

## 数理方程备课本

授课老师：许雷叶;邮箱：leoasa@mail.ustc.edu.cn

# 第一章、数学物理方程

## 0.1 三类方程的推导

一、弦振动方程（一维波动方程）。

理想化假设：

- (1) 理想弦：细、柔软且线密度 $\rho(x)$ ，躺在 $x$ 轴上，处于 $xu$ 平面内，运动方向垂直于 $x$ 轴， $u = u(t, x)$ 为状态函数；
- (2) 弦处于紧绷状态，张力很大，张力满足胡克定律（例如：一根橡皮筋拉长使其处于紧绷状态，则张力来源于无振动时的长度变化以及弦震动产生的附加，后者相比前者可以忽略不计）；
- (3) 弦做微小上下震动， $|u| \ll 1, u_x \ll 1$ ；
- (4) 所受外力非常小，合力为竖直方向，力密度为 $g(t, x)$ 。

取一段弧线 $[x, x + \Delta x]$ 做受力分解，其竖直方向合力

$$T_1(t, x + \Delta x)u_x(t, x + \Delta x) - T_1(t, x)u_x(t, x) + \int_x^{x+\Delta x} g(t, s)ds.$$

其中 $T_1(t, s)$ 为 $t$ 时刻张力在 $s$ 点的 $x$ 轴分量，因为弦只在竖直方向有运动，该值与 $s$ 无关，为 $T_1(t)$ 。竖直方向合力

$$T_1(t)u_x(t, x + \Delta x) - T_1(t)u_x(t, x) + \int_x^{x+\Delta x} g(t, s)ds.$$

利用牛顿-莱布尼兹公式，竖直方向合力为

$$\int_x^{x+\Delta x} T_1(t)u_{xx}(t, s) + g(t, s)ds.$$

由牛顿第二定律 $F = ma$ ，上式等于

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho(s)u_{tt}(t, s)ds.$$

由所取弧线的任意性，我们得到

$$u_{tt} = \frac{T_1(t)}{\rho}u_{xx} + \frac{g}{\rho}.$$

最后 $T_1(t)$ 近似于弦本身的张力 $T$ 。得到近似公式

$$u_{tt} = \frac{T}{\rho}u_{xx} + \frac{g}{\rho}.$$

设 $a = a(x) = \sqrt{T/\rho}$ ,  $f(t, x) = g/\rho$ ，我们得到

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f.$$

一般来说, 我们总是会假定 $\rho$ 为常数, 因而 $a$ 为常数。

## 二、热传导方程。

理想化假设:

- (1) 介质各向同性且均匀分布 (比热 $c$ , 密度 $\rho$ , 热传导系数 $k$ );
- (2)  $dQ = -k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt$ , 其中  $\frac{\partial u}{\partial n} = (u_x, u_y, u_z) \cdot \vec{n}$ ,  $u$  为温度;
- (3) 内部热源, 设为  $g(t, x, y, z)$  (产生热量密度)。

取一个方体  $(x, x + \Delta x) \times (y, y + \Delta y) \times (z, z + \Delta z)$  以及时间段  $[t, t + \Delta t]$ , 先计算从方体的左边一个面  $\{x\} \times (y, y + \Delta y) \times (z, z + \Delta z)$  流入方体的热量, 法向为  $(1, 0, 0)$ , 因而左边一个面流入方体的热量为

$$Q_{\text{左}} = \int_t^{t+\Delta t} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} -k u_x(s, x, v, w) dv dw ds.$$

再计算从方体的右边一个面  $\{x + \Delta x\} \times (y, y + \Delta y) \times (z, z + \Delta z)$  流入方体的热量, 法向为  $(-1, 0, 0)$ , 因而右边一个面流入方体的热量为

$$Q_{\text{右}} = \int_t^{t+\Delta t} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} k u_x(s, x + \Delta x, v, w) dv dw ds.$$

从而左右两个面合计流入热量为

$$\begin{aligned} Q_{\text{左}} + Q_{\text{右}} &= \int_t^{t+\Delta t} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} k u_x(s, x + \Delta x, v, w) - k u_x(s, x, v, w) dv dw ds \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} k u_{xx}(s, u, v, w) du dv dw ds. \end{aligned}$$

同理

$$Q_{\text{前}} + Q_{\text{后}} = \int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} k u_{yy}(s, u, v, w) du dv dw ds.$$

$$Q_{\text{上}} + Q_{\text{下}} = \int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} k u_{zz}(s, u, v, w) du dv dw ds.$$

总计方体内热量变化

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})(s, u, v, w) + g(s, u, v, w) du dv dw ds.$$

