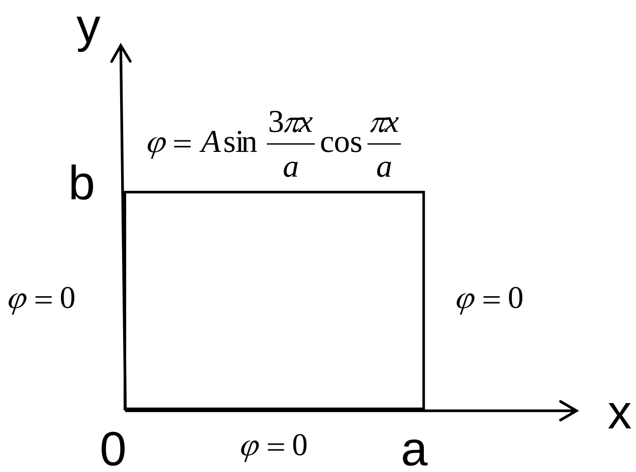
解法类似教材P83，例3-4

分离变量法求解方法

3-19 一矩形域，其边界条件如图所示，求此域内的电位解（其中电位满足拉普拉斯方程）



第一步：根据题目条件，列出电位方程（1）和电位边界条件（2）~（5）

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 & (1)\\ \varphi(x,0)=0 & (2)\\ \varphi(x,b)=A\sin\dfrac{3\pi x}{a}\cos\dfrac{\pi x}{a} & (3)\\ \varphi(0,y)=0 & (4)\\ \varphi(a,y)=0 & (5)\end{cases}$$

第二步：利用分离变量法和电位方程（1）给出电位的形式解

将$\varphi(x,y)=X(x)Y(y)$代入(1),再方程两边同除以$\varphi(x,y)$，得

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=0$$

令$\dfrac{X''(x)}{X(x)}=-k_1^2,\dfrac{Y''(y)}{Y(y)}=-k_2^2$,有$k_1^2=-k_2^2$

查教材P82，表3-1可得/ppt ch3 p60

$$\begin{cases}X(x)、Y(y)\text{取常数或线性函数}, & k_1^2=k_2^2=0\\ X(x)\text{取三角函数},Y(y)\text{取双曲函数}, & k_1^2>0,k_2^2<0\\ X(x)\text{取双曲函数},Y(y)\text{取三角函数}, & k_1^2<0,k_2^2>0\end{cases}$$

由边界条件(4)、(5)知电位沿x方向要求有重复零点，

$X(x)$取三角函数，$Y(y)$取双曲函数,得出电位形式解

$$\varphi(x,y)=(C_1\sin k_1x+C_2\cos k_1x)(D_1shk_1y+D_2chk_1y)$$

$f''+k_x^2f=0 \Longrightarrow f(x)=Ae^{-jk_xx}+Be^{jk_xx}$

x-方向齐次 $k_x^2>0$, k_x为实数	x-方向非齐次 $k_x^2\le 0$, k_x为虚数
$\begin{cases}\sin k_xx\\ \cos k_xx\end{cases}$	$k_x^2=0$ $\begin{cases}x\\ 1\end{cases}$ $k_x^2\neq 0$ $\begin{cases}\mathrm{sh}\lvert k_x\rvert x\\ \mathrm{ch}\lvert k_x\rvert x\end{cases}$ 取$e^{\pm\lvert k_x\rvert x}$及其组合（sinh, cosh）

---齐次方向：选择振荡型函数

--非齐次方向：选择衰减型函数

第三步：利用边界条件确定电位的形式解中的未知系数

由边界条件(4)知$C_2=0$,$\varphi(x,y)$简化为

$$\varphi(x,y)=(C_1\sin k_1x)(D_1shk_1y+D_2chk_1y)$$

由边界条件(5)知$k_1=\dfrac{n\pi}{a}(n=1,2,3,\ldots)$

由边界条件(2)知$\varphi(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\dfrac{n\pi}{a}x\right)(D_{1n}sh0+D_{2n}ch0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\dfrac{n\pi}{a}x\right)(D_{2n})=0$

$$D_{2n}=0,\varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\frac{n\pi}{a}x\right)\left(D_{1n}sh\frac{n\pi}{a}y\right)$$

由边界条件(3)知$\varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\frac{n\pi}{a}x\right)\left(D_{1n}sh\frac{n\pi}{a}b\right)=A\sin\frac{3\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\overset{积化和差公式}{=}A\frac{\sin\frac{4\pi x}{a}+\sin\frac{2\pi x}{a}}{2}$ → $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$

令$C_nD_n=A_n$,方程两边对应系数相等,得

$$A_2=\frac{A}{2sh\frac{2\pi b}{a}},A_4=\frac{A}{2sh\frac{4\pi b}{a}},A_n=0(n\neq2,4),\varphi(x,y)=\frac{A}{2sh\frac{2\pi b}{a}}\sin\frac{2\pi x}{a}sh\frac{2\pi y}{a}+\frac{A}{2sh\frac{4\pi b}{a}}\sin\frac{4\pi x}{a}sh\frac{4\pi y}{a}$$

第一章作业

1 求$\nabla'\dfrac{e^{-jkR}}{R}$

$\boxed{\nabla\left[f(u)\right]=f'(u)\nabla u}$ （ppt ch1 p73）

$$\nabla'\frac{e^{-jkR}}{R}=-\nabla\frac{e^{-jkR}}{R}=-\left[\nabla e^{-jkR}\cdot\frac{1}{R}+e^{-jkR}\cdot\nabla\frac{1}{R}\right]$$

$$=-\left[-jke^{-jkR}\nabla R\cdot\frac{1}{R}+e^{-jkR}\cdot\nabla\frac{1}{R}\right]$$

$$=-\left[-jke^{-jkR}\hat{R}\cdot\frac{1}{R}+e^{-jkR}\cdot\left(-\frac{\hat{R}}{R^2}\right)\right]$$

$$=\frac{(jkR+1)e^{-jkR}\hat{R}}{R^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla'R=\frac{\partial R}{\partial x'}\hat{x}+\frac{\partial R}{\partial y'}\hat{y}+\frac{\partial R}{\partial z'}\hat{z}=\frac{-2(x-x')}{2R}\hat{x}+\frac{-2(y-y')}{2R}\hat{y}+\frac{-2(z-z')}{2R}\hat{z}=\frac{-\vec{R}}{R}\\&\nabla R=-\nabla'R=\frac{\vec{R}}{R},\nabla\frac{1}{R}=-\frac{\nabla R}{R^2}=-\frac{\vec{R}}{R^3}\end{aligned}}$$

