

第6章

第6章 无限冲激响应(IIR) 数字滤波器设计

6.1 滤波器的基本概念

6.2 模拟低通滤波器设计

6.3 模拟高通、带通及带阻滤波器设计

6.4 用冲激响应不变法设计IIR数字低通滤波器

6.5 用双线性Z变换法设计IIR数字低通滤波器

6.6 数字高通、带通及带阻滤波器的设计

模拟数字映射？

给定数字滤波器的技术指标 $\omega_p, \omega_s, \alpha_p, \alpha_s$ (更多)



转换成模拟滤波器的技术指标 $\Omega_p, \Omega_s, \alpha_p, \alpha_s$ (更多)



转换成模拟低通滤波器的技术指标 $\lambda_p, \lambda_s, \alpha_p, \alpha_s$



设计模拟低通滤波器 $G(p)$



得到模拟高通、带通、带阻滤波器 $H(s)$



得到数字高通、带通、带阻滤波器 $H(z)$



$s \Rightarrow z$



6.5 用双线性Z变换法设计 IIR DF

冲激响应不变法：基本原理、问题、优点与注意事项

方案：放弃上一节的角频率线性转换关系。寻找新的关系；有4点要求：单
次映射，稳定映射，可逆映射，原点上幅度相等。双线性变换法。

令
$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1}$$

双线性z变换

有
$$z = \frac{1 + (T_s/2)s}{1 - (T_s/2)s}$$

s和z之间的映射关系

由 $s \Leftrightarrow z \Rightarrow \omega \Leftrightarrow \Omega:$
$$j\Omega = \frac{2}{T_s} \frac{e^{j\omega} - 1}{e^{j\omega} + 1}$$

$$j\Omega = \frac{2 e^{j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})}{T_s e^{j\omega/2} (e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2})} = j \frac{2 \sin(\omega/2)}{T_s \cos(\omega/2)}$$

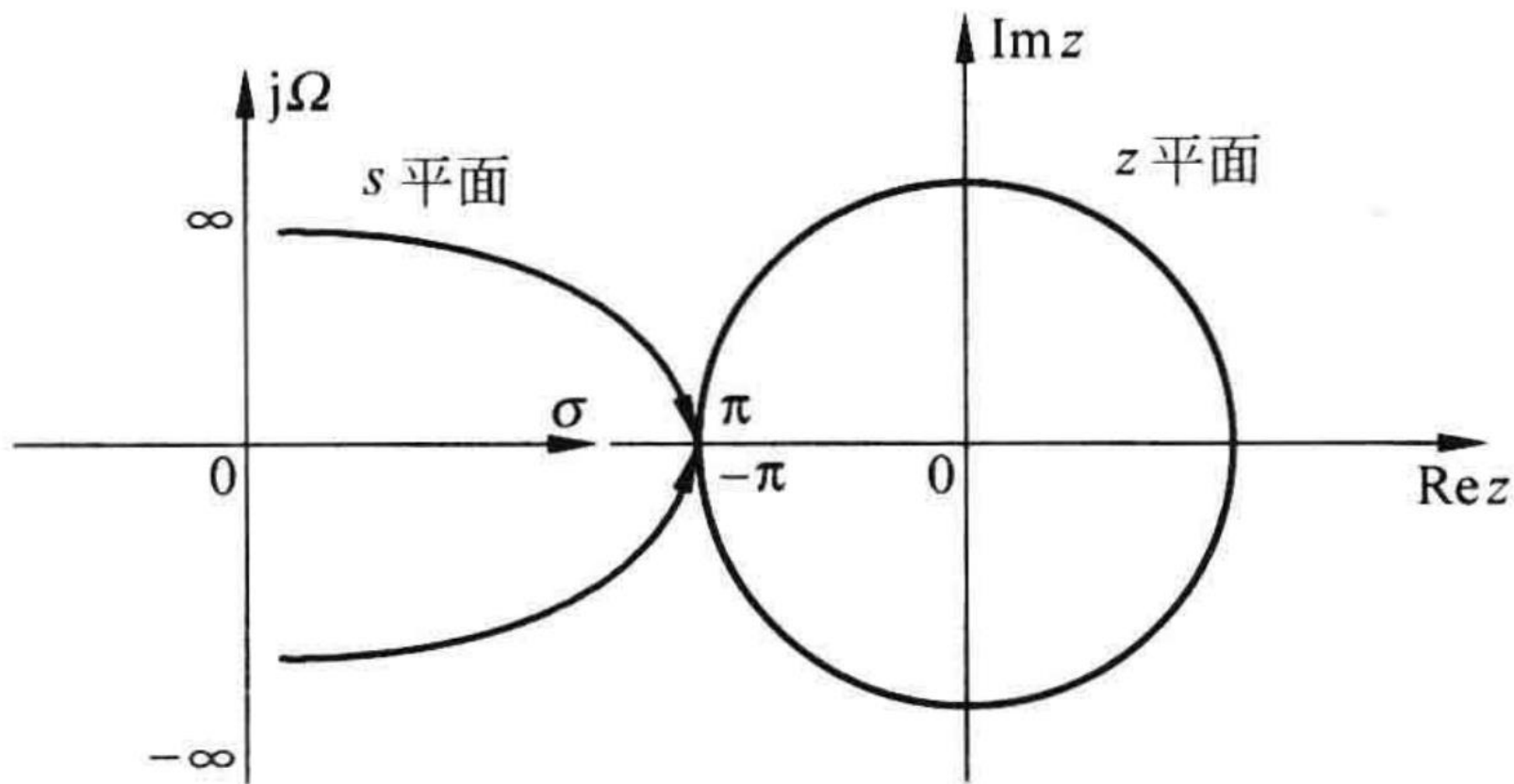
ω 和 Ω 之间的映射关系

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan(\omega/2) \quad \Leftrightarrow \quad \omega = 2 \arctan(\Omega T_s / 2)$$

