第3章

第3章 离散时间信号的傅里叶变换

3.1 CTFS， CTFT

3.2 DTFT

3.3 CT信号的抽样

3.4 DTFS，DFS

为了引出DFT

3.5 DFT 重点内容

3.6 用DFT计算线性卷积

3.7 与DFT有关的几个问题

3.8 二维傅里叶变换

3.9 Hilbert 变换

傅里叶变换是信号分析与处理的基本工具

3.7 与DFT有关的几个问题

一、分辨率

分辨率问题是信号处理中的基本问题，包括频率分辨率和时间分辨率。

频率分辨率：通过频域窗观察到的频率宽度

时间分辨率：通过时域窗观察到的时间宽度

希望 { 窗函数的“宽度”越小越好！
窗函数的“宽度”能随信号的变化而自适应地调整！

仪器系统分辨率，传感器分辨率，图像分辨率、显示分辨率

频率分辨率又可定义为：将信号中两个靠的很近的谱峰区分开的能力。

频率分辨率：一是取决于信号的长度，二是取决于频谱分析的算法。

时间和**频率**是描述信号的两个主要物理量，它们通过**傅里叶变换**相联系。

$$\begin{cases} X(\mathrm{j}\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t \\ x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega \end{cases}$$

FT

$$\begin{cases} X(e^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-\mathrm{j}\omega n} \\ x(n) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{\mathrm{j}\omega})e^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega \end{cases}$$

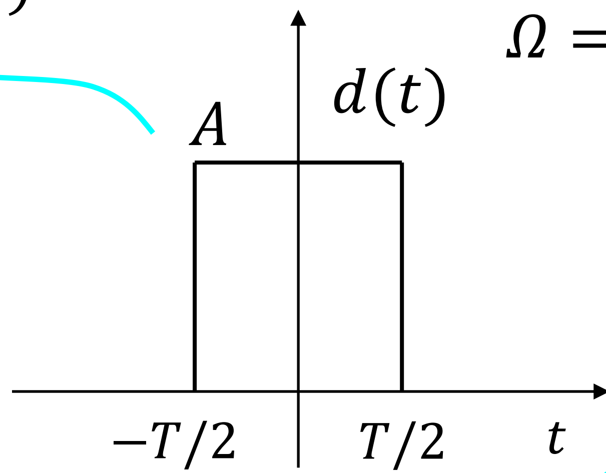
DTFT

对 **FT**：设$x_T(t)$长度为T，频率分辨率

$X_T(\mathrm{j}\Omega)$的分辨率　　$\Delta f = 1/T(\mathrm{Hz})$?

$\propto$?

$x_T(t) = x(t)d(t)$

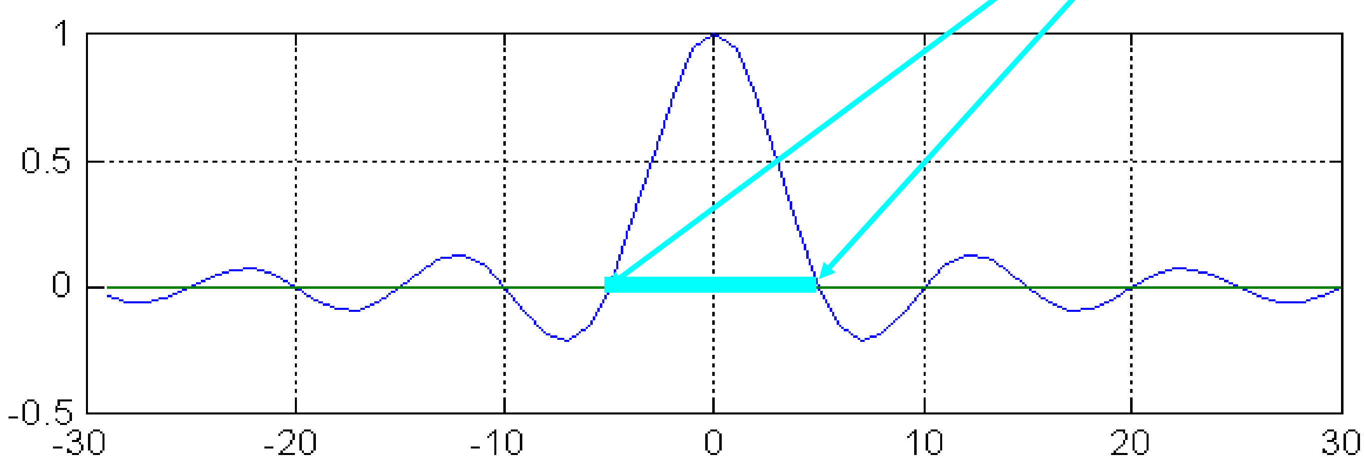


$\Omega = 2\pi f \rightarrow \Delta\Omega = 2\pi\Delta f$

$\Delta\Omega = 4\pi/T$

$|\Omega| = \dfrac{2\pi}{T}$

$D(\mathrm{j}\Omega) = AT\dfrac{\sin(\Omega T/2)}{\Omega T/2}$



主瓣宽度反比于时间长度

对 **DTFT**：设抽样间隔为T_s，$N=T/T_s$，频率分辨率

$N=T/T_s$，$\Omega=2\pi f$

$\omega=\Omega T_s=2\pi f/f_s$

$\Delta\omega=2\pi\Delta f/f_s$

$2\pi/N\le|\Delta\omega|=2\pi\Delta f/f_s$

$\Delta f\ge f_s/N$

$\Delta f\ge 1/NT_s=1/T$

$x_T(t)\Rightarrow x_N(n),\quad n=0,1,\cdots,N-1$

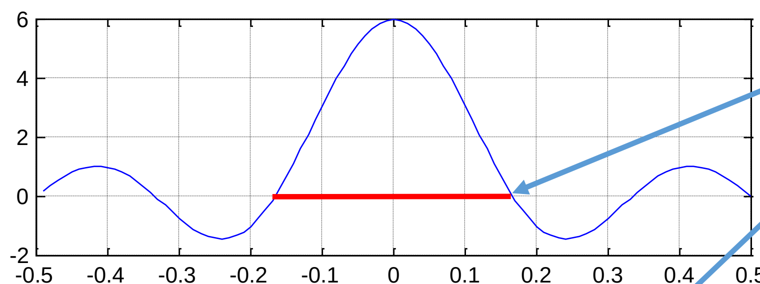
$x_N(n)=x(n)d(n)$ $\boxed{\text{矩形窗}}$

$X_N(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})*D(e^{j\omega})$

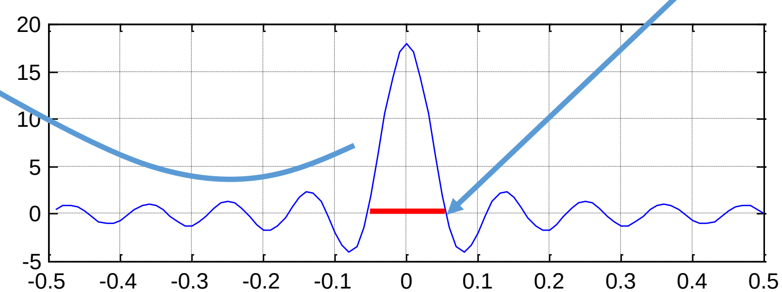
3dB频谱宽度为$2\pi/N$

$$D_g(e^{j\omega})=\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

$\frac{2\pi}{N}$



(a) N=6



(b) N=18

主瓣宽度反比于时间长度

用计算机分析和处理信号时，信号总是有限长，其长度即是数据窗的宽度，要想分辨出 ω_1, ω_2 处的两个频谱，数据长度必须满足：

$$\frac{4\pi}{N}k < |\omega_1 - \omega_2|$$

对矩形窗，$k = 1$，其他类型的窗函数，$k > 1$

不同的窗函数在频率分辨率和频谱泄露之间…

这为数据长度的选择提供了依据。

$$\left.\begin{aligned} \Delta f &= 1/T \\ \Delta\Omega &= 4\pi/T \\ \Delta\omega &= 4\pi k/N \end{aligned}\right\}$$

"物理分辨率"：取决于信号的有效长度。

$\Omega = 2\pi f$

3dB

对**DFT**:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}\qquad k=0,1,\cdots N-1$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}\qquad n=0,1,\cdots,N-1$$

计算分辨率

$\Delta f=f_s/N$，N为执行DFT计算时的数据点数!

此为$X(k)$相邻两点的频率间隔，也是最大分辨“细胞”。若想要分辨出f_1,f_2处的两个谱峰，$|f_1-f_2|$必须大于Δf。

$$\Delta\omega=2\pi\Delta f/f_s$$

$$\Delta\omega=\omega_{k+1}-\omega_k=2\pi/N$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta f&=f_s/N\\ N&=T/T_s\end{aligned}\right\}\text{此}N\text{非彼}N$$

该式的推导和理解。又如何与$\Delta f=1/T(\mathrm{Hz})$联系上?