（ppt ch1 p72）

2 证明$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla\nabla\bullet\vec{A}-\nabla^2\vec{A}$

$$\boxed{\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}x & y & z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}}$$

$$\text{左边}=\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial x}\right)\hat{x}$$

$$-\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z}\right)\hat{z}$$

$$\boxed{\nabla\bullet\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

$$\nabla\left(\nabla\bullet\vec{A}\right)=\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial x}\right)\hat{x}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z}\right)\hat{z}$$

（教材P8，例1-2）

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla^2\vec{A}=\nabla\bullet\nabla\vec{A}=\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial z^2}\\&=\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\hat{z}\end{aligned}}$$

$$\text{右边}=\nabla\nabla\bullet\vec{A}-\nabla^2\vec{A}=\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial x}\right)\hat{x}$$

$$-\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z}\right)\hat{z}=\text{左边}$$

即证明成立

3 若有$\phi(\bar{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \dfrac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}dV'$，求$\bar{E}=-\nabla\phi=?$

$$\vec{E}=-\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\bar{r}')}{R}dV'\right)$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\bar{r}')\nabla\frac{1}{R}dV'$$

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\bar{r}')}{R^2}\hat{R}dV'$$

$\bar{E}=-\nabla\varphi$

$$\varphi(\bar{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}dV'$$

$\nabla\dfrac{1}{R}=-\dfrac{\hat{R}}{R^2}$

库仑定律

源~场关系：库伦实验表明，静电场随距离的变化不慢于1/R。

契合Helmholtz定理推导条件！

Coulomb

Helmholtz

$$\vec{E}=-\nabla\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R^3}\vec{R}dv'$$

4 证明$\nabla\times\nabla\times(\varphi\vec{A})=\nabla\varphi\times(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\nabla^2\varphi+(\vec{A}\bullet\nabla)\nabla\varphi+\varphi\nabla\times(\nabla\times\vec{A})+(\nabla\varphi)\nabla\bullet\vec{A}-(\nabla\varphi\bullet\nabla)\vec{A}$

$$\nabla\times\nabla\times(\varphi\vec{A})=\nabla\times\left(\varphi(\nabla\times\vec{A})+\nabla\varphi\times\vec{A}\right)=\nabla\times\left(\varphi(\nabla\times\vec{A})\right)+\nabla\times\nabla\varphi\times\vec{A}\text{(使用公式（1-49））}\quad(1)$$

$$\nabla\times\left(\varphi(\nabla\times\vec{A})\right)=\varphi(\nabla\times\nabla\times\vec{A})+\nabla\varphi\times(\nabla\times\vec{A})\text{(使用公式（1-49））}\quad(2)$$

$$\nabla\times\nabla\varphi\times\vec{A}=(\vec{A}\bullet\nabla)\nabla\varphi-\vec{A}(\nabla\bullet\nabla\varphi)-(\nabla\varphi\bullet\nabla)\vec{A}+\nabla\varphi(\nabla\bullet\vec{A})\text{(使用公式（1-50））}$$

$$=(\vec{A}\bullet\nabla)\nabla\varphi-\vec{A}\nabla^2\varphi-(\nabla\varphi\bullet\nabla)\vec{A}+\nabla\varphi(\nabla\bullet\vec{A})\quad(3)$$

将(2)、(3)代入(1)，证明成立

$\nabla r=\cdots=\hat{r}$

1.3 证明$\nabla r^n=nr^{n-2}\vec{r}$

$\nabla f(r)=\cdots=f'(r)\nabla r=\cdots=f'(r)\hat{r}$

$$\nabla\mathrm{f}(r)=f(\acute{r})\nabla r\qquad \nabla r^n=nr^{n-1}\nabla r=nr^{n-2}\vec{r}$$

1.15 证明$\nabla\times(f\nabla f)=0$

$$\nabla\times(f\nabla f)=f\nabla\times\nabla f+\nabla f\times\nabla f\text{(使用公式(1-49))}$$

$\nabla\times\nabla f=0$(梯度场总是无旋的，ppt ch1 p66)

$\nabla f\times\nabla f=0$，证毕

1.5 证明$\nabla\cdot\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3}\right)=0$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=\nabla\frac{1}{r^3}\cdot\vec{r}+\frac{1}{r^3}\nabla\cdot\vec{r}=-\frac{3\vec{r}}{r^5}\cdot\vec{r}+\frac{3}{r^3}=0$$

$$\nabla\cdot f\vec{A}=f\nabla\cdot\vec{A}+\nabla f\cdot\vec{A}$$

6 证明(1)$\nabla\times\left(f(r)\vec{r}\right)=0$

(2) $f(\vec{r}-\vec{r}')$的泰勒展开式可表示为

$$f(\vec{r}-\vec{r}')=f(\vec{r})-(\vec{r}'\bullet\nabla)f(\vec{r})+\frac{1}{2}(\vec{r}'\bullet\nabla)^2 f(\vec{r})+\cdots$$

(1)$\nabla\times\left(f(r)\vec{r}\right)=f(r)(\nabla\times\vec{r})+\nabla f(r)\times\vec{r}$(使用公式(1-49))

$\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$

$$\nabla\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=0$$

$$\nabla f(r)\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=0$$

(2)根据三元函数的泰勒展开式

$$f(x_0+h,y_0+k,z_0+l)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z)+R_0$$

令h=$-x',k=-y',l=-z'$

$$f(\vec{r}-\vec{r}')=f(x-x',y-y',z-z')=f(x,y,z)+\left(-x'\frac{\partial}{\partial x}-y'\frac{\partial}{\partial y}-z'\frac{\partial}{\partial z}\right)f(x,y,z)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(-x'\frac{\partial}{\partial x}-y'\frac{\partial}{\partial y}-z'\frac{\partial}{\partial z}\right)^2+\cdots$$

由于$\vec{r}'\bullet\nabla=(x'\hat{x}+y'\hat{y}+z'\hat{z})\bullet\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)=x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+z'\frac{\partial}{\partial z}$

代入上式，可得$f(\vec{r}-\vec{r}')=f(\vec{r})-(\vec{r}'\bullet\nabla)f(\vec{r})+\frac{1}{2!}(\vec{r}'\bullet\nabla)^2 f(\vec{r})+\cdots$

即证明成立

2.11证明：如果一个点电荷在一个半径为a的球面内（球外无电荷），则q在球面上产生的电位平均值：$\bar{\varphi}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$。对球内任意一点，其电位可表示为球内电荷和边界对其贡献的总和

设点电荷距离球心为d，选无穷远为零电势点，则球心的电势为：

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{1}{4\pi}\oint_s\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\right)ds'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{1}{4\pi}\oint_s\left(\frac{1}{R}\nabla\varphi\cdot\hat{n}+\varphi\frac{\hat{R}\cdot\hat{n}}{R^2}\right)ds'$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{1}{4\pi}\oint_s\left(\frac{\nabla\varphi\cdot\hat{n}}{R}+\frac{\varphi}{R^2}\right)ds'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{1}{4\pi a}\int_s-\vec{E}\cdot\hat{n}ds'+\frac{1}{4\pi a^2}\oint_s\varphi\, ds'$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}-\frac{1}{4\pi a}\oint_s\vec{E}\,ds'+\frac{1}{4\pi a^2}\oint_s\varphi\, ds'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\bar{\varphi}$$