$$\omega \Leftrightarrow \Omega$$

非线性关系，但是
一对一的转换关系

双线性z变换？



s 平面整个 Ω 轴映射到 z 平面单位圆上一周

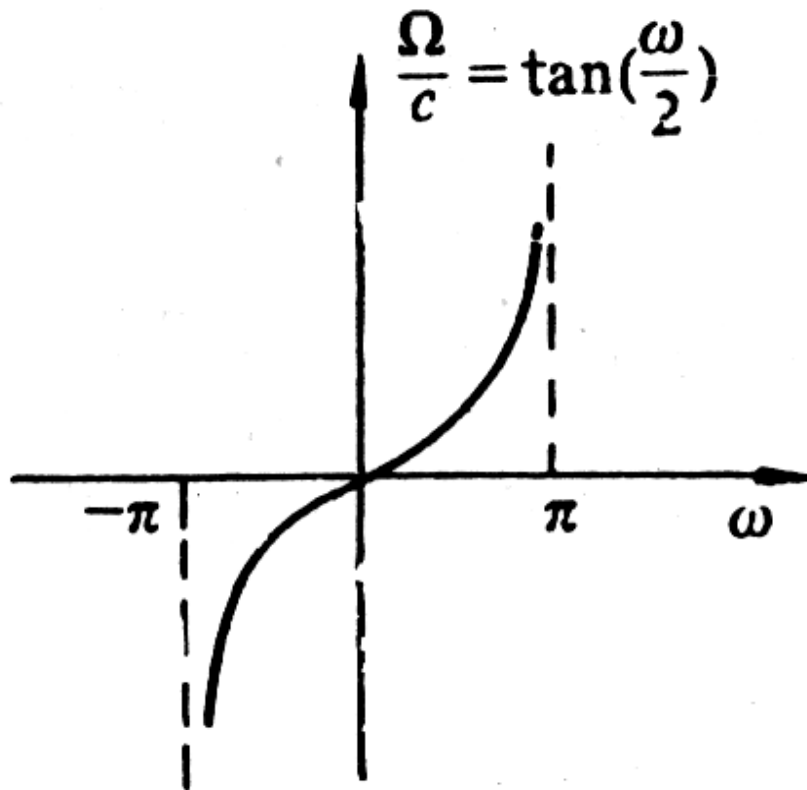
强调了从 s 到 z 的规则：双线性 z 变换

优缺点

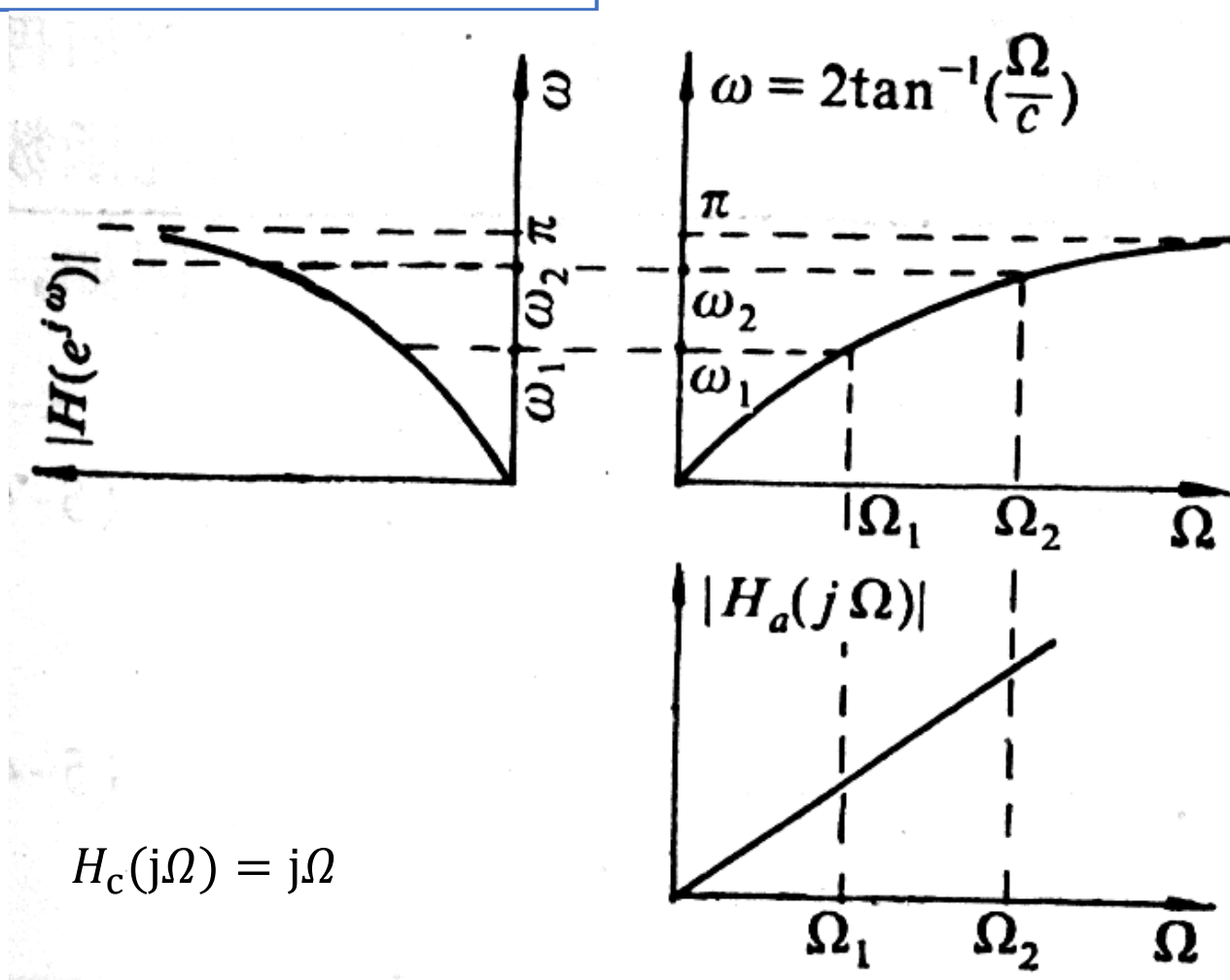
- 保持稳定性
 - s 正虚轴 \rightarrow z 单位圆上部; s 负虚轴 \rightarrow z 单位圆下部
 - s 左半平面 \rightarrow z 单位圆内; s 右半平面 \rightarrow z 单位圆外
- 避免了频率响应的混叠现象
- 双线性变换是一个有理函数，但是模拟角频率和数字角频率之间存在严重的非线性（在0频域附近接近线性关系），它导致了以下两个问题：
 - 线性相位AF滤波器经双线性变换后不再保持线性相位
 - 幅频响应不是常数或片断常数时，变换后得到的DF的幅频响应相对于原AF的幅频响应有畸变。例如，一个模拟微分器不能变换成数字差分器
- 所以，设计之初需要考虑从 ω 到 Ω 的频率预变形的问题
- 可用于设计频率选择性滤波器，因为有分段常数特点

1. 非线性频率映射关系的影响

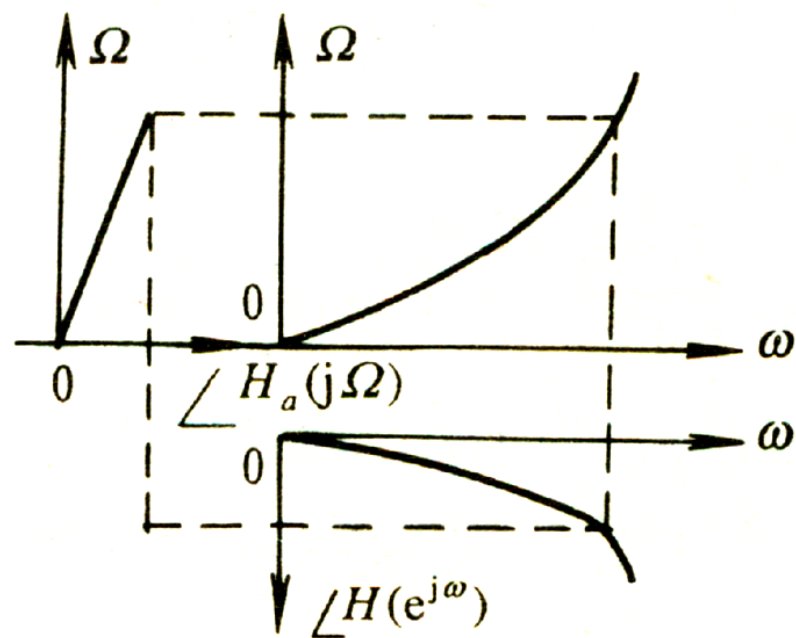
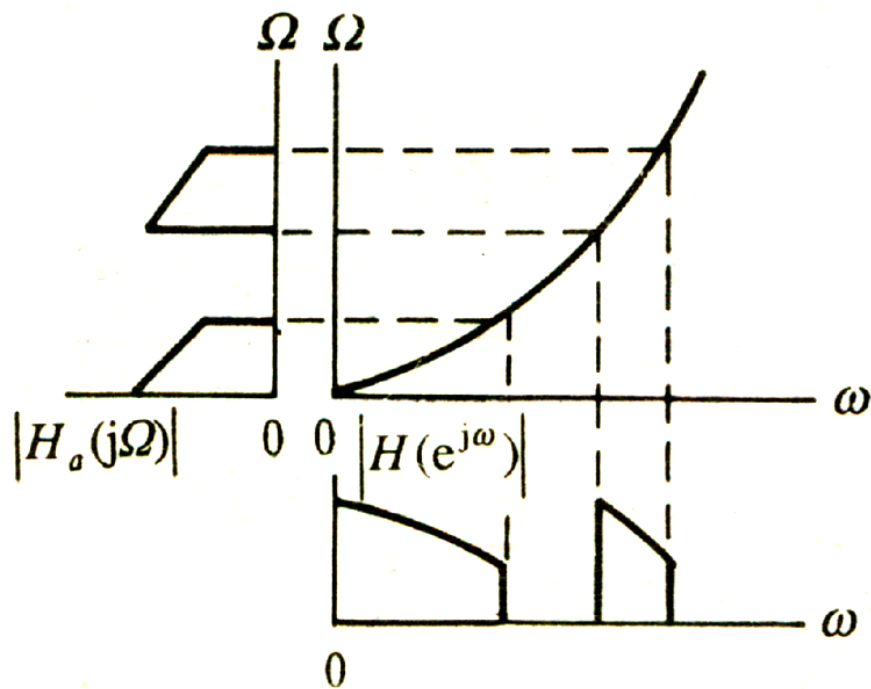
$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan(\omega/2)$$



