-2$

$$h(t)=-(e^{-t}u(-t)+e^{2t}u(-t)+e^{2t}u(-t))$$

12 一个离散时间因果LTI系统的输入和输出分别用$x[n]$和$y[n]$表示，已知该系统由如下两个包含内信号$v[n]$的差分方程描述。

$$y[n]+(1/4)y[n-1]+v[n]+(1/2)v[n-1]=2/3\,x[n] \quad ①$$

$$y[n]-5/4\,y[n-1]+2v[n]-2v[n-1]=-5/3\,x[n] \quad ②$$

1) 试求该系统的频率响应和系统函数，并概画它的零、极点图。

2) 确定该系统的单位冲激响应和单位阶跃响应

3) 写出该系统用$x[n]$和$y[n]$描述的单一的差分方程表示。

解： 1) 由方程①两边取拉z变换：

$$Y(z)+\frac{1}{4}Y(z)z^{-1}+V(z)+\frac{1}{2}V(z)z^{-1}=\frac{2}{3}X(z) \quad ③$$

由②两边取z变换：

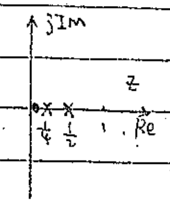
$$Y(z)-\frac{5}{4}Y(z)z^{-1}+2V(z)-2V(z)z^{-1}=-\frac{5}{3}X(z) \quad ④$$

③④连解得：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{3-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{3-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$$

令 $z=e^{j\Omega}$

$$\therefore\quad H(j\Omega)=\frac{3-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})}$$



2) $$H(z)=\frac{4}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad h[n]=4(\tfrac{1}{2})^n u[n]-(\tfrac{1}{4})^n u[n]$$

$$s[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}h[m]=\sum_{m=0}^{n}h[m]=(4\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1-(\frac{1}{4})^{n+1}}{1-\frac{1}{4}})u[n]$$

$$=(8(1-(\tfrac{1}{2})^{n+1})-\tfrac{4}{3}(1-(\tfrac{1}{4})^{n+1}))u[n]$$

3) 由$H(z)$直接写差分方程：

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=3x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$$

7.13. 单边拉氏变换或z变换不能充当任意时间函数或序列的复频域表示，只有因果时间函数或序列，单边拉氏变换或z变换等价于双边拉氏变换或z变换，才可以作为唯一的复频域表示。试求下列时间函数或序列的单边拉氏变换或z变换，确定其像函数收敛域和零、极点分布，并与其双边拉氏变换或双边z变换作比较。

1) $e^{-at}u(t)$, $a>0$

解:

$$X_u(s) = \int_0^\infty e^{-at}u(t)e^{-st}dt$$

$$= \frac{1}{s+a} \qquad Re\{s\}>a$$

$$= X(s)$$

极点 $p=-a$

3) $a^n u[n]$, $|a|<1$

$$X_u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

$$= X(z)$$

极点 $z=a$

5) $a^{|n|}$, $|a|<1$

$$a^{|n|} = \begin{cases} a^{-n} & n<0 \\ a^n & n\geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore X_u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$= \frac{az}{1-az} + \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |a|<|z|<\frac{1}{|a|}$$

$X_u(z) \neq X(z)$

$X_u(z)$ 极点为 $z=a$

7) $e^{-at}[u(t)-u(t-T)]$

$$X_u(s) = \int_0^\infty e^{-at}(u(t)-u(t-T))e^{-st}dt$$

$$= \int_0^T e^{(-a-s)t}dt$$

$$= -\frac{e^{-(s+a)t}}{a+s}\Big|_0^T$$

$$= -\frac{e^{-(s+a)T}-1}{a+s}$$

$$= \frac{1-e^{-(s+a)T}}{a+s}$$

收敛域 ~~Re{s}>-a~~ 除无穷远点 s平面

极点 $p=-a$ 零点 $z=-a$，两者相消

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}[u(t)-u(t-T)]e^{-st}dt$$

$$= \int_0^T e^{-(a+s)t}dt$$

$$= \frac{1-e^{-(s+a)T}}{a+s}$$

~~Re{s}>-a~~ 整个s平面除无穷远点

$X_u(s) = X(s)$

9) $a^n\{u[n]-u[n-N]\}$

$X_u(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n[u[n]-u[n-N]]z^{-n}$

$=\sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n}$

$=\frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}$ $|z|>0$时 整个平面 $|z|>0$

极点 $p=a$ 零点 $z=a$

$X(z)=\frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}$ $|z|>0$时 整个平面 $|z|>0$

$\therefore X_u(z)=X(z)$

10) $3\delta'(t)+\cos\omega_0 t$

$X_u(s)=\int_{0^-}^{\infty}(3\delta'(t)+\cos\omega_0 t)e^{-st}dt$

$=3s+\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$ $Re\{s\}>0$

$=\frac{3s^3+3s\omega_0^2+s}{s^2+\omega_0^2}=\frac{s(3s^2+3\omega_0^2+1)}{s^2+\omega_0^2}$

$\therefore$ 极点 $p_s=\pm j\omega_0$ 零点 $z_{s_1}=0$ $z_{s_2}=\pm j\sqrt{\omega_0^2+\frac{1}{3}}$

$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}(3\delta'(t)+\cos\omega_0 t)e^{-st}dt$

$=\int_{-\infty}^{\infty}3\delta'(t)e^{-st}dt+\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega_0 t\, e^{-st}dt$

$=3s+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})e^{-st}dt$

即 $3s+$ [illegible] $Re\{s\}>0$

$X(s)$不存在

$\therefore X_u(s)\neq X(s)$

12) $\Delta\delta[n]-\sin[\Omega_0(n-1)]$.

$X_u(z)=(1-z^{-1})-\sum_{n=0}^{\infty}\sin\Omega_0(n-1)z^{-n}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\sin\Omega_0(n-1)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2j}(e^{j\Omega_0(n-1)}-e^{-j\Omega_0(n-1)})z^{-n}$

$=\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-j\Omega_0}e^{j\Omega_0 n}z^{-n}-e^{j\Omega_0}e^{-j\Omega_0 n}z^{-n})$

$=\frac{1}{2j}\left(e^{-j\Omega_0}\frac{1}{1-e^{j\Omega_0}z^{-1}}-e^{j\Omega_0}\frac{1}{1-e^{-j\Omega_0}z^{-1}}\right)$ $|z|>1$

$\therefore X_u(z)=(1-z^{-1})-\frac{1}{2j}\left(e^{-j\Omega_0}\frac{1}{1-e^{j\Omega_0}z^{-1}}-e^{j\Omega_0}\frac{1}{1-e^{-j\Omega_0}z^{-1}}\right)$ $|z|>1$

极点 $p_{z_1}=e^{j\Omega_0}$, $p_{z_2}=e^{-j\Omega_0}$ 零点略.