则有：$\bar{\varphi}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

得泊松方程的形式解：

$$\boxed{\varphi(\vec{r})=\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec{r}')}{R}dV'}_{V\text{区域内的源产生的位}}+\underbrace{\frac{1}{4\pi}\oint_S\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right\}dS'}_{\text{边值（包括区域外电荷的贡献）}}}$$

唯一性定理 ⟺ V区域内的源产生的位　边值（包括区域外电荷的贡献）｛第1、2、3类边值条件

2.21 已知某种形式分布的电荷在球坐标系中所产生的电位为$\varphi(\vec{r})=\dfrac{qe^{-br}}{r}$，其中q，b均为常数，求此电荷分布。有源区域内电荷和电位分布满足泊松方程$\nabla^2\varphi(\vec{r})=-\dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$

球坐标系下Laplace表示式为　$(r\neq 0)$

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}(\text{公式}(1\text{-}152))$$

又$\nabla^2\varphi(r)=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$，则电荷分布$\rho=-\varepsilon_0\nabla^2\varphi(r)$

有$\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}=\dfrac{r\times qe^{-br}\times(-b)-qe^{-br}}{r^2}=\dfrac{-(br+1)qe^{-br}}{r^2}$，$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=\dfrac{(b^2r^3+2br^2+2r)qe^{-br}}{r^4}$

综合上式，整理得$\rho=\dfrac{-b^2q\varepsilon_0}{r}e^{-br}$

$r=0$时，取$r\to 0$的高斯球面，利用高斯定理：$\rho=\varepsilon_0\oint_s-\nabla\dfrac{qe^{-br}}{r}\bullet d\vec{S}=-q\varepsilon_0\oint_s\left(-be^{-br}\nabla r\dfrac{1}{r}+e^{-br}\nabla\dfrac{1}{r}\right)\bullet d\vec{S}=-q\varepsilon_0\oint_s\left(-be^{-br}\dfrac{\hat{r}}{r}+e^{-br}\nabla\dfrac{1}{r}\right)\bullet d\vec{S}$

$$=-q\varepsilon_0e^{-br}\iiint_V\nabla\bullet\nabla\frac{1}{r}dV=-q\varepsilon_0e^{-br}\iiint_V\nabla^2\frac{1}{r}dV=-q\varepsilon_0e^{-br}\iiint_V-4\pi\delta(r)dV=4\pi\delta(r)q\varepsilon_0e^{-br}$$

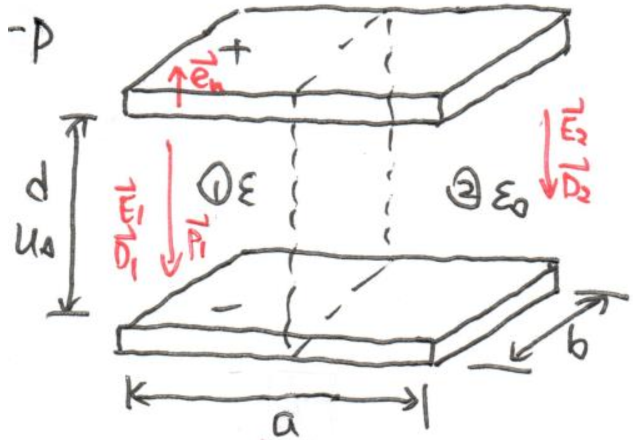
综上所述$\rho=4\pi\delta(r)q\varepsilon_0e^{-br}-\dfrac{b^2q\varepsilon_0}{r}e^{-br}$

$$(2)\rho=-\varepsilon_0\nabla^2\varphi=-q\varepsilon_0\nabla^2\frac{e^{-br}}{r}$$

$$=-q\varepsilon_0\left(e^{-br}\nabla^2\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\nabla^2e^{-br}+2\nabla\frac{1}{r}\cdot\nabla e^{-br}\right)$$

$$=-q\varepsilon_0\left[-4\pi\delta(r)e^{-br}+\frac{b^2e^{-br}}{r}\right]$$

2.27一平板电容器的长宽为a、b,极板间距离d,其中一半（0~a/2）用介电常数为ε的介质充填，另一半为空气，极板间加电压U_0。求极板上自由电荷密度与介质表面上极化电荷密度。（2）



$$E_{\mathrm{I}}=E_{\mathrm{II}}=\frac{U_0}{d}\qquad D_{\mathrm{I}}=\varepsilon E_{\mathrm{I}}=\varepsilon\frac{U_0}{d}，\ D_{\mathrm{II}}=\varepsilon_0 E_{\mathrm{II}}=\varepsilon_0\frac{U_0}{d}$$

极化面电荷$\rho_{sb}=\vec{P}\cdot\hat{n}$，$\vec{P}=\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E}$

I区自由面电荷密度$\rho_{\mathrm{fI}+}=D_{\mathrm{I}}=\varepsilon\dfrac{U_0}{d}$，则极化面电荷$\rho_{sb\mathrm{I}+}=\rho_{+}-\rho_{\mathrm{fI}+}=(\varepsilon_0-\varepsilon)\dfrac{U_0}{d}$（$\hat{n}$和$\vec{E}$反向）

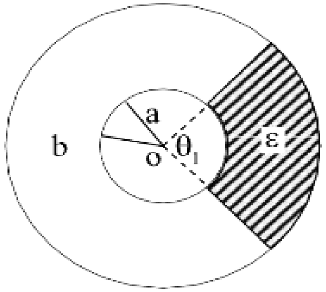
II区自由面电荷密度$\rho_{\mathrm{fII}+}=D_{\mathrm{II}}=\varepsilon_0\dfrac{U_0}{d}$,由于无介质，则极化面电荷为0,

对下极板，所有结果取相反，结果略

2.28两个同轴圆筒之间，$0<\theta<\theta_1$部分填充了介电常数为ε的介质，其余部分为空气，求它单位长度的电容量。（2）

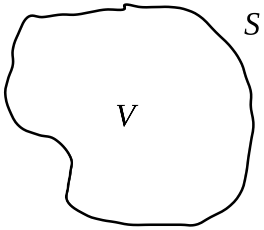
取一个单位长度的圆柱，其半径为r（$a<r<b$），设内筒的电量为Q，由高斯定理：

$$\vec{E}=\frac{Q}{\varepsilon_0(2\pi-\theta_1)+\varepsilon\theta_1}\frac{1}{r}\hat{r}\qquad \mathrm{U}=\int_a^b\vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{Q}{\varepsilon_0(2\pi-\theta_1)+\varepsilon\theta_1}ln\frac{b}{a}$$



$$\mathrm{C}=\frac{Q}{U}=\frac{\varepsilon_0(2\pi-\theta_1)+\varepsilon\theta_1}{ln\dfrac{b}{a}}$$

