第3章

第3章 离散时间信号的傅里叶变换

3.1 CTFS， CTFT

3.2 DTFT

3.3 CT信号的抽样

3.4 DTFS，DFS

为了引出DFT

3.5 DFT 重点内容

3.6 用DFT计算线性卷积

3.7 与DFT有关的几个问题

3.8 二维傅里叶变换

3.9 Hilbert 变换

傅立叶变换是信号分析与处理的基本工具

例 1．以 $20kHz$ 的采样率对最高频率为 $10kHz$ 的带限信号 $x_a(t)$ 采样，然后计算 $x(n)$ 的 $N=1000$ 个采样点的 DFT ,即

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\text{，}\quad N=1000$$

(a). $k=150$ 对应的模拟频率是多少？ $k=800$ 呢？
(b).频谱采样点之间的间隔是多少？

解：(a). 采样率 Ω_s： $\Omega_s=2\pi/T_s=2\pi f_s=40000\pi$

数字角频率 ω 与模拟角频率 Ω 之间的关系是： $\Omega=\omega/T_s=20000\omega$

根据 DFT 与 $DTFT$ 的关系， DFT 的 N 个频率点上的频率值 ω_k：

$$\omega_k=\frac{2\pi}{N}k,k=0,1,\cdots,N-1\text{，本题 }N=1000$$

所以，DFT 的第 $k=150$ 个频率点对应的模拟角频率 Ω_{150}，频率 f_{150} 分别为：

$$\Omega_{150}=\omega_{150}/T_s=20000\omega_{150}=20000\frac{2\pi}{N}150=6k\pi(rad/s)$$

$$f_{150}=\Omega_{150}/2\pi=6k\pi/2\pi=3kHz$$

$k=800$ 时，$\omega_k=\frac{2\pi}{N}k=\frac{2\pi}{N}(k-N)=-200\frac{2\pi}{N}$，对应的模拟频率为

$$\Omega_{800}=\omega_{800}/T_s=20000\omega_{800}=20000(-200\frac{2\pi}{N})=-8k\pi(rad/s)$$

$$f_{800}=\Omega_{800}/2\pi=-8k\pi/2\pi=-4kHz$$

(b). 频谱采样点之间的间隔 Δf： $\Delta f=20000/N=20Hz$

Δf: $\frac{\Delta\Omega}{2\pi}=\frac{\Omega_{k+1}-\Omega_k}{2\pi}=\frac{\omega_{k+1}-\omega_k}{2\pi T_s}$ $\quad\omega_{k+1}=\frac{2\pi}{N}(k+1)$

$\frac{\omega_{k+1}-\omega_k}{2\pi T_s}=\frac{2\pi}{N}\frac{1}{2\pi T_s}=\frac{1}{NT_s}=\frac{f_s}{N}=\frac{1}{T}$ $\quad T=NT_s$

$\boxed{\text{对模拟信号截断、采样}}$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

注意旋转方向

例 2. $x(n)=\{3,2,1,0\}$，$n=0,1,2,3$，$N=4$，求 $X(k)$。

解：$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_4^{kn}, k=0,1,2,3$

$W_4^0=1$，$W_4^1=-j$，$W_4^2=-1$，$W_4^3=j$，

$W_4^4=W_4^0=1$，$W_4^6=W_4^2=-1$，$W_4^9=W_4^1=-j$

可见，将单位圆 N 等份，从 $(1,0)$ 点开始，顺时针方向，有 $W_4^0=1$，$W_4^1=-j$，$W_4^2=-1$，

$W_4^3=j$，$W_4^4=1,\cdots$，所以

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_4^{0 \cdot n} = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 6$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_4^{1 \cdot n} = x(0) W_4^{1 \cdot 0} + x(1) W_4^{1 \cdot 1} + x(2) W_4^{1 \cdot 2} + x(3) W_4^{1 \cdot 3} = 2 - j2$$

$$X(2) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_4^{2 \cdot n} = x(0) W_4^{2 \cdot 0} + x(1) W_4^{2 \cdot 1} + x(2) W_4^{2 \cdot 2} + x(3) W_4^{2 \cdot 3} = 2$$

$$X(3) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_4^{3 \cdot n} = x(0) W_4^{3 \cdot 0} + x(1) W_4^{3 \cdot 1} + x(2) W_4^{3 \cdot 2} + x(3) W_4^{3 \cdot 3} = 2 + j2$$