$\because x(n)\neq x(n)u(n)$ $\therefore X_u(z)\neq X(z)$

13) $f(t)=\begin{cases}e^{-at} & t\geq 0\\ 1 & t<0\end{cases}$, $a>0$

$X_u(s)=\int_{0^-}^{\infty}f(t)\cdot e^{-st}dt$

$=\frac{1}{s+a}$ $Re\{s\}>-a$

极点 $p_1=-a$

$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{-st}dt+\int_{0}^{+\infty}e^{-at}e^{-st}dt$

$=\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{e^{-(a+s)t}}{-(s+a)}\Big|_{0}^{+\infty}$

$=-\frac{1}{s}+\frac{e^{\infty}}{s}+\frac{1}{s+a}$ $\therefore X(s)$不收敛 $\therefore$不存在

(b) $f[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta[n-mN]$

$X_u(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f[n]z^{-n}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta[n-mN]z^{-n}$

$=\sum_{m=0}^{\infty}1+z^{-N}+z^{-2N}+\cdots z^{-mN}+\cdots \quad |z|>0$

$=\frac{1}{1-z^{-N}} \quad |z|>1$

$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f[n]z^{-n}$

$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}z^{-mN}$

$X_u(z)\neq X(z)$

7.15 试用单边拉氏变换或z变换求解下列各系统在因果输入x(t)或x[n]时的零状态响应和零输入响应，自由响应和强迫响应，以及稳态响应和暂态响应各个分量并和时域方法作比较。

1) 第四章4.14题的连续时间系统，$x(t)=e^{-3t}u(t)$。

$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x'(t)+3x(t) \quad ; \quad y(0_-)=1,\ y'(0_-)=2$

解 对方程两边进行单边拉氏变换：

$s^2Y_u(s)-sy(0_-)-y'(0_-)+3(sY_u(s)-y(0_-))+2Y_u(s)=sX_u(s)+3X_u(s)$

代入初始条件：

$Y_u(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}X_u(s)+\frac{s+5}{s^2+3s+2}$

$\because X_u(s)=\int_{0_-}^{\infty}e^{-3t}u(t)e^{-st}dt$

$=\frac{1}{s+3} \quad Re\{s\}>-3$

$\therefore Y_u(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}+\frac{s+5}{s^2+3s+2}$

∴零状态响应的单边拉氏变换为：

$Y_{uzs}(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$

$\therefore y_{zs}(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

零输入响应的单边拉氏变换为：

$Y_{uzi}(s)=\frac{s+5}{s^2+3s+2}=\frac{4}{s+1}-\frac{3}{s+2}$

$\therefore y_{zi}(t)=(4e^{-t}-3e^{-2t}) \quad t>0$

∴总响应：

$y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)$

$=(5e^{-t}-4e^{-2t}) \quad t>0$

7.18 对于如下差分方程描述的离散时间因果系统.

$$y[n]-\frac{1}{3}y[n-1]=2x[n]+\sum_{k=-\infty}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k}x[k-1]$$

已知 $x[n]=u[n]$，起始条件为 $y[-1]=3$，试求系统的全响应 $y[n]$，$n\geq 0$ 并写出其中的零输入响应和零状态响应，自由响应和强迫响应，稳态响应和暂态响应各分量。

解：$$Y_u(z)-\frac{1}{3}(Y_u(z)z^{-1}+y[-1])=2X_u(z)+Z_u\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}^{(k-2)}x[n-k]\right)$$

$$\therefore\ Y_u(z)-\frac{1}{3}(Y_u(z)z^{-1}+y[-1])=2X_u(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}X_u(z)\cdot z^{-k}$$

$$=\left(2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}z^{-k}\right)X_u(z)$$

$$\therefore\ Y_u(z)=\frac{\left(2+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{k-2}z^{-k}\right)}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}X_u(z)+\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

零输入响应

$$\therefore\ Y_{uzi}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\xrightarrow{z^{-1}}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

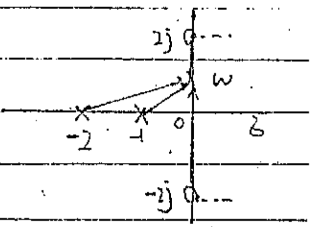
$$Y_{uzs}=\frac{2+\frac{2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\ (|z|>\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{2-z^{-1}+2z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}=\frac{2+z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

$$=\frac{12}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-10}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$Y_{uzs}\xrightarrow{z^{-1}}\left(12\left(\frac{1}{2}\right)^n-10\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)u[n]$$

$\therefore$ 全响应 $y[n]=\left(12(\frac{1}{2})^n-9(\frac{1}{3})^n\right)u[n]$

7.25 已知一连续时间实因果LTI系统的零极点如图所示，且系统在输入 $x(t)=\sin t$ 时输出为 $y(t)=0.1\sin t-0.3\cos t$



1) 试求当系统在如下输入时的稳态响应。

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\cos(2t+k\pi/4)$$

2) 试说明系统单位冲激响应有哪些分量组成

3) 写出它系统函数 $H(s)$ 和收敛域。

4) 写出系统的系统的微分方程表示

5) 概画出系统的幅频响应 $|H(\omega)|$ 和相频响应 $\varphi(\omega)$，并加以标注

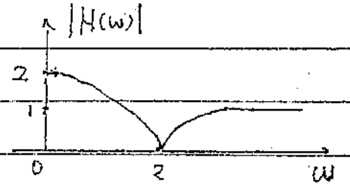
解：

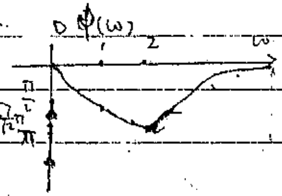
2) 系统单位冲激响应中包含 $\delta(t)$，$e^{-2t}u(t)$，$e^{-t}u(t)$ 分量