2.33 试证在没有电荷存在的区域V内，如V的边界S上，电位$\varphi_s=$常数 ，则区域V内也是等位的。（1）



根据有界区域内电势泊松方程的形式解$(ppt\quad ch2\quad p8)$，有

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec{r}')}{R}dV'+\frac{1}{4\pi}\oint_s\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right\}dS'$$

$$=\frac{1}{4\pi}\oint_s\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right\}dS'(V\text{内无电荷})=\frac{1}{4\pi}\oint_s\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS'-\frac{\varphi_s}{4\pi}\oint_s\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)dS'(\text{边界}\varphi=\varphi_s)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\oint_s\frac{1}{R}\nabla\varphi\bullet\hat{n}dS'-\frac{\varphi_s}{4\pi}\oint_s\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\bullet\hat{n}dS'(ppt\quad ch1\quad p51)=-\frac{1}{4\pi}\oint_s\frac{1}{R}\vec{E}\bullet d\vec{S}'+\frac{\varphi_s}{4\pi}\oint_s\frac{\hat{R}}{R^2}\bullet\hat{n}dS'(\text{公式}(2\text{-}15))$$

$$=0+\frac{\varphi_s}{4\pi}4\pi=\varphi_s$$

得泊松方程的形式解：

$$\boxed{\varphi(\vec{r})=\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec{r}')}{R}dV'}_{}+\underbrace{\frac{1}{4\pi}\oint_s\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right\}dS'}_{}}$$

唯一性定理 ⟺ **V 区域内的源产生的位　边值（包括区域外电荷的贡献）** **第1、2、3类边值条件**

2.34试证偶极矩为**p**的电偶极子所产生的电位$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\bullet\vec{r}}{r^3}$，在$r\neq0$的区域内满足Laplace方程。（1）

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql\cos\theta}{r^2}(\text{公式}(2\text{-}79))$$ 参照书49~50页

球坐标系下Laplace表示式为

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}(\text{公式}(1\text{-}152))$$

$$=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$$

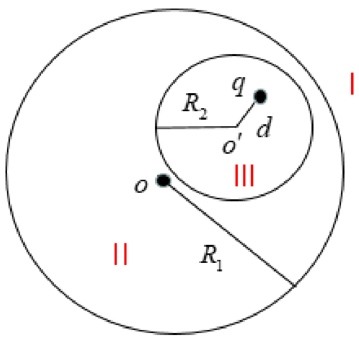
有$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{-2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql\cos\theta}{r^3},\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=\frac{6}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql\cos\theta}{r^4}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-ql\sin\theta}{r^2},\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-ql\cos\theta}{r^2}$$

综合上式，整理得$\nabla^2\varphi=0$，证明成立

第三章作业

3-1 如图，一导体球半径为R1，其中有一球形空腔，球心为o',半径为R2，腔内有一点电荷置于距o'为d处，设导体球所带净电荷为零，求空间各个区域内的电位表示式。



设球外为Ⅰ区，球壳为Ⅱ区，空腔为Ⅲ区

1、选择略大于R2面Gauss积分

$$\int E ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

导体内部E=0则Q=0，内壁感应电荷q'=-q

球壳为电中性，外壁感应电荷q

2、选择大于R1面Gauss积分

$$\int E ds = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{\mathrm{I}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \varphi_{\mathrm{I}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

3、$\varphi_{\mathrm{II}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$（导体球等势体）

4、对Ⅲ区球形腔，其电位可以看成是表面电位为0且内部含有点电荷q的球形腔和表面电位为φ_{II}且腔内不含电荷的球形腔

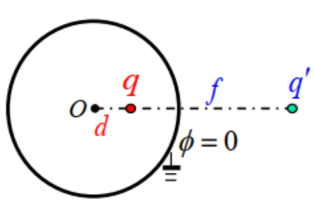
内表面电位 $\varphi_{\mathrm{II}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$ 若内表面电位为0，q有一镜像电荷 $q' = \frac{-R_2 q}{d}$

距离o'为 $\frac{R_2^2}{d}$

电荷+镜像电荷+球面电势

$$\varphi_{\mathrm{III}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{\frac{-R}{d} q}{4\pi\varepsilon_0 R'}$$

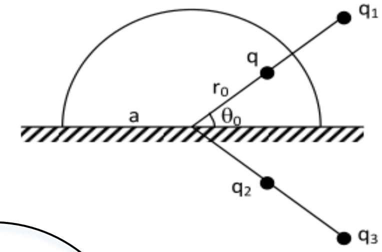
参考ppt ch3 p22例



$$\boxed{q = -\frac{a}{f} q'} \Rightarrow q' = -\frac{f}{a} q = -\frac{a}{d} q$$

$$\boxed{d = \frac{a^2}{f}} \Rightarrow f = \frac{a^2}{d}$$

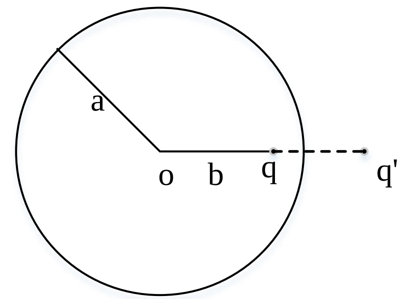
3-2 球面镜像+平面镜像



$$q_1=\frac{-a}{r_0}q,q_2=-q,q_3=\frac{a}{r_0}q,\text{到球心距离为}\frac{a}{r^2},r_0,\frac{a^2}{r_0}$$

$$\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}-\frac{aq}{4\pi\varepsilon_0 r_0 R_1}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{aq}{4\pi\varepsilon_0 r_0 R_3},R、R_1、R_2、R_3\text{是}q、q1、q2、q3\text{到场点的距离}$$