模拟微分器不能映射成数字差分器



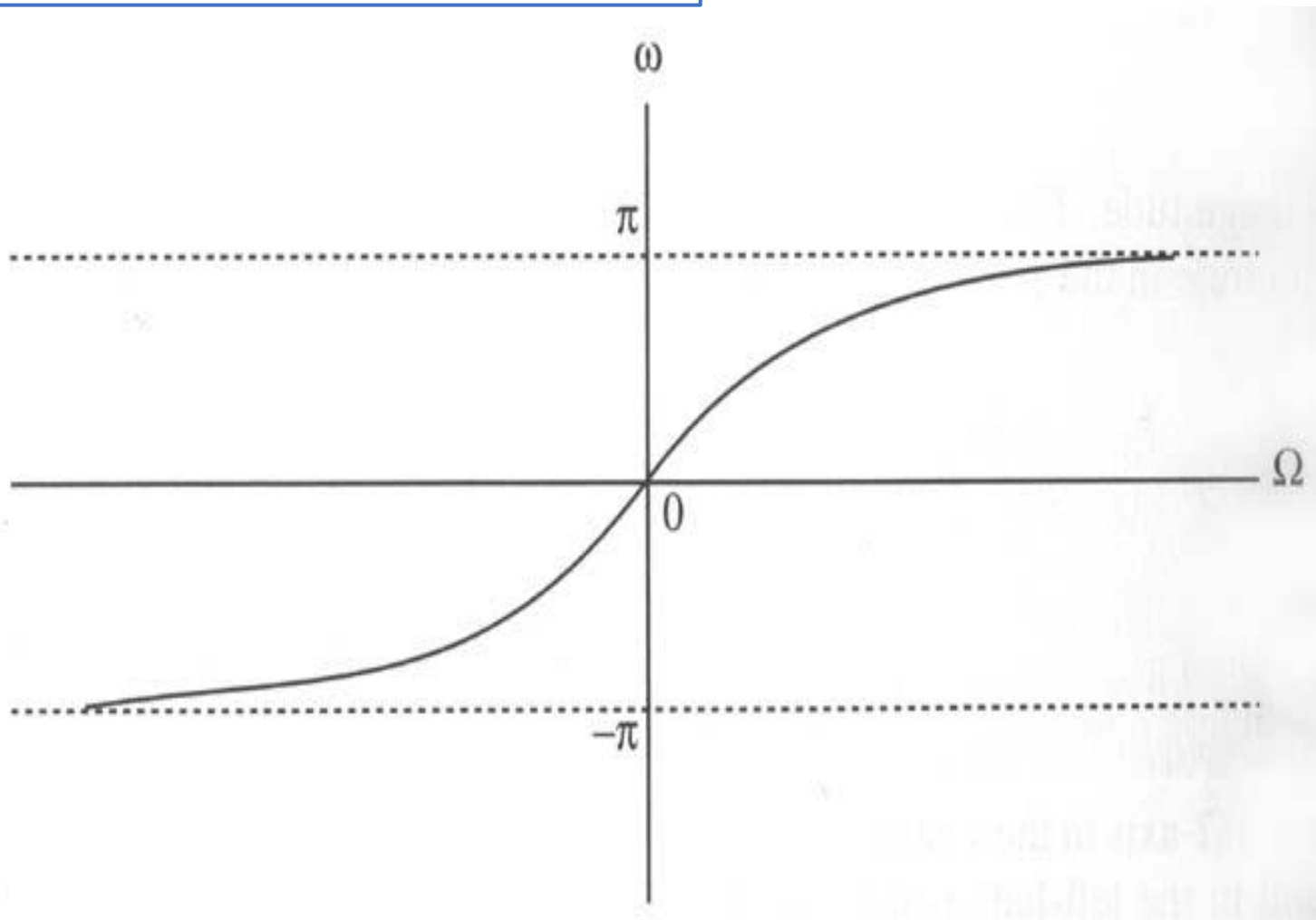
幅度和相位特性的非线性映射



“幅度的非线性映射”图有助于对“模拟微分器不能变换成数字差分器”的理解。

2. 非线性关系，它会带来设计上的问题

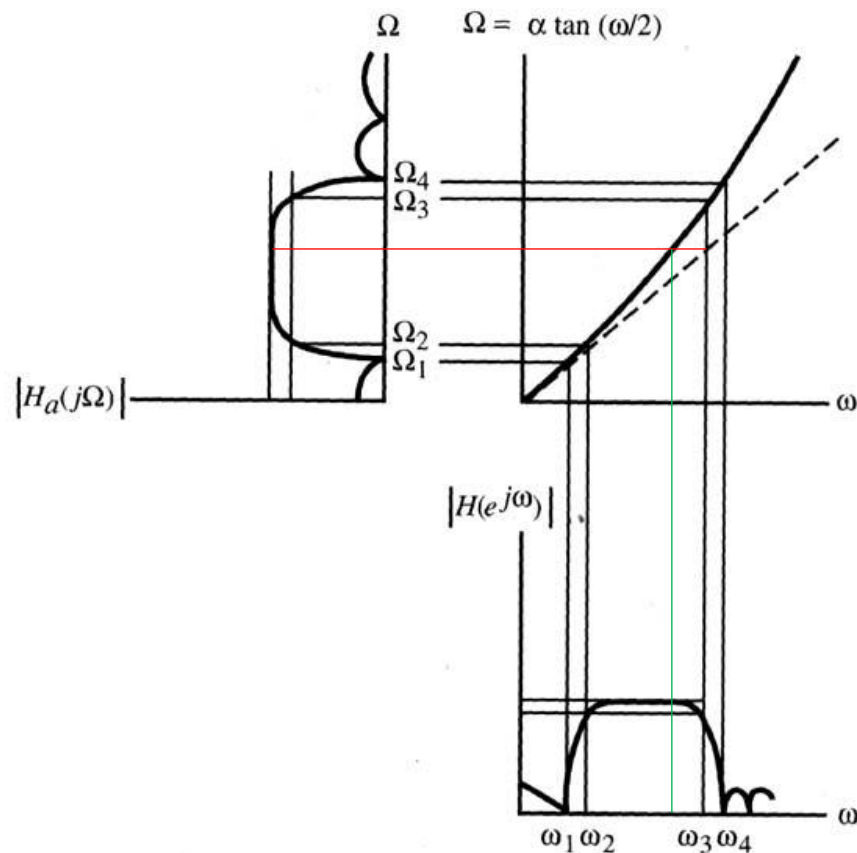
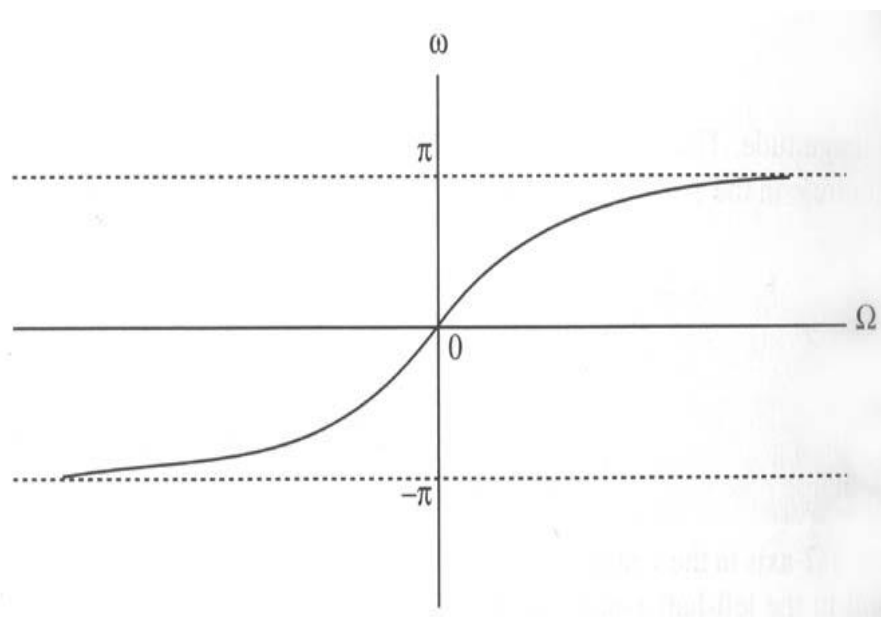
$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan(\omega/2)$$