3) $H(s)=H_0\frac{(s+2j)(s-2j)}{(s+2)(s+1)}$ 收敛域为 $Re\{s\}>-1$

4) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=H_0(x''(t)+4x(t))$

5)





7.27 对于零极点分布如图所示的离散时间实因果LTI系统，若已知该系统单位阶跃响应 $s[n]$ 在 $n=0$ 的值 $s[0]=2$，试求该系统的单位冲激响应 $h[n]$。

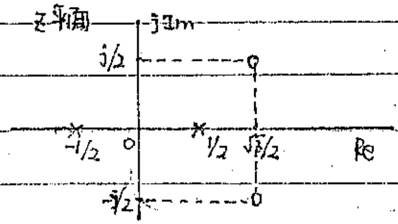
解：

$\because s[n]=\sum_{m=-\infty}^{n} h[m]$

$\because h[n]$ 为实因果LTI

$\therefore s[n]=\sum_{m=0}^{n} h[m]$

$\therefore s[0]=h[0]=2$



由图知 $H(z)=\frac{A(1-(\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{2}j)z^{-1})(1-(\frac{\sqrt3}{2}-\frac{1}{2}j)z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac12 z^{-1})}$

$=\frac{A(1-\sqrt3 z^{-1}+z^{-2})}{(1-\frac12 z^{-1})(1+\frac12 z^{-1})}$

$=A\left(\frac{\frac52-\sqrt3}{1-\frac12 z^{-1}}+\frac{\frac52+\sqrt3}{1+\frac12 z^{-1}}\right)$ $|z|>\frac12$

$\therefore h[n]=A\left((\frac52-\sqrt3)(\frac12)^n u[n]+(\frac52+\sqrt3)(-\frac12)^n u[n]\right)$

$h[0]=A(\frac52-\sqrt3+\frac52+\sqrt3)=2$

$\therefore A=\frac25$

$\therefore h[n]=$

由初值定理 $\lim_{z\to\infty}$ 得 $A=2$

将 $H(z)$ 进行部分式展开：$H(z)=\left(-4+\frac{\frac52-\sqrt3}{1-\frac12 z^{-1}}+\frac{\frac52+\sqrt3}{1+\frac12 z^{-1}}\right)2$

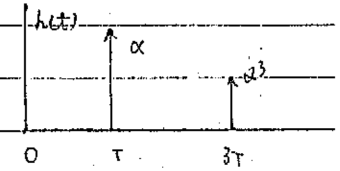
由Z逆变换得

$h[n]=-8\delta[n]+2(\frac52-\sqrt3)(\frac12)^n u[n]+2(\frac52+\sqrt3)(-\frac12)^n u[n]$

7.33 解：$\because h(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2k+1}\delta(t-T-2kT)$

1) $H(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2k+1}e^{-(2k+1)Ts}$

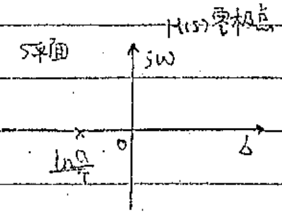
$=\frac{\alpha e^{-Ts}}{1-\alpha^2e^{-2Ts}}$ R_f：$Re\{s\}>\frac{\ln\alpha}{T}$

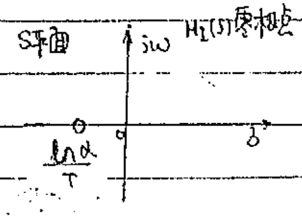


收敛域确定为：$\alpha e^{-Ts}<1$，$e^{-Ts}<\frac{1}{\alpha}$，$-Ts<\ln\frac{1}{\alpha}$，$s>\frac{\ln\alpha}{T}$

即 R_f 为 $Re\{s\}>\frac{\ln\alpha}{T}$

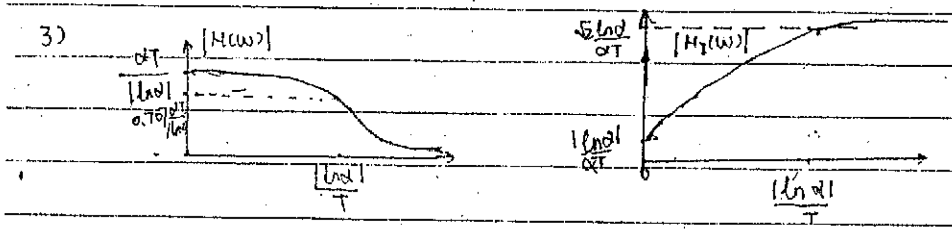
2) $H_I(s)=\frac{1}{H(s)}=\frac{1-\alpha^2e^{-2Ts}}{\alpha e^{-Ts}}=\frac{1}{\alpha e^{-Ts}}-\alpha e^{-Ts}$ R_f 整个S平面





$H(s)$属全极点系统，$H_I(s)$全零点系统.

3)



4) $H_I(s) = \frac{1}{\alpha}e^{Ts} - \alpha e^{-Ts}$ R_s：整个s平面

∴ $h_I(t) = \frac{1}{\alpha}\delta(t+T) - \alpha\delta(t-T)$

微分方程表示：$\frac{1}{\alpha}x(t+T) - \alpha x(t-T) = y(t)$

5) $h(t) = \alpha\delta(t-T) + \alpha^3\delta(t-3T)$

$H(s) = \alpha e^{-Ts} + \alpha^3 e^{-3Ts}$

$H_I(s) = \frac{1}{\alpha e^{-Ts}+\alpha^3 e^{-3Ts}} = \frac{1}{\alpha e^{-Ts}}\cdot\frac{1}{1+\alpha^2 e^{-2Ts}} = \frac{e^{Ts}}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-\alpha^2 e^{-2Ts})^k$

$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\alpha^{2k-1}e^{-(2k-1)Ts}$

$h_I(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\alpha^{2k-1}\delta(t-(2k-1)T)$

微分方程表示：$y_I(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\alpha^{2k-1}x(t-(2k-1)T)$

7.34 1) $s(t) = (1-e^{-t/\tau})u(t)$ ∴ $h(t) = (1-e^{-t/\tau})\delta(t) + \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t)$

$h(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t)$

∴ $H(s) = \frac{1}{\tau}\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}} = \frac{1}{s\tau+1}$ $Re\{s\} > -\frac{1}{\tau}$