注意：循环卷积的循环矩阵
DTFT数值计算中的指数矩阵
线性卷积矩阵表示中的矩阵

用矩阵表示式求 DFT：

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_4^{0\cdot 0} & W_4^{0\cdot 1} & \cdots & W_4^{0\cdot(N-1)} \\ W_4^{1\cdot 0} & W_4^{1\cdot 1} & \cdots & W_4^{1\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_4^{(N-1)\cdot 0} & W_4^{(N-1)\cdot 1} & \cdots & W_4^{(N-1)\cdot(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} W_4^{-0\cdot 0} & W_4^{-1\cdot 0} & \cdots & W_4^{-(N-1)\cdot 0} \\ W_4^{-0\cdot 1} & W_4^{-1\cdot 1} & \cdots & W_4^{-(N-1)\cdot 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_4^{-0\cdot(N-1)} & W_4^{-1\cdot(N-1)} & \cdots & W_4^{-(N-1)\cdot(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix}$$

下标4->N

MATLAB程序设计中要**善用**矩阵乘法、数组乘法。矩阵运算遵循线性代数的法则，而数组运算执行逐元素运算并支持多维数组。

例 3．设矩形脉冲序列 $x(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & others \quad n\end{cases}$ 的 $X(k)$ 。

解：$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{n=0}^{N-1}(e^{-jk\frac{2\pi}{N}})^n=\dfrac{1-(e^{-jk\frac{2\pi}{N}})^N}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}=\begin{cases}N & k=0\\ 0 & k\ne 0\end{cases}$

思考：(1)这里的 $X(k)$ 是如何对 $X(e^{j\omega})$ 采样的？(2) $X(k)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 有较大的不同，能否从 $X(k)$ 得到 $x(n)$ 、$X(e^{j\omega})$ ？

分母的*N*值，还可以怎么选取？怎么做是最好的？
DFT的应用目的是什么？
运算上的考虑。

例 4. 一个有限长序列 $x(n)$，在区间[0, $N-1$]外为 0，假设由 $x(n)$ 构成新的序列为 $\tilde{x}(n)$ 和 $y(n)$：

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n-kM)\text{，}\quad M<N$$

$$y(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n) & 0\le n<M\\ 0 & others\end{cases}$$

求序列 $y(n)$ 的 M 个点的 DFT，并用 $x(n)$ 的 $DTFT$ 表示。

解：设 $x(n)$ 的 $DTFT$ 为 $X(e^{j\omega})$，N 点的 DFT 为 $X(k)$，则

$$X(k)=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=X(e^{j\omega_k})\text{，}\quad \omega_k=\frac{2\pi}{N}k\text{，}\quad k=0,1,\cdots,N-1$$

若对 $X(e^{j\omega})$ 进行 M 个采样，则由这些采样值构成的频域 DFT 序列所对应的时域有限长度为 N 的序列应是：

$$\boxed{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-kM)\right) = x(n) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-kM)}$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-kM)\right) R_N(n)$$

如果 $M \geq N$，则上序列是 $x(n)$ 以 M 为周期的无混叠的周期性延拓，如果 $M < N$，则是有混叠的周期性延拓，本题的 $\tilde{x}(n)$ 就是这种情况下的时间序列，$y(n)$ 是 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列，

所以 $y(n)$ 的 M 个点的 DFT 就是对 $x(n)$ 的 $DTFT$ $X(e^{j\omega})$ 上的 M 个采样值：

$$Y(k) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{M}k} = X(e^{j\omega_k}),\quad \omega_k = \frac{2\pi}{M}k,\quad k = 0,1,\cdots,M-1$$