物理分辨率

例1:

$$x(n) = \sin(2\pi f_1 n/f_s) + \sin(2\pi f_2 n/f_s) + \sin(2\pi f_3 n/f_s)$$

$$f_1 = 2\,\text{Hz}, \quad f_2 = 2.02\,\text{Hz}, \quad f_3 = 2.07\,\text{Hz}, \quad f_s = 10\,\text{Hz},$$

试确定将三个谱峰分开所需要的数据的长度。

在本例中，最小的频率间隔

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 0.02\text{Hz}$$

$$\Delta\omega = 2\pi\frac{\Delta f}{f_s} = 2\pi 0.002$$

由 $$\frac{4\pi}{N} < |\omega_1 - \omega_2|$$

有 $$N > \frac{4\pi}{2\pi(0.002)} = 1000$$

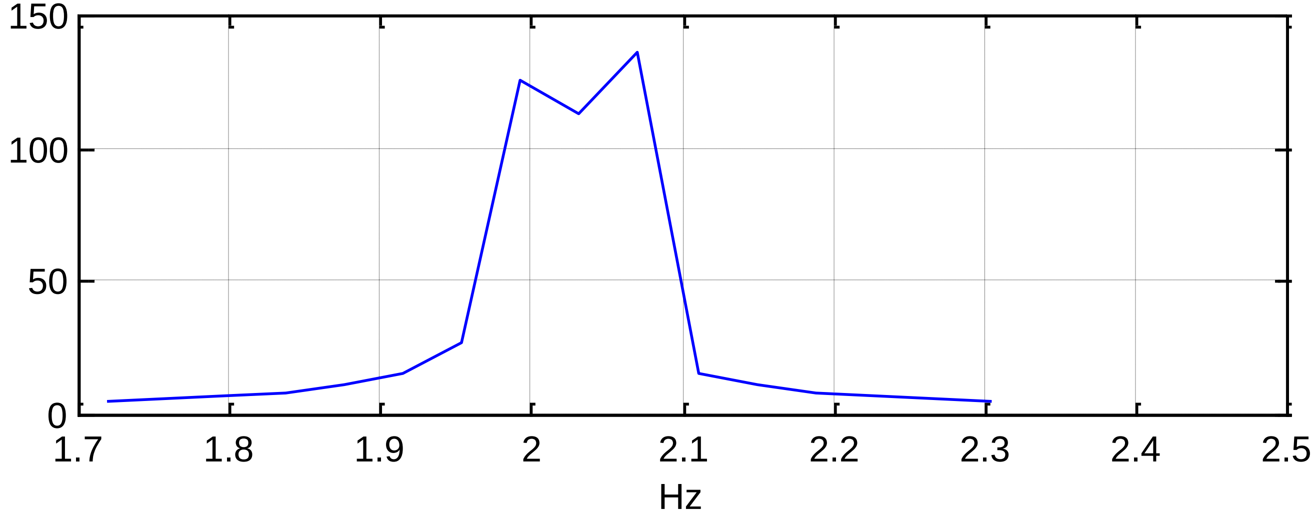
即要想分辨出这三个谱峰，数据的长度至少要大于1000，从DFT的快速计算需求看

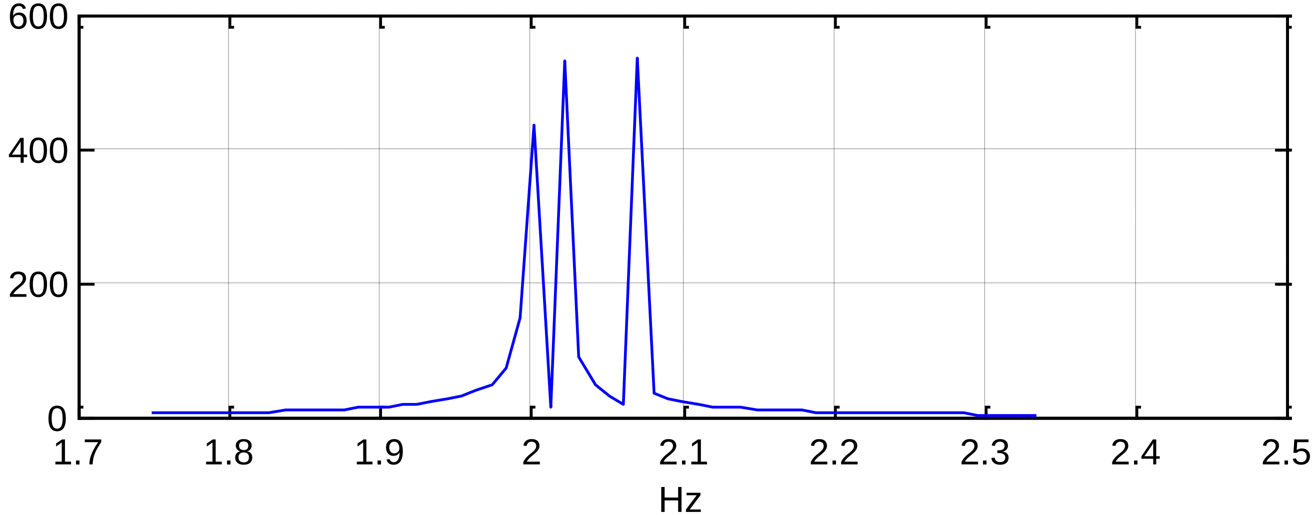
令 $N = 1024$

则 $$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{10}{1024} = 0.00976\text{Hz}$$

下图，N 分别等于256和1024，可见，

$N=256$ 时无法分辨三个谱峰。





使用DFT的步骤

- 由信号的最高频率f_c确定抽样频率f_s
- 根据需要确定频率分辨率Δf
- 确定DFT点数$N = f_s/\Delta f$，且尽量满足2的整次幂
- 确定模拟信号的长度$T = N/f_s = NT_s$
- 根据 DFT 的结果，再适当调整参数。

DFT和线性卷积是信号处理中两个最重要的基本运算，有快速算法，且二者是“相通”的。

更多讨论

T 不变，若增加 $N \Rightarrow N' \uparrow$，$\Delta f' \downarrow$

$\boxed{\text{计算分辨率} \uparrow}$

增加数据的点数？

1. 提高抽样率；
2. 在数据后面补零。

能提高物理分辨率吗？

补零并没有增加新的信息。
频域抽样加密就对应时域序列补零！

$N = T/T_s \qquad \Delta f = f_s/N$

$N' = T/T_s' \qquad \Delta f' = f_s'/N' = \Delta f$

$\boxed{\text{不能提高物理分辨率}}$

数据后补零的影响：为什么要补零?

- 不能提高分辨率，没有增加数据有效长度!
- 数据过短，补零后可起到一定的插值作用;
- 使数据长度为 2 的整次幂，有利于FFT。

例2:

$$x(n) = \sin(2\pi f_1 n \frac{1}{f_s}) + \sin(2\pi f_2 n \frac{1}{f_s}) + \sin(2\pi f_3 n \frac{1}{f_s})$$

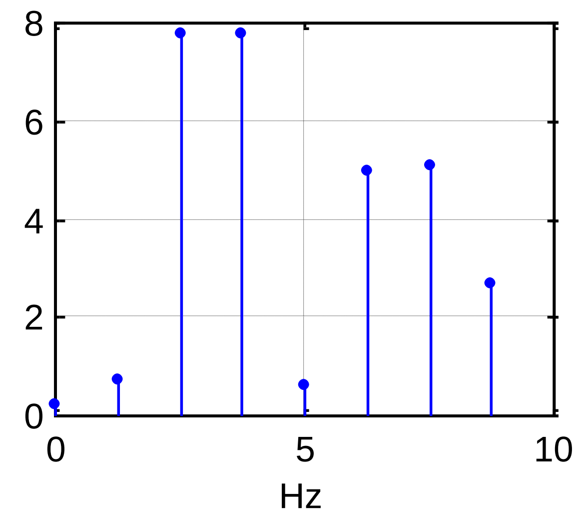
$f_1 = 2.67\ \mathrm{Hz}$, $f_2 = 3.75\ \mathrm{Hz}$, $f_3 = 6.75\ \mathrm{Hz}$, $f_s = 20\ \mathrm{Hz}$,