由热力学定律所需热量, 即上式等于

$$\begin{aligned} &\int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} c\rho(u(t + \Delta t, u, v, w) - u(t, u, v, w)) du dv dw \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} c\rho u_t(s, u, v, w) du dv dw ds. \end{aligned}$$

既然我们所取方体是任意的，我们有

$$u_t = \frac{k}{c\rho}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{g}{c\rho}.$$

设  $a = \sqrt{k/c\rho}$ ,  $f = g/c\rho$ , 热传导方程为

$$u_t = \frac{k}{c\rho}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{g}{c\rho} = a^2 \Delta_3 u + f.$$

### 三、泊松方程（静电场的场势方程）。

理想化假设：

- (1) 介质各向同性且均匀分布（介电常数设为  $\varepsilon$ ）；
- (2) 电荷密度，设为  $\rho(x, y, z)$ 。

设  $\vec{E}$  为电场，则与电势有关系  $\nabla_3 \varphi = -\vec{E}$ 。推导依赖高斯定律：通过封闭曲面的电通量=封闭曲面内部载荷除以介电常数。任意封闭曲面  $S$ ，有

$$\int \nabla_3 \cdot \vec{E} dV \stackrel{\text{高斯公式}}{=} \int \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int \frac{\rho}{\varepsilon} dV.$$

从而由封闭曲面选取的任意性，

$$-\Delta_3 \varphi = \nabla_3 \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Leftrightarrow \Delta_3 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

我们也可以用推导热方程的办法推导泊松方程。取一个方体  $(x, x + \Delta x) \times (y, y + \Delta y) \times (z, z + \Delta z)$ ，设  $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ 。计算方体的左边一个面  $\{x\} \times (y, y + \Delta y) \times (z, z + \Delta z)$  的电场通量为

$$\Phi_{\text{左}} = \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} E_1(x, v, w) dv dw.$$

再计算从方体的右边一个面  $\{x + \Delta x\} \times (y, y + \Delta y) \times (z, z + \Delta z)$  的电场通量

$$\Phi_{\text{右}} = \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} E_1(x + \Delta x, v, w) dv dw.$$

从而左右两个面跑出方体的通量为

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{右}} - \Phi_{\text{左}} &= \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} E_1(x + \Delta x, v, w) - E_1(x, v, w) dv dw \\ &= \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} (E_1)_x(u, v, w) du dv dw. \end{aligned}$$

同理

$$\Phi_{\text{后}} - \Phi_{\text{前}} = \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} (E_2)_y(u, v, w) du dv dw.$$

$$\Phi_{\text{上}} - \Phi_{\text{下}} = \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} (E_3)_z(u, v, w) du dv dw.$$

总计离开方体的电通量为

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} ((E_1)_x + (E_2)_y + (E_3)_z)(u, v, w) du dv dw \\ &= \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} \nabla_3 \cdot \vec{E}(u, v, w) du dv dw. \end{aligned}$$

由高斯定律，上式等于

$$\int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} \int_z^{z+\Delta z} \frac{\rho}{\varepsilon} du dv dw$$

既然我们所取方体是任意的，我们有

$$\nabla_3 \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

代入关系式  $\nabla_3 \varphi = -\vec{E}$ 。得到

$$\Delta_3 \varphi = -\nabla_3 \cdot \vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

除此之外，泊松方程也可以描述某些平衡态，比如处于热平衡的方程。

## 0.2 定解条件

一般来说，哪怕是最最简单的偏微分方程，其解都有无数个，而且通常包含着任意函数。例如：求  $u_t = 0$  的通解，其中  $u = u(t, x)$ ，答案为

$$u = f(x)$$

$f$  为任意函数。为了让解唯一，我们必须加限制条件，称为定解条件。合起来称为定解问题

$$\begin{cases} \text{泛定方程：描述一般物理规律的数学物理方程} \\ \text{定解条件：使方程有唯一解的各种条件} \end{cases}$$

(1) 泛定方程：波动方程，热方程，泊松方程，其他方程(KDV方程，冲击波方程等)；

(2) 定解条件：

(a) 初始条件:系统的初始状态；

(b) 边界条件:系统的边界状态，分为Dirichlet条件(I类)，Neumann条件(II 类)，混合边界条件(Robin条件,III 类)，自然边界条件，周期边界条件等。

I 类 给出了状态函数在边界的取值，可以和时间有关；

II 类 给出了状态函数在边界法向(垂直于边界，远离区域)导数的取值，可以和时间有关；

关于状态函数  $u$  在边界法向  $\vec{n}$  导数  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n} = (u_x, u_y, u_z) \cdot \vec{n}$ ,

