

# 第5章

# 第5章 离散时间系统的相位、结构

5.1 离散时间系统的相频响应

5.2 FIR 系统的线性相位特性

5.3 线性相位FIR系统零点分布

5.4 全通系统与最小相位系统

5.5 谱分解、反卷积及系统辨识

5.6 系统的信号流图与结构

5.7 离散时间系统的 Lattice 结构

5.8 离散时间系统的状态变量描述

# 信号

信号分析, 信号处理

# 系统

## 系统分析

系统6大性质; LTIDTS的单位脉冲响应; LTIDTS的卷积和; 频率响应; 系统函数; 极零分析; 数字滤波器频率响应与零极点关系

DTS的相频响应; FIR系统的线性相位特点; 全通系统与最小相位系统; 系统的信号流图与结构; 系统的Lattice结构; 谱分解、反卷积、系统辨识

## 系统设计/综合

离散时间系统的综合

# 5.1 离散时间系统的相频响应

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\begin{array}{ll} |H(e^{j\omega})| & : \text{幅频响应} \\ \varphi(\omega) & : \text{相频响应} \end{array}$$

信号通过系统后，各频率成分的衰减情况、在时间上的位移情况。

线性相位：

如果：  $\varphi(\omega) = -k\omega$ ，称其为线性相位

若：  $\varphi(\omega) = -k\omega + \beta$ ，也称线性相位

很多应用希望线性相位：

音乐厅、电影院、倒车雷达

离散时间输入序列 $x(n)$ 的**IDTFT**

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \int_{2\pi} e^{j\omega n} \cdot \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$$

表示为**复指数序列**的线性组合，这些复指数序列在频率上无限靠近。

$e^{j\omega n}$ 是DTLTIS的特征函数，从而根据卷积和可以导出系统的频率响应

$$\begin{aligned} e^{j\omega n} \xrightarrow{h(n)} y(n) &= e^{j\omega n} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} \\ &= e^{j\omega n} H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

假定：  $|H(e^{j\omega})| = 1$ ,  $\varphi(\omega) = -k\omega$

对输入  $x(n)$ ，在频域有

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \\ &= |X(e^{j\omega})|e^{j[\varphi_x(\omega)-k\omega]} \end{aligned}$$

所以，时域里是：

$$y(n) = x(n - k)$$

即，输出是输入的简单移位，移位的大小正比于  $k$   
因此不会发生失真。

延迟系统

例：令  $H_1(e^{j\omega}) = e^{-jk\omega}$

具有线性相位

$$x(n) = \cos(\omega_0 n) + \cos(2\omega_0 n)$$

则：

$$y_1(n) = \cos(\omega_0(n - k)) + \cos(2\omega_0(n - k))$$

没有发生相位失真

加强从DTFT性质来理解：时移引起相移

若  $H_2(e^{j\omega}) = e^{-j\varphi(\omega)}$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\pi/4 & 0 \leq \omega \leq 3\omega_0/2 \\ -\pi & 3\omega_0/2 < \omega \leq \pi \end{cases}$$