∴补偿系统的系统函数为：

$H'(s) = \frac{1}{H(s)} = s\tau+1$. R_s 整个s平面

∴ $h'(t) = \tau\delta'(t)+\delta(t)$

2) $x(t)=u(t)$ ∴ $X(s)=\frac{1}{s}$

∴ $Y(s) = X(s)\cdot H(s) = \frac{1}{s(s\tau+1)} = \frac{1}{s} + \frac{-\tau}{s\tau+1} = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s+\frac{1}{\tau}}$ $Re\{s\} > -\frac{1}{\tau}$

∴ $y(t) = u(t) + (-e^{-\frac{1}{\tau}t}u(t))$

经补偿系统后：

$\tilde{x}(t) = (y(t)+n(t)) * h'(t)$

$= (u(t) - e^{-\frac{t}{\tau}}u(t) + \beta\sin\omega t) * (\tau\delta'(t)+\delta(t))$

$= u(t) + \beta\tau\omega\cos\omega t + \beta\sin\omega t$

∵ $\beta\sin\omega t$相对于$u(t)$很小∴可忽略不计 则

$\tilde{x}(t) = u(t) + \tau n(t)$

$\tilde{x}(t)$随ω增大而增大

3) $h_B(t) = \alpha t e^{-\alpha t}u(t)$

$\therefore H_\beta(s) = \alpha \frac{1}{(s+\alpha)^2} \quad Re\{s\} > -\alpha$

$\because$ 干扰 $n(t)$ 所产生的输出不大于0.1 则

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= x(t) * h_\beta(t) = (u(t) + \beta\tau\omega_0\cos\omega_0 t) * \alpha t e^{-\alpha t}u(t) \\ &= \int_{-\infty}^{t} \alpha\tau_1 e^{-\alpha\tau_1} u(\tau_1)\, d\tau_1 + \int_{-\infty}^{t} \beta\tau\omega_0\cos\omega_0\tau_1\, \alpha(t-\tau_1) e^{-\alpha(t-\tau_1)}\, d\tau_1 \\ &= \int_{0}^{t} \alpha\tau_1 e^{-\alpha\tau_1}\, d\tau_1 + \beta\tau\int_{-\infty}^{t} \alpha t\, \omega_0\cos\omega_0\tau_1 e^{\alpha\tau_1}\, d\tau_1 e^{-\alpha t} + \beta\tau\int_{-\infty}^{t} -\alpha\tau_1 \\ &\quad \omega_0\cos\omega_0\tau_1 e^{\alpha\tau_1}\, d\tau_1\, e^{-\alpha t} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} v_n'(t) &= n(t) * h'(t) * h_\beta(t) \\ &= \beta\tau\omega_0\cos\omega_0 t * \alpha t e^{-\alpha t} u(t) \end{aligned}$$

7.37 如图7.30 or 7.31 给出的零极点图表示的连续或离散时间LTI系统中，哪些是全通系统，哪些最小相移系统。

解：

对图7.30：全通系统：c g　　　对图7.31 全通：

最小相移系统：a e f　　　最小相移：b d f g h i；

7.45 对于如图所示的连续时间LTI系统，已知：$h_1(t) = \frac{\sin t}{\pi t}$；$H_2(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega} & |\omega| < \\ 0 & |\omega| > \end{cases}$

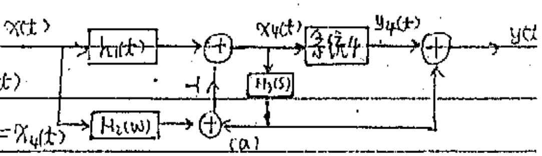
$H_3(s) = \frac{1}{s} \quad Re\{s\} > 0$ 系统是如图(b)所示的RC积分电路，其时间常数为 $\tau = RC = 1ms$

试求：1) 当如下系统输入时，整个系统的输出 $y(t)$。

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t-4n)$，其中 $r(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$

2) 该系统的单位冲激响应 $h(t)$，并概画出它的波形。

解：

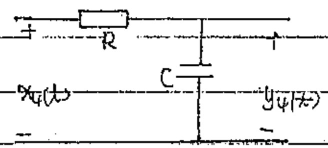


(a)

(1) $x_4(t) * h_4(t) + x_4(t) * h_3(t) = y(t)$

$x(t) * h_1(t) + (-1)(x(t) * h_2(t) + x_4(t) * h_3(t)) = x_4(t)$

$\therefore$ 对两方程求拉氏变换得：



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(H_3(s) + H_4(s))(H_1(s) - H_2(s))}{1 + H_3(s)}$$

令 $s = j\omega$ 有 $\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{(H_3(j\omega) + H_4(j\omega))(H_1(j\omega) - H_2(j\omega))}{1 + H_3(j\omega)}$

解: $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r_1(t-4n)$

$$= r_1(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-4n)$$

↓这错误 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-4n) \xleftrightarrow{CFT} \frac{2\pi}{4}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{4}n)$

$$\therefore\ X(\omega) = 1\, Sa\frac{1\cdot\omega}{2}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j4n\omega}$$

$$h_1(t)=\frac{\sin t}{\pi t} \xrightarrow{CFT} H_1(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$$

$$\therefore\ X(\omega)\cdot H_1(\omega) = R_2(\omega)\cdot Sa\frac{\omega}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j4n\omega}$$

$$X(\omega)\cdot H_2(\omega) = e^{-j\omega}R_2(\omega)Sa\frac{\omega}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j4n\omega}$$

$$H_3(\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$H_4(\omega)=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}+R}=\frac{1}{1+j\omega RC}=\frac{1}{1+j\omega\tau}.\ (\tau=RC)$$

$$\therefore\ Y(\omega)=\frac{X(\omega)(H_3(\omega)+H_4(\omega))(H_1(\omega)-H_2(\omega))}{1+H_3(\omega)}$$

$$=\frac{Sa\frac{\omega}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-j4n\omega}(R_2(\omega)-e^{-j\omega}R_2(\omega))(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)+\frac{1}{1+j\omega\tau})}{1+\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)}$$

$$\therefore\ X(\omega)=\frac{2\pi}{4}Sa\frac{1}{2}\frac{2\pi}{4}n\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{4}n)$$

$$X(\omega)\cdot(R_2(\omega)-e^{-j\omega}R_2(\omega)) = \frac{2\pi}{4}\cdot\delta(\omega)(R_2(\omega)-e^{-j\omega}R_2(\omega))$$

$$=\frac{2\pi}{4}\delta(\omega)(1-1)$$

$$=0$$

$\therefore\ Y(\omega)=0\quad \therefore\ y(t)=0$

8.1 已知下列连续时间因果LTI系统的系统函数 $H(s)$ 或单位冲激响应 $h(t)$ 为：

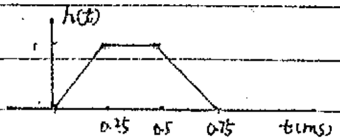
a) $H(s)=\frac{1-10^{-3}s}{1+10^{-3}s}$　　b) $h(t)$ 如图所示