一维:  $\pm u_x$ ，取决于  $\vec{n}$  选取；

二维:  $(u_x, u_y) \cdot (n_1, n_2) = n_1 u_x + n_2 u_y$ ；

三维:  $(u_x, u_y, u_z) \cdot (n_1, n_2, n_3) = n_1 u_x + n_2 u_y + n_3 u_z$ 。

III 类 上述两的线性组合；

自然边界条件 自然满足的边界条件，例如状态函数取值必须有界等；

周期边界条件 状态函数取值周期性发生变化，往往出现在柱坐标系和球坐标系中。

在这一节中，我们只考虑初始条件和I, II, III类边界条件。

只有初始条件的叫初始问题；只有边界条件的叫边界问题；既有初始条件又有边界条件的称为混合问题。

弦振动方程，热方程和泊松方程的定解条件。

(1) 弦振动方程：  $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f$ .

(a) 初始条件（初始问题）：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, t > 0, -\infty < x < \infty \\ u|_{t=0}(x) = g_1(x), u_t|_{t=0}(x) = g_2(x) \end{cases}$$

(b) 边界条件（混合问题）：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, 0 < x < l, t > 0 \\ u(t, 0) = A(t), u_x(t, l) = B(t) \Leftarrow (\text{边界条件}) \\ u|_{t=0}(x) = g_1(x), u_t|_{t=0}(x) = g_2(x) \Leftarrow (\text{初始条件}) \end{cases}$$

例子：常见边界条件

(I) Dirichlet边界条件：端点运动状态：  $u(t, 0) = A(t)$ ；特别地，端点固定在零点：  
 $u(t, 0) = 0$ ；

(II) Neumann边界条件：端点竖直方向自由运动，受竖直方向力  $F(t)$ ：则由受力分解，  
 $Tu_x|_{x=0} + F(t) = 0$ ，即  $u_x(t, 0) = -\frac{F(t)}{T}$ ；特别地，  $F(t) = 0$  时，  $u_x(t, 0) = 0$ ；

(III) 混合边界条件：端点接了一个竖直的弹簧，弹性系数为  $k$ ：由受力分解，  $Tu_x|_{x=0} - ku = 0$ ，即  $u_x(t, 0) - \frac{k}{T}u(t, 0) = 0$ 。

**例子1.** 一根长为  $l$  的理想弦躺在  $x$  轴上，张力为  $T$ ，一端固定  $x = 0$  处，另一端  $x = l$  端点接了一个竖直的弹簧，弹性系数为  $k$ 。初始位置为  $g_1(x)$ ，初始速度  $g_2(x)$ 。写出定解问题。

解.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0 \\ u(t, 0) = 0, u_x(t, 0) + \frac{k}{T}u(t, 0) = 0 \Leftarrow (\text{边界条件}) \\ u|_{t=0}(x) = g_1(x), u_t|_{t=0}(x) = g_2(x) \Leftarrow (\text{初始条件}) \end{cases}$$

(2) 一维细杆热方程：我们认为与  $x$  垂直的界面上的温度是一样的，热源也是一样的，因而  $u_{yy} = u_{zz} = 0$ ，可以在热传导方程中无视  $y$  与  $z$ 。即：  $u_t = a^2 u_{xx} + f$ 。（二维类似）

(a) 初始条件（初始问题）：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f, t > 0, -\infty < x < +\infty \\ u(0, x) = g(x) \end{cases}$$

(b) 热方程边界条件 (混合问题):

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(t, 0) = A(t), u_x(t, l) = B(t) & \leftarrow \text{(边界条件)} \\ u|_{t=0}(t, x) = g(x) & \leftarrow \text{(初始条件)} \end{cases}$$

例子: 常见边界条件 (记住一点, 热量都是从高温往低温流, 这样就不会搞错正负号了!)

(I) Dirichlet条件:  $u(t, 0) = g(t)$ , 特别地, 恒温:  $u(t, 0) = T$ ;

(II) Neumann条件:

( $\alpha$ ) 绝热:  $u_x(t, 0) = 0$ ;

( $\beta$ ) 左端有热量 $q(t)$  流入:  $\frac{dQ}{dSdt} = -ku_x|_{x=0}(t, x)$ , 即:  $u_x|_{x=0} = -\frac{q(t)}{k}$ ;

( $\gamma$ ) 右端有热量 $q(t)$  流入:  $\frac{dQ}{dSdt} = ku_x|_{x=l}(t, x)$ , 即:  $u_x|_{x=l} = \frac{q(t)}{k}$ 。

(III) 混合边界条件: 边界与介质接触, 热流交换满足 $h \times$ 温度差:

