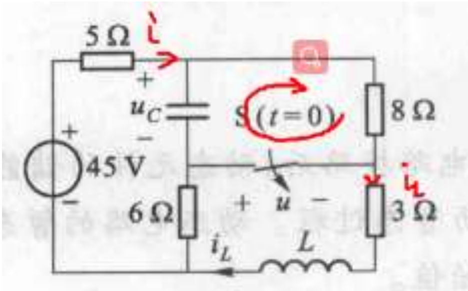
答案 8.2

8.2 图示电路 $t<0$ 时处于稳态，$t=0$ 时开关断开。求初始值 $u_C(0_+)$、$i_L(0_+)$ 及开关两端电压 $u(0_+)$。



解：$t<0$ 时电容处于开路，电感处于短路，3Ω 电阻与 6Ω 电阻相并联，所以

$$i(0_-)=\frac{45\text{V}}{(5+8+\dfrac{6\times3}{6+3})\Omega}=3\text{A}\quad,\quad i_L(0_-)=\frac{6}{6+3}\times i(0_-)=2\text{A}$$

$$u_C(0_-)=8\times i(0_-)=24\text{V}$$

由换路定律得：

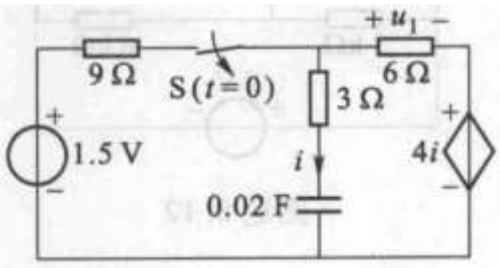
$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=24\text{V}，\quad i_L(0_+)=i_L(0_-)=2\text{A}$$

由 KVL 得开关电压：

$$u(0_+)=-u_C(0_+)+8\times i_L(0_+)=(-24+8\times2)\text{V}=-8\text{V}$$

答案 8.3

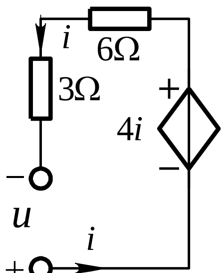
8.3 图示电路，开关原是接通的，并且处于稳态，$t=0$ 时开关断开。求 $t>0$ 时 u_1 的变化规律。



解：$t<0$ 时电容处于开路，$i=0$，受控源源电压 $4i=0$，所以

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=u_1(0_-)=\frac{6\Omega}{(9+6)\Omega}\times1.5\text{V}=0.6\text{V}$$

$t>0$ 时，求等效电阻的电路如图(b)所示。



(b)

等效电阻

$$R_{\mathrm{i}}=\frac{u}{i}=\frac{-4i+(6+3)i}{i}=5\Omega$$

时间常数

$$\tau=R_{\mathrm{i}}C=0.1\mathrm{s}$$

$t>0$ 后电路为零输入响应，故电容电压为：

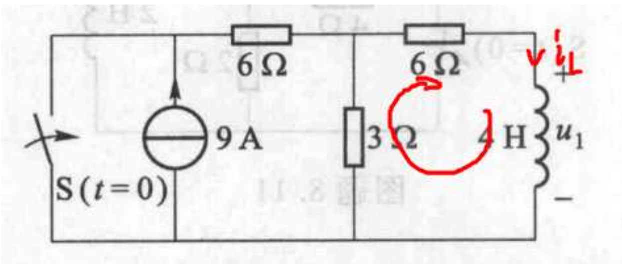
$$u_C(t)=u_C(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau}=0.6\mathrm{e}^{-10t}\mathrm{V}$$

6Ω 电阻电压为：

$$u_1(t)=-6\Omega\times i=-6\Omega\times(-C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t})=0.72\mathrm{e}^{-10t}\mathrm{V}\ (t>0)$$

答案 8.4

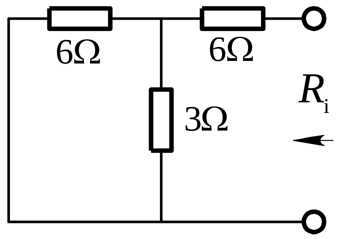
8.4 图示电路，开关接通前处于稳态，$t=0$ 时开关接通。求 $t>0$ 时的电压 u_1 及 3Ω 电阻消耗的能量。



解：$t<0$ 时电感处于短路，故 $i_L(0_-)=\frac{3}{6+3}\times 9\mathrm{A}=3\mathrm{A}$，由换路定律得：

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=3\mathrm{A}$$

求等效电阻的电路如图(b)所示。



(b)

等效电阻 $R_{\mathrm{i}}=6+\frac{6\times 3}{6+3}=8\Omega$，时间常数 $\tau=L/R_{\mathrm{i}}=0.5\mathrm{s}$

$t>0$ 后电路为零输入响应，故电感电流为

$$i_L(t)=i_L(0_+)\mathrm{e}^{-t/\tau}=3\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{A}\ (t\ge 0)$$

电感电压

$$u_1(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-24\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{V}\ (t>0)$$