$X(e^{\mathrm{j}\omega})$在正频率处应该有三根谱线

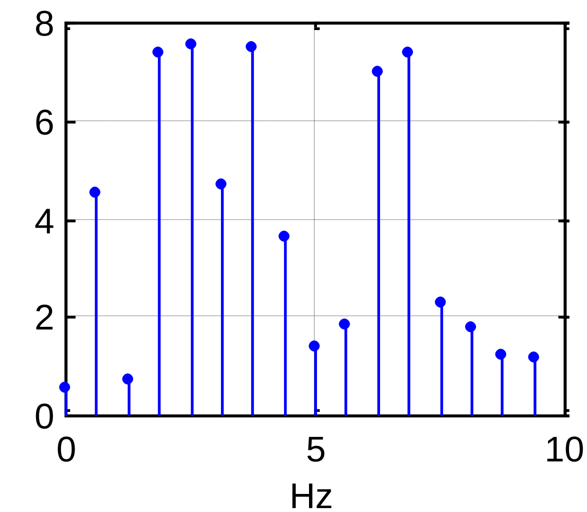
令$N = 16$

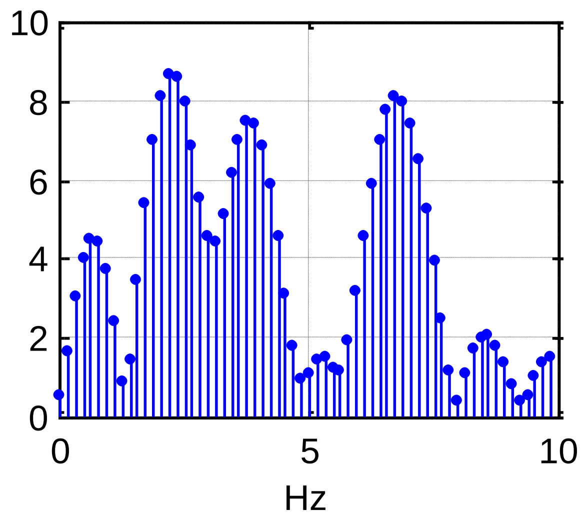
$N = 16$

几根谱线？

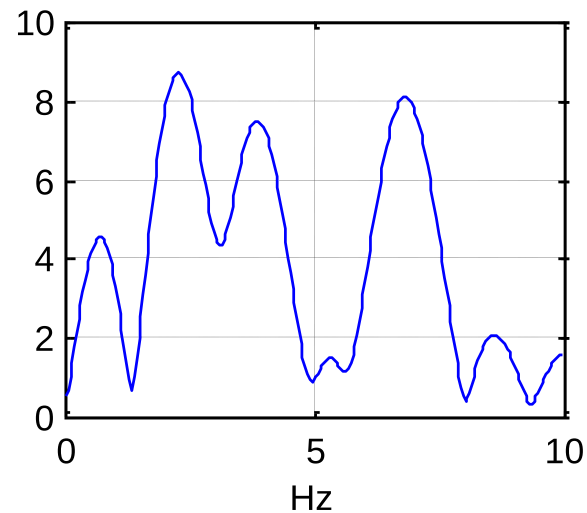


补N个零（谱线？）





补7N个零



补29N个零

三个正弦

二、DFT对 FT的近似

原：　$x_a(t)$　频谱：　$X_a(j\Omega)$

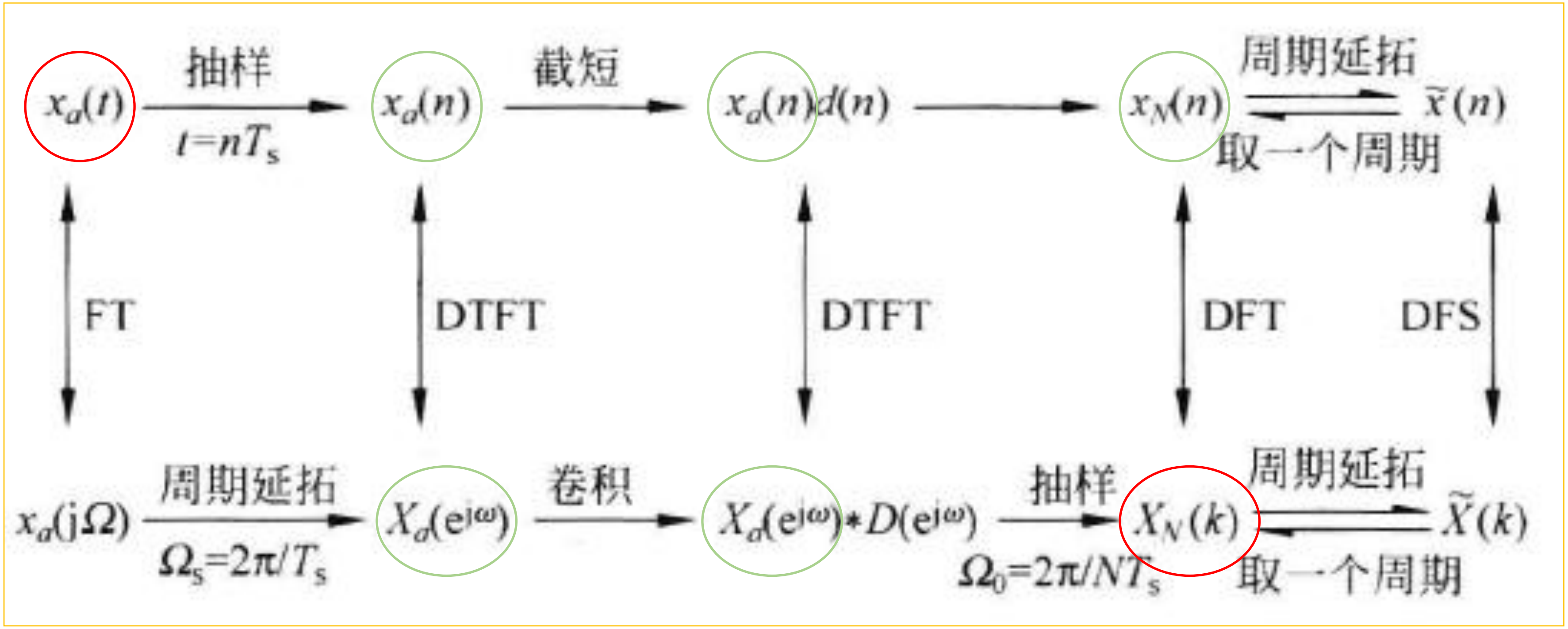
抽样：　$x_s(n)$　频谱：　$X_s(e^{j\omega})$

截短：　$x(n)$　频谱：　$X(k)$

问题1：$X(k)$ 是否是$X_a(j\Omega)$的准确抽样？

- 只要满足抽样定理；
- 做 DFT 时数据的长度保证所需的频率分辨率；则$X(k)$是$X_a(j\Omega)$的极好近似。

问题2：$X_N(k)$的反变换$x_N(n)$是否是$x_a(t)$的准确抽样?



该图关联CTFT、DTFT、DFT、DFS，以及之间的关系；有时域抽样、截短、卷积，频域乘积、抽样，还有三个周期延拓。

总结在导出DFT过程中有几个“周期延 拓”?

信号的时宽和带宽不可能同时缩小，也不可能同时扩大，二者也不可能同为有限值。若信号是有限时宽的，那么在频域必然是无限带宽的，反之亦然。参见信号时宽－带宽的不定原理。

这一现象也可从加窗的角度来理解，即矩形窗的频谱是无限宽的。这一现象，来自傅里叶变换的性质：

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathrm{FT}} X(\mathrm{j}\Omega)$$

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathrm{FT}} \frac{1}{|a|}X(\mathrm{j}\frac{\Omega}{a})$$

做 DFT 时，总不可避免的取有限长，“有限长”带来了 $X(k)$ 对 $X_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\Omega)$ 的近似。

搞清如下几个式子的含义

$$X_{\mathrm{s}}(e^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{1}{T_{\mathrm{s}}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\Omega - \mathrm{j}l\Omega_{\mathrm{s}}) \Bigg|_{\Omega=\omega/T_s}$$

$$X(e^{\mathrm{j}\omega}) = X_{\mathrm{s}}(e^{\mathrm{j}\omega}) * D(e^{\mathrm{j}\omega})$$

$$X_N(k) = X(e^{\mathrm{j}\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0,1,\cdots,N-1$$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} X_N(k+lN) \quad k = 0,1,\cdots,N-1$$

$$x_{\mathrm{s}}(n) = x_{\mathrm{a}}(t)\Big|_{t=nT_{\mathrm{s}}} \quad n = -\infty,\cdots,\infty$$

$$x_N(n) = x_{\mathrm{s}}(n)d(n), \quad n = 0,1,\cdots,N-1$$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_N(n+lN), \quad n = 0,1,\cdots,N-1$$

例3:

例 3.7.4 设序列 $x_a(n)$ 的长度 $M=8$，且 $x_a(n)=\{8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$。现对 $x_a(n)$ 的 DTFT $X_a(e^{j\omega})$ 在一个周期内做 $N=6$ 点的均匀抽样，得 $X_N(k)$，试研究 $X_N(k)$ 的反变换 $x_N(n)$ 和原序列 $x_a(n)$ 的关系。