3-5



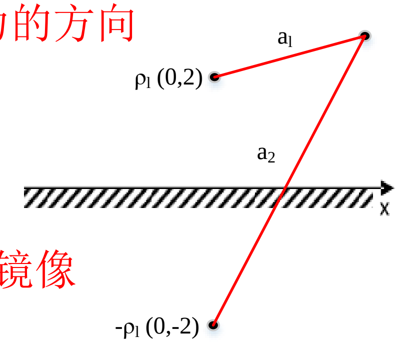
镜像电荷如图所示，$q'=-\frac{a}{b}q$,其到圆心距离为$b'=\frac{a^2}{b}$,q受到的静电力来自q'

$$F=\frac{abq^2}{4\pi\varepsilon_0\left(a^2-b^2\right)^2}$$，方向由电荷指向镜像电荷

该电荷所受的力仅与球壳内电荷有关，当导体球壳接地时，球面镜像，注意力的方向

球壳内电荷保持不变，即该电荷受力大小与接地与否无关

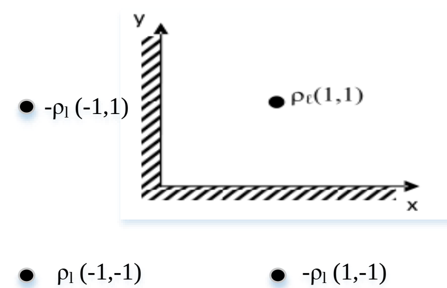
3-8 采用保角变换法（教材p80 例3-3/ppt ch3 p16）



将区域映射为上半平面，再利用镜像法求解

保角变换+平面镜像

注意：无限长线电荷的场和电势公式（ppt ch3 p24）



$$W=z^2,\begin{cases}u=x^2-y^2\\ v=2xy\end{cases},x_0=1,y_0=1,\text{则}u_0=0,v_0=2,u_0'=0,v_0'=-2$$

$$E_r=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r},\phi(r)=\int_r^{r_0}E_r dr=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r},\text{其中}r_0\text{为电势为0的点的位置}$$

$$\phi=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{R}+\frac{\rho_l'}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{R'}=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{r_0}{\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}}-\ln\frac{r_0}{\sqrt{(u-u_0')^2+(v-v_0')^2}}\right)$$

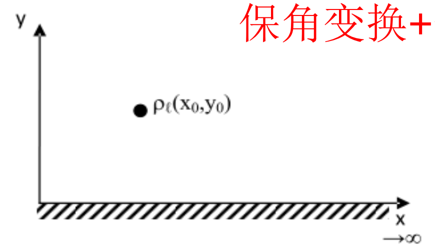
$$=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{u^2+(v+2)^2}}{\sqrt{u^2+(v-2)^2}}$$

$$\text{镜像法结果:}\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}}$$

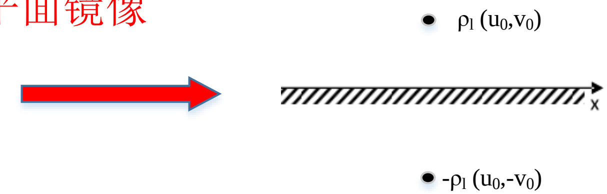
两者相等

3-9：$W=\sqrt{z}, \phi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(u-u_0)^2+(v+v_0)^2}}{\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}}$

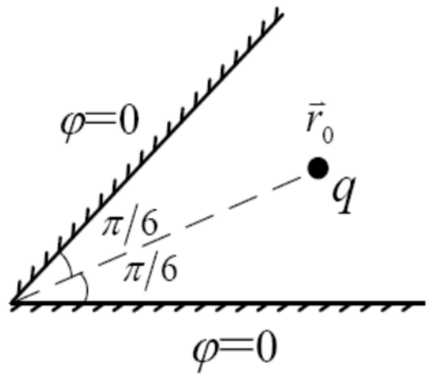
$$\begin{cases} x_0 = u_0^2 - v_0^2 \\ y_0 = 2u_0 v_0 \end{cases}$$

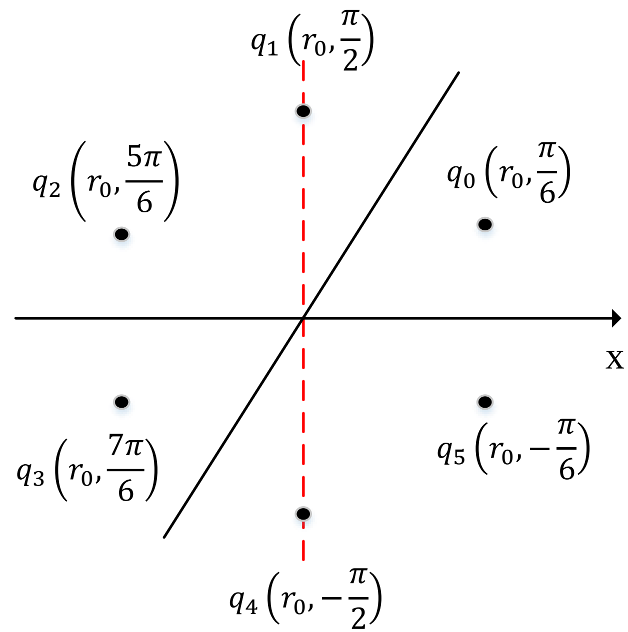


保角变换+平面镜像



(2)





一、镜像法

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=0}^{5}\frac{q_i}{R_i}$$

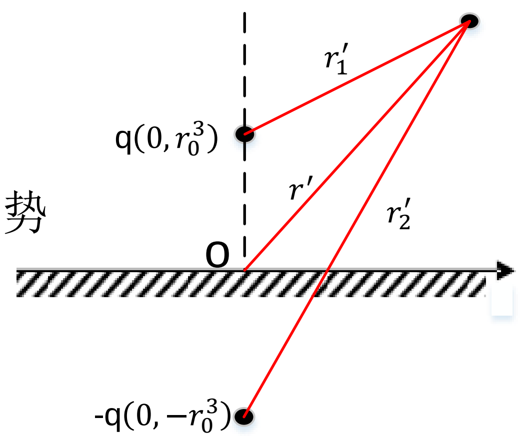
其中，R_i为q_i到观察点的距离

二、保角变换法

取$W = Z^3 = r_0^3 e^{i3\theta_0}$ $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ $r' = r^3$ $\theta' = 3\theta$

$$\begin{cases} r_1' = \left|r' e^{i\theta'} - r_0^3 e^{i\frac{\pi}{2}}\right| \\ r_2' = \left|r' e^{i\theta'} - r_0^3 e^{-i\frac{\pi}{2}}\right| \\ \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'}\right) \end{cases}$$

代入r'、θ'反变换回z平面即可得到电势



保角变换+平面镜像

镜像法实质：反过来寻找符合边界上场/位分布的等效电荷分布，以代替边界的作用（包括其上的感应、极化电荷）！

镜像法的关键：

- 着眼点：边界及边界条件
- 注意等效、求解区域！！

◆镜像法小结

- 镜像法是等效问题的反问题，其理论基础是静电场唯一性定理；
- 镜像法的实质是用虚设的镜像电荷替代未知（或已知）区域外以及边界上的电荷分布，使计算场域为无限大均匀介质；
- 镜像法的关键是：确定镜像电荷的个数、大小及位置；
- 应用镜像法解题时，注意：镜像电荷只能放在待求场域以外的区域。
- 叠加时，要注意场的适用区域。