( $\alpha$ ) 左端与温度为 $T(t)$  的介质接触:  $h(u|_{x=0} - T) = ku_x|_{x=0}(t, x)$ , 即:  $(u - \frac{k}{h}u_x)|_{x=0} = T$ ;

( $\beta$ ) 右端与温度为 $T(t)$ 的介质接触:  $h(u|_{x=l} - T) = -ku_x|_{x=l}(t, x)$ , 即:  $(u + \frac{k}{h}u_x)|_{x=l} = T$ 。

例子2. 一根长为 $l$ 的由理想介质组成的细杆(两端点分别为 $0, l$ ),  $k = c = \rho = 1$ , 侧面绝热, 内部无热源, 初始温度为 $x$ 。两端分别与温度 $0, 1$ 的介质接触, 热交换系数为2。写出定解问题。

解.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, x) = x \\ u(t, 0) - \frac{1}{2}u_x(t, 0) = 0, u(t, l) + \frac{1}{2}u_x(t, l) = 1 \end{cases}$$

(3) 一般热方程边界问题: 我们省略了二维的情形, 反正都差不多。例子: 常见边界条件 (记住一点, 热量都是从高温往低温流, 这样就不会搞错正负号了!) 我们用 $V$ 表示区域,  $S$ 表示 $V$ 的边界。

(I) Dirichlet条件:  $u(t, x, y, z) = g(t, x, y, z)$ ;

(II) Neumann条件:

( $\alpha$ ) 绝热:  $\frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0$ ;

( $\beta$ ) 有热量 $q(t, x, y, z)$  流出:  $-k\frac{\partial u}{\partial n}|_S = q$ , 即:  $\frac{\partial u}{\partial n}|_S = -\frac{q}{k}$ ;

( $\gamma$ ) 有热量 $q(t, x, y, z)$  流入:  $k\frac{\partial u}{\partial n}|_S = q$ , 即:  $\frac{\partial u}{\partial n}|_S = \frac{q}{k}$ 。

(III) 混合边界条件: 边界与介质接触, 热流交换满足 $h \times$ 温度差:

( $\alpha$ ) 边界与温度为 $\theta(t, x, y, z)$  的介质接触:  $h(u - \theta) = -k\frac{\partial u}{\partial n}|_S$ , 即:  $(u + \frac{k}{h}\frac{\partial u}{\partial n})|_S = \theta$ 。

(需要注意的是, 并不是所有边界都取一样的边界条件, 可以不同。)

**例子3.** 有一块 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的正方形金属片, 内部无热源, 有初始温度 $xy$ , 上下面绝热,  $x = 0$ 绝热,  $x = 1$ 恒温 $= 1$ ,  $y = 1$ 与温度为0的介质接触, 热交换系数=热传导系数 $= 1$ ,  $y = 0$ 有热流密度 $q(t)$ 流出, 写出定解问题。

解.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy}, 0 < x, y < 1, t > 0 \\ u(0, x, y) = xy \\ u_x(t, 0, y) = 0, u(t, 1, y) = 1 \\ u_y(t, x, 0) = q(t), u(t, x, 1) + u_y(t, x, 1) = 0 \end{cases}$$

(4) 泊松方程没有初始条件只有边界条件 (边界问题):  $\Delta_3 u = f$ .

$$\begin{cases} \Delta_3 u = f, (x, y, z) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = A(x, y, z) \leftarrow (\text{边界条件}) \end{cases}$$

注记. 在上述定解问题中, 如果 $f = 0$ , 则称方程齐次, 如果边界条件中不含 $u, u_x$ 项为0, 则称边界条件齐次, 一般我们总是希望方程和边界条件都是齐次, 齐次化的过程需要叠加原理和冲量原理, 详情见下一节。

**例子4.** 一个圆柱体, 顶端恒温 $T_0$ , 底端绝热, 侧面与温度为 $T$ 的介质接触, 内部无热源, 初始温度 $\psi(x, y, z)$ , 写出定解问题。

解. (要特别注意正负号, 记住热流总是从高温到低温, 这样就不会搞错了。)

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, x^2 + y^2 < R^2, 0 < z < H, t > 0 \\ u_z|_{z=0} = 0, u|_{z=H} = T_0 \\ u(0, x, y, z) = \psi(x, y, z) \\ (u + \frac{k}{h}u_r)|_{r=R} = T \end{cases}$$