1) 分别求出它们的频率响应，并概画出幅频响应和相频响应。系统是否满足带限无失真条件？若不满足，说明每个系统会产生哪些失真。

2) 若输入是带限于 ω_M 的带限信号，并允许系统幅频特性有 ±3dB 起伏，或相位特性偏离线性不超过 $\pi/12$，试分别确定这两个系统允许输入的最高频率 ω_M。

3) 为使这两个系统在 0~1KHz 的频带内不产生幅度失真，可以让系统后接一个幅度均衡器，试求各自满足此条件的幅度均衡器的幅频特性。

解：



(1) a) $H(s)=\frac{10^3-s}{10^3+s}=\frac{-s-10^3}{s+10^3}+\frac{2\cdot10^3}{s+10^3}$

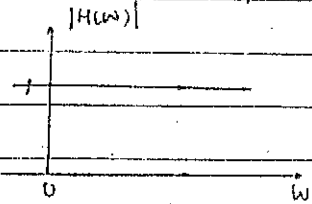
$=-1+\frac{2\cdot10^3}{s+10^3}$　　$Re[s]>10^{-3}$

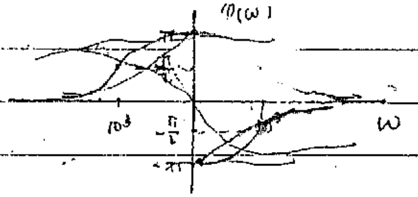
$\therefore h(t)=-\delta(t)+2\cdot10^3e^{-10^3t}u(t)$

$H(j\omega)=-1+2\cdot10^3\frac{1}{j\omega+10^3}=\frac{10^3-j\omega}{j\omega+10^3}=\frac{\sqrt{A}e^{\arctan\frac{-\omega}{10^3}j}}{\sqrt{A}e^{\arctan\frac{\omega}{10^3}j}}$　；$\sqrt{A}=\sqrt{(10^3)^2+\omega^2}$

$=e^{j\cdot(-2\arctan\frac{\omega}{10^3})}$

$\varphi(\omega)=-2\arctan\omega/10^3$



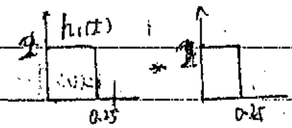


∴ 不满足带限无失真条件，会产生相位失真

b)

$2R_{0.25}(t)\xrightarrow{CFT}2\cdot0.25Sa\frac{\omega\cdot0.25}{2}=\frac{1}{2}Sa\frac{\omega}{8}$

$\therefore h_1(t)\overset{CFT}{\longleftrightarrow}\frac{1}{2}Sa\frac{\omega}{8}e^{-j\omega\frac{1}{8}}$



$\therefore$

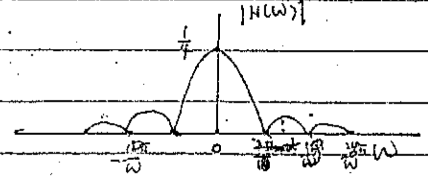
$h_0(t)\overset{CFT}{\longleftrightarrow}\frac{1}{4}Sa^2\frac{\omega}{8}e^{-j\omega\frac{1}{4}}$

$\therefore h_0(t-0.25)\overset{CFT}{\longleftrightarrow}\frac{1}{4}Sa^2\frac{\omega}{8}e^{-j\omega\frac{1}{4}}e^{-j\omega\frac{1}{4}}$

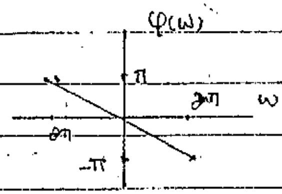
$=\frac{1}{4}Sa^2\frac{\omega}{8}e^{-j\omega\frac{1}{2}}$

$\therefore h(t)=h_0(t)+h_0(t-0.25)=\frac{1}{4}Sa^2\frac{\omega}{8}(e^{-j\omega\frac{1}{4}}+e^{-j\omega\frac{1}{2}})$

$\therefore$



$\frac{2\pi\cdot10^3}{8\times10^3}$



∴ b) 也不满足无失真传输条件，会产生幅度失真

2) 求 ω_{Ma} 由相位特性偏离线性不超过 $\pi/12$ 知

$|-2\arctan\frac{\omega_{Ma}}{10^3}|<\frac{\pi}{12}$

$\therefore \omega_{Ma}=131.58\ rad/s$

对 ω_{mb} $\quad \frac{1}{4}Sa^2\frac{\omega_{mb}}{8} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$

$$\therefore Sa^2\frac{\omega_b}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{\sin\frac{\omega_b}{8}}{\frac{\omega_b}{8}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \frac{\sin\frac{\omega_b}{8}}{\frac{\omega_b}{8}} = 0.841$$

3) $|\omega| < 2\pi\times10^3$ 时 有 对b系统而言有:

$$|E(\omega)| = \frac{a}{|H_b(\omega)|}$$

8.2 用差分方程描述的离散时间因果LTI系统一般都是无失真系统,若它又是最小相移系统都存在一个可实现的因果的理想均衡器,即原系统的逆系统,对于下列差分方程表示的因果LTI系统,试分别求出均衡器的单位冲激响应,写出其差分方程表示,并说明这个均衡器是FIR系统还是IIR系统。

1) $y[n] = x[n] + 0.75x[n-1] + 0.125x[n-2]$

解: $Y(z) = X(z)(1 + 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2})$

$$\therefore H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}$$

$\therefore$ 均衡器的系统函数为: $H_1(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1+0.75z^{-1}+0.125z^{-2}} = \frac{2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$

$$\therefore h_1[n] = 2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + (-1)\left(-\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]$$
$$= \left(2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n - \left(-\tfrac{1}{4}\right)^n\right)u[n]$$