解 不论是用(3.7.14)式做理论分析还是通过计算，都会得出

$$x_N(n) = \{10, 8, 6, 5, 4, 3\} \tag{3.7.21}$$

显然，$x_N(0)=x_a(0)+x_a(6)$，$x_N(1)=x_a(1)+x_a(7)$，$x_N(2)=x_a(2)$，…，$x_N(5)=x_a(5)$。这种现象是由于(3.7.14)式的时域周期延拓所造成的。将原来 8 点的序列 $x_a(n)$ 延拓成周期 $N=6$ 的周期序列，必然会发生时域的混叠。混叠的方式是上一周期的后两点和本周期的前两点相加，即有

$$\begin{array}{llllllllllllllllllll}
8, & 7, & 6, & 5, & 4, & 3, & 2, & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 8, & 7, & 6, & 5, & 4, & 3, & 2, & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 8, & 7, & 6, & 5, & 4, & 3, & 2, & 1
\end{array}$$

$$x_N(n)=\{10, 8, 6, 5, 4, 3\}$$

即得(3.7.21)式的结果。

例题：设$x_a(t)=a^t u(t), |a|<1$，现用DFT对做$x_a(t)$频谱分析。试讨论在做DFT时数据长度N的选择对分析结果的影响。

解 将 $x_a(t)$ 抽样得 $x_a(n)$，即 $x_a(n)=x_a(t)|_{t=nT_s}$，$x_a(n)$ 的 DTFT 是

$$X_a(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-j\omega n}=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \tag{3.7.22}$$

现对 $X_a(e^{j\omega})$ 在一个周期内做 N 点均匀抽样，得

$$X_N(k)=X_a(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=\frac{1}{1-a\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}k\right)},\quad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{3.7.23}$$

对 $X_N(k)$ 做 IDFT 时所得到的序列记为 $x_N(n)$，则

$$x_N(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right)}{1-a\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}k\right)},\quad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{3.7.24}$$

对照(3.7.22)式，现将(3.7.24)式的分母展成泰勒级数形式，则

$$x_N(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right)\left[\sum_{r=0}^{\infty}a^r\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kr\right)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{\infty} a^{r}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left[\mathrm{j}\,\frac{2\pi}{N}(n-r)k\right]\right\},\quad n=0,1,\cdots,N-1$$

上式中花括号内只有当 $r=n+mN$ 时才有值，且其值为 N，这样

$$x_N(n)=\sum_{\substack{r=0\\ r=n+mN}}^{\infty} a^{r},\quad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{3.7.25}$$

式中，由于 n 和 r 只取正值，所以 m 也只能取正值。现将上式对 r 的求和改为对 m 的求和，于是有

$$x_N(n)=\sum_{m=0}^{\infty} a^{n+mN} = a^{n}\sum_{m=0}^{\infty}(a^{N})^{m}$$

即

$$x_N(n)=\frac{a^{n}}{1-a^{N}},\quad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{3.7.26}$$

这样，对给定的序列 $x_a(n)=a^n u(n)$，我们找到了由 IDFT 求出的 $x_N(n)$ 和原序列 $x_a(n)$ 的关系。在(3.7.26)式中，若 $N\to\infty$，则 $a^N\to 0$，这样，$x_N(n)=a^n=x_a(n)$。若 N 为有限长，那么 $a^N\neq 0$，$x_N(n)$ 在 $n=0,1,\cdots,N-1$ 的范围内近似于 $x_a(n)$。这一近似，表面上看是由于(3.7.26)式的分母不等于 1 所造成的，实际上是由于(3.7.14)式的时域周期延拓所造成的。显然，N 取得越大，混叠越轻，$x_N(n)$ 对 $x_a(n)$ 的近似越好。

DFT对FT的近似问题的总结

（1）存在时域、频域中的周期延拓
（2）信号的时宽和带宽存在制约关系——“不定原理”
（3）时域采样周期要足够小，点数要足够多（信号的有效长度要足够长）

减轻频域混叠（时域离散对应频域周期延拓相加）

$$X_s(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jl\Omega_s)\Big|_{\Omega=\omega/T_s}$$

减轻时域混叠（频域离散对应时域周期延拓相加）和窗口效应（时域乘积->频域卷积过程中窗函数的长度增加，可以减轻窗口效应）

$$\tilde{x}(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_N(n+lN), \quad n = 0,1,\cdots,N-1$$

再次强调：$X(e^{j\omega}) = X_s(e^{j\omega}) * D(e^{j\omega})$

3.8 二维傅里叶变换(1)

二维图像及其傅里叶变换

- 二维图像的成像过程
- 二维图像的表示
- 二维图像的采样
- 图像的频域变换：傅里叶变换
  - 二维离散傅里叶变换的性质
  - 二维离散傅里叶变换的显示
- 图像的频域变换：快速傅里叶变换
- 图像傅里叶变换的应用

二维图像的成像过程

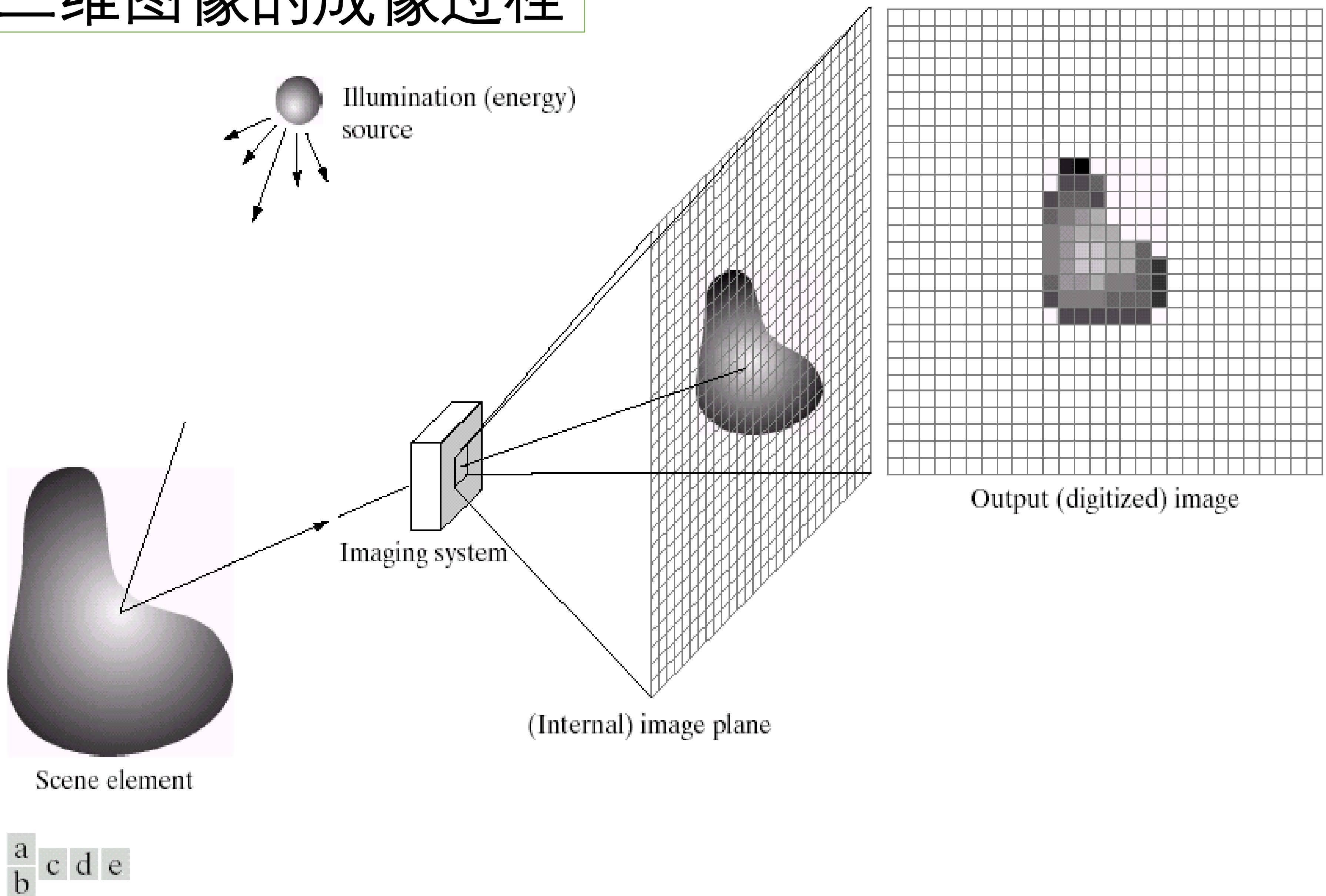
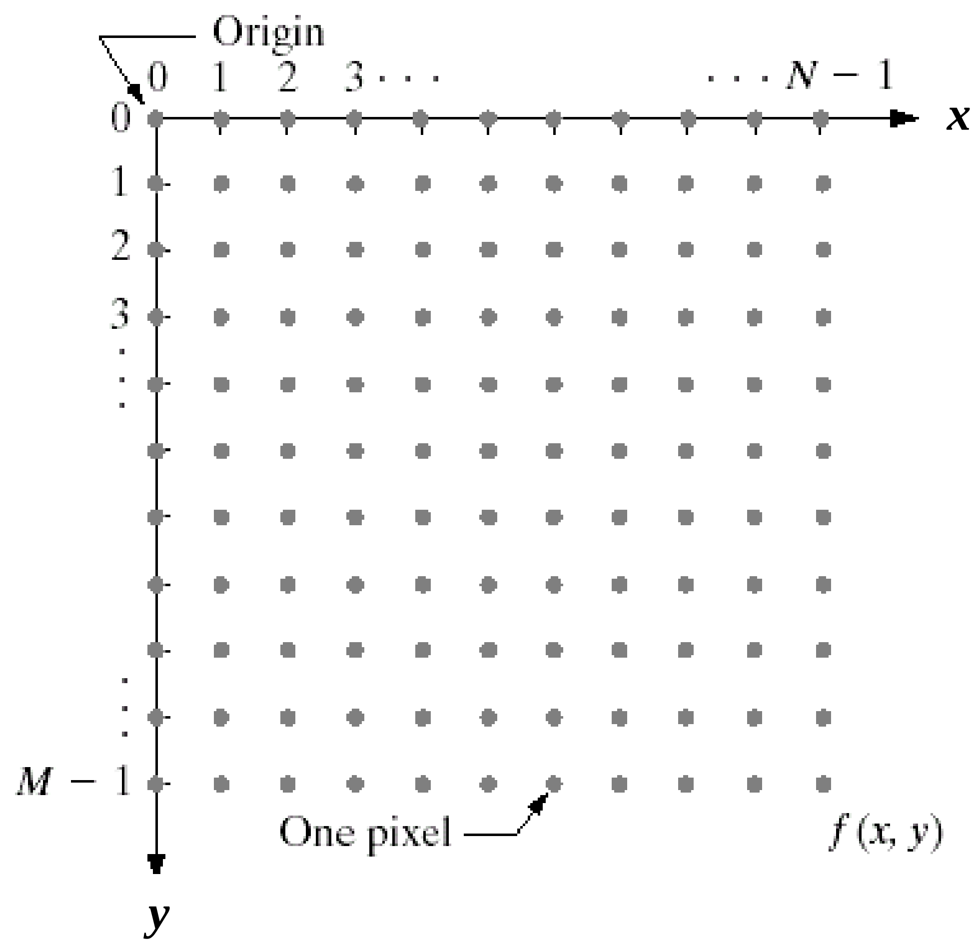