$$x(n) = \cos(\omega_0 n) + \cos(2\omega_0 n)$$

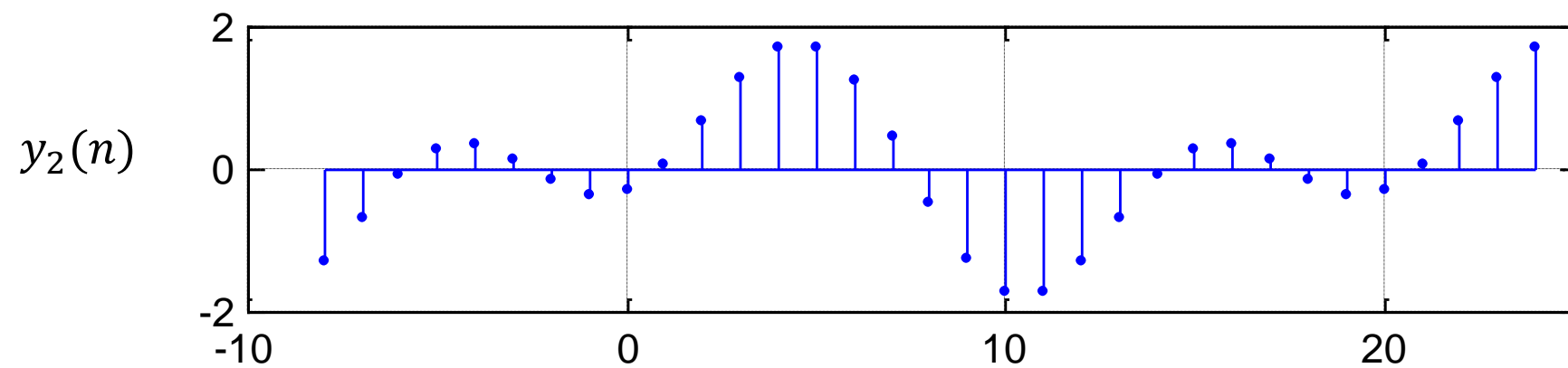
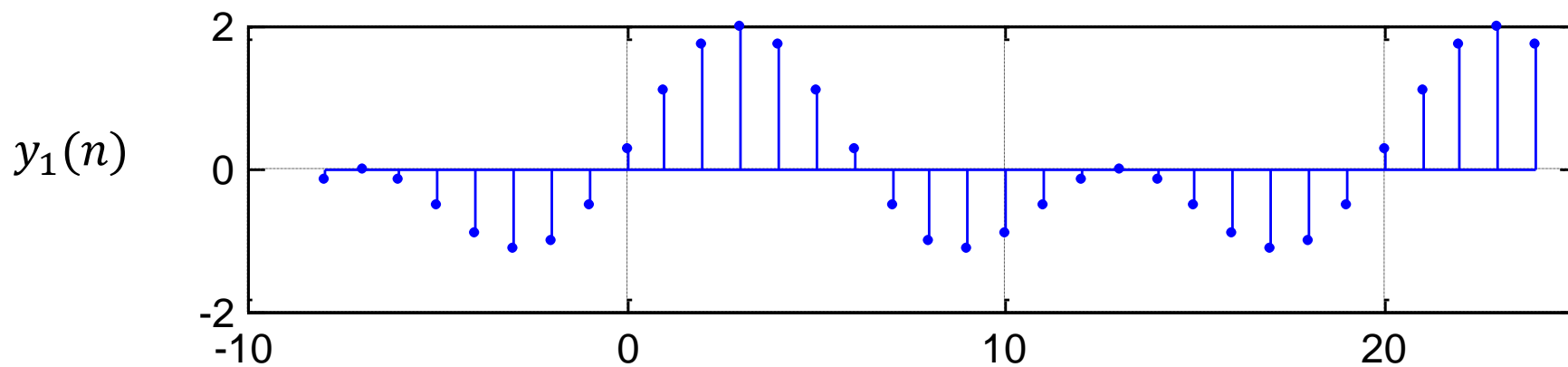
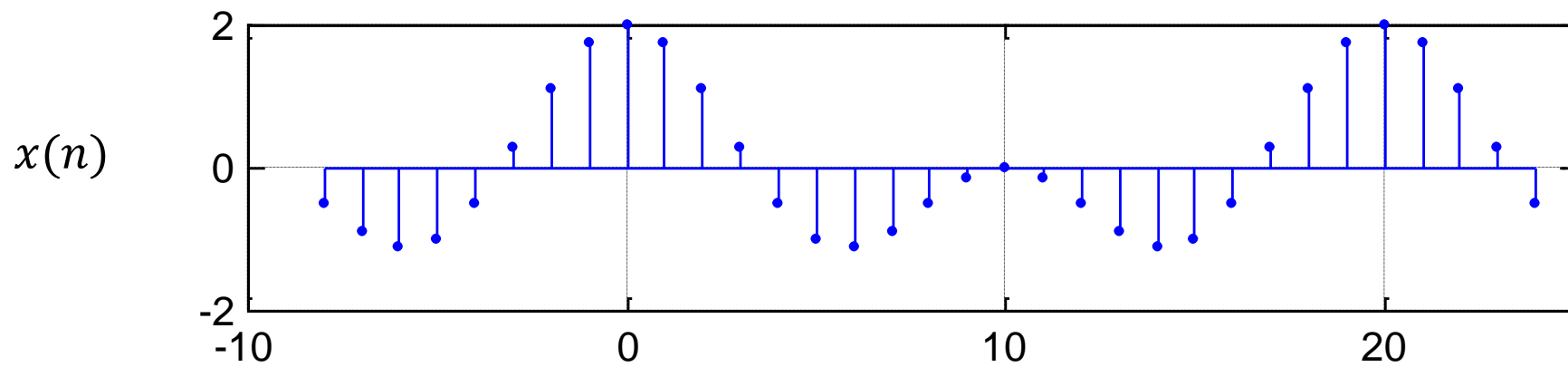
则：