差分方程: $y[n] + 0.75y[n-1] + 0.125y[n-2] = x[n]$, 为全极点系统是IIR系统

3) $y[n] - 1.5y[n-1] + 0.75y[n-2] - 0.125y[n-3] = x[n]$

均衡系统冲激响应:

$$\therefore h[n] = \delta[n] - 1.5\delta[n-1] + 0.75\delta[n-2] - 0.125\delta[n-3]$$

差分方程:

$$y[n] = x[n] - 1.5x[n-1] + 0.75x[n-2] - 0.125x[n-3]$$

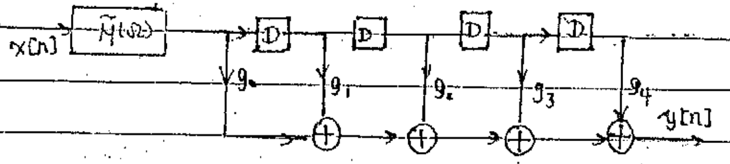
为全零点系统为FIR系统.

8.3 已知某离散时间LTI系统的频率响应 $H(\Omega)$ 为

$$H(\Omega) = 0.2 - 0.25e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega} + 0.5e^{-j3\Omega} - 0.25e^{-j4\Omega}$$

1) 说明该系统不满足无失真条件,也不满足带限无失真条件;

2) 若采用如图的FIR系统作为它的时域均衡器,试求这个时域均衡器的抽头系数 $g_0, g_1, \cdots g_4$, 即当输入 $x[n] = \delta[n]$ 时,使均衡器输出 $y[n]$ 满足 $y[4]=1$ 和 $y[2] = y[3] = y[5] = y[6] = 0$, 求这些抽头系数。



3) 按照 2) 小题求得的抽头系数，如图的整个系统并非理想无失真系统，但已是比较精确的无失真系统，试求整个系统的单位冲激响应 $\hat{h}[n]$，除 $\hat{h}[4]=1$ 外，$\hat{h}[n]$ 的最大非零序列值是多少？

解：1) $|\tilde{H}(\Omega)| = \sqrt{(0.2-0.25\cos\Omega+\cos 2\Omega+0.5\cos 3\Omega-0.25\cos 4\Omega)^2+(0.25\sin\Omega-\sin 2\Omega-0.5\sin 3\Omega+0.25\sin 4\Omega)^2}$

$\therefore |\tilde{H}(\Omega)| \neq$ 常数，随 Ω 变化而变化

同理 $\tilde{\varphi}(\Omega) = \arctan \dfrac{0.25\sin\Omega-\sin 2\Omega-0.5\sin 3\Omega+0.25\sin 4\Omega}{0.2-0.25\cos\Omega+\cos 2\Omega+0.5\cos 3\Omega-0.25\cos 4\Omega}$

$\neq k\Omega$（k 为常数）

不无失真条件以及有限无失真条件

2) $h[n] = 0.2\delta[n]-0.25\delta[n-1]+\delta[n-2]+0.5\delta[n-3]-0.25\delta[n-4]$ $\therefore$ $y[n]=$

$g_0(0.2\delta[n]-0.25\delta[n-1]+\delta[n-2]+0.5\delta[n-3]-0.25\delta[n-4])+(0.2\delta[n-1]-0.25\delta[n-2]+\delta[n-3]$

$+0.5\delta[n-4]-0.25\delta[n-5])g_1+\cdots+g_4(0.2\delta[n-4]-0.25\delta[n-5]+\delta[n-6]+0.5\delta[n-7]$

$-0.25\delta[n-8])$

$y[2]=g_0+(-0.25g_1)+0.2g_2=0$ $y[3]=0.5g_0+g_1+(-0.25)g_2+0.2g_3=0$

$y[4]=-0.25g_0+0.5g_1+g_2+(-0.25)g_3+0.2g_4=1$

$y[5]=-0.25g_1+0.5g_2+g_3-0.25g_4=0$ $y[6]=-0.25g_2+0.5g_3+g_4=0$

8.7 离散时间零相位理想低通滤波器的频率响应如本章图所示

1) 试求其单位冲激响应 $h_{Lp}[n]$ 单位阶跃响应 $S_{Lp}[n]$.

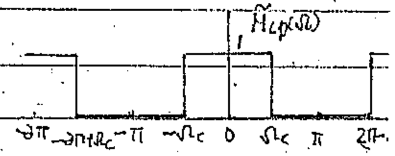
2) 若另一个离散时间 LTI 系统的单位冲激响应 $h[n]$ 是 $h_{Lp}[n]$ 的 1:2 内插零序列,

$$h[n]=\begin{cases} h_{Lp}[n/2], & n=2m \\ 0, & n\neq 2m \end{cases}, \quad m \text{ 是整数}$$

确定并概画出它的频率响应 $\tilde{H}(\Omega)$，同时说明它属于哪种类型滤波器

解 1) $h_{Lp}[n] = \frac{2\Omega_c}{2\pi} Sa\frac{2\Omega_c n}{2}$

$= \frac{\Omega_c}{\pi} Sa\,\Omega_c n$



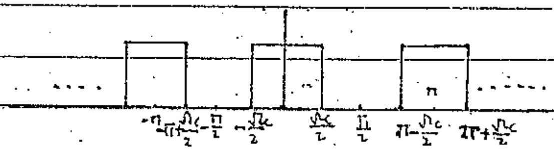
$S_{Lp}[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} h_{Lp}[m]$

$= \sum_{m=-\infty}^{n} \frac{\Omega_c}{\pi} Sa\,\Omega_c m$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(\Omega_c n)$ 其中 $Si(x)=\int_0^{\Omega_c n} \frac{\sin x}{x}dx$

2) $\because x_{(m)}[n] \xleftrightarrow{DTFT} \tilde{X}(M\Omega)$.