方法虽好，但过分局限于特殊形状边界！

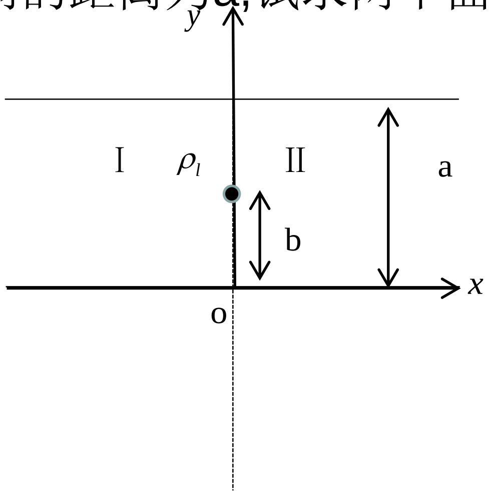
保角变换法:

1. 选择合适的解析函数将Z平面上较为复杂的边界变换为W平面上较易求解的边界;
2. 在W平面上求解后，再反变换到原平面上。

几点说明:

- 如果一函数$f(x, y)$在Z平面上是拉普拉斯方程的解，通过保角变换后变成u、v的函数，此函数在W平面上仍满足拉氏方程。
- 保角变换前后，电荷密度分布发生变化，但总荷电量不变。Z平面和W平面上对应点的电场强度要改变，它们之间的关系是: $E^{(z)}=|f'(z)|\, E^{(w)}$
- 保角变换前后两导体之间的电容量不变。若只求电容，不必反变换!
- 如果一次变换不足以简化问题，可以采取多次变换。

3-11 在接地的两个无限大平行导体平面之间，有一线电荷 ρ_l，它到一板的距离为b,两平面间的距离为a,试求两平面间的电位分布、电场强度和两极板上的感应电荷面密度。



第一步：根据题目条件，列出电位方程（1）和电位边界条件（2）~（4）

$$
\begin{cases}
\nabla^2\phi=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-\dfrac{\rho_l\delta(x)\delta(y-\mathrm{b})}{\varepsilon_0} & (1)\\
\phi(x,0)=0 & (2)\\
\phi(x,a)=0 & (3)\\
\phi(\infty,y)=0 & (4)
\end{cases}
$$

为使用分离变量法求解，设法将上式中自由项转移到边界上，使非齐次方程变为齐次方程，可人为将场域划分为两个部分Ⅰ、Ⅱ，使源点恰好位于分区的公共边界上

解法类似教材P105，例3-12

Ⅰ区电位方程和边界条件

$$
\begin{cases}
\nabla^2\phi=\dfrac{\partial^2\phi_{\mathrm{I}}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi_{\mathrm{I}}}{\partial y^2}=0 & (1)\\
\phi_{\mathrm{I}}(x,0)=0,\phi_{\mathrm{I}}(x,a)=0 & (2)\\
\phi_{\mathrm{I}}(0,y)-\phi_{\mathrm{II}}(0,y)=0 & (3)\\
\dfrac{\partial\phi_{\mathrm{I}}}{\partial x}|_{x=0}-\dfrac{\partial\phi_{\mathrm{II}}}{\partial x}|_{x=0}=-\dfrac{\rho_l\delta(y-\mathrm{b})}{\varepsilon_0} & (4)\\
\phi_{\mathrm{I}}(\infty,y)=0 & (5)
\end{cases}
$$

Ⅱ区电位方程和边界条件

$$
\begin{cases}
\nabla^2\phi=\dfrac{\partial^2\phi_{\mathrm{II}}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi_{\mathrm{II}}}{\partial y^2}=0 & (1)\\
\phi_{\mathrm{II}}(x,a)=0,\phi_{\mathrm{II}}(x,0)=0 & (2)\\
\phi_{\mathrm{I}}(0,y)-\phi_{\mathrm{II}}(0,y)=0 & (3)\\
\dfrac{\partial\phi_{\mathrm{I}}}{\partial x}|_{x=0}-\dfrac{\partial\phi_{\mathrm{II}}}{\partial x}|_{x=0}=-\dfrac{\rho_l\delta(y-\mathrm{b})}{\varepsilon_0} & (4)\\
\phi_{\mathrm{II}}(-\infty,y)=0 & (5)
\end{cases}
$$

***x*-方向齐次** $k_x^2>0$, k_x为实数	***x*-方向非齐次** $k_x^2\le 0$, k_x为虚数
$\begin{cases}\sin k_x x\\ \cos k_x x\end{cases}$	$k_x^2=0$ $\begin{cases}x\\ 1\end{cases}$ $k_x^2\ne 0$ $\begin{cases}\mathrm{sh}\lvert k_x\rvert x\\ \mathrm{ch}\lvert k_x\rvert x\end{cases}$ 取$e^{\pm\lvert k_x\rvert x}$ 及其组合（sinh, cosh）

---齐次方向：
选择振荡型函数

--非齐次方向：
选择衰减型函数

第二步：利用分离变量法和电位方程（1）给出电位的形式解

由分离变量法知识，写出Ⅰ、Ⅱ区域内形式解

$$\varphi_{\mathrm{I}}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)e^{-\frac{n\pi}{a}x}$$

$$\varphi_{\mathrm{II}}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)e^{\frac{n\pi}{a}x}$$

y方向有重复零点，x方向无穷远处为0

第三步：利用边界条件确定电位的形式解中的未知系数

由边界条件(3)知$A_n=B_n$,由边界条件(4)知$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2A_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\left(\frac{n\pi}{a}\right)=\frac{\rho_l\delta(y-\mathrm{b})}{\varepsilon_0}$

利用三角函数的正交性，方程两边同乘$\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$,并在0 ~ a 上对y积分，得

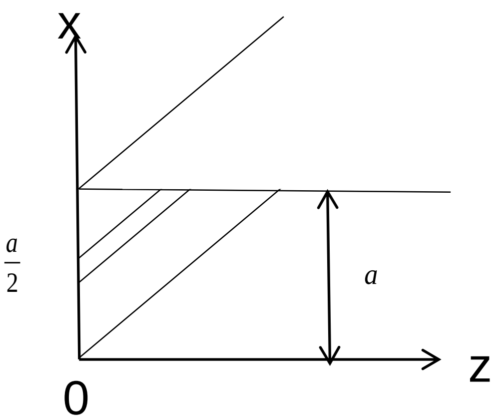
$$A_n=\frac{\rho_l}{n\pi\varepsilon_0}\sin\frac{n\pi b}{a}$$

$$\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_l}{n\pi\varepsilon_0}\sin\frac{n\pi b}{a}\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)e^{-\frac{n\pi}{a}|x|}$$