3Ω 电阻电流为

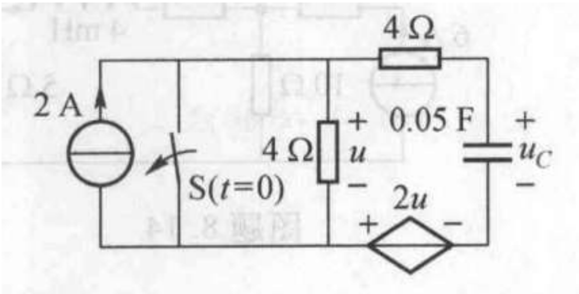
$$i_3 = \frac{u_3}{3\Omega} = \frac{6\Omega \times i_L + u_1}{3\Omega} = -2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{A}$$

3Ω电阻消耗的能量为：

$$W_{3\Omega} = \int_0^{\infty} 3\Omega i_3^2 dt = \int_0^{\infty} 12e^{-4t} dt = 12[-0.25\mathrm{e}^{-4t}]_0^{\infty} = 3\mathrm{J}$$

答案 8.5

8.5 图示电路，开关原是接通的，$t=0$ 时断开。求 $t>0$ 时的电压 u_C。



解：由电路图可得 $t<0$ 时 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\mathrm{V}$

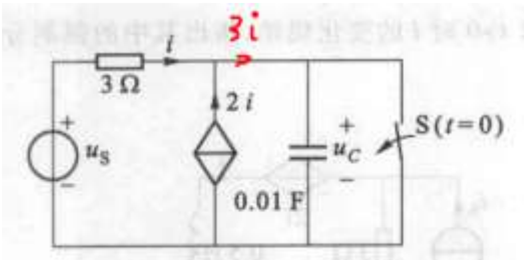
终态 $u_C(\infty) = 2\times 4 + 2\cdot(2\times 4) = 24\mathrm{V}$

等效电阻 $R_\mathrm{i} = 4+4+4\times 2 = 16\Omega$，时间常数 $\tau = R_\mathrm{i} C = 0.8\mathrm{s}$

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]\mathrm{e}^{-t/\tau} = 24(1-\mathrm{e}^{-1.25t})\mathrm{V}$$

答案 8.7

8.7 图示电路，开关原是接通的，$t=0$ 时断开，已知 $u_s = 10\sqrt{2}\cos(100t)$ V。求电压 u_C。



解：由电路图可得 $t<0$ 时 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\mathrm{V}$

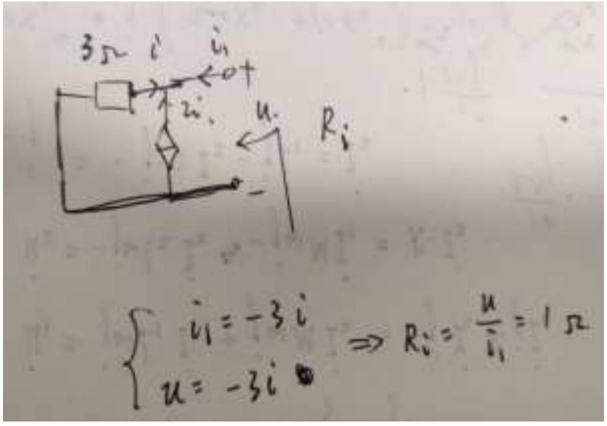
终态时，有

$$\dot{U}_S = 3\cdot \dot{I}_S + \frac{1}{j\omega C}\cdot 3\dot{I}_S$$

$$\dot{I}_S = \frac{\dot{U}_S}{3-3j} = \frac{5}{3}(1+j)\mathrm{A}$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot 3\dot{I}_S = (5 - 5j)\text{V}$$

$$u_p(t) = 10\cos(100t - 45°)\text{V}$$

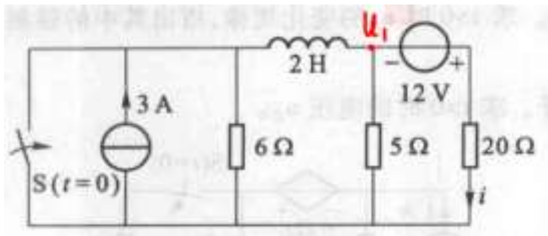


等效电阻 $R_i = 1\Omega$，时间常数 $\tau = R_i C = 0.01\text{s}$

$$u_C(t) = u_p(t) + [u_C(0_+) - u_p(0_+)]\text{e}^{-t/\tau} = 10\cos(100t - 45°) - 5\sqrt{2}\text{e}^{-100t}\text{V}$$

答案 8.9

8.9 图示电路 $t<0$ 时处于稳态，$t=0$ 时换路。求 $t>0$ 时的电流 i。



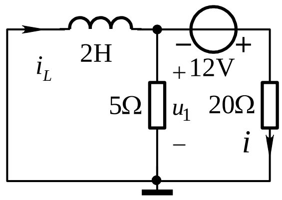
解：当 $t<0$ 时，列写节点方程求原始值

$$(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20})u_1(0_-) = 3 - \frac{12}{20}，\quad 解得 \quad u_1(0_-) = 5.76\text{V}$$

由换路定律得

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 3\text{A} - i_1(0_-) = 3\text{A} - \frac{u_1(0_-)}{6\Omega} = (3 - 5.76/6)\text{A} = 2.04\text{A}$$

换路后的电路如图(b)所示。



(b)