FIGURE 2.15 An example of the digital image acquisition process. (a) Energy ("illumination") source. (b) An element of a scene. (c) Imaging system. (d) Projection of the scene onto the image plane. (e) Digitized image.

基本概念：图像的表示

- 矩阵表示
  - 图像是象素的二维排列
  - 一般采用均匀采样
    - 像素行、列之间的 间隔相等
    - 二维排列形成一个 矩阵
  - 特殊情况下，亦可采用非均匀采样

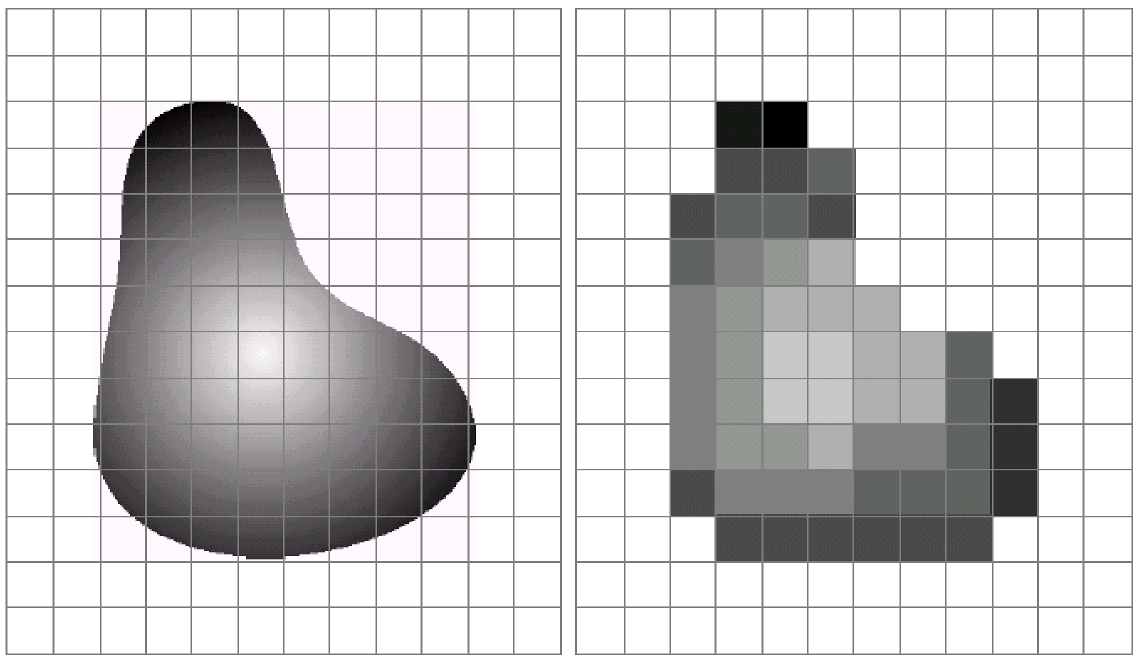


基本概念：图像的表示

- **数学表示**
  - **二维离散函数：** $I = f(x, y)$
    - ✓ x, y表示图象象素的坐标
    - ✓ 函数值f表示在坐标(x, y)处象素的亮度值
  - **二维矩阵：** $A[m, n]$
    - ✓ m, n表示图象的宽和高
    - ✓ 矩阵元素$a(i, j)$表示图像在第i行，第j列的像素值

基本概念：图像的采样

- 连续的图像信号先要在空间上进行离散化后才能被计算机处理。
- 为了达到对原来连续图像信号较好的近似，需要多大的采样率？



a b

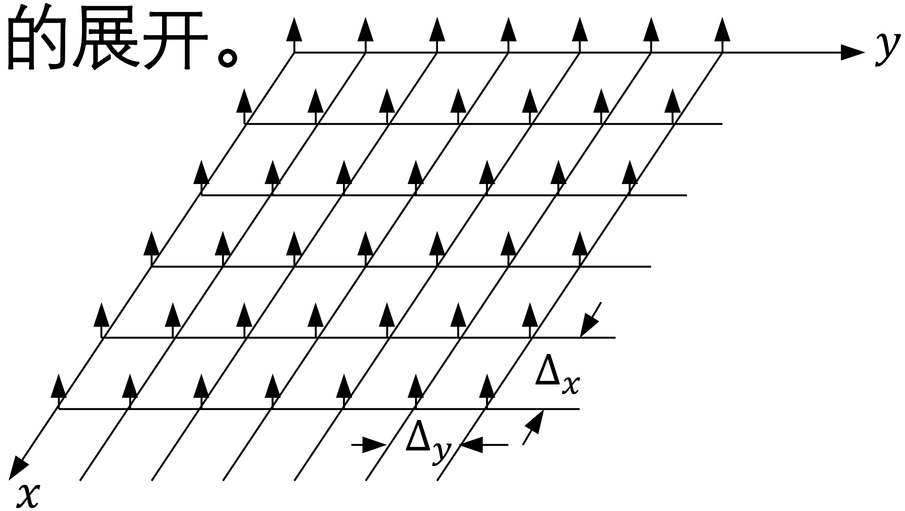
FIGURE 2.17 (a) Continuos image projected onto a sensor array. (b) Result of image sampling and quantization.