非线性关系，又称为：

频率预变形 (Freq. Warping)

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan(\omega/2)$$



频率预变形示意

非线性关系，又称为：

频率预变形 (Freq. Warping)

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan(\omega/2)$$

$$\omega = \Omega T_s = 2\pi f T_s = 2\pi f / F_s$$

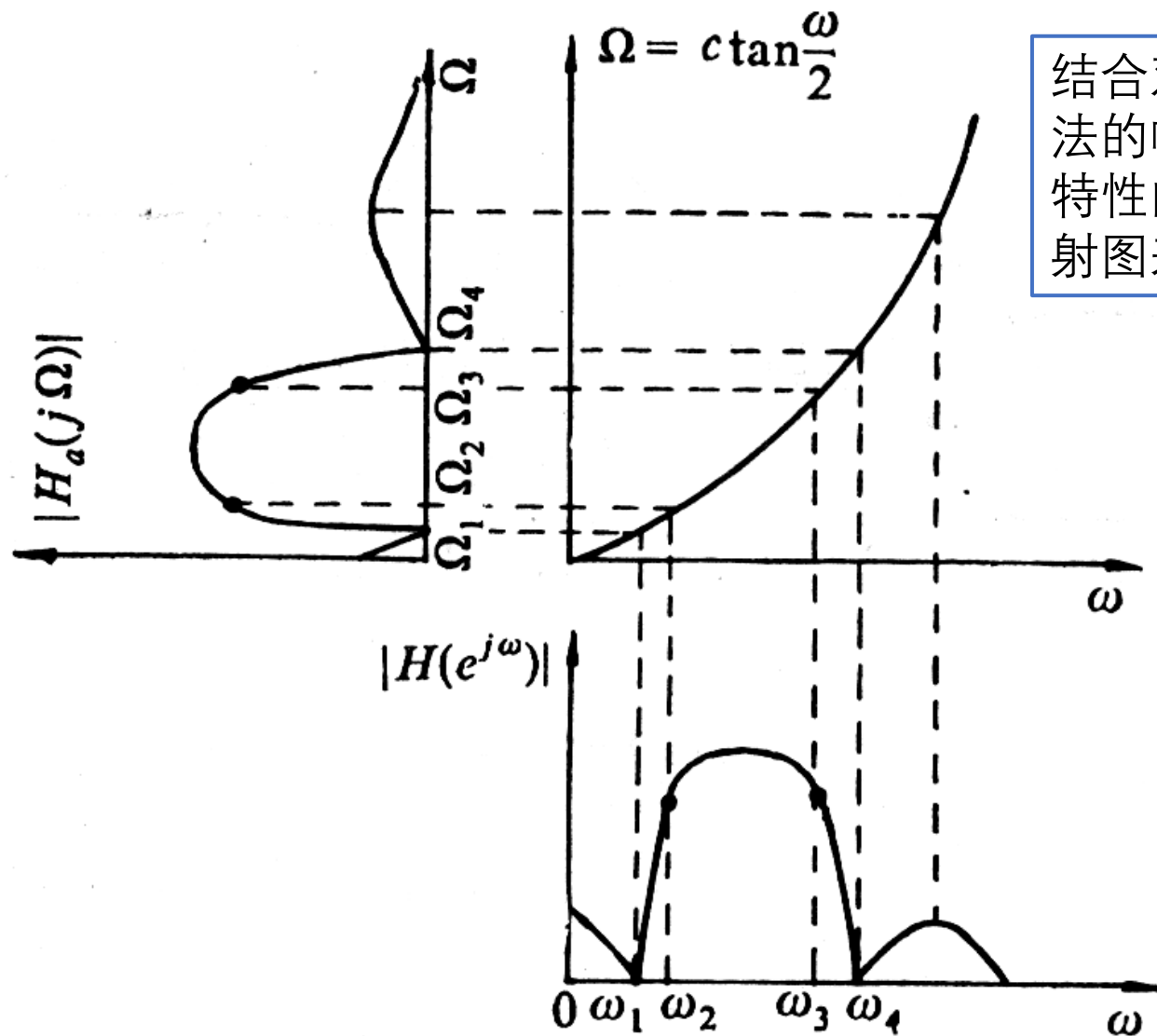
DF: $f_p = 100 \text{ Hz}$, $f_s = 300 \text{ Hz}$, $F_s = 1000 \text{ Hz}$
 $\omega_p = 0.2\pi$, $\omega_s = 0.6\pi$,

AF: $\Omega_p = \frac{2}{T_s} \tan(\omega_p/2) = 685.8 = 2\pi \times 109 \text{ (Hz)}$
 $\Omega_s = \frac{2}{T_s} \tan(\omega_s/2) = 2452.76 = 2\pi \times 438 \text{ (Hz)}$

Diagram: A yellow arrow points from the circled value 100 in the DF equation to the circled value 109 in the AF equation.

设计的 AF 并不是按给定的技术指标，但再由 s 变回 z 后，保证了 DF 的技术要求。

3. 适用性：设计（分段常数）频率选择性滤波器



结合双线性变换法的幅度和相位特性的非线性映射图来理解

4. 数字低通滤波器的设计步骤

Step1. 给定 DF 技术指标 $\omega_p, \omega_s, \alpha_p, \alpha_s$

Step2. 频率转换:

$$\Omega_p = \frac{2}{T_s} \tan(\omega_p/2), \Omega_s = \frac{2}{T_s} \tan(\omega_s/2)$$

Step3. 设计模拟低通滤波器, $\lambda_p = 1, \lambda_s = \tan(\omega_s/2)/\tan(\omega_p/2)$

设计出 AF $G(p), G(p) \Rightarrow G(s)$

Step4. 映射成数字滤波器 $H(z) = G(s)|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}}$

可把 $G(s)$ 分解成一阶和二阶的子系统, 再进行变换。

5. 参数 $2/T_s$ 的处理→双线性Z变换第二组定义

因为

$$p = \frac{s}{\Omega_p}, \quad s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}, \quad \Omega_p = \frac{2}{T_s} \tan(\omega_p/2)$$