列写节点方程得：

$$(\frac{1}{5}+\frac{1}{20})u_1(0_+)=i_L(0_+)-\frac{12}{20}$$

解得

$$u_1(0_+)=5.76\text{V}，\quad i(0_+)=\frac{12\text{V}+u_1(0_+)}{20\Omega}=0.888\text{A}$$

稳态时，电感处于短路，所以

$$i(\infty)=\frac{12\text{V}}{20\Omega}=0.6\text{A}$$

等效电阻

$$R_{\text{i}}=\frac{5\times 20}{5+20}=4\Omega$$

时间常数

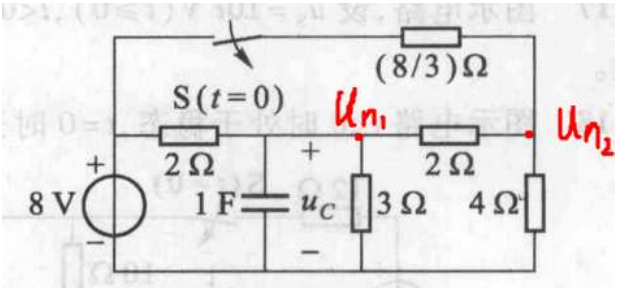
$$\tau=L/R_{\text{i}}=0.5\text{s}$$

由三要素公式得：

$$i(t)=i(\infty)+[i(0_+)-i(\infty)]\text{e}^{-t/\tau}=(0.6+0.288\text{e}^{-2t})\ \ \text{A}$$

答案 8.10

8.10 图示电路 $t<0$ 时处于稳态，$t=0$ 时开关断开。求 $t>0$ 时的电压 u_C。



解：当 $t<0$ 时，电容处于开路，列写节点电压方程求原始值

$$\begin{cases}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})u_{n1}(0_-)-\frac{1}{2}u_{n2}(0_-)-\frac{1}{2}\times 8=0\\ -\frac{1}{2}u_{n1}(0_-)+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8})u_{n2}(0_-)-\frac{3}{8}\times 8=0\end{cases}$$

解得 $u_{n1}(0_-)=4.8\text{V}$，由换路定律得：

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=u_{n1}(0_-)=4.8\text{V}$$

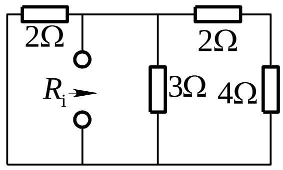
$t\to\infty$ 电容又处于开路，再列写节点电压方程如下：

$$\begin{cases}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})u_{n1}(\infty)-\frac{1}{2}\times u_{n2}(\infty)-\frac{1}{2}\times 8=0\\ -\frac{1}{2}\times u_{n1}(\infty)+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})u_{n2}(\infty)=0\end{cases}$$

解得：

$$u_C(\infty)=u_{n1}(\infty)=4\text{V}$$

求等效电阻的电路如图(b)所示。



(b)

$$R_{\text{i}}=2//[3//(2+4)]=1\Omega$$

时间常数

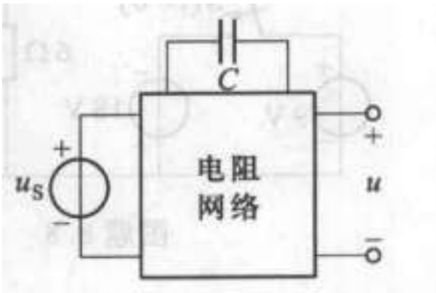
$$\tau=R_{\text{i}}C=1\text{s}$$

由三要素公式得：

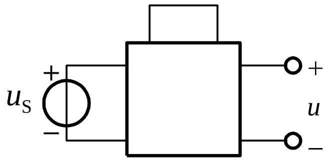
$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]\text{e}^{-t/\tau}=(4+0.8\text{e}^{-t})\ \ \text{V}$$

答案 8.15

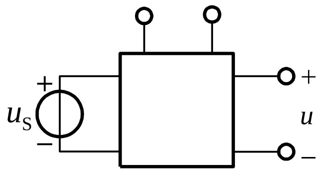
8.15 图示电路，u_s为阶跃电压。已知当 $C=0.01$ F 时，零状态响应 $u=(10-5e^{-2t})\varepsilon(t)$ V。现把 C 换成 5 H 电感，其他参数不变，再求零状态响应 u。



解：由题接电容时的零状态响应，可得$t=0_+$和$t\to\infty$时的计算电路，分别如图(b)和(c)所示。



(b)



(c)

由于电感对直流稳态相当于短路，零状态电感在换路瞬间相当于开路，故接电感在$t=0_+$和$t\to\infty$时的计算电路分别与接电容时$t\to\infty$和$t=0_+$时的情况相同。

所以接 L 时，初始值$u(0_+)=10\text{V}$， 稳态值$u(\infty)=5\text{V}$。

由接电容时的响应得时间常数

$$\tau_C = 0.5 = R_i C，所以\ R_i = \frac{\tau_C}{C} = 50\Omega$$

接电感后，R_i 不变，故时间常数

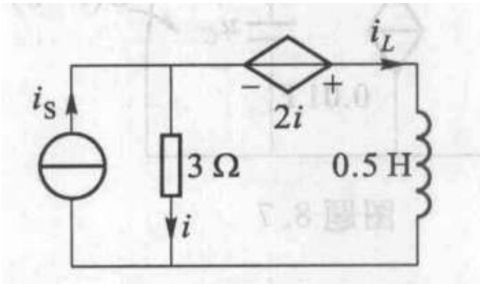
$$\tau_L = \frac{L}{R_i} = 0.1\text{s}$$