基本概念：图像的采样

设图像$f(x,y)$是一连续二维信号，其空间频谱$F(f_x,f_y)$在x方向具有截止频率f_{xc}，在y方向具有截止频率f_{yc}。所谓采样是对$f(x,y)$乘以空间采样函数：

$$s(x,y)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\delta(x-i\Delta_x,y-j\Delta_y)$$

式中Δ_x和Δ_y为x、y两个方向的采样间隔，上式为脉冲函数$\delta(x,y)$沿x、y两个方向的展开。



二维采样函数的图形表示

基本概念：图像的采样

经过采样以后所得的信号为：

二维Nyquist条件

$$f_s(\Delta_x, \Delta_y) = f(x, y) \cdot s(x, y)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\Delta_x, j\Delta_y)\delta(x - i\Delta_x, y - j\Delta_y)$$

只有在$i\Delta_x$和$j\Delta_y$的采样点上，f_s才有数值。

为使采样信号$f_s(\Delta_x, \Delta_y)$能完全恢复原来连续信号$f(x, y)$，采样间隔Δ_x和Δ_y就必须满足

$$\Delta_x \le \frac{1}{2f_{xc}} \qquad \Delta_y \le \frac{1}{2f_{yc}}$$

一维空间采样的 **Nyquist** 条件在二维空间的重现；在x和y方向的采样频率必须大于图像在x和y方向最高频率的两倍。

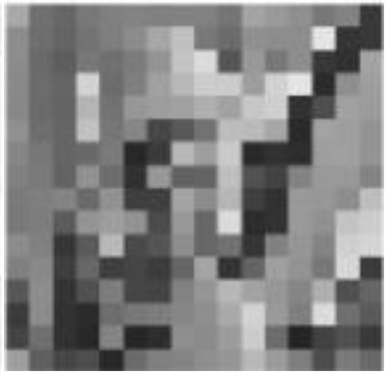
图像数字化：图像的亚采样

- 图像的亚采样：采样频率低于**Nyquist**采样频率
  - 除了降低采样频率，也可以将按采样定理获得的图像再抽 样，即每隔K个像素，保留**1**个像素，其余的丢掉，重构时 用内插法恢复丢失的数据。


原图


每隔**2**个像素保留**1**个像素采样后恢复图像


每隔**4**个像素保留**1**个像素采样后恢复图像


每隔**16**个像素保留**1**个像素采样后恢复图像

图像的频域变换：傅里叶变换

二维连续傅里叶变换

二维连续傅里叶变换，由一维傅里叶变换推广而来

$$F(u,v)=\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty}f(x,y)\exp\bigl(-\mathrm{j}2\pi(ux+vy)\bigr)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

逆变换

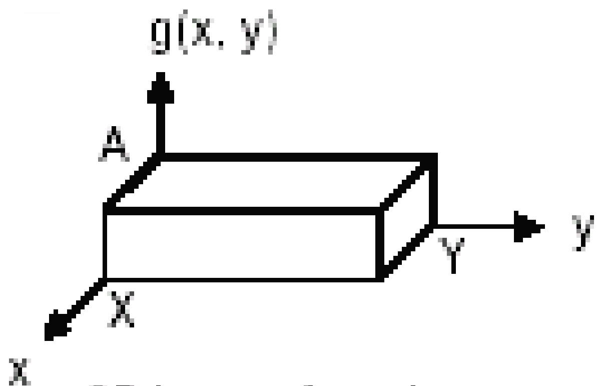
$$f(x,y)=\int_{u=-\infty}^{\infty}\int_{v=-\infty}^{\infty}F(u,v)\exp\bigl(\mathrm{j}2\pi(ux+vy)\bigr)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$F(u,v)=R(u,v)+\mathrm{j}I(u,v)$$

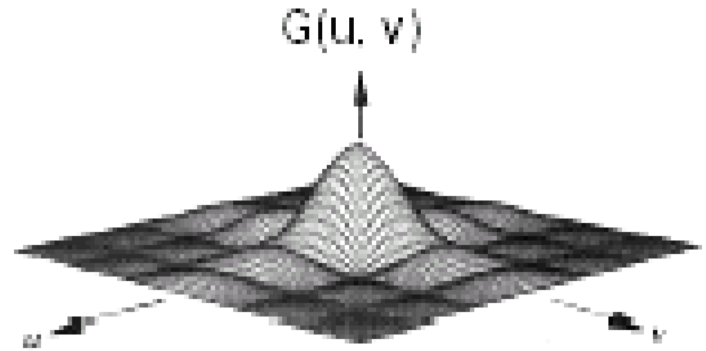
幅度谱 $|F(u,v)|=\sqrt{R^2(u,v)+I^2(u,v)}$

相位谱 $\varphi(u,v)=\arctan(I(u,v)/R(u,v))$

图像的频域变换：傅里叶变换

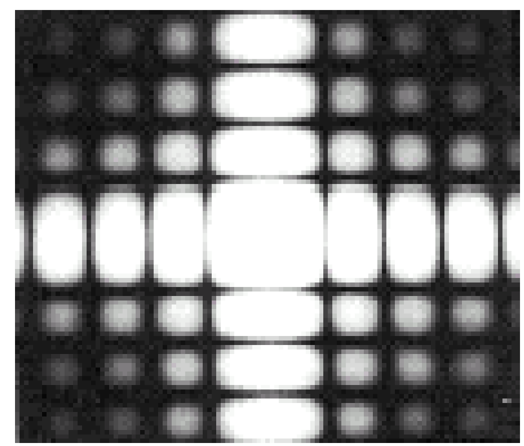


2D image function



frequency spectrum

Note that large spectral amplitudes occur in directions vertical to prominent edges of the image function



frequency spectrum as an intensity function

图像的二维傅里叶变换图例

图像的频域变换：傅里叶变换

二维离散傅里叶变换

对于二维傅里叶变换，其离散形式为：

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp\left(-\mathrm{j}2\pi(ux/M+vy/N)\right)$$

逆变换为

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp\left(\mathrm{j}2\pi(ux/M+vy/N)\right)$$

$$F(u,v)=R(u,v)+\mathrm{j}I(u,v)=|F(u,v)|e^{\mathrm{j}\varphi(u,v)}$$

幅频谱 $$|F(u,v)|=\sqrt{R^2(u,v)+I^2(u,v)}$$

相位谱 $$\varphi(u,v)=\arctan(I(u,v)/R(u,v))$$

图像的频域变换：傅里叶变换

- **离散傅里叶变换的幅度与相位**
  - ✓图像信号的傅里叶变换包含幅度与相位两部分
  - ✓幅度谱具有较明显的信号结构特征和易于解释
    - ✓实验证明，幅度本身只包含有图像本身含有的周期结构，并不表示其在何处
  - ✓相位谱类似随机图案，一般难以进行解释
    - ✓物体在空间的移动，相当于频域的相位移动，相位谱具有同样重要的意义

单凭幅度或相位信息，均不足以恢复原图像

二维离散傅里叶变换的性质

1. 线性性质（加法定理）

$$a_1 f_1(x,y) + a_2 f_2(x,y) \Leftrightarrow a_1 F_1(u,v) + a_2 F_2(u,v)$$

傅里叶变换是线性系统、函数和的傅里叶变换等于各函数傅里叶变换的和。

2. 比例性质（相似性定理）

$$f(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{ab} F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$$

比例特性表明：信号在时域中压缩（变化速度加快）等效于在频域扩展（频带加宽）；反之亦然。

二维离散傅里叶变换的性质

3. 可分离性

$$F(u,v)=F_x\{F_y[f(x,y)]\}=F_y\{F_x[f(x,y)]\}$$

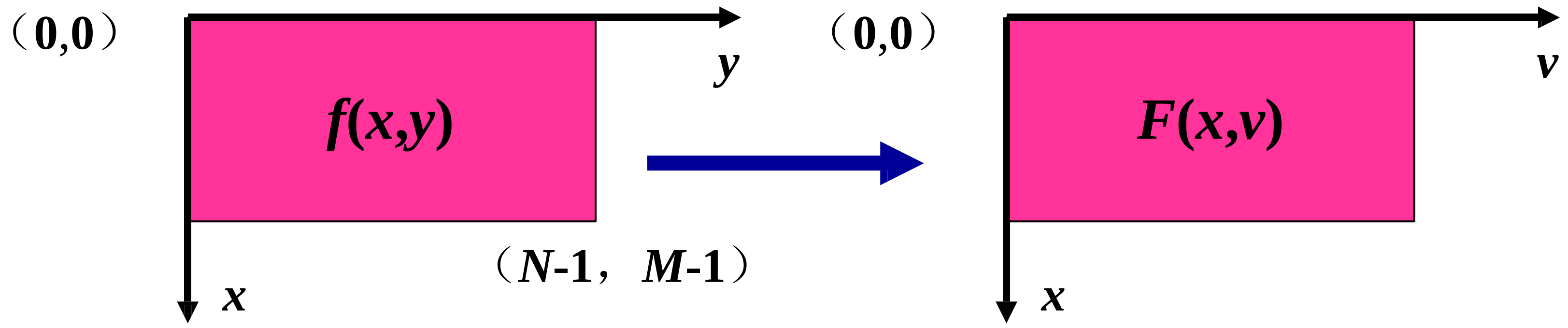
$$f(x,y)=F_u^{-1}\{F_v^{-1}[F(u,v)]\}=F_v^{-1}\{F_u^{-1}[F(u,v)]\}$$