所以：

$$p = \frac{s}{\Omega_p} = \frac{1}{\tan(\omega_p/2)} \frac{z-1}{z+1}$$

这样：系数 $2/T_s$ 可以省略，因此，双线性Z变换可定义为：

$$s = \frac{z-1}{z+1}$$

$$z = \frac{1+s}{1-s}$$

$$\Omega = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\omega = 2\arctan(\Omega)$$

第二组
双线性
ZT定义

理解第一组双线性Z变换定义的背景

例如, 对一阶系统 $G(s) = A/(s + \lambda)$, 其时域方程是

$$\frac{dy(t)}{dt} + \lambda y(t) = Ax(t)$$

当我们用数字系统来实现这一微分方程时, 可用 $[y(n) - y(n-1)]/T_s$ 来代替 $dy(t)/dt$, 用 $[y(n) + y(n-1)]/2$ 来代替 $y(t)$, 用 $[x(n) + x(n-1)]/2$ 来代替 $x(t)$, 于是得到差分方程

$$\frac{1}{T_s}[y(n) - y(n-1)] + \frac{\lambda}{2}[y(n) + y(n-1)] = \frac{A}{2}[x(n) + x(n-1)]$$

两边取 Z 变换, 得

$$H(z) = \frac{A}{\frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + \lambda}$$

与 $G(s)$ 相比较, 立即得

$$H(z) = G(s) \Big|_{s = \frac{2}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

从数字积分器来理解

数字积分器

$H_c(s) = 1/s$ 是理想积分器，其输出信号是输入信号的积分值：

$$y_c(t) = \int_{-\infty}^t x_c(\tau) d\tau$$

$y_c(t)$ 就是曲线 $x_c(\tau)$ 下的面积。现用脉冲响应不变法将 $H_c(s)$ 转换为一数字积分器，写出数字积分器的传递函数、差分方程。画出其结构，并证明所得数字系统的功能与原模拟系统的差别就在于以 $x_c(t)$ 的采样值向后所做的矩形面积来代替 $x_c(\tau)$ 的连续面积。用双线性变

换 $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 代替脉冲响应不变法，则得到的数字系统的功能就是将前后两采样点之间

连线所围成的梯形面积来代替 $x_c(\tau)$ 的连续面积。

解：本题属于特殊 IIR 滤波器的设计，同时进一步理解冲激响应不变法和双线性变换法。

$$H_c(s) = \frac{1}{s}$$

1. 冲激响应不变法。

因为 $H_c(s) = \frac{1}{s}$ ，极点 $p_1 = 0$ ，则

$$H(z) = \frac{1 \cdot T}{1 - e^{p_1 T} z^{-1}} = \frac{T}{1 - z^{-1}}$$

所以有

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{T}{1 - z^{-1}}$$

则

$$y(n) = y(n-1) + x(n)T$$

这说明，该数字系统的功能就是以 $x_c(t)$ 的采样值向后所做的矩形面积来代替 $x_c(\tau)$ 的连续面积。

2. 双线性变换法

因为 $H_c(s) = \frac{1}{s}$, 所以

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1}{s} \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

所以有

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

则

$$y(n) = y(n-1) + (x(n) + x(n-1)) \cdot \frac{T}{2}$$

式中 $(x(n) + x(n-1)) \cdot \frac{T}{2}$ 物理意义是 (上底+下底) \times 高 $\div 2$, 即梯形面积公式。这说明,

该数字系统的功能就是将前后两采样点之间连线所围成的梯形面积来代替 $x_c(\tau)$ 的连续面积。

第二组定义的效果

对最后的 DF 的 $H(z)$ 而言, 两组定义的结果是一样的;

差别在于中间设计的 AF, 由于缺少了频率定标, 第二组定义将无法给出符合要求的幅频响应。

例 6.5.1 试用双线性 Z 变换法设计一个低通数字滤波器, 给定技术指标是 $f_p = 100\text{Hz}$, $f_s = 300\text{Hz}$, $\alpha_p = 3\text{dB}$, $\alpha_s = 20\text{dB}$, 抽样频率^① $F_s = 1\,000\text{Hz}$ 。

解 首先应得到圆周频率 ω , 因为 2π 对应 F_s , 所以 $\omega_p = 0.2\pi$, $\omega_s = 0.6\pi$, 即例 6.4.2 给出的技术指标。

(1) 将数字滤波器的技术要求转化为模拟滤波器的技术要求。

由(6.5.7)式, 有

$$\Omega_p = \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 0.324\,9, \quad \Omega_s = \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 1.376\,38$$

仍有 $\alpha_p = 3\text{dB}$, $\alpha_s = 20\text{dB}$ 。

(2) 设计低通滤波器 $G(s)$ 。

令 $\lambda = \Omega/\Omega_p$, 得 $\lambda_p = 1$, $\lambda_s = 4.236\,3$, 求得 $N = 1.59$, 取 $N = 2$, 于是

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$$

$$G(s) = G(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}} = \frac{0.324\,9^2}{s^2 + 0.459\,5s + 0.324\,9^2} \quad (6.5.9)$$

(3) 由 $G(s)$ 求 $H(z)$ 。

由(6.5.5)式有

$$H(z) = G(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{0.067\,45 + 0.134\,9z^{-1} + 0.067\,45z^{-2}}{1 - 1.143z^{-1} + 0.412\,8z^{-2}}$$

$$\omega = 2\pi f / F_s$$

$$\Omega = 2\pi f \quad ?$$

$$\Omega = \tan(\omega/2)$$

线性关系: 基本关系

正切关系: 映射方法

使用第二组定义

例：设计 IIR LP DF ， 给定

$$\alpha_p = 3\text{dB}, \quad \alpha_s = 20\text{dB} \quad \text{及}$$

$$\text{DF: } f_p = 100 \text{ Hz}, \quad f_s = 300 \text{ Hz}, \quad F_s = 1000\text{Hz}$$

可求出：

?????

$$\text{AF: } \Omega_p = 2\pi \times 109(\text{Hz}), \quad \Omega_s = 2\pi \times 438(\text{Hz})$$