将上述初始值、稳态值和时间常数代入三要素公式得

$$u(t) = [5 + 5e^{-10t}]\varepsilon(t)\text{V}$$

答案 8.16

8.16 图示电路，设 $i_L(0_-)=3$ A，$i_s=5e^{-10t}$ A($t\geq 0$)。求 $t>0$ 时 i 的变化规律，指出其中的强制分量与自由分量。



解：　由于 i_S 为指数函数，故须列写关于 i 的微分方程来计算 i 的强制分量。

由换路定律得：

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 3\text{A}$$

$$i(0_+) = i_S(0_+) - i_L(0_+) = 5 - 3 = 2\text{A} \qquad (1)$$

根据 KVL

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} - 3i - 2i = 0$$

将 $i_L = i_S - i$ 代入上式化简得

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 5i = L\frac{\mathrm{d}i_S}{\mathrm{d}t} = -25\mathrm{e}^{-10t}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 10i = -50\mathrm{e}^{-10t} \qquad (2)$$

由式(2)中得时间常数 $\tau = 1/10 = 0.1\text{s}$ 等于电流源衰减系数的倒数（也可以用等效电阻看出时间常数和电流源衰减系数的关系），故设强制分量为

$i_p(t) = A_1 t\mathrm{e}^{-10t}$，代入式(2)解得 $A_1 = -50$。　　书本 p219

设齐次分量为 $i_h(t) = A_2\mathrm{e}^{-10t}$，则电流 i 的完全解答为：

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) = -50t\mathrm{e}^{-10t} + A_2\mathrm{e}^{-10t} \qquad (3)$$

由初始条件确定待求系数A_2。由式(3)及式(1)得$i(0_+)=A_2=2$，即$A_2=2$。

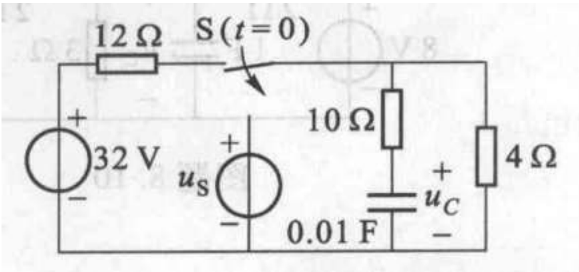
因此

$$i(t)=[2\mathrm{e}^{-10t}-50t\mathrm{e}^{-10t}]\ \mathrm{A}$$

强制分量为$-50t\mathrm{e}^{-10t}\mathrm{A}$，自由分量为$2\mathrm{e}^{-10t}\mathrm{A}$。

答案 8.17

8.17 图示电路，设 $u_s=10t$ V($t\geq 0$)，$t<0$ 时处于稳态。求 $t>0$ 时 u_C 的变化规律，指出其中的强制分量与自由分量。



解：

由于u_S是多项式形式，故须列写关于u_C的微分方程来计算u_C的强制分量。换路前，电容处于开路，12Ω和4Ω电阻串联。由换路定律和分压公式得：

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=\frac{4}{12+4}\times 32\mathrm{V}=8\mathrm{V} \qquad (1)$$

换路后，根据 KVL 得：

$$10\times C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_S$$

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+10u_C=100t \qquad (2)$$

强制分量与激励源有相同的函数形式，故
设强制分量为：

$$u_{Cp}(t)=A_1t+A_2$$

代入式(2)得

$$A_1+10A_1t+10A_2=100t$$

比较系数得

$$A_1=10,\quad A_2=-1$$

设齐次方程的解为：

$$u_{Ch}(t)=A_3\mathrm{e}^{-10t}$$

则电压u_C的完全解答为：

$$u_C(t)=u_{C\mathrm{p}}(t)+u_{C\mathrm{h}}(t)=(10t-1)+A_3\mathrm{e}^{-10t} \qquad (3)$$

由初始条件确定待求系数 A_3。由式(3)及(1)得

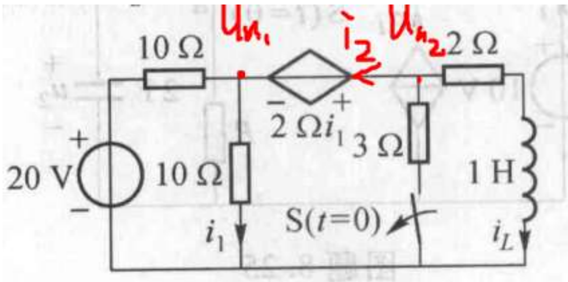
$$u_C(t)|_{t=0_+}=A_3-1=8\mathrm{V}，\quad 即 \quad A_3=9\mathrm{V}$$