二维DFT可分离为两次一维DFT。

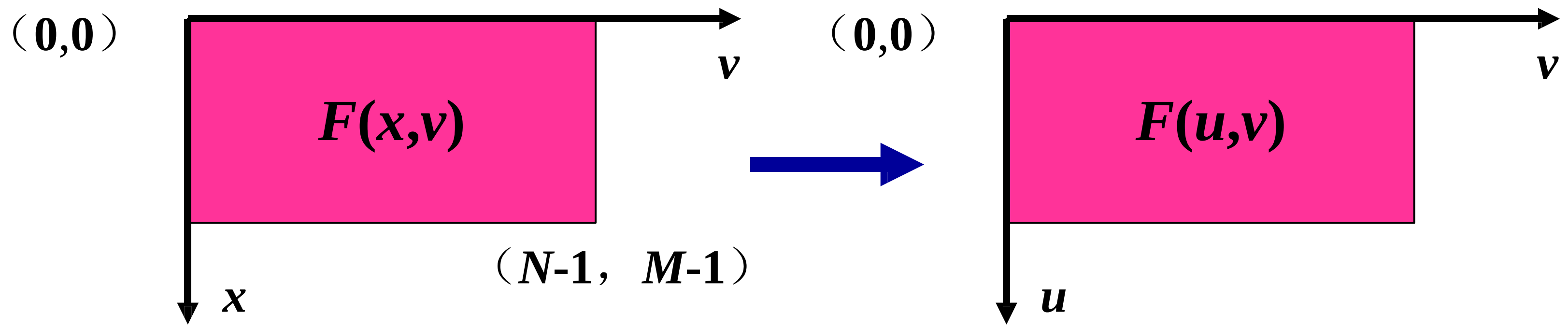
二维离散傅里叶变换的性质

二维DFT的分离计算

- 先对行做变换



- 再对列进行变换



二维离散傅里叶变换的性质

4. 空间位移**(**位移定理**)**

$$f(x-x_0,y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-\mathrm{j}2\pi(ux_0+vy_0)/N}$$

函数自变量的位移的傅里叶变换产生一个复系数，等效于频谱函数的相位谱改变，而幅度谱不变。

5. 频率位移

$$f(x,y)e^{\mathrm{j}2\pi(u_0x+v_0y)/N} \Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

函数的频率位移的相当于傅里叶变换的坐标原点平移，而幅度谱和相位谱不变。

二维离散傅里叶变换的性质

6. 周期性

$$F(u,v) = F(u + aN, v + bN)$$
$$f(x,y) = f(x + aN, y + bN)$$

离散傅里叶变换DFT和它的逆变换是以N为周期的函数。

7. 共轭对称性

若$f(x,y)$为实函数，$F(u,v)$为其傅里叶变换，则

$$F(u,v) \Leftrightarrow F^{*}(-u,-v)$$

图像的傅里叶变换结果是以原点为中心的共轭对称函数。

二维离散傅里叶变换的性质

8. 旋转不变性

$$f(r,\theta+\theta_0)\Leftrightarrow F(\rho,\varphi+\theta_0)$$

对图像的旋转变换和傅里叶变换的顺序是可交换的。

9. 平均值

$$F(0,0)=\frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$

离散函数的均值等于该函数傅里叶变换在(0,0)点的值。

二维离散傅里叶变换的性质

10. 卷积定理

$$f(x,y)*h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$$
$$f(x,y)h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)*H(u,v)$$

空域中的卷积等价于频域中的相乘。

11. 相关定理

互相关： $f(x,y)\circ g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)G^*(u,v)$

$$f(x,y)g^*(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)\circ G(u,v)$$

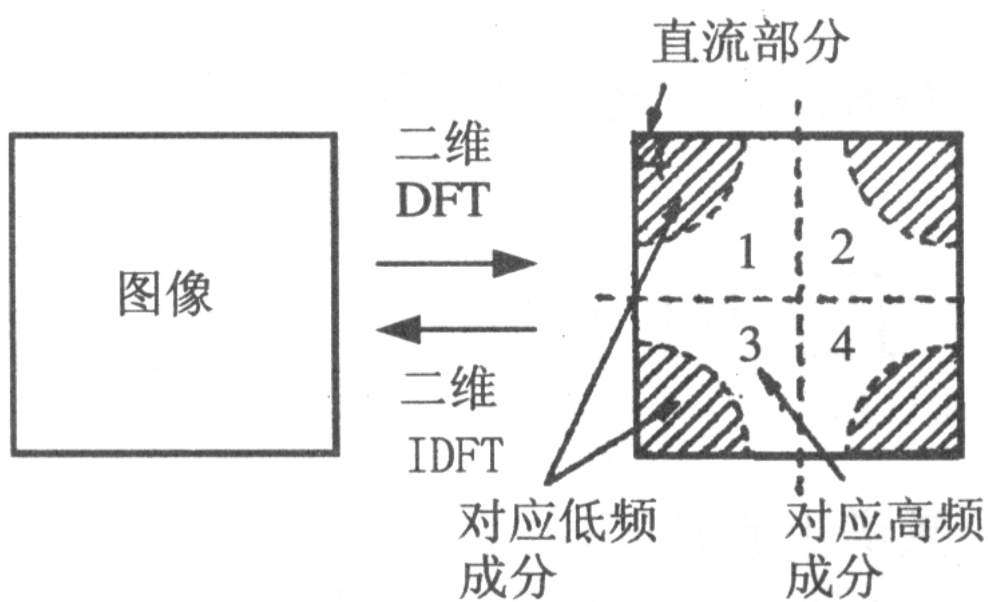
自相关： $f(x,y)\circ f(x,y) \Leftrightarrow |F(u,v)|^2$