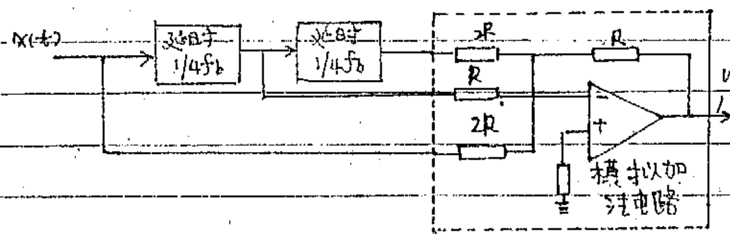
$\therefore h[n] \xrightarrow{DTFT} \tilde{H}_{Lp}(2\Omega)$ 如下图 属带阻滤波器



70图为一个具有升余弦幅频特性和线性相位特性的滤波器原理电路图，图中虚线是一个运算放大器组成的三输入加法运算电路，$H_{LP}(f)$是截止频率为$2f_b$的理想低通滤波器，即

$$H_{LP}(f)=\begin{cases}1 & |f|<2f_b\\ 0 & |f|>2f_b\end{cases}$$

求该滤波器的单位冲激响应$h(t)$和频率响应$H(\omega)$。



解：$w(t)=-x(t)\cdot\frac{R}{2R}-x(t-\frac{1}{4f_b})\frac{R}{R}-x(t-\frac{1}{2f_b})\frac{R}{2R}$

$\therefore W(\omega)=-X(\omega)\frac{1}{2}-X(\omega)e^{-j\omega\frac{1}{4f_b}}-\frac{1}{2}X(\omega)e^{-j\omega\frac{1}{2f_b}}$

当 $x(t)=\delta(t)$时 $W(\omega)=-\frac{1}{2}-e^{-j\omega\frac{1}{4f_b}}-\frac{1}{2}e^{-j\omega\frac{1}{2f_b}}$

$$H_{LP}(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<4\pi f_b\\ 0 & |\omega|>4\pi f_b\end{cases}$$

$H(\omega)=-\frac{1}{2}H_{LP}(\omega)-H_{LP}(\omega)e^{-j\omega\frac{1}{4f_b}}-\frac{1}{2}H_{LP}(\omega)e^{-j\omega\frac{1}{2f_b}}$

$h(t)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{8\pi f_b}{2\pi}Sa\frac{8\pi f_b t}{2}-\frac{8\pi f_b}{2\pi}Sa\frac{8\pi f_b}{2}(t-\frac{1}{4f_b})-\frac{1}{2}\frac{8\pi f_b}{2\pi}Sa\frac{8\pi f_b}{2}(t-\frac{1}{2f_b})$

$=-2f_b Sa\,4\pi f_b t-4f_b Sa\,4\pi f_b(t-\frac{1}{4f_b})-2f_b Sa\,4\pi f_b(t-\frac{1}{2f_b})$

8.13 现有一个用差分方程描述的离散时间滤波器，其差分方程为

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{N}b_k x[n-k] \quad ①$$

如果把上述差分方程修改为：

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k b_k x[n-k] \quad ②$$

将得到一个新的离散时间滤波器。试证明：如果①方程表示的是一个低通滤波器频率响应为$\tilde{H}_L(\Omega)$，则方程②就是一个高通滤波器，且频率响应为$\tilde{H}_L(\Omega-\pi)$；反之

解：$\because (-1)=e^{j\pi}$

$\therefore$方程②可改写为：

$$\sum_{k=0}^{N}e^{j\pi k}a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{N}e^{j\pi k}b_k x[n-k]$$

$$\sum_{k=0}^{N}e^{j\pi k}a_k \tilde{Y}(\Omega)e^{-jk\Omega}=\sum_{k=0}^{N}e^{j\pi k}b_k \tilde{X}(\Omega)e^{-jk\Omega}$$

即 $$\sum_{k=0}^{N}a_k \tilde{Y}(\Omega)e^{-jk(\Omega-\pi)}=\sum_{k=0}^{N}b_k \tilde{X}(\Omega)e^{-jk(\Omega-\pi)} \quad ③$$

由①方程得 $$\sum_{k=0}^{N}a_k \tilde{Y}(\Omega)e^{-jk\Omega}=\sum_{k=0}^{N}b_k \tilde{X}(\Omega)e^{-jk\Omega} \quad ④$$

$\therefore$由④：$\tilde{H}_L(\Omega)=\dfrac{\sum_{k=0}^{N}b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N}a_k e^{-jk\Omega}}$

由③得 $\tilde{H}_{L1}(\Omega)=\dfrac{\sum_{k=0}^{N}b_k e^{-jk(\Omega-\pi)}}{\sum_{k=0}^{N}a_k e^{-jk(\Omega-\pi)}}$

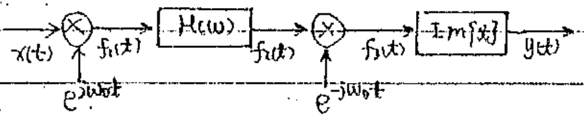
$\therefore \hat{H}_{L1}(\Omega)=\tilde{H}_L(\Omega-\pi)$ 即为高通；当H_L为低通时，H_{L1}为高通.

用图所示的系统可以实现低通滤波，图中的H(ω)是一个连续时间90°移相器，其频响应为 $H(\omega)=j\,\mathrm{sgn}(\omega)$，$Im\{x\}$的方框表示一个取虚部的系统。

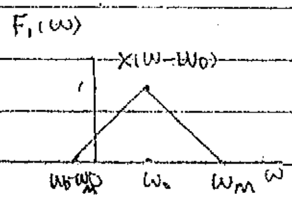
1) 如果x(t)是实信号，其频谱X(ω)如图Pa所示，试分别概画出 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, 和y(t)的频谱(实部和虚部)。并证明：对于任何实信号，如图所示的系统是一个理想低通滤波器，并用载波频率 ω_0 表示这个低通滤波器的截止频率。

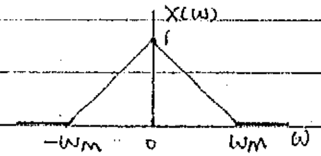
2) 试证明如图(b)的实系统等价于1)图所示的系统，(b)中的H(ω)和(1)中H(ω)完全一样，x(t)也是实信号。

3) 画出离散时间中用幅度调制和90°移相器实现理想低通滤波的方框图

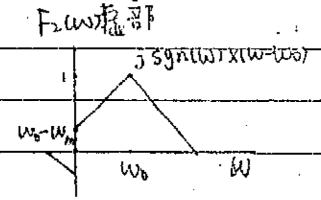


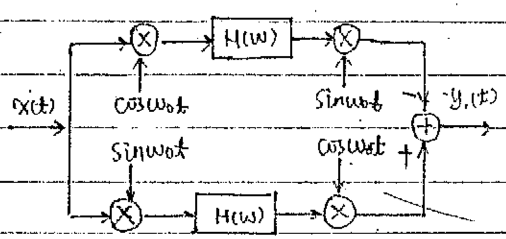
(1)