所以 $u_C(t)=10t-1+9\mathrm{e}^{-10t}\,\mathrm{V}$

强制分量为 $(10t-1)\mathrm{V}$，自由分量为 $u_C(t)=9\mathrm{e}^{-10t}\mathrm{V}$。

答案 8.20

8.20 图示电路 $t<0$ 时处于稳态，$t=0$ 时开关断开，求 $t>0$ 时的电流 i_L。



解：

$$\begin{cases}(\frac{1}{10}+\frac{1}{10})U_{n1}(0_-)=\frac{20}{10}+I_2\\(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})U_{n2}(0_-)=-I_2\\U_{n1}(0_-)+\frac{1}{5}U_{n1}(0_-)=U_{n2}(0_-)\end{cases} \quad 得到 \quad \begin{cases}U_{n1}(0_-)=\frac{5}{3}\mathrm{V}\\U_{n2}(0_-)=2\mathrm{V}\end{cases}$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{U_{n2}(0_-)}{2}=1\mathrm{A}$$

终态时：

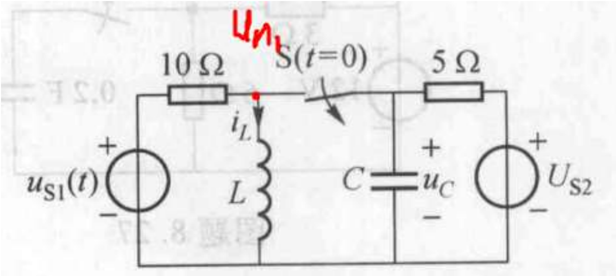
$$\begin{cases}(\frac{1}{10}+\frac{1}{10})U_{n1}(\infty)=\frac{20}{10}+I_2\\\frac{1}{2}U_{n2}(\infty)=-I_2\\U_{n1}(\infty)+\frac{1}{5}U_{n1}(\infty)=U_{n2}(\infty)\end{cases} \quad 得到 \quad \begin{cases}U_{n1}(\infty)=\frac{5}{2}\mathrm{V}\\U_{n2}(\infty)=3\mathrm{V}\end{cases}$$

$i_{Lp}(t)=i_L(\infty)=\frac{U_{n2}(\infty)}{2}=1.5\mathrm{A}$，等效电阻 $R_\mathrm{i}=8\Omega$，时间常数 $\tau_L=\frac{L}{R_\mathrm{i}}=\frac{1}{8}\mathrm{s}$

$$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0_+)-i_L(\infty)]e^{-8t}=1.5-0.5e^{-8t}\mathrm{A}$$

答案 8.22

8.22 图示电路原处于稳态，$u_{S1}=30\sqrt{2}\cos(100t+45^\circ)$ V，$U_{S2}=20$ V，$C=10^{-3}$ F，$L=0.1$ H。$t=0$ 时开关由闭合突然断开，用三要素法求 $t>0$ 时的电压 $u_C(t)$ 和电流 $i_L(t)$。



解：

当 $t<0$ 时，运用叠加原理。对正弦电压源有：

$$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{j\omega L}+\frac{1}{5}+j\omega C\right)\dot{U}_{n1}=\frac{\dot{U}_{S1}}{10}$$，得到 $\dot{U}_{n1}=10\angle 45^\circ\text{V}$

$u_1'(t)=10\sqrt{2}\cos(100t+45^\circ)\text{V}$，$u_C'(0_-)=u_1'(0_-)=10\text{V}$

$\dot{I}_L=\dfrac{\dot{U}_{n1}}{j\omega L}==1\angle -45^\circ\text{A}$，$i_L'(t)=\sqrt{2}\cos(100t-45^\circ)\text{A}$，$i_L'(0_-)=1\text{A}$

对直流电压源有：

$u_C''(0_-)=0\text{V}$，$i_L''(0_-)=4\text{A}$

因此有 $u_C(0_-)=10\text{V}$，$i_L(0_-)=5\text{A}$

断开开关后，左边等效电阻 $R_i=10\Omega$，时间常数 $\tau_L=\dfrac{L}{R_i}=0.01\text{s}$

终态 $\dot{I}_{Lp}=\dfrac{\dot{U}_{S1}}{10+j\omega L}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\text{A}$，$i_{Lp}(t)=3\cos(100t)\text{A}$

$$i_L(t)=i_{Lp}(t)+[i_L(0_+)-i_{Lp}(0_+)]e^{-100t}=3\cos(100t)+2e^{-100t}\text{A}$$

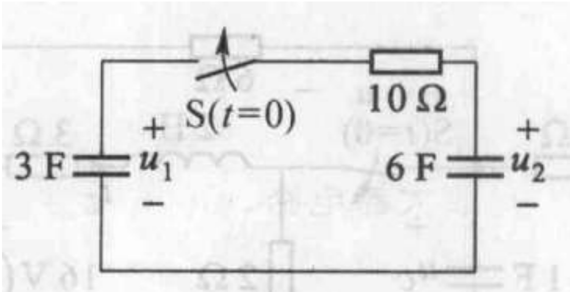
右边等效电阻 $R_i=5\Omega$，时间常数 $\tau_C=R_iC=0.005\text{s}$

终态 $u_C(\infty)=20\text{V}$

$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]e^{-200t}=20-10e^{-200t}\text{V}$$

答案 8.28

8.28 图示电路 $t=0$ 时开关接通，设 $u_1(0_-)=20$ V，$u_2(0_-)=0$。求 $t>0$ 时电压 u_1 和 u_2 的变化规律。