电场强度 $\vec{E}=-\nabla\varphi=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y}$

感应电荷面密度 $\rho_s=D_n\mid_{y=0/a}=\varepsilon_0E_y\mid_{y=0/a}$

3-13 一导体制成的矩形槽，在端面的中心(x=a/2)有一小缝，如图所示，上板电位为U_0，下板电位为0，求0<x<a,z>0区间内的电位解

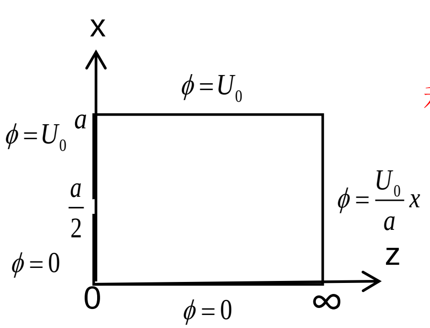


解法类似教材P84，例3-5

第一步：根据题目条件，列出电位方程（1）和电位边界条件（2）~（6）

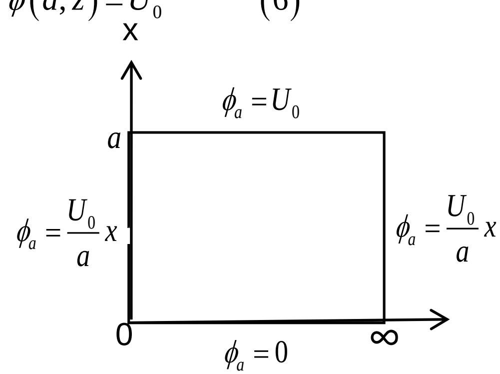
（其中，电位与y无关，x→∞时，x=0处的边界情况不影响x→∞处场分量，故此处边界条件为（4））

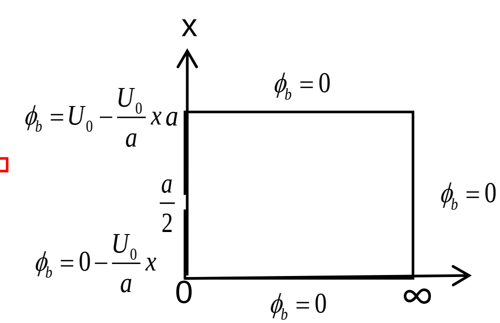
$$\begin{cases}\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 & (1)\\ \phi(x,0)=0,0<x<\frac{a}{2} & (2)\\ \phi(x,0)=U_0,\frac{a}{2}<x<a & (3)\\ \phi(x,\infty)=\frac{U_0}{a}x & (4)\\ \phi(0,z)=0 & (5)\\ \phi(a,z)=U_0 & (6)\end{cases}$$



利用叠加原理将问题分解

所求解$\varphi=\varphi_a+\varphi_b$





$$
\begin{cases}
\nabla^2\phi_a=\dfrac{\partial^2\phi_a}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi_a}{\partial z^2}=0 & (1)\\
\phi_a(x,0)=\dfrac{U_0}{a}x & (2)\\
\phi_a(x,\infty)=\dfrac{U_0}{a}x & (3)\\
\phi(0,z)=0 & (4)\\
\phi(a,z)=U_0 & (5)
\end{cases}
$$

$$\downarrow$$

$$\phi_a=\frac{U_0}{a}x$$

$$
\begin{cases}
\nabla^2\phi_b=\dfrac{\partial^2\phi_b}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi_b}{\partial z^2}=0 & (1)\\
\phi_b(x,0)=0-\dfrac{U_0}{a}x,0<x<\dfrac{a}{2} & (2)\\
\phi_b(x,0)=U_0-\dfrac{U_0}{a}x,\dfrac{a}{2}<x<a & (3)\\
\phi_b(x,\infty)=0 & (4)\\
\phi(0,z)=0 & (5)\\
\phi(a,z)=0 & (6)
\end{cases}
$$

$$\downarrow$$

x-方向齐次 $k_x^2>0$, k_x为实数	x-方向非齐次 $k_x^2\le 0$, k_x为虚数
$\begin{cases}\sin k_x x\\ \cos k_x x\end{cases}$	$k_x^2=0$ $\begin{cases}x\\ 1\end{cases}$ $k_x^2\neq 0$ $\begin{cases}\mathrm{sh}\lvert k_x\rvert x\\ \mathrm{ch}\lvert k_x\rvert x\end{cases}$ 取$e^{\pm\lvert k_x\rvert x}$ 及其组合（sinh, cosh）

——齐次方向：**选择振荡型函数**

——非齐次方向：**选择衰减型函数**

第二步：利用分离变量法和电位方程（1）给出电位的形式解

由(4)知，沿z方向的本征函数不应该取为双曲函数(在无穷远处发散)，应取指数形式$e^{-n\pi/a}$,由边界条件(5)、(6)知，沿x方向的本征函数要求有重复的零点，应取$\sin\dfrac{n\pi}{a}$,最终得到电位形式解$\varphi_b=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\dfrac{n\pi}{a}x\right)e^{-\frac{n\pi}{a}z}$

第三步：利用边界条件确定电位的形式解中的未知系数

由边界条件(2)、(3)知$\phi_b(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\dfrac{n\pi}{a}x\right)=\begin{cases}0-\dfrac{U_0}{a}x, & 0<x<\dfrac{a}{2}\\ U_0-\dfrac{U_0}{a}x, & \dfrac{a}{2}<x<a\end{cases}$

利用三角函数的正交性，方程两边同乘$\sin\left(\dfrac{n\pi}{a}x\right)$,并在0 ~ a 上对x 积分，得

$$A_n=\frac{2}{a}\left[\int_0^{\frac{a}{2}}\left(-\frac{U_0}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx+\int_{\frac{a}{2}}^{a}\left(U_0-\frac{U_0}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx\right]=\frac{2U_0}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}$$

分步积分

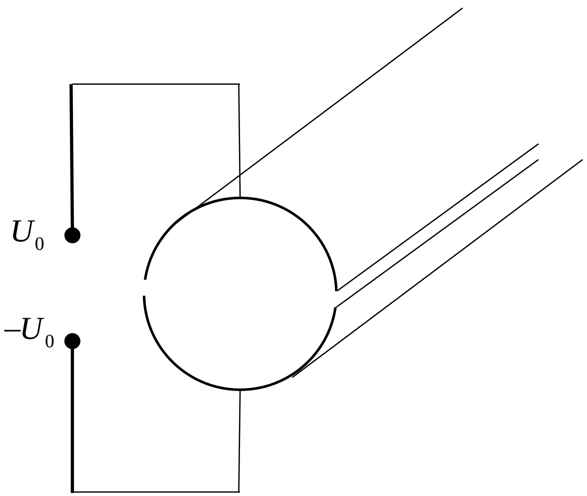
$(uv)'=u'v+uv',uv'=(uv)'-u'v$

$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$

$$\varphi_b=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2U_0}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{a}e^{-\frac{n\pi}{a}z}$$