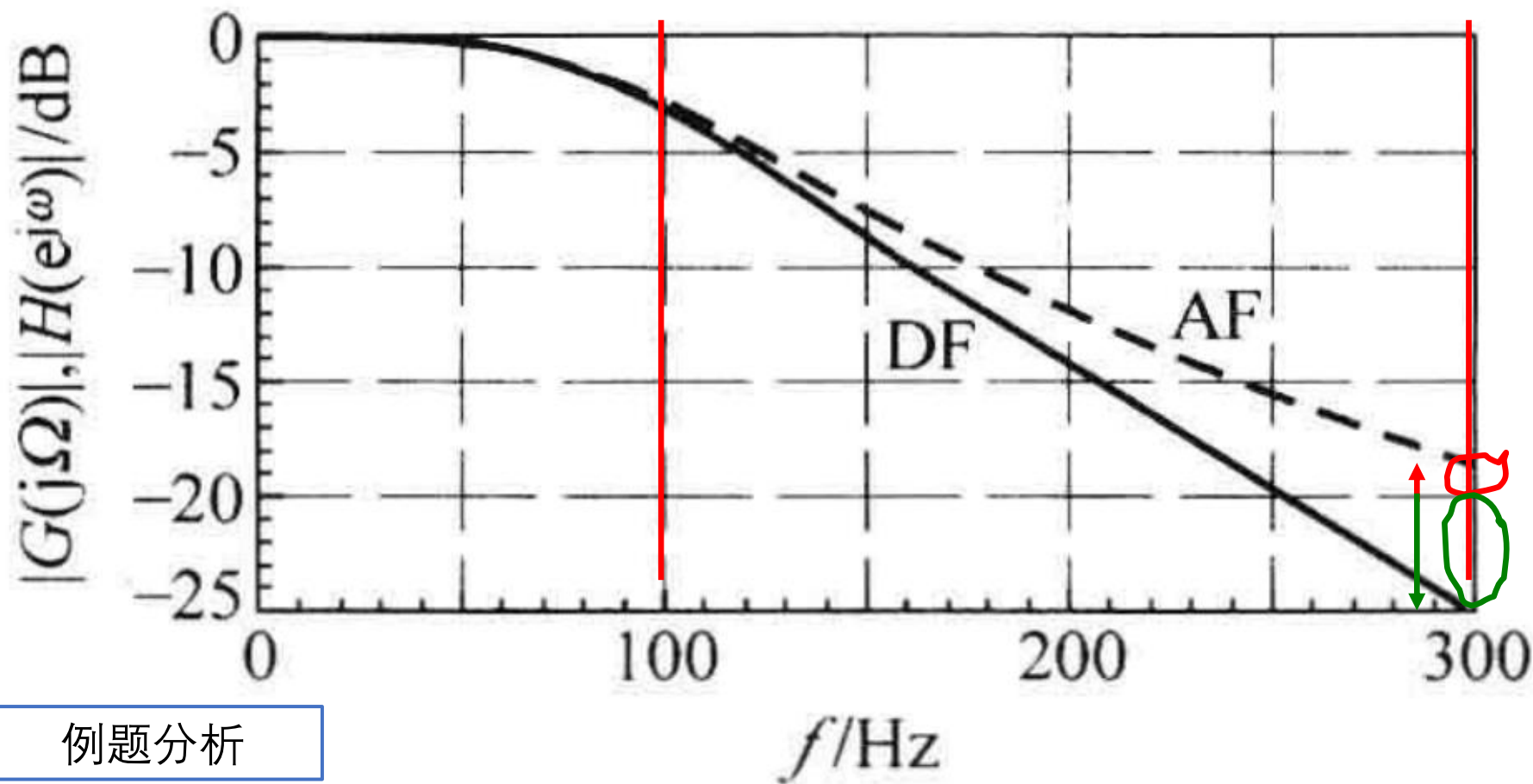
求出：

$$N = 2$$

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$$

$$p = \frac{1}{\tan(\omega_p/2)} \frac{z - 1}{z + 1}$$

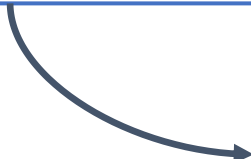
$$H(z) = \frac{0.06745 + 0.1349z^{-1} + 0.06745z^{-2}}{1 - 1.143z^{-1} + 0.4128z^{-2}}$$




例题分析

- (1) 没有混叠现象；
- (2) 数字滤波器满足设计要求，模拟滤波器没有达到要求，源于在频率升高时二者之间严重的非线性关系；
- (3) 通带内两个幅频响应接近一致。

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan(\omega/2)$$


$$\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\Omega T_s}{2}$$

$$\omega = \Omega T_s$$


$$\frac{\omega}{2} = \frac{\Omega T_s}{2}$$

在频率较小时，两个角频率之间有近似的线性关系，例题中通带内两个幅频响应接近一致。

(4) 用上了角频率之间的两种关系，第2种关系是实现频率**预变形**（**预畸变**）。

再谈频率预畸变

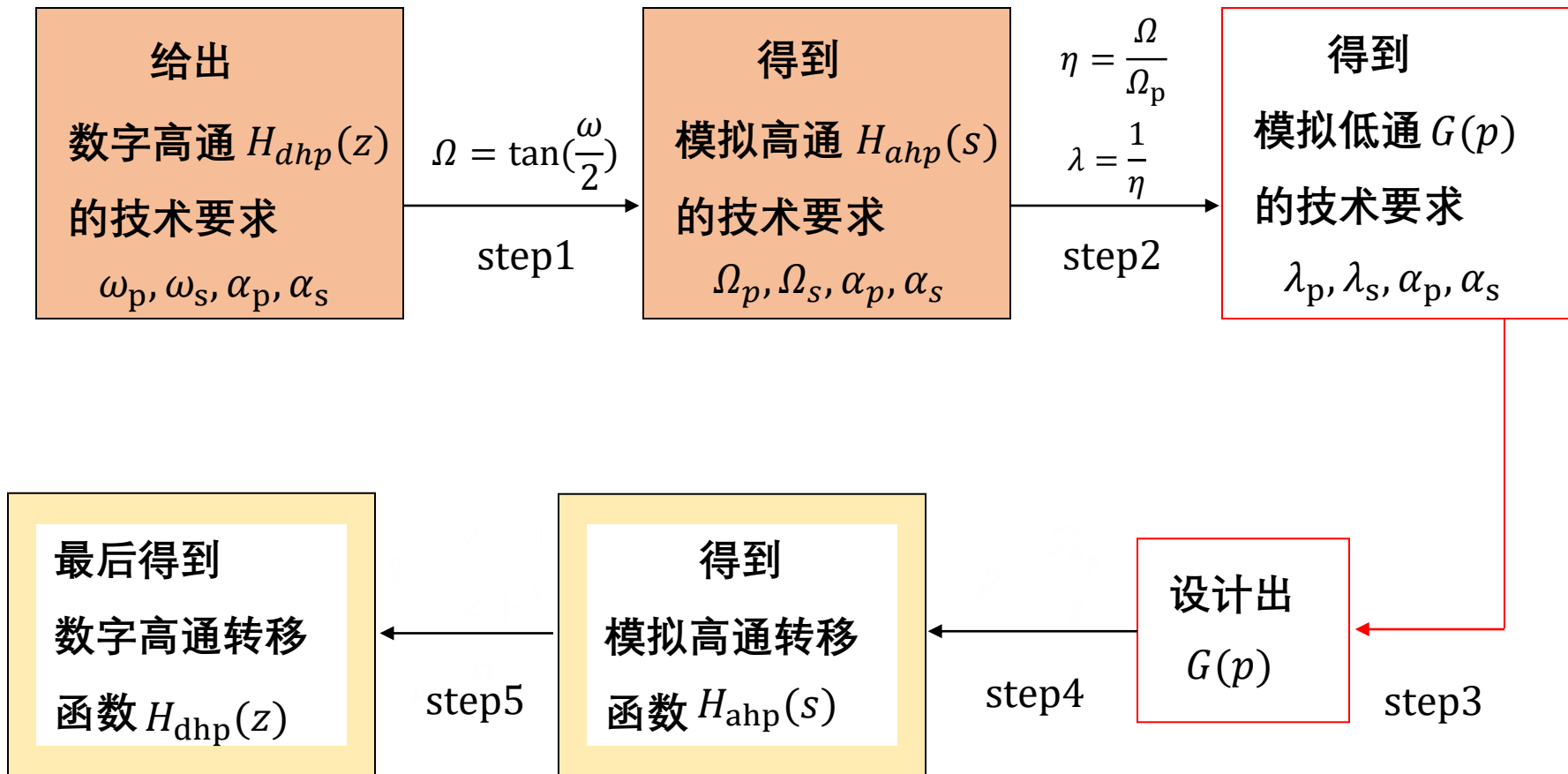
$$\Omega = \tan(\omega/2)$$

$$\Omega_p = \tan(\omega_p/2) = \tan\left(\frac{2\pi f_p/F_s}{2}\right) = \tan(\pi f_p/F_s)$$

$$\Omega_s = \tan(\omega_s/2) = \tan(\pi f_s/F_s)$$

由于 s 和 z 之间存在频率之间的上述非线性关系，且最后要从设计成的模拟系统变换到数字系统（ $s \Rightarrow z$ ），所以在设计之初模拟滤波器的指标转换时，要先通过频率预畸变方式从数字指标得到模拟指标（ $\omega \Rightarrow \Omega$ ）。二者互为逆的过程，在设计步骤上相互补充。