$$|f(x,y)|^2 \Leftrightarrow F(u,v)\circ F(u,v)$$

空域中$f(x,y)$与$g(x,y)$的相关等价于频域中$F(u,v)$的共轭与$G(u,v)$相乘（$\circ$表示相关运算）。

二维离散傅里叶变换的显示

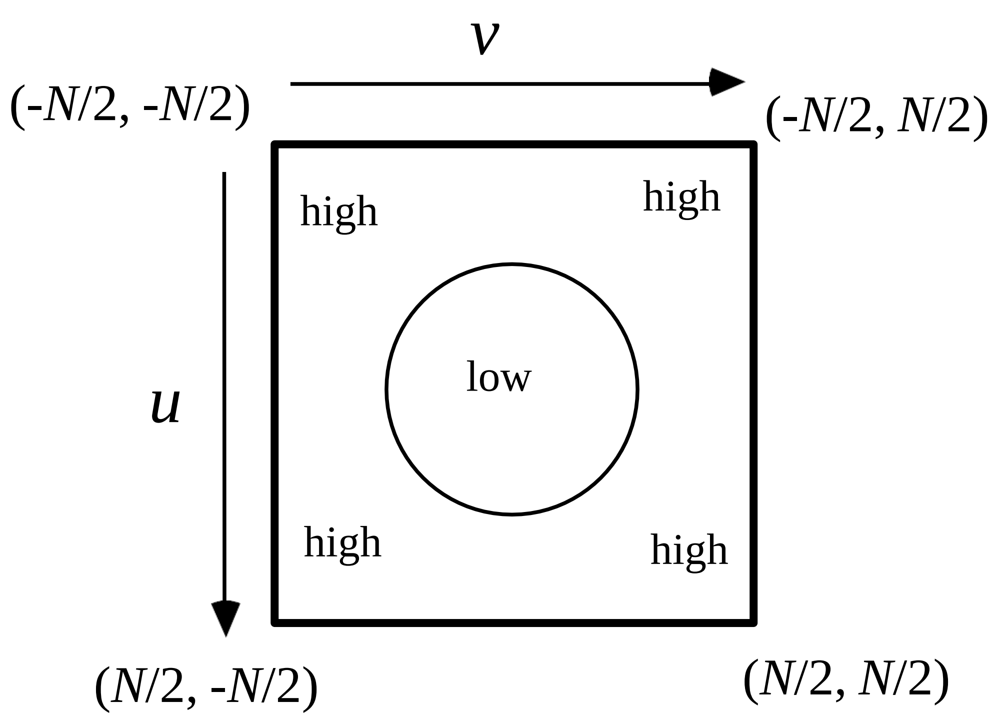
1. 按照标准的傅里叶变换公式，其幅度谱的强度分布具有下列特性。



二维离散傅里叶变换的显示

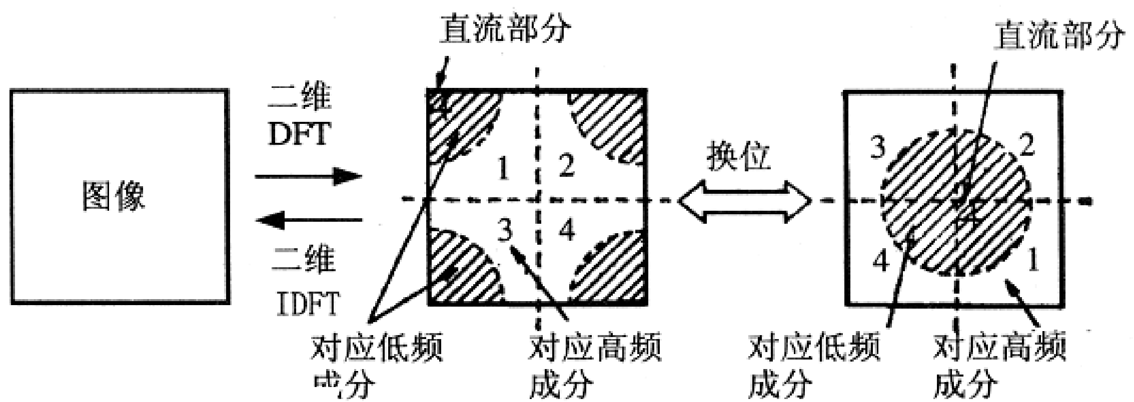
2. 在光学傅里叶变换 中，人们已习惯于变化领域中的低谱部分位于中央。

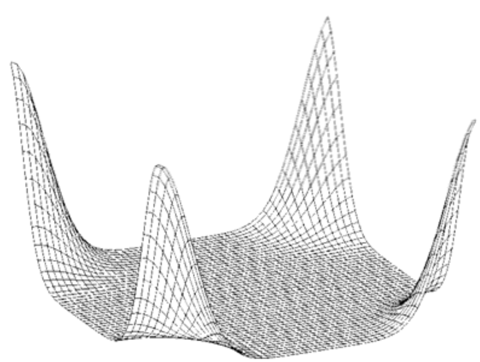
使频域的频谱分布中间低、周围高，有利于对频谱的解释和进行各种计算与分析。



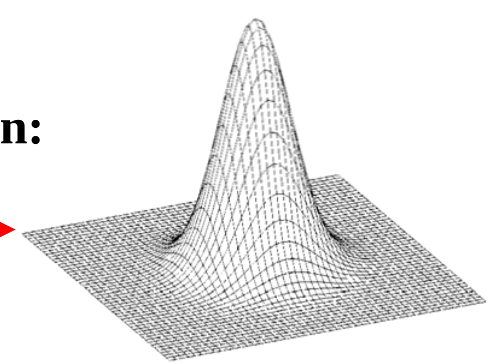
二维离散傅里叶变换的显示

为此，借助于傅里叶变换的周期性与频率位移性质，通常对频域进行换位以使频谱分布符合上述要求：图像中心化。





MATLAB function:
fftshift



二维离散傅里叶变换的显示

使频域的中心位移$u_0 = v_0 = N/2$

$$f(x,y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u-\frac{N}{2}, v-\frac{N}{2})$$

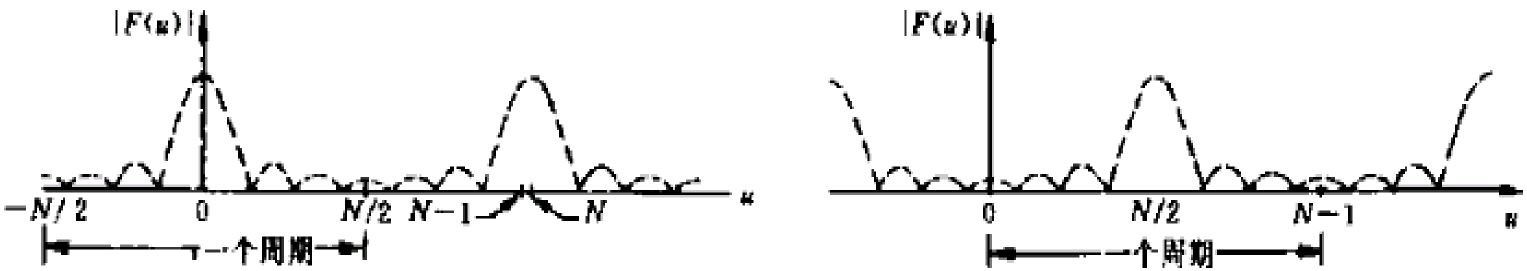
相当于对原始图像$f(x,y)$乘以$(-1)^{x+y}$，再进行傅里叶变换

$$F'(u,v) = F\{f(x,y)(-1)^{x+y}\}$$

对应于$F'(u,v)$的反变换不等于$f(x,y)$

$$f(x,y) = F^{-1}\{F'(u,v)\} \times (-1)^{x+y}$$

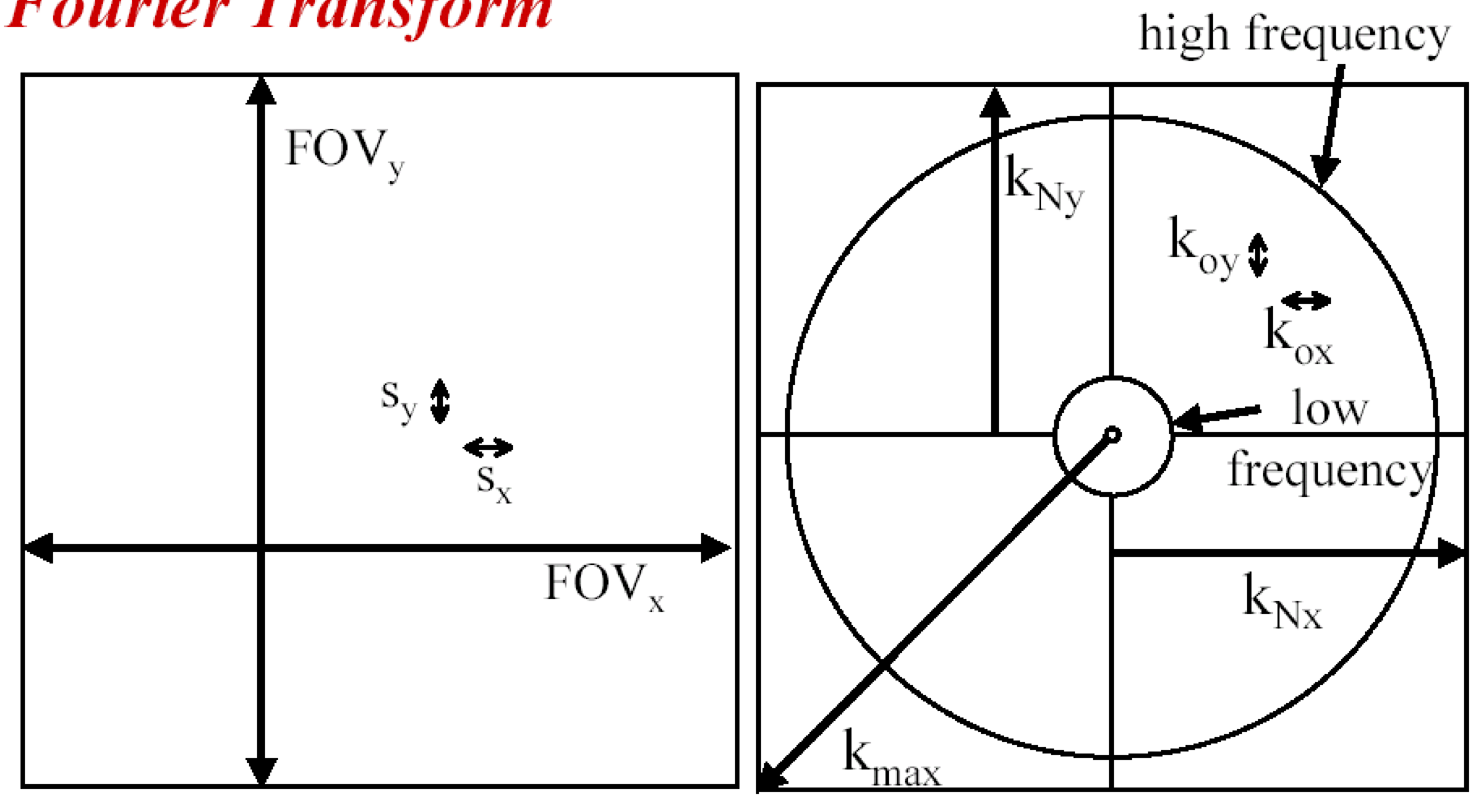
对照：一维信号的频域中心位移



二维离散傅里叶变换的显示

二维傅里叶变换域分布特性

Fourier Transform



Image

Fourier Transform

图像的频域变换：快速傅里叶变换

- **二维快速Fourier变换**

利用傅里叶变换的分离性质，对二维FFT进行2次的一维FFT变换。

$$F(u,v) = \mathrm{FFT}_{行}\{\mathrm{FFT}_{列}[f(x,y)]\}$$

图像傅里叶变换的应用

- 傅里叶变换的应用
  - 在图像高低通滤波中的应用
  - 在图像噪声滤波中的应用
  - 在图像的选择性滤波中的应用
  - 在图像压缩中的应用
  - 在图像增强中的应用