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n}}$$

$$\boxed{X(k) = X(e^{j\omega_k})\Big| = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi k/N}}$$

$$\boxed{Y(k) = X(e^{j\omega_k}) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi k/M}}$$

分析本题与DFT导出的关系

例 5. 已知$x(n)$的N点序列，$0\le n\le N-1$，其$DTFT$为$X(e^{j\omega})$，现对$X(e^{j\omega})$在单位圆上等间隔采样，得$Y(k)=X(e^{j\frac{2\pi}{M}k})$，$0\le k\le M-1$，且$M<N$，设$Y(k)$对应的序列为$y(n)$，试用$x(n)$表示$y(n)$。

解：

$$y(n)=IDFT\{Y(k)\}=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}Y(k)e^{j\frac{2\pi}{M}kn}$$

$$=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X(e^{j\frac{2\pi}{M}k})e^{j\frac{2\pi}{M}kn}$$

$$=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{M}kl}e^{j\frac{2\pi}{M}kn}$$

改：$x(n)$->$x(l)$

$$=\sum_{l=0}^{N-1}x(l)\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}e^{-j\frac{2\pi}{M}k(l-n)}$$

因为 $\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}e^{-j\frac{2\pi}{M}k(l-n)}=\begin{cases}1, & ((l))_M=n\\ 0, & ((l))_M\ne n\end{cases}$，所以

$$y(n)=\sum_{j=0}^{i}x(n+jM)\text{，}\quad i=\left\lfloor\frac{N-1-n}{M}\right\rfloor \quad (\text{因为 } 0\le n+jM\le N-1)$$

每计算一个$y(n)$，n为常数，l为变量；
只考虑 $((l))_M=n$ 的情况；
$x(l)$： $0\le l\le N-1$
$x(n+jM)$： $0\le n+jM\le N-1$
$y(n)$： $0\le n\le M-1$
$-n/M\le j\le (N-1-n)/M$

具体实例：设$x(n)=1, 0\le n\le 5$，

求在其频谱的$[0, 2\pi)$上等间隔4点取样所对应的时间序列

参见例4、例5的理论。
$y(n)=x(n)+x(n+4)$，$0\le n\le 3$

两种方法：

(1)按公式逐点计算$y(0)$~$y(3)$

(2)列竖式加法验证

几点有混叠？

首尾有混叠吗？

分析变量j的取值区间

$$y(0)=\sum_{j=0}^{i}x(0+jM)\quad i=\left[\frac{N-1-n}{M}\right]=\left[\frac{5}{4}\right]=1\quad y(0)=2$$

$$y(1)=\sum_{j=0}^{i}x(1+jM)\quad i=\left[\frac{4}{4}\right]=1\quad y(1)=2$$

$$y(2)=\sum_{j=0}^{i}x(2+jM)\quad i=\left[\frac{3}{4}\right]=0\quad y(2)=1$$

$$y(3)=\sum_{j=0}^{i}x(3+jM)\quad i=\left[\frac{2}{4}\right]=0\quad y(3)=1$$

…	-5	-4	-3	-2	-1	n=0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
	$x(n+4)$	1	1	1	1	1	1								
	$x(n)$					1	1	1	1	1	1				
	$x(n-4)$									1	1	1	1	1	1
	$y(n)$	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1		
						$y(n)$的一个周期									

例 6. 无限时宽序列 $x(n)$ 的 Z 变换为 $X(z)$，长度为 N 的有限时宽序列 $x_1(n)$ 的 N 点 DFT 为 $X_1(k)$。如果 $X(z)$ 和 $X_1(k)$ 有如下关系：

$$X_1(k)=X(z)\big|_{z=W_N^{-k}},\quad k=0,1,\cdots,N-1$$

式中 $W_N=e^{-j(2\pi/N)}$，试求 $x(n)$ 和 $x_1(n)$ 之间的关系。

解：由已知有

$$X_1(k)=X(z)\big|_{z=W_N^{-k}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\Big|_{z=W_N^{-k}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)W_N^{kn}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(l)W_N^{kl}$$