6.6 数字高通, 带通及带阻滤波器的设计



数字高通滤波器设计步骤

对 带通 (BP)、带阻 (BS) 数字滤波器的设计, 注意改变图中 Step2 和 Step4:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{\text{BW}} &= \Omega_3 - \Omega_1 \\ \eta &= \frac{\Omega}{\Omega_{\text{BW}}} \\ \lambda &= \frac{\eta^2 - \eta_2^2}{\eta} \end{aligned} \right\} \boxed{\text{带通}}$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{\text{BW}} &= \Omega_3 - \Omega_1 \\ \eta &= \frac{\Omega}{\Omega_{\text{BW}}} \\ \lambda &= \frac{\eta}{\eta^2 - \eta_2^2} \end{aligned} \right\} \boxed{\text{带阻}}$$

例 6.6.1 试设计一个数字高通滤波器,要求通带下限频率 $\omega_p=0.8\pi$,阻带上限频率为 0.44π ,通带衰减不大于 3dB,阻带衰减不小于 20dB。

解 由步骤 1 得

$$\Omega_p = \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 3.077\ 68, \quad \Omega_s = \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 0.827\ 27$$

$$\eta_p = 1, \quad \eta_s = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = 0.268\ 8$$

特点：直接给出了数字滤波器的设计指标

由步骤 2 得

$$\lambda_p = 1, \quad \lambda_s = \frac{1}{\eta_s} = 3.720\ 28$$

由步骤 3,设计低通滤波器 $G(p)$,求得

$$N = \frac{1}{2} \lg\left(\frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1}\right) / \lg(\lambda_s) = 1.749$$

取 $N = 2$,有

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$$

p 和 q 的关系;
 q 和 s 的关系;
 s 和 z 的关系;

将步骤 4 和 5 合并为一步,得数字高通滤波器转移函数

$$H_{dhp}(z) = H_{ahp}(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = G(p) \Big|_{p=\Omega_p \frac{(z+1)}{(z-1)}}$$

p 和 z 的关系

将 $\Omega_p=3.077\ 68$ 的具体数值代入上式,最后得

$$H_{ahp}(z) = \frac{0.067\ 45(1 - z^{-1})^2}{1 + 1.143z^{-1} + 0.412\ 8z^{-2}} \quad (6.6.1)$$

例 6.6.2 一个数字系统的抽样频率 $F_s = 2000\text{Hz}$, 试设计一个为此系统使用的带通数字滤波器 $H_{dbp}(z)$, 希望采用巴特沃思滤波器。要求: (1) 通带范围为 $300\text{Hz} \sim 400\text{Hz}$, 在带边频率处的衰减不大于 3dB , (2) 在 200Hz 以下和 500Hz 以上衰减不小于 18dB 。

解 首先, 应将实际频率转换为圆周频率 ω , 由 $\omega = 2\pi f/F_s$, 得 $\omega_{sl} = 0.2\pi, \omega_1 = 0.3\pi, \omega_3 = 0.4\pi, \omega_{sh} = 0.5\pi$ 。由步骤 1, 应将数字带通滤波器的频率转换为模拟带通滤波器的频率, 得

特点: 没有直接给出数字滤波器的设计指标

$$\Omega_{sl} = \tan\left(\frac{\omega_{sl}}{2}\right) = \tan(0.1\pi) = 0.324\,92, \quad \Omega_{sh} = \tan\left(\frac{\omega_{sh}}{2}\right) = \tan(0.25\pi) = 1$$

$$\Omega_1 = \tan\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \tan(0.15\pi) = 0.509\,53, \quad \Omega_3 = \tan\left(\frac{\omega_3}{2}\right) = \tan(0.2\pi) = 0.726\,54$$

根据 6.3.2 节模拟带通滤波器的设计方法, 我们还需求出

$$\Omega_2^2 = \Omega_1 \Omega_3 = 0.370\,20, \quad \Omega_{BW} = \Omega_3 - \Omega_1 = 0.217\,01$$

式中 Ω_2 为中心频率, Ω_{BW} 为通带带宽。以 Ω_{BW} 为参考频率将 Ω 归一化, 得

$$\eta_1 = \Omega_1 / \Omega_{BW} = 2.347\,96, \quad \eta_3 = \Omega_3 / \Omega_{BW} = 3.347\,96$$

$$\eta_{sl} = \Omega_{sl} / \Omega_{BW} = 1.497\,26, \quad \eta_{sh} = \Omega_{sh} / \Omega_{BW} = 4.608\,08$$

显然

$$\eta_{BW} = \eta_3 - \eta_1 = 1, \quad \eta_2^2 = \eta_1 \eta_3 = 7.86088$$

归一化后的频率 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_{sl}$ 及 η_{sh} 见图 6.3.3。

根据步骤 2, 由(6.3.3)式, 即 $\lambda = (\eta^2 - \eta_2^2)/\eta$, 将 η 转换为低通滤波器 $G(p)$ 的归一化频率 λ , 不必计算就可知 $\lambda_p = 1$, 但 λ_s 不唯一, 即

$$-\lambda_s = \frac{\eta_{sl}^2 - \eta_2^2}{\eta_{sl}} = -3.752\ 92, \quad \lambda_s = \frac{\eta_{sh}^2 - \eta_2^2}{\eta_{sh}} = 2.902\ 19$$

由 η_{sl}, η_{sh} 求出的两个 λ_s 差别较大, 这是由于 $\Omega = \tan(\omega/2)$ 的非线性关系所引起的, 为了保证滤波器的衰减特性, 应取 $|\lambda_s|$ 为最小者, 故取 $\lambda_s = 2.9$ 。

由步骤 3, 根据 $\lambda_p = 1, \lambda_s = 2.9, \alpha_p = 3\text{dB}, \alpha_s = 18\text{dB}$, 设计 $G(p)$, 求得 $N = 2$, 因此

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1} \quad (6.6.2)$$

将步骤 4 和步骤 5 合起来, 由(6.3.5)式, $p = (s^2 + \Omega_1\Omega_3)/s(\Omega_3 - \Omega_1)$, 而 $s = (z-1)/(z+1)$, 这样我们可得到带通情况下 p 和 z 之间的转换关系, 即

$$p = \frac{(z-1)^2 + \Omega_2^2(z+1)^2}{\Omega_{BW}(z^2 - 1)} \quad (6.6.3)$$

将 Ω_2^2, Ω_{BW} 代入(6.6.3)式, 得

$$p = \frac{6.314z^2 - 5.804\ 3z + 6.314}{z^2 - 1} \quad (6.6.4)$$

再将(6.6.4)式代入(6.6.2)式即可得到所要的数字带通滤波器的转移函数, 即

$$H_{dbp}(z) = \frac{0.020\ 1(1 - 2z^{-2} + z^{-4})}{1 - 1.637z^{-1} + 2.237z^{-2} - 1.307z^{-3} + 0.641z^{-4}}$$

例：设计一 **IIR BPF**，要求：

通带频率范围：300Hz~ 400Hz

阻带频率范围：200Hz、500Hz

要求： $\alpha_p = 3\text{dB}$, $\alpha_s = 18\text{dB}$, $F_s = 2000\text{Hz}$

按上述转换办法，可以求出：

$$N = 2$$

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$$

$$p = \frac{(z-1)^2 + \Omega_2^2(z+1)^2}{\Omega_{BW}(z^2-1)}$$

$$H_{\text{dbp}}(z) = \frac{0.0201(1 - 2z^{-2} + z^{-4})}{1 - 1.637z^{-1} + 2.237z^{-2} - 1.307z^{-3} + 0.641z^{-4}}$$