解：$t>0$ 时，电容 C_1 通过电阻给电容 C_2 充电，$t\to\infty$ 时充电结束，$u_1=u_2$。

由换路定律得：

$$u_1(0_+)=u_1(0_-)=20\text{V}，\quad u_2(0_+)=u_2(0_-)=0$$

由电荷守恒及基尔霍夫电压定律得：

$$\begin{cases} C_1u_1(\infty)+C_2u_2(\infty)=C_1u_1(0_-)+C_2u_2(0_-)=3\times 20 \\ u_1(\infty)=u_2(\infty) \end{cases}$$

解得：

$$u_1(\infty)=u_2(\infty)=\frac{20}{3}\text{V}$$

等效电容

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=2\text{F}$$

时间常数

$$\tau=RC=20\text{s}$$

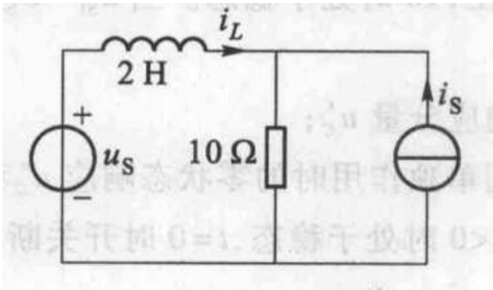
由三要素公式得

$$u_1(t)=\frac{20}{3}+\frac{40}{3}\mathrm{e}^{-t/20}\text{V},$$

$$u_2(t)=\frac{20}{3}(1-\mathrm{e}^{-t/20})\text{ V}$$

答案 8.30

8.30 图示电路，设 $u_S=\varepsilon(t)$ V，$i_S=\varepsilon(t-1)$ A。求电流 i_L，并画出波形图。



解： 运用叠加原理，首先考虑电压源

$i_L'(0_+) = i_L'(0_-) = 0\text{A}$，时间常数 $\tau_L = \dfrac{L}{R_i} = 0.2\text{s}$， $i_L'(\infty) = \dfrac{1}{10} = 0.1\text{A}$

$i_L'(t) = 0.1(1 - e^{-5t})\varepsilon(t)\text{A}$

然后考虑电流源

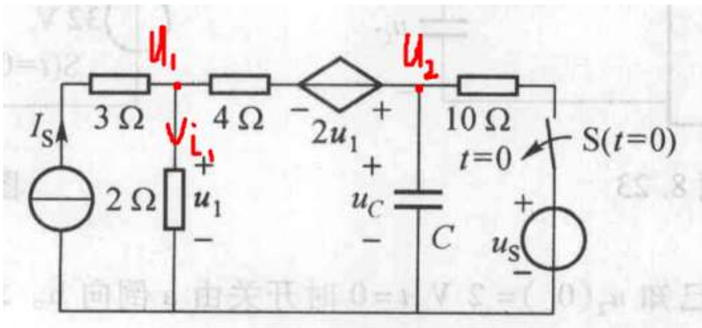
$i_L''(0_+) = i_L''(0_-) = 0\text{A}$，时间常数 $\tau_L = \dfrac{L}{R_i} = 0.2\text{s}$， $i_L''(\infty) = -1\text{A}$

$i_L''(t) = -(1 - e^{-5(t-1)})\varepsilon(t-1)\text{A}$

所以 $i_L(t) = i_L'(t) + i_L''(t) = 0.1(1 - e^{-5t})\varepsilon(t) - (1 - e^{-5(t-1)})\varepsilon(t-1)\text{A}$

答案 8.31

~~8.31~~ 图示电路原处于稳态，$I_S = 1$ A，$u_S = 20\cos(10t)$ V，$C = 0.02$ F。$t = 0$ 时开关由闭合突然断开，用三要素法求 $t > 0$ 时的电压 $u_C(t)$。



解：

当 $t < 0$ 时，运用叠加原理。对正弦电压源有：

$$\begin{cases} (\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4})U_{n1}(0_-) - \dfrac{1}{4}U_{n2}(0_-) = \dfrac{-2u_1(0_-)}{4} \\ -\dfrac{1}{4}U_{n1}(0_-) + (\dfrac{1}{4} + j\omega C + \dfrac{1}{10})U_{n2}(0_-) = \dfrac{U_S}{10} + \dfrac{2u_1(0_-)}{4} \\ u_1(0_-) = U_{n1}(0_-) \end{cases} \text{得到} \begin{cases} U_{n1}(0_-) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - j)\text{V} \\ U_{n2}(0_-) = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}(1 - j)\text{V} \end{cases}$$

$u_C'(0_+) = u_C'(0_-) = U_{n2}(0_-) = 5\text{V}$

直流电流源：$4(1-i_1)-4i_1+10(1-i_1)=2i_1$

得到$i_1=0.7\text{A}$，$u_C''(0_+)=u_C''(0_-)=10(1-i_1)=3\text{V}$

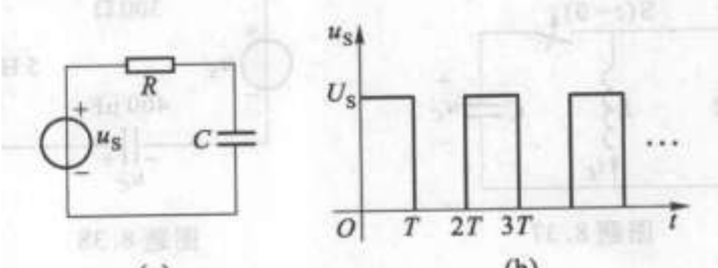
$u_C(0_+)=u_C'(0_+)+u_C''(0_+)=8\text{V}$，等效电阻$R_i=10\Omega$，时间常数$\tau_L=R_iC=0.2\text{s}$