而

$$x_1(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_1(k)W_N^{-kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(l)W_N^{kl}W_N^{-kn}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(l)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{k(l-n)},\quad 0\le n\le N-1$$

又有

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{k(l-n)}=\begin{cases}1, & n=((l))_N\\ 0, & n\neq((l))_N\end{cases}$$

怎么写更合理？
为什么？

所以只需要 l 取 $l=n+sN$ 时的值，s 为整数，则 $x(n)$ 和 $x_1(n)$ 之间的关系为

变量s取值区间与上例不同，为什么？

$$x_1(n)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}x(n+sN)$$

变量n取值范围？$n+sN$ 取值范围？什么依据？

例 7. $x(n)=(1/2)^n u(n)$ 的傅立叶变换为 $X(e^{j\omega})$，长度为 N 的有限时宽序列 $y(n)$ 在 $n<0$ 或 $n\geq 10$ 时， $y(n)=0$ 。设 $y(n)$ 的10 点 DFT $Y(k)=X(e^{j2\pi k/10})$，试求 $y(n)$ 。

解：根据上一例题的结论，容易得到

$$y(n)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}x(n+sN)$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}x(n+sN)$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}(1/2)^{n+sN}=(\frac{1}{2})^n\sum_{s=0}^{\infty}(1/2)^{sN}=(\frac{1}{2})^n\frac{1}{1-(1/2)^{10}},\quad 0\leq n\leq 9$$

参照上述两例解法，可以理解这里变量s的取值区间的分析。

总结以上三例的特点和可以得到的结论。

例 8. 已知一因果、稳定的 IIR 离散时间系统为

$$y(n)=\sum_{k=1}^{p}a_k y(n-k)+x(n)$$

利用 N 点 DFT 确定系统频率响应 $H(e^{j\omega})$ 在单位圆的均分点上的 N 个取样，$N>p$。

解：解法一，先求单位冲激响应 $h(n)$，再利用上一例题的结果，例如 $h(n)=(1/2)^n u(n)$，则上例的 $Y(k)$ 为求——通过计算上例中 $y(n)$ 的 N 点 DFT。解法二，利用 N 点 DFT，由差分方程的系数表示出 $H(e^{j\omega})$ 的 N 个取样。分析解法二。

系统函数为

$$H(z)=\frac{1}{1-\sum_{l=1}^{p}a_l z^{-l}}$$

$H(e^{j\omega})$ 的 N 个取样为

$$H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})=\frac{1}{1-\sum_{l=1}^{p}a_l W_N^{kl}}$$

定义一个序列的 N 点 DFT，

$$X(k)=\sum_{l=0}^{N-1}-a_l W_N^{kl}$$

式中对应的时间序列 $a_0=-1$，$a_{p+1}=\cdots=a_{N-1}=0$，$a_1,a_2,\cdots,a_p$ 为差分方程的系数。即

$$X(k)=1-\sum_{l=1}^{p}a_l W_N^{kl}$$

思考本题模型：差分方程；全级点模型；LPC分析模型；声道模型。

所以 $H(e^{j\omega})$ 的 N 个取样为

$$H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})=\frac{1}{X(k)}$$

这种解法，是先求出构造的时间序列的 N 点 DFT，再取其倒数，解法比解法一简单。这种解法可以推广到一般的差分方程表征的因果、稳定系统

$$y(n)=\sum_{k=1}^{p}a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{q}b_k x(n-k)$$