**例子5.** 一个圆柱体, 顶端恒温 $T_0$ , 底端绝热, 侧面与温度为 $T$ 的介质接触, 内部无热源, 处于热平衡, 写出定解问题。

解.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x^2 + y^2 < R^2, 0 < z < H, t > 0 \\ u_z|_{z=0} = 0, u|_{z=H} = T_0 \\ (u + \frac{k}{h}u_r)|_{r=R} = T \end{cases}$$

### 0.3 达朗贝尔公式

我们先求弦振动方程的初始问题。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(0, x) = g_1(x), u_t(0, x) = g_2(x) \end{cases}$$

为此, 我们先要求泛定方程 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ 的通解, 做变量替换 $\xi = x + at, \eta = x - at$ , 则有

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = au_\xi - au_\eta, u_{tt} = a^2 u_{\xi\xi} + a^2 u_{\eta\eta} - 2a^2 u_{\xi\eta}.$$

同理,  $u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta}$ , 代入泛定方程得

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

从而  $u = h_1(\xi) + h_2(\eta)$ 。即

$$u(t, x) = h_1(x + at) + h_2(x - at).$$

与初始条件结合有

$$\begin{cases} h_1(x) + h_2(x) = g_1(x) \\ h'_1(x) - h'_2(x) = \frac{g_2(x)}{a} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} h_1(x) = \frac{1}{2}g_1(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x g_2(s)ds + C \\ h_2(x) = \frac{1}{2}g_1(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x g_2(s)ds - C \end{cases}$$

带入通解, 得到达朗贝尔公式

$$u(t, x) = \frac{g_1(x + at) + g_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g_2(s)ds$$

对于非齐次一维波动方程的初始问题。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(0, x) = g_1(x), u_t(0, x) = g_2(x) \end{cases}$$

解题步骤如下:

(1) 先找泛定方程  $v_{tt} = a^2 v_{xx} + f$  的一个特解  $v(t, x)$ ;

(2) 用  $\tilde{u} = u - v$  建立新的初始问题:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = a^2 \tilde{u}_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ \tilde{u}(0, x) = g_1(x) - v(0, x), \tilde{u}_t(0, x) = g_2(x) - v_t(0, x) \end{cases}$$

(3) 用达朗贝尔公式解出  $\tilde{u}$  并求出  $u = \tilde{u} + v$ 。

**例子6.** 求解以下非齐次定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x^2 e^{-t}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(0, x) = x, u_t(0, x) = \sin x \end{cases}$$

解. 泛定方程  $v_{tt} = v_{xx} + x^2 e^{-t}$  一个特解为

$$v(t, x) = x^2 e^{-t} + 2e^{-t}.$$

令  $\tilde{u} = u - v$ , 得到

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ \tilde{u}(0, x) = x - x^2 - 2, \tilde{u}_t(0, x) = \sin x + x^2 + 2. \end{cases}$$



由达朗贝尔公式, 得

$$\tilde{u}(t, x) = \frac{x+t-(x+t)^2-2+x-t-(x-t)^2-2}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \sin s + s^2 + 2ds.$$

整理得,

$$\tilde{u}(t, x) = -x^2 + x - 2 - t^2 + \sin x \sin t + x^2 t + \frac{t^3}{3} + 2t.$$

从而

$$u(t, x) = \tilde{u}(t, x) + v(t, x) = -x^2 + x - 2 - t^2 + \sin x \sin t + x^2 t + \frac{t^3}{3} + x^2 e^{-t} + 2e^{-t} + 2t.$$

达朗贝尔公式的其他应用:

**例子7.** 求解一端固定的半弦齐次波动方程:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < +\infty, t > 0 \\ u(0, x) = g_1(x), u_t(0, x) = g_2(x) \\ u(t, 0) = 0. \end{cases}$$

解. 我们可以把半弦扩为完整的弦, 但是要求解在 $x=0$ 点取值始终为0, 为此我们做奇扩充:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = a^2 \tilde{u}_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ \tilde{u}(0, x) = \tilde{g}_1(x), u_t(0, x) = \tilde{g}_2(x) \end{cases}$$

其中,  $\tilde{g}_1(x) = \text{sign}(x)g_1(|x|)$ ,  $\tilde{g}_2(x) = \text{sign}(x)g_2(|x|)$ . 用达朗贝尔公式解该方程, 得:

$$\tilde{u}(t, x) = \frac{\tilde{g}_1(x+at) + \tilde{g}_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}_2(s) ds.$$

整理得

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{g_1(x+at)+g_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g_2(s) ds & x-at \geq 0 \\ \frac{g_1(x+at)-g_1(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \left( \int_0^{x+at} \tilde{g}_2(s) ds - \int_0^{at-x} \tilde{g}_2(s) ds \right) & x-at < 0 \end{cases}$$