$u_C(\infty)=6\text{V}$，$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0_+)-u_C(\infty)]e^{-5t}=6+2e^{-5t}\text{V}$

答案 8.32

8.32 电路及输入电压波形如图所示。求证在稳态时电容电压的最大值和最小值分别为

$u_{C\max}=\dfrac{U_S}{1+e^{-T/\tau}}$，$u_{C\min}=\dfrac{U_Se^{-T/\tau}}{1+e^{-T/\tau}}$ 其中 $\tau=RC$。



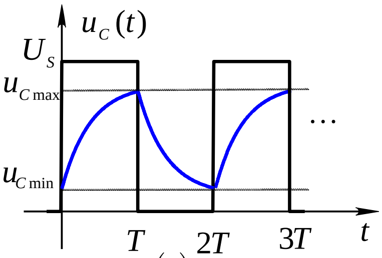
(a) (b)

解：达到稳定后开始计时，在$0\le t\le T$内，电容从最小值$u_{C\min}$开始充电，在$t=T$时刻达到最大值。初始值$u_C(0_+)=u_{C\min}$，特解$u_{Cp}(t)=U_S$，$u_{Cp}(0_+)=U_S$，时间常数$\tau=RC$。

由三要素公式得：

$$u_C(t)=U_S+(u_{C\min}-U_S)e^{-t/\tau}\qquad 0\le t\le T\qquad (1)$$

在$T\le t\le 2T$内，电容由最大值$u_{C\max}$开始放电，在$t=2T$时达到最小值。波形如图(c)所示。



(c)

此时间电路为零输入响应，电容电压为：

$$u_C(t)=u_{C\max}e^{-(t-T)/\tau}\qquad T\le t\le 2T\qquad (2)$$

由式(1)得：

$$u_C(T)=U_S+(u_{C\min}-U_S)\mathrm{e}^{-T/\tau}=u_{C\max} \qquad (3)$$

由式(2)得：

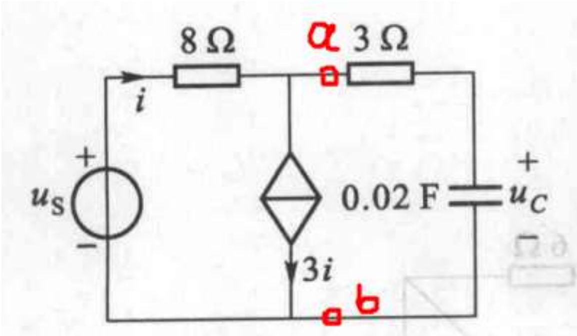
$$u_C(2T)=u_{C\max}\mathrm{e}^{-T/\tau}=u_{C\min} \qquad (4)$$

通过联立求解式(3)和(4)便可证得

$$u_{C\max}=\frac{U_S}{1+\mathrm{e}^{-T/\tau}},\quad u_{C\min}=\frac{U_S\mathrm{e}^{-T/\tau}}{1+\mathrm{e}^{-T/\tau}}$$

答案 8.35

8.35 图示电路，已知 $u_s=1\ \mathrm{Wb}\times\delta(t)$，求冲激响应 u_C，并画出其波形。



解：电压源为单位冲激函数，不能直接求其响应，而应先求单位阶跃响应，再对其求导得到单位冲激响应。为此先求 ab 端左侧的戴维南等效电路。当 ab 端开路时，

$$i=3i \quad\Rightarrow\quad i=0$$

开路电压

$$u_{\mathrm{OC}}=u_{\mathrm{S}}$$

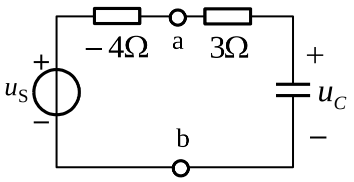
当 ab 端短路时，短路电流

$$i_{\mathrm{SC}}=i-3i=-2i=-2\times\frac{u_{\mathrm{S}}}{8\Omega}$$

等效电阻

$$R_{\mathrm{i}}=\frac{u_{\mathrm{OC}}}{i_{\mathrm{SC}}}=-4\,\Omega$$

图(a)的等效电路如图(b)所示。时间常数



(b)

$$\tau = (3-4)\times 0.02 = -0.02\,\mathrm{s}$$

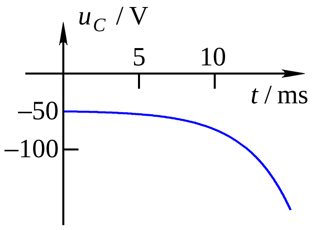
由三要素公式得u_C的单位阶跃特性为：

$$s(t) = (1-\mathrm{e}^{50t})\varepsilon(t)$$

u_C的单位冲激响应为：

$$u_C(t) = 1\mathrm{Wb}\times h(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = -50\mathrm{e}^{50t}\varepsilon(t)\,\mathrm{V}$$