线性预测分析的基本原理

- 线性预测分析的基本思想是：用过去p个样点值来预测现在或未来的样点值：

$$\hat{s}(n)=\sum_{i=1}^{p}a_i s(n-i)$$

- 预测误差ε(n)为：

$$\varepsilon(n)=s(n)-\hat{s}(n)=s(n)-\sum_{i=1}^{p}a_i s(n-i)$$

- 这样就可以通过在某个准则下使预测误差ε(n)达到最小值的方法来决定惟一的一组线性预测系数a_i（i=1，2，…，p）。

1. 通常，信号是随机信号，从随机信号的线性最小均方滤波可以引出一些重要基础概念。

2. 线性预测分析方法可用于语音信号分析、基于模型的谱估计。全极点模型有快速算法。

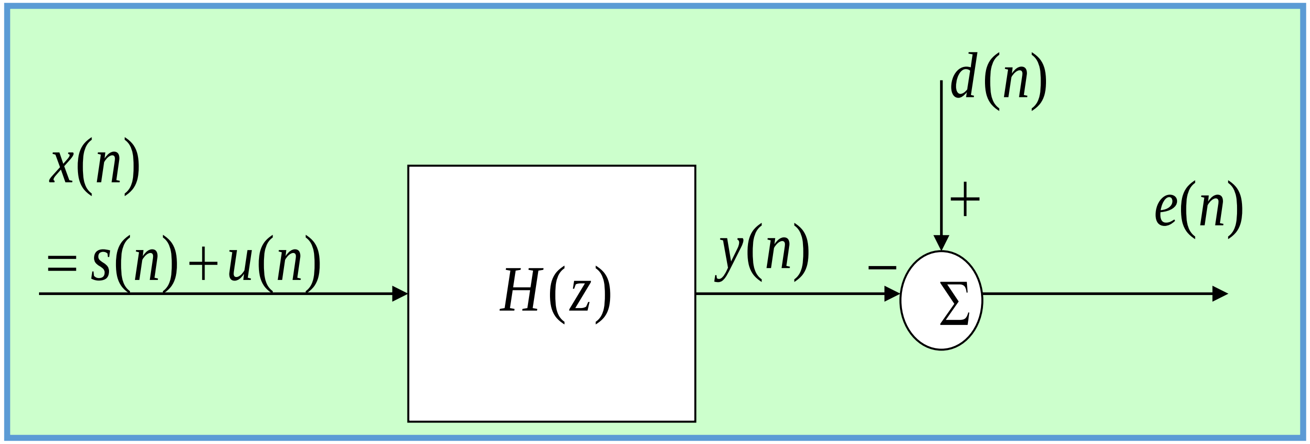
随机信号的线性最小均方滤波

问题的提法： 给定 $$\underbrace{x(n)}_{\text{记录}} = \underbrace{s(n)}_{\text{信号}} + \underbrace{u(n)}_{\text{噪声}}$$

假定三者都是零均值的平稳信号，现希望从$x(n)$中估计出$s(n)$。

问题的解决方案：

寻找一个滤波器$h(n)$，使$x(n)$通过该滤波器后，其输出和希望的信号$d(n)$最“接近”。



若：1. $d(n) = s(n)$ ，此即滤波问题；

2. $d(n) = s(n+\Delta)$，$\Delta > 0$表示一段时间，
此为纯预测（pure prediction）问题；

3. $\boxed{d(n) = x(n+\Delta)}$，$\Delta > 0$表示一段时间，
此为预测（prediction）问题。

$d(n)$起控制作用

如果 $\begin{cases} d(n) = s(n+1) \\ \boxed{d(n) = x(n+1)} \end{cases}$ 称为一步预测问题 *****

误差函数:

$$\varepsilon = E\{e^2(n)\} = E\{[d(n) - y(n)]^2\}$$

$$\varepsilon = E\{d^2(n)\} - 2E\{d(n)y(n)\} + E\{y^2(n)\}$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$\varepsilon = r_d(0) - 2\sum_{k=0}^{\infty} h(k) r_{xd}(k) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} h(k)h(m)\, r_x(k-m)$$

用上了自相关和互相关

准则：估计误差（或预测误差）的均方值最小化

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial h(k)} = -2r_{xd}(k) + 2\sum_{m=0}^{\infty} h(m) r_x(k-m)$$

0

$k = 0,\ 1,\ \cdots,\ \infty$

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_{\text{opt}}(m) r_x(k-m) = r_{xd}(k)$$

$$\varepsilon_{\min} = r_d(0) - \sum_{k=0}^{\infty} h_{\text{opt}}(k) r_{xd}(k)$$