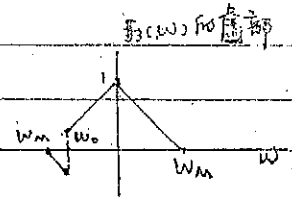


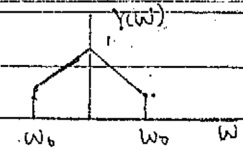
(a)





(b)





截止频率为 ω_0

2) 对(b)系统：有

$$Y_1(\omega)=-\left(X(\omega)*\frac{1}{2\pi}\pi(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0))\cdot H(\omega)\right)*\left(\frac{1}{2\pi}\cdot\pi j(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0))\right)$$
$$+\left(X(\omega)*\frac{1}{2\pi}\pi j(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0))\right)H(\omega)*\left(\frac{1}{2\pi}\cdot\pi(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0))\right)$$
$$=\frac{1}{2}X(\omega)(\mathrm{sgn}(\omega+\omega_0)-\mathrm{sgn}(\omega-\omega_0))$$

对(1)图有：

$$F_3(\omega)=X(\omega-\omega_0)\cdot H(\omega)*\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$$
$$=X(\omega)\cdot H(\omega+\omega_0)$$

$$\because Y(\omega)=-j\frac{F_3(\omega)-F_3^*(-\omega)}{2}=-j\frac{X(\omega)j\,\mathrm{sgn}(\omega+\omega_0)+X(-\omega)j\,\mathrm{sgn}(-\omega+\omega_0)}{2}$$
$$=\frac{X(\omega)\mathrm{sgn}(\omega+\omega_0)+X(-\omega)\mathrm{sgn}(-\omega+\omega_0)}{2}$$

∵ X(ω)为偶函数，而sgn(ω)为奇函数

∴ 上式可化为：

$$Y(\omega)=\frac{X(\omega)(\mathrm{sgn}(\omega+\omega_0)-\mathrm{sgn}(\omega-\omega_0))}{2}$$

∵ $Y(\omega)=Y_1(\omega)$

∴ (1)、(b)两系统等价.

) 零阶保持电路:

$$H_0(\omega)=T_s Sa(\omega T_s/2)e^{-j\omega T_s/2}$$
$$=T Sa(\omega T/2)e^{-j\omega T/2}$$

$$H_a(\omega)\cdot H_0(\omega)=\frac{1}{T}H_L(\omega)$$

$$\therefore H_a(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{T}\frac{1}{Sa\frac{\omega T}{2}}e^{-j\omega T/2} & |\omega|\le\frac{\pi}{T}\\ 0 & |\omega|>\frac{\pi}{T}\end{cases}$$

为了保证$H_a(\omega)$可实现则修正为

$$H_a(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{T Sa\frac{\omega T}{2}}e^{-j\omega T/2} & |\omega|\le\frac{\pi}{T}\\ 0. & |\omega|>\frac{\pi}{T}\end{cases}$$

2 有些有声音反射情况下录制的音乐信号，为消除这种反射，可以采用如图的连续时号的离散时间处理系统，现假设要处理的信号为：

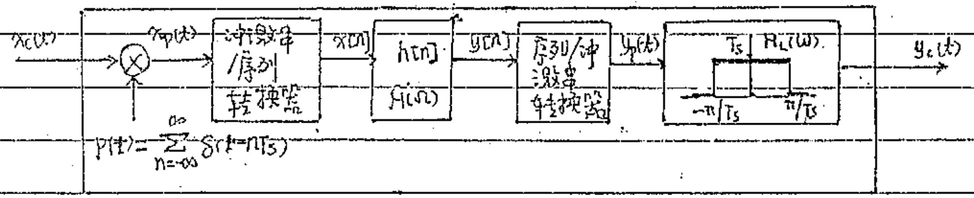
$$x_c(t)=x(t)+\alpha x(t-T),\quad 0<|\alpha|<1$$

$x(t)$是带限于ω_m的带限信号，且满足$\omega_m<\pi/T_s$，$\alpha x(t-T)$代表经历衰减和延反射波，希望通过图的离散时间处理将其消除，即在如图中，当输入式的$x_c(t)$时输出$y_c(t)$正比于$x(t)$

$x_c(t)$是否是带限信号，如果是，它的最高频率是多少？

如果式中的反射延时$T<\pi/\omega_m$，并且选择抽样间隔$T_s=T$，为使$y_c(t)$正比于$x(t)$，试确定离散时间LTI系统的单位冲激响应$h[n]$，并确定理想低通滤波器增益A，使得$y_c(t)=x(t)$。

3) 若反射延时满足$\pi/\omega_m<T<2\pi/\omega_m$，为使得$y_c(t)=x(t)$，试选择抽样间隔，并确定图中的离散衰减LTI系统的频率响应$\tilde{H}(\Omega)$和理想低通滤波器的A值



解：1) $x_c(t)$为带限信号，最高频率为π/T_s

2) $X_c(\omega)=X(\omega)+\alpha X(\omega)e^{-j\omega T}$

$$X_p(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\left(X(\omega-n\tfrac{2\pi}{T})+\alpha X(\omega-n\tfrac{2\pi}{T})e^{-j\omega T}\right)$$

$$\tilde{X}(\Omega)=X_p(\Omega/T)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(X(\tfrac{\Omega-2\pi n}{T})+\alpha X(\tfrac{\Omega-2\pi n}{T})e^{-j\Omega}\right)$$

$\because y_c(t)=kx(t)\quad\therefore\ y_p(t)=\frac{k}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\frac{2\pi}{T})$ （k为常数）

$$\therefore \tilde{Y}(\Omega)=\frac{k}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\tfrac{\Omega-n2\pi}{T})$$

$$\therefore \tilde{H}(\Omega)=\frac{\tilde{Y}(\Omega)}{\tilde{X}(\Omega)}=k\frac{1}{1+\alpha e^{-j\Omega}}$$

$\therefore h[n]=$ ~~k~~ $k(-\alpha)^n u[n]$ 为 …

$\Omega-\pi)$ …