**例子8.** 求解一端上下自由运动的半弦齐次波动方程:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < +\infty, t > 0 \\ u(0, x) = g_1(x), u_t(0, x) = g_2(x), 0 \leq x < +\infty \\ u_x(t, 0) = 0. \end{cases}$$

解. 我们可以把半弦扩为完整的弦, 要求解在 $x=0$ 点导数取值始终为0, 为此我们做偶扩充:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = a^2 \tilde{u}_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ \tilde{u}(0, x) = \tilde{g}_1(x), u_t(0, x) = \tilde{g}_2(x) \end{cases}$$

其中,  $\tilde{g}_1(x) = g_1(|x|)$ ,  $\tilde{g}_2(x) = g_2(|x|)$ . 用达朗贝尔公式解该方程, 得:

$$\tilde{u}(t, x) = \frac{\tilde{g}_1(x+at) + \tilde{g}_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{g}_2(s) ds.$$

整理得

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{g_1(x+at)+g_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g_2(s) ds, & x-at \geq 0 \\ \frac{g_1(x+at)+g_1(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \left( \int_0^{x+at} g_2(s) ds + \int_0^{at-x} g_2(s) ds \right), & x-at < 0. \end{cases}$$

总结例子7和例子8的方法, 就是 $u(t, a) = 0$ 就以 $x=a$ 中心对称,  $u_x(t, a) = 0$ 就以 $x=a$ 对称。

## 0.4 叠加原理和冲量原理

我们希望定解问题是其次的，叠加原理和冲量原理可以消除非齐次项，这往往是解数学物理方程的第一步。

### 0.4.1 叠加原理

对于一个复杂问题，我们试图用叠加原理将其分解成几个简单的问题（边界条件齐次，方程齐次）。设 $\mathcal{L}$ 为线性微分算子，则有叠加原理

$$(1) \text{ 有限叠加 } \mathcal{L}u_i = f_i, i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \mathcal{L}(\sum_i u_i) = \sum_i f_i;$$

$$(2) \text{ 可数叠加 } \mathcal{L}u_i = f_i, i = 1, 2, \dots \Rightarrow \mathcal{L}(\sum_i u_i) = \sum_i f_i;$$

$$(3) \text{ 积分叠加 } \mathcal{L}u_i(M; m) = f(M; m), m \in M_0 \Rightarrow \mathcal{L}(\int_{M_0} u(M; m) dm) = \int_{M_0} f(M; m) dm.$$

叠加原理最大的用处就是把一个复杂问题分解成若干简单问题（方程齐次，边界条件齐次），例如：找特解本身就表示我们使用了叠加原理，我们还是用例子说明：

**例子9.** 将下面弦振动方程做分解：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x), 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, x) = g_1(x), u_t(0, x) = g_2(x) \\ u(t, 0) = \psi_1(t), u_x(t, l) = \psi_2(t). \end{cases}$$

**解.** 该方程本身非齐次，并且边界条件也是非齐次。我们先想办法将边界条件齐次化，一个办法是设

$$v(t, x) = \psi_1(t) + x\psi_2(t).$$

令 $\tilde{u} = u - v$ ，则得到一个边界条件齐次的定解问题：

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = a^2 \tilde{u}_{xx} + \tilde{f}(t, x), 0 < x < l, t > 0 \\ \tilde{u}(0, x) = \tilde{g}_1(x), \tilde{u}_t(0, x) = \tilde{g}_2(x) \\ \tilde{u}(t, 0) = 0, \tilde{u}_x(t, l) = 0 \end{cases}$$

其中 $\tilde{f} = f - \psi_1''(t) - x\psi_2''(t)$ ,  $\tilde{g}_1 = g_1 - \psi_1(0) - x\psi_2(0)$ ,  $\tilde{g}_2 = g_2 - \psi_1'(0) - x\psi_2'(0)$ . 设 $\tilde{v}$  是定解问题

$$\begin{cases} \tilde{v}_{tt} = a^2 \tilde{v}_{xx} + \tilde{f}(t, x), 0 < x < l, t > 0 \\ \tilde{v}(0, x) = 0, \tilde{v}_t(0, x) = 0 \\ \tilde{v}(t, 0) = 0, \tilde{v}_x(t, l) = 0 \end{cases}$$

的解。设 $\bar{v}$  是定解问题

$$\begin{cases} \bar{v}_{tt} = a^2 \bar{v}_{xx}, 0 < x < l, t > 0 \\ \bar{v}(0, x) = \tilde{g}_1(x), \bar{v}_t(0, x) = \tilde{g}_2(x) \\ \bar{v}(t, 0) = 0, \bar{v}_x(t, l) = 0 \end{cases}$$