Wiener-Hof方程

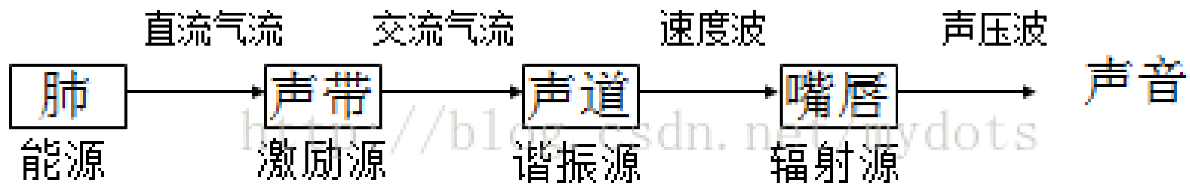
$$h_{\text{opt}}(k), \quad k = 0,1,\cdots,\infty$$

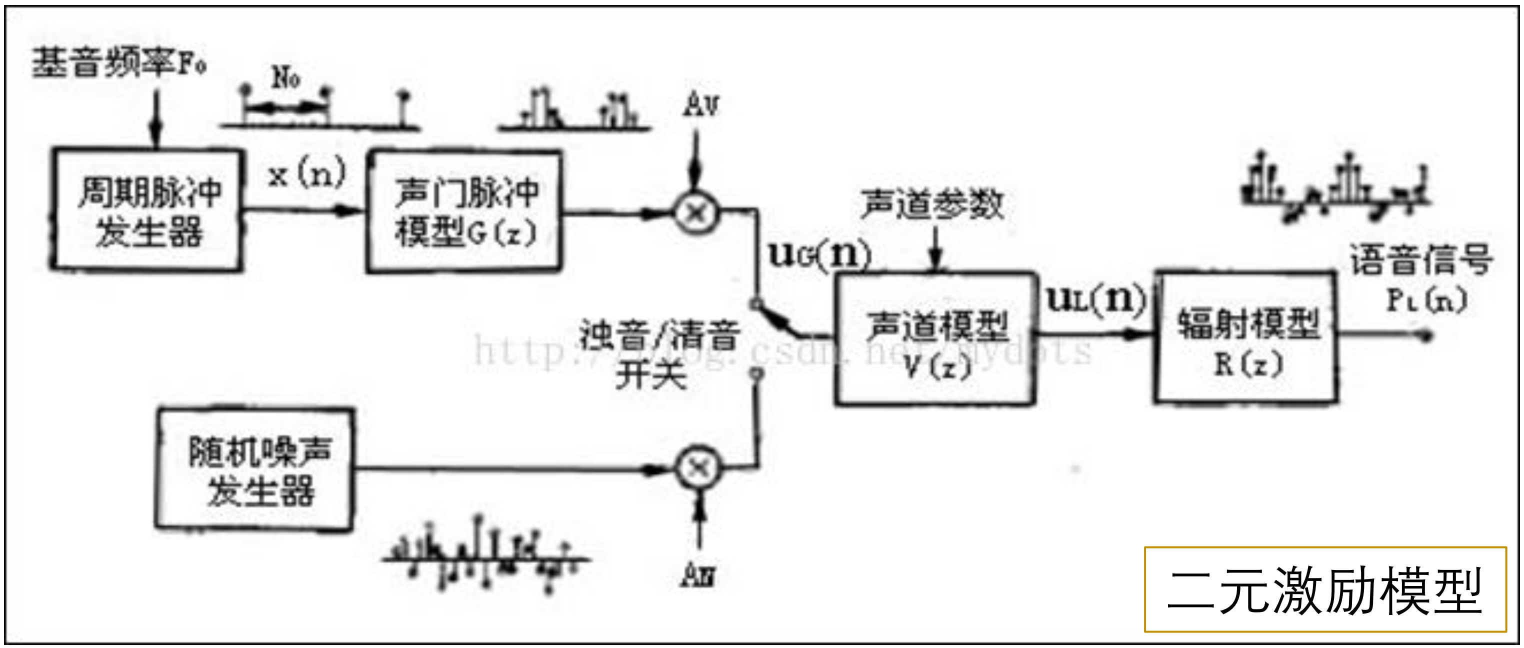
$$\boldsymbol{R}_x \boldsymbol{h}_{\text{opt}} = \boldsymbol{r}_{xd}$$