$$y_2(n) = \cos(\omega_0 n - \pi/4) + \cos(2\omega_0 n - \pi)$$

发生了相位失真







## 相位延迟与群延迟

由于:  $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$

如果令:  $x(n) = A \cos(\omega_0 n + \theta)$

则:  $y(n) = A|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n + \varphi(\omega_0) + \theta)$

再令:  $A|H(e^{j\omega_0})| = 1$

则: 
$$\begin{aligned} y(n) &= \cos(\omega_0 n + \varphi(\omega_0) + \theta) \\ &= \cos(\omega_0(n + \varphi(\omega_0)/\omega_0) + \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \cos(\omega_0 n + \varphi(\omega_0) + \theta) \\ &= \cos(\omega_0(n + \varphi(\omega_0)/\omega_0) + \theta) \end{aligned}$$

$\varphi(\omega_0)/\omega_0$ 表示输出相对输入的时间延迟

定义  $\tau_p(\omega) = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega}$  为系统的相位延迟(Phase Delay, PD)

如果系统的相频响应不是线性的，那么系统的输出将不再是输入信号作线性移位后的组合，因此，输出将发生失真。

定义  $\tau_g(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$  为系统的群延迟(Group Delay, GD)

若系统具有线性相位，则其GD为常数。

# 对群延迟的更多理解

描述相位变化随着频率变化的快慢程度的量称为群延迟，是相频特性的负导数。直观上群延迟是信号波形包络的时延，单个频率不存在群延时。从公式来看，群延迟是相频特性曲线的斜率，反映的是一个器件对带内每个频点信号相位的影响，若群延迟恒定，则传输波形失真最小。

通常用群延迟的变化作为评价相位非线性和波形失真的指标。

通俗的理解：群可以看成是由各种频率的波叠加构成的一个波包络，群延迟就是包络的延迟，当群延迟为一恒定值时，包络的形状就不会发生变化，无失真；反之，则各个频率的波延迟不同，组成的波包络形状发生变化，造成失真。

# 从信号调制来理解

输入信号

$$x(n) = x_a(n)\cos(\omega_0 n)$$

$x_a(n)$ : 低频成分, 最高频率 $\omega_c \ll \omega_0$

$\cos(\omega_0 n)$ : 调制分量, 又称载波信号

窄带信号 $x(n)$ 通过一个线性系统的输出

$$y(n) = |H(e^{j\omega_0})|x_a\left(n - \tau_g(\omega_0)\right)\cos(\omega_0(n - \tau_p(\omega_0)))$$