的解。则 $\tilde{u} = \tilde{v} + \bar{v}$ ，从而 $u = \tilde{u} + v = \bar{v} + \tilde{v} + v$ 。因而仅需解出 $\tilde{v}$ 和 $\bar{v}$ 。 $\bar{v}$ 的求法需要用下一章的分离变量法。 $\tilde{v}$ 的解法可以使用冲量原理化为 $\bar{v}$ 的情形。

**思考.** 上述例子中， $v$ 的选取是否唯一？如果边界条件为 $u_x(t, 0) = \psi_1(t)$ ,  $u(t, l) = \psi_2(t)$ ，该如何选择 $v$ ？如果出现混合边界条件呢？对于热方程，我们是否可以做同样的操作？

### 0.4.2 冲量原理

冲量原理适用范围：非齐次波动方程或热方程（可以高维）+平凡初始条件+齐次边界条件（可以没有边界条件）。推导冲量原理依赖一个求导公式

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t p(t, s) ds = p(t, t) + \int_0^t p_t(t, s) ds.$$

弦振动方程的冲量原理：如果定解问题

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, 0 < x < l, t > \tau \\ w(\tau, x) = 0, w_t(\tau, x) = f(\tau, x) \\ w(t, 0) = 0, w_x(t, l) = 0 \end{cases}$$

的解为  $w(t, x; \tau)$ 。则定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x), 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, x) = 0, u_t(0, x) = 0 \\ u(t, 0) = 0, u_x(t, l) = 0 \end{cases}$$

的解为

$$u(t, x) = \int_0^t w(t, x; \tau) d\tau.$$

证明. 边界条件和初始条件上述表达式显然满足。我们仅需说明上述表达式满足泛定方程。

$$u_t = w(t, x; t) + \int_0^t w_t(t, x; \tau) d\tau = \int_0^t w_t(t, x; \tau) d\tau.$$

从而

$$u_{tt} = w_t(t, x; t) + \int_0^t w_{tt}(t, x; \tau) d\tau = f(t, x) + a^2 \int_0^t w_{xx}(t, x; \tau) d\tau = a^2 u_{xx} + f.$$

热方程的冲量原理：如果定解问题

$$\begin{cases} w_t = a^2 \Delta_3 w, -\infty < x, y, z < +\infty, t > \tau \\ w(\tau, x, y, z) = f(\tau, x, y, z) \end{cases}$$

的解为  $w(t, x, y, z; \tau)$ 。则定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta_3 u + f(t, x, y, z), -\infty < x, y, z < +\infty, t > \tau \\ u(0, x, y, z) = 0 \end{cases}$$

的解为

$$u(t, x, y, z) = \int_0^t w(t, x, y, z; \tau) d\tau.$$

证明. 初始条件上述表达式显然满足。我们仅需说明上述表达式满足泛定方程。

$$\begin{aligned} u_t &= w(t, x, y, z; t) + \int_0^t w_t(t, x, y, z; \tau) d\tau = f + a^2 \int_0^t \Delta w(t, x, y, z; \tau) d\tau \\ &= f + a^2 \Delta u. \end{aligned}$$

例子10 (例子6). 求解以下非齐次定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x^2 e^{-t}, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(0, x) = x, u_t(0, x) = \sin x \end{cases}$$

解. 注意到初始条件非平凡, 我们设

$$v(t, x) = t \sin x + x.$$

设  $\tilde{u} = u - v$ , 则有

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx} + x^2 e^{-t} - t \sin x, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ \tilde{u}(0, x) = 0, \tilde{u}_t(0, x) = 0 \end{cases}$$

解以下定解问题

$$\begin{cases} w_{tt} = w_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > \tau \\ w(\tau, x; \tau) = 0, w_t(\tau, x; \tau) = x^2 e^{-\tau} - \tau \sin x \end{cases}$$

得

$$w(t, x; \tau) = \frac{1}{2} \int_{x+\tau-t}^{x+t-\tau} s^2 e^{-\tau} - \tau \sin s ds = x^2(t-\tau)e^{-\tau} + \frac{1}{3}(t-\tau)^3 e^{-\tau} - \tau \sin x \sin(t-\tau).$$

由冲量原理

$$\tilde{u}(t, x) = \int_0^t w(t, x; \tau) d\tau = x^2(e^{-t} + t - 1) + 2e^{-t} + \frac{t^3}{3} - t^2 + 2t - 2 - t \sin x + \sin x \sin t.$$

从而

$$u(t, x) = u(t, x) + v(t, x) = -x^2 + x - 2 - t^2 - \sin x \sin t + x^2 t + \frac{t^3}{3} + x^2 e^{-t} + 2e^{-t} + 2t.$$