最终，$\varphi=\varphi_a+\varphi_b=\dfrac{U_0}{a}x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2U_0}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi}{2}\sin\dfrac{n\pi x}{a}e^{-\frac{n\pi}{a}z}$

3-17 一圆形电容器，其半径为a,上半部分加电压U0，下半部分加电压-U0，如图，求此电容器内的电位分布（极板间缝隙的影响忽略）



第一步：根据题目条件，列出电位方程（1）和电位边界条件（2）~（6）

（其中，电位与Z无关，采用圆柱坐标系）

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 & (1) \\ \phi(a,\theta) = U_0, 0<\theta<\pi & (2) \\ \phi(a,\theta) = -U_0, \pi<\theta<2\pi & (3) \\ \phi(0,\theta) = \text{有限值} & (4) \\ \phi(\rho,\theta) = \phi(\rho,\theta+2\pi) & (5) \\ \phi\text{关于}\theta=\pi/2\text{对称} & (6) \end{cases}$$

$G'' + k_\theta^2 G = 0$ ==→ G 通解为：

$G = A\sin(k_\theta\theta) + B\cos(k_\theta\theta)$ $\quad k_\theta = m \quad (m=1,2,3,\dots)$

$G = A_0\theta + B_0$ $\quad k_\theta = m \quad (m=0)$

——电位关于θ以2π为周期!

$\rho^2 R'' + \rho R' - m^2 R = 0$ （欧拉方程）

$$\begin{cases} m=0 \Rightarrow R_0(\rho) = c_0\ln\rho + d_0 \\ m\neq 0 \Rightarrow R_m(\rho) = c_m\rho^m + d_m\rho^{-m} \end{cases}$$

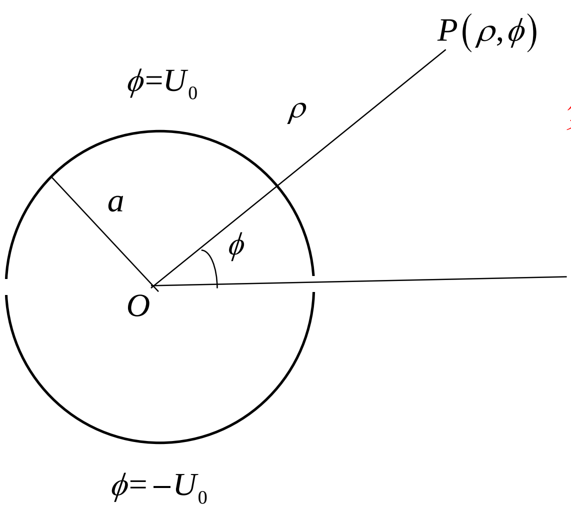
$\therefore\ \phi_0(\rho,\theta) = (c_0\ln\rho + d_0)(A_0\theta + B_0)$

$\phi_m(\rho,\theta) = (c_m\rho^m + d_m\rho^{-m})[A_m\sin(m\theta) + B_m\cos(m\theta)]$

第二步：利用分离变量法和电位方程（1）给出电位的形式解

由(5)知，沿θ方向为齐次边界，选择振荡型函数，且满足（6），故应取为$\sin(n\theta)$，又根据z向平面场和沿ρ方向为非齐次边界的条件，满足欧拉方程解$c_n\rho^n + d_n\rho^{-n}$，再由(4)知，应取ρ^n (ρ^{-n}在ρ=0处发散)，最终得到电位形式解$\varphi_b = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(n\theta)\rho^n$

参考ppt ch3 p68 和 ppt ch3 p83



第三步：利用边界条件确定电位的形式解中的未知系数

由边界条件(2)、(3)知$\phi(a,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(n\theta)a^n = \begin{cases} U_0, & 0<\theta<\pi \\ -U_0 & \pi<\theta<2\pi \end{cases}$

利用三角函数的正交性，方程两边同乘$\sin(n\theta)$,并在$0\sim 2\pi$上对θ积分，得

$$A_n = \frac{2}{2\pi a^n}\left[\int_0^{\pi}(U_0)\sin(n\theta)d\theta + \int_{\pi}^{2\pi}(-U_0)\sin(n\theta)d\theta\right] = \frac{2U_0}{n\pi a^n}(1-\cos n\pi)$$

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2U_0}{n\pi a^n}(1-\cos n\pi)\sin(n\theta)\rho^n$$

11. 一扇形域如图所示，此域由$\varphi=0$，$\varphi=\theta_0$和$r=a$所围成，求此域内第一类边值问题的格林函数
(3-27)

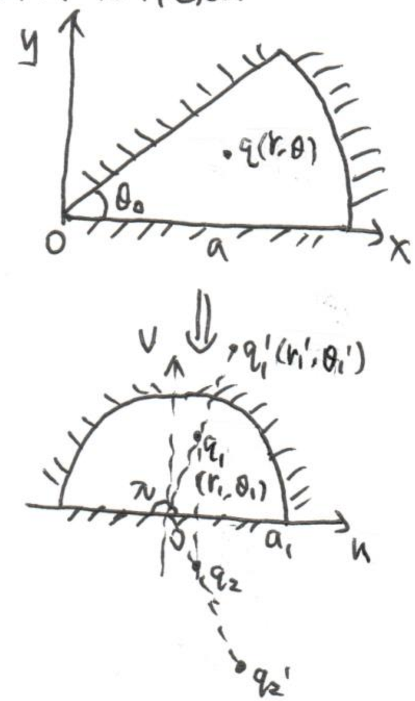
解：$z=re^{j\theta}$，$w=r_1e^{j\theta_1}$ (与运算复杂!) $\frac{\pi}{\alpha}$

作保角变换，$w=z^{\frac{\pi}{\theta_0}} \Rightarrow \begin{cases} r_1=r^{\frac{\pi}{\alpha}} \\ \theta_1=\frac{\pi}{\theta_0}\theta \end{cases}$ 且 $a_1=a^{\frac{\pi}{\theta_0}}$，电荷不变 $q_1=q=1$

在W平面使用镜像法：$\begin{cases} q_2=-q_1 \\ q_1'=-\frac{a_1}{r_1}q_1 \\ q_2'=-q_1' \end{cases}$，$\begin{cases} r_2=r_1 \\ r_2'=r_1'=\frac{a_1^2}{r_1} \end{cases}$

$\therefore$ W平面上 $\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1}+\frac{q_1'}{R_1'}+\frac{q_2}{R_2}+\frac{q_2'}{R_2'}\right)$

反变换回Z平面即可.



保角变换+球面镜像+平面镜像