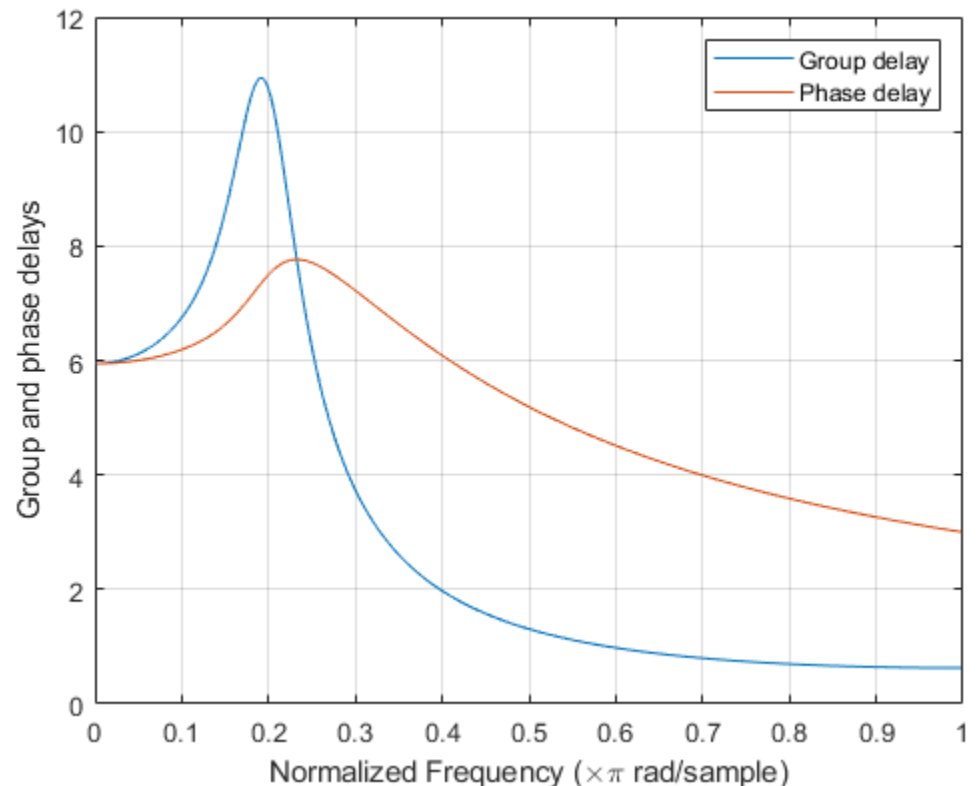
群延迟反映了输出信号包络的延迟

相位延迟反映了载波信号的延迟

```
[z,p,k] = butter(6,0.2);  sos = zp2sos(z,p,k);          % grpdelay(sos,128)
% Plot both the group delay and the phase delay of the system on the same figure.
gd = grpdelay(sos,512);
[h,w] = freqz(sos,512);  pd = -unwrap(angle(h))./w;  plot(w/pi,gd, w/pi,pd)
grid
xlabel 'Normalized Frequency (\times\pi rad/sample)'
ylabel 'Group and phase delays'
legend('Group delay','Phase delay')
```

### *Group Delay of a Butterworth Filter*

Design a Butterworth filter of order 6 with normalized 3-dB frequency  $0.2\pi$  rad/ sample. Use `grpdelay` to display the group delay.