注记. 并不是一定要用冲量原理消除方程的非齐次项, 如果能直接找到泛定方程的满足要求 (一般是边界条件的要求) 的特解是最好的。例如

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t \sin x, 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(t, 0) = 0, u(t, \pi) = 0 \\ u(0, x) = 0, u_t(0, x) = 0 \end{cases}$$

我们可以取泛定方程的特解  $v = t \sin x$ , 然后令  $\tilde{u} = u - v$ , 得到

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx}, 0 < x < \pi, t > 0 \\ \tilde{u}(t, 0) = 0, \tilde{u}(t, \pi) = 0 \\ \tilde{u}(0, x) = 0, \tilde{u}_t(0, x) = -\sin x \end{cases}$$

在下一章后半段将详细讲述。

在本章的最后, 我们简要介绍下特征线法。特阵线法主要求一阶偏微分方程和波动方程的通解。我们从例子出发

**例子11.** 设  $u = u(x, y)$ , 求  $u_x + e^y u_y = e^{-y}$  的通解。

**解.** 特征方程为

$$\frac{1}{dx} = \frac{e^y}{dy}.$$

这是个常微分方程, 解得:  $x + e^{-y} = C$ 。令  $\xi = x + e^{-y}$ ,  $\eta = x$ , 得到

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u + \eta$$

$$u_y = -e^{-y} u_\xi.$$

带入原方程, 得到  $u_\eta = \xi - \eta$ 。从而

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= u(\xi, 0) + \int_0^\eta u_\eta(\xi, s) ds = u(\xi, 0) + \int_0^\eta \xi - s ds \\ &= f(\xi) + \xi\eta - \frac{\eta^2}{2}. \end{aligned}$$

从而

$$u = f(x + e^{-y}) + x e^{-y} + \frac{x^2}{2}.$$

方法总结: 设  $u = u(x_1, \dots, x_k)$ , 则  $\sum a_i u_{x_i} = f$  的特征方程为

$$\frac{a_1}{dx_1} = \frac{a_2}{dx_2} = \dots.$$

解之, 做相应的变量替换, 不足的补上。最后一步带入原方程, 化解并求解。

二阶情形:

**例子12.** 设  $u = u(x, y)$ , 求  $u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = x$  的通解。

**解.** 特征方程为

$$\frac{1}{(dx)^2} - \frac{3}{dx dy} + \frac{2}{(dy)^2} = 0.$$

即

$$\left(\frac{1}{dx} - \frac{1}{dy}\right)\left(\frac{1}{dx} - \frac{2}{dy}\right) = 0.$$

$\frac{1}{dx} - \frac{1}{dy} = 0$  或者  $\frac{1}{dx} - \frac{2}{dy} = 0$ 。分别解得

$$x - y = C, \quad 2x - y = \tilde{C}.$$

设  $\xi = x - y$  和  $\eta = 2x - y$ , 则

$$u_x = u_\xi + 2u_\eta, u_{xx} = u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta}, u_{xy} = -u_{\xi\xi} - 3u_{\xi\eta} - 2u_{\eta\eta},$$

$$u_y = -u_\xi - u_\eta, u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

带入原方程, 得到  $u_{\xi\eta} = \xi - \eta$ , 解得  $u_\xi = \xi\eta - \frac{\eta^2}{2} + f(\xi)$ , 得到

$$u = \frac{\xi^2 \eta}{2} - \frac{\xi \eta^2}{2} + f(\xi) + g(\eta).$$

从而

$$u = \frac{3x^2 y - 2x^3 - xy^2}{2} + f(x - y) + g(2x - y).$$

**例子13.** 设  $u = u(x, y)$ , 求  $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$  的通解。

解. 特征方程为

$$\frac{1}{(dx)^2} - \frac{2}{dxdy} + \frac{1}{(dy)^2} = 0.$$

即

$$\left(\frac{1}{dx} - \frac{1}{dy}\right)^2 = 0.$$

$\frac{1}{dx} - \frac{1}{dy} = 0$  解得

$$x - y = C.$$

设  $\xi = x - y$  和  $\eta = x$ , 则

$$u_x = u_\xi + u_\eta, u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, u_{xy} = -u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta},$$

$$u_y = -u_\xi, u_{yy} = u_{\xi\xi}.$$

带入原方程, 得到  $u_{\eta\eta} = 0$ , 解得  $u_\eta = f(\xi)$ , 得到

$$u = \eta f(\xi) + g(\xi).$$

从而

$$u = xf(x - y) + g(x - y).$$