维纳滤波器

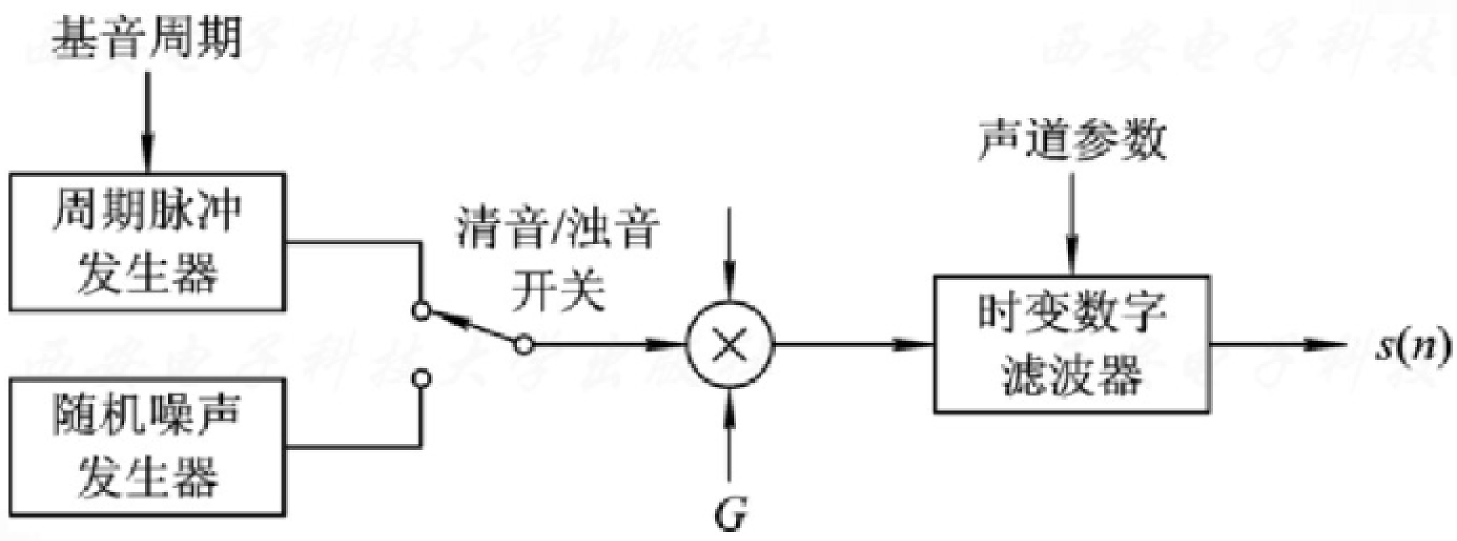
参考第15章，维纳滤波器

语音信号产生过程和数字模型





G(z)简化模型 $\frac{1}{(1-g_1z^{-1})(1-g_2z^{-1})}, g_1和g_2 \rightarrow 1$；V(z)简化为p个极点模型;
R(z)简化为$1-rz^{-1}, r \approx 1$



一般情况下，极点个数取8～12个，零点个数取3～5个，在采样率为8 kHz或10 kHz时，$H(z)$在10～20 ms范围内可以很好地反映语音信号的特征。

根据随机过程理论，一个零点可以用若干极点来近似。因此，适当选取极点个数p，可以用全极点模型即AR(p)过程来表达语音信号，即

$$H(z)=\frac{G}{1-\sum_{i=1}^{p}a_i z^{-i}}$$

简化的语音信号数字模型的传递函数，包括声门激励模型、嘴唇辐射模型和声道调制模型。