例 6.6.3 一个数字系统的抽样频率为 1 000Hz, 已知该系统受到频率为 100Hz 的噪声的干扰, 现设计一个陷波滤波器 $H_{dbs}(z)$ 去掉该噪声。要求 3dB 的带边频率为 95Hz 和 105Hz, 阻带衰减不小于 14dB。

解 此滤波器是一个阻带很窄的陷波器, 题中没有给出过渡带要求, 为了设计的方便, 令阻带的下边和上边频率分别为 99Hz 和 101Hz。现直接由步骤 1~5 给出下面的计算过程, 请参考 6.3.3 节有关模拟带阻滤波器的设计方法。

特点：同上一例题

由题意可求出: $\omega_1 = 0.19\pi$, $\omega_{sl} = 0.198\pi$, $\omega_{sh} = 0.202\pi$, $\omega_3 = 0.21\pi$ 。

(1) 将 $H_{dbs}(z)$ 的频率 ω 转变为 $H_{abs}(s)$ 的频率 Ω , $\Omega = \tan(\omega/2)$, 得

$$\Omega_1 = 0.3076, \quad \Omega_{sl} = 0.3214, \quad \Omega_{sh} = 0.3284, \quad \Omega_3 = 0.3424$$

及 $\Omega_{BW} = \Omega_3 - \Omega_1 = 0.03478, \quad \Omega_2^2 = \Omega_1 \Omega_3 = 0.1010$

由 $\eta = \Omega / \Omega_{BW}$ 做频率归一, 得

$$\eta_1 = 8.8442, \quad \eta_{sl} = 9.2409, \quad \eta_{sh} = 9.4422, \quad \eta_3 = 9.8447, \quad \eta_2^2 = 87.069$$

(2) 将 $H_{abs}(s)$ 归一化频率转变成低通模拟滤波器 $G(p)$ 的归一化频率 λ 。由 (6.3.6) 式, 即 $\lambda = \eta / (\eta^2 - \eta_2^2)$, 可求出 $\lambda_p = 1$, 及

$$-\lambda_s = \eta_{sl} / (\eta_{sl}^2 - \eta_2^2) = -5.517, \quad \lambda_s = \eta_{sh} / (\eta_{sh}^2 - \eta_2^2) = 4.526$$

取 $\lambda_s = 4.526$ 。

(3) 设计低通滤波器 $G(p)$ 。由 $\lambda_p = 1, \lambda_s = 4.526, \alpha_p = 3\text{dB}, \alpha_s = 14\text{dB}$, 求出, $N = 1.054$, 取 $N = 1$, 则

$$G(p) = \frac{1}{p+1} \quad (6.6.5)$$

(4) 由(6.3.7)式,有

$$p = \frac{s\Omega_{BW}}{s^2 + \Omega_2^2}$$

而

$$s = \frac{z-1}{z+1}$$

所以

$$p = \frac{\Omega_{BW}(z^2 - 1)}{(z-1)^2 + \Omega_2^2(z+1)^2} \quad (6.6.6)$$

则

$$H_{dbs}(z) = H_{abs}(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = G(p) \Big|_{p=\frac{\Omega_{BW}(z^2-1)}{(z-1)^2 + \Omega_2^2(z+1)^2}} \quad (6.6.7)$$

将 Ω_{BW}, Ω_2^2 代入(6.6.6)式,再将该式代入(6.6.5)式,最后得到所要的数字带阻滤波器的转移函数,即

$$H_{dbs}(z) = \frac{0.969(1 - 1.633z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1.583z^{-1} + 0.939z^{-2}}$$

由例 6.6.2 及例 6.6.3 可以看出,数字带通及带阻滤波器的阶次是原低通滤波器阶次的两倍。

思考：若给出指标是模拟角频率呢？

程序设计：使用双线性变换法将切贝雪夫I原型模拟滤波器转换成数字滤波器

与本章内容有关的MATLAB文件

1 . buttord.m 确定 LP DF、或 LP AF的阶次

$$(1) \quad [N, W_n] = \text{buttord}(W_p, W_s, R_p, R_s)$$

对应数字滤波器。其中 W_p 、 W_s 分别是通带和阻带的截止频率，其值在 $0 \sim 1$ 之间，1 对应抽样频率的一半(归一化频率)。对低通和高通， W_p 、 W_s 都是标量，对带通和带阻， W_p 、 W_s 是 1×2 的向量。

R_p 、 R_s 分别是通带和阻带的衰减(dB)。

N 是求出的相应低通滤波器的阶次， W_n 是求出的3dB频率，它和 W_p 稍有不同。

(2) $[N, W_n] = \text{buttord}(W_p, W_s, R_p, R_s, 's')$

对应模拟滤波器，式中各个变量的含义和格式（1）相同，但 W_p 、 W_s 及 W_n 的单位为弧度/秒，因此，它们实际上是频率 Ω 。

2 . buttap.m 设计模拟低通(Butt)原型滤波器

$[z, p, k] = \text{buttap}(N)$

N 是欲设计的低通原型滤波器的阶次， z 、 p 、 k 是设计出的极点、零点及增益。

3 . lp2lp.m、lp2hp.m、lp2bp.m, lp2bs.m

将模拟低通原型转换为实际的低通、高通、带通及带阻滤波器。

$$[B, A] = \text{lp2lp}(b, a, W_o)$$

$$[B, A] = \text{lp2hp}(b, a, W_o)$$

$$[B, A] = \text{lp2bp}(b, a, W_o, B_w)$$

$$[B, A] = \text{lp2bs}(b, a, W_o, B_w)$$

} (1)

} (2)

b、a 是AF LP 的分子、分母的系数向量，B、A是转换后的的分子、分母的系数向量；在（1）中， W_o 是低通或高通滤波器的截止频率；在（2）中， W_o 是带通或带阻滤波器的中心频率， B_w 是其带宽。

4 . bilinear.m 双线性变换，由模拟滤波器得到数字滤波器。

$$[Bz, Az]=\text{bilinear}(B, A, Fs)$$

式中B、A分别是G(s)的分子、分母多项式的系数向量，Bz、Az分别是H(z)的分子、分母多项式的系数向量，Fs是抽样频率。

5 . butter.m

本文件可用来直接设计Butterworth数字滤波器，实际上它把

Buttord

buttap

lp2lp

Bilinear

等文件都包含了进去，从而使设计过程更简捷。

- (1) $[B,A]=\text{butter}(N,W_n)$
- (2) $[B,A]=\text{butter}(N,W_n,\text{'high'})$
- (3) $[B,A]=\text{butter}(N,W_n,\text{'stop'})$
- (4) $[B,A]=\text{butter}(N,W_n,\text{'s'})$

格式 (1) ~ (3) 用来设计数字滤波器, B、A分别是 $H(z)$ 的分子、分母多项式的系数向量, W_n 是通带截止频率, 范围在0 ~ 1之间。

若 W_n 是标量, (1) 用来设计低通数字滤波器;

若 W_n 是 1×2 的向量, 则 (1) 用来设计数字带通滤波器; (2) 用来设计数字高通滤波器; (3) 用来设计数字带阻滤波器, 显然, 这时的 W_n 是 1×2 的向量;

格式 (4) 用来设计模拟滤波器。

6 . cheb1ord.m

求Cheb-I型滤波器的阶；

7 . cheb1ap.m

设计原型低通Cheb-I型模拟滤波器；

8 . cheby1.m

直接设计数字Cheb-I滤波器。

以上三个文件的调用格式和对应的Butterworth滤波器的文件类似。

9. cheb2ord.m

10. ellipord.m

11. cheb2ap.m

12. ellipap.m

13. besslap.m

14. cheby2.m

15. ellip.m

16. besself.m

17.impinvar.m

用冲激响应不变法实现频率转换

对应 Cheby-II、椭圆 IIR 滤波器