其波形如图 (c) 所示。



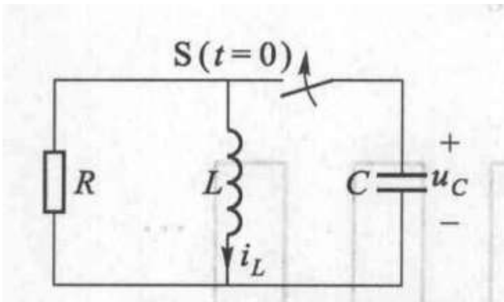
(c)

答案 8.37

8.37 图示电路，$t=0$时开关突然接通。

(1) 求电路为振荡、非振荡过渡过程时电阻R应满足的条件。

(2) 设$R=5\ \Omega$，$L=0.1\ \mathrm{H}$，$C=0.001\ \mathrm{F}$，$i_L(0_-)=0$，$u_C(0_-)=20\ \mathrm{V}$。求零输入响应i_L。



解：(1)$t>0$时，由 KCL 得$i_R + i_L + i_C = 0$　　(1)

将

$$i_R = \frac{u_C}{R},\quad i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t},\quad u_C = u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

代入式(1)并整理成关于i_L的二阶微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i_L = 0 \qquad (2)$$

该文分方程的特征方程为：

$$p^2+\frac{1}{RC}p+\frac{1}{LC}=0$$

判别式

$$\Delta=(\frac{1}{RC})^2-\frac{4}{LC}$$

当$\Delta>0$即$R<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$时为非振荡 ， 当$\Delta<0$即$R>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$时振荡。

(2)将给定 R、L、C 数值代入微分方程(2)得

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+200\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+10^4\times i_L=0$$

由换路定律得

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}|_{t=0_+}=u_L(0_+)=u_C(0_+)=u_C(0_-)=20\mathrm{V}\text{，即}$$

$$\frac{di_L}{dt}|_{t=0_+}=200$$

特征方程的判别式

$$\Delta=200^2-4\times10000=0$$

特征根

$$p_{1,2}=\frac{-200}{2}=-100$$

存在二重根，令齐次方程通解为

$$i_L(t)=(A_1+A_2t)\mathrm{e}^{-100t} \qquad (3)$$

根据初始条件，在式(3)中令$t=0_+$得：$i(0_+)=A_1=0$

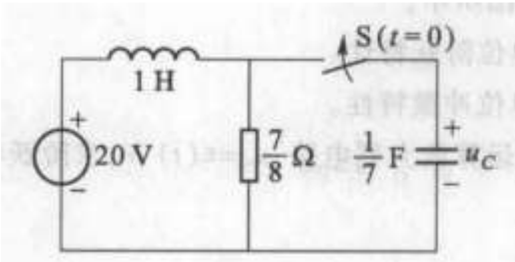
$$\left.\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+}=\mathrm{e}^{-100t}[A_2-100A_1-100A_2t]_{t=0_+}=200\text{，}\quad\text{解得 }A_2=200\text{。}$$

所以

$$i_L(t)=200t\mathrm{e}^{-100t}\mathrm{A}\text{。}$$

答案 8.40

8.40 图示电路原处于稳态，$u_C(0_-)=10$ V，$t=0$ 时开关接通。求 $t>0$ 时的全响应 u_C。



解：　由 KVL 得：

$$u_L + u_C = L\frac{di_L}{dt} + u_C = 20\text{V} \qquad (1)$$

由 KCL 得：

$$-i_L + i_R + i_C = -i_L + \frac{8}{7}u_C + \frac{1}{7}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad (2)$$

方程(2)对 t 求导，再将方程(1)代入，经整理得：

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + 8\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + 7u_C = 140 \qquad (3)$$

因为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{20\text{V}}{7/8\Omega} = \frac{160}{7}\text{A}$$

所以 u_C 及其导数的初始条件为

$$\begin{cases} u_C(0_+) = u_C(0\_) = 10\text{V} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+} = \dfrac{1}{C}[i_L(0_+) - \dfrac{u_C(0_+)}{7/8}] = 80 \end{cases} \qquad (4)$$

微分方程(3)的特征方程为：

$$p^2 + 8p + 7 = 0$$

解得

$$p_1 = -1，\quad p_2 = -7$$

稳态时，$u_C(\infty) = 20\text{V}$，所以特解　$u_{Ch}(t) = 20$

设其完全解答为：

$$u_C(t) = 20 + A_1 \mathrm{e}^{-t} + A_2 \mathrm{e}^{-7t} \qquad (5)$$

由初始条件(4)得

$$\begin{cases} u_C(0_+) = A_1 + A_2 + 20 = 10 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}|_{t=0+} = -A_1 - 7A_2 = 80 \end{cases}$$

解得

$$A_1 = 1.67，\quad A_2 = -11.67$$

所以将 A_1 、 A_2 代入(5)得：

$$u_C(t) = [20 + 1.67\mathrm{e}^{-t} - 11.67\mathrm{e}^{-7t}]\,\mathrm{V}$$