# 零相位滤波

思考：如何实现对信号的零相位滤波？

若要保证系统是因果的，又如何实现？



方案1：单位脉冲响应关于原点偶对称的双边序列

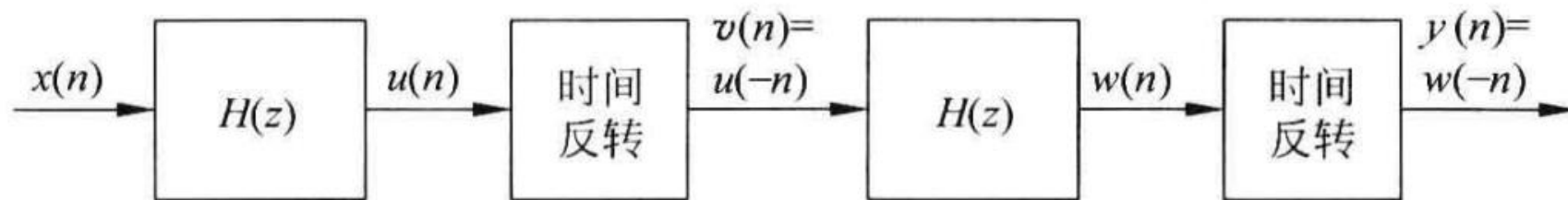
系统为非因果系统，不是物理可实现系统

对于非实时信号处理，数据已经采集好

方案2：滤波-反转-滤波-反转

扩展-与结果有点“同形”又有用的知识点

## 零相位滤波的实现



$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= W^*(e^{j\omega}) = [V(e^{j\omega})H(e^{j\omega})]^* = [U^*(e^{j\omega})H(e^{j\omega})]^* \\ &= U(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})|H(e^{j\omega})|^2 \end{aligned}$$

$$(1) \quad w(n) \rightarrow W(e^{j\omega}) \quad w(-n) \rightarrow W(e^{-j\omega})$$

$$w^*(n) \rightarrow W^*(e^{-j\omega})$$

$$w^*(-n) \rightarrow W^*(e^{j\omega})$$

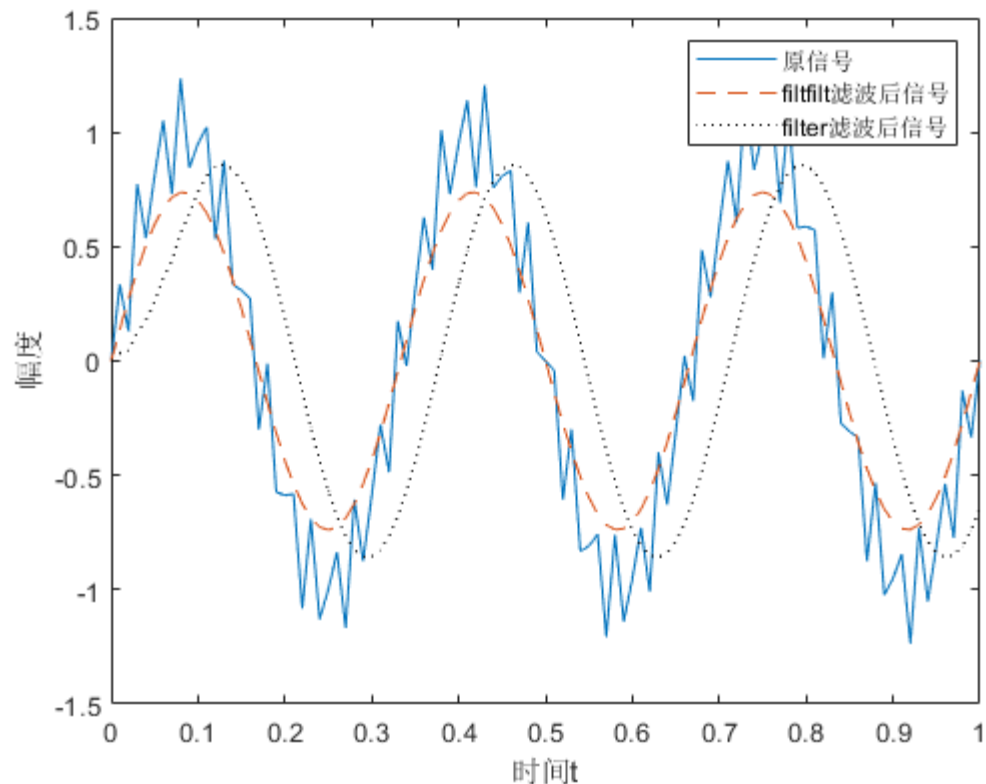
$$(2) \quad \text{对于实信号:} \quad w(n) = w^*(n)$$

$$W(e^{j\omega}) = W^*(e^{-j\omega})$$

$$W(e^{-j\omega}) = W^*(e^{j\omega})$$



## 使用filtfilt函数 实现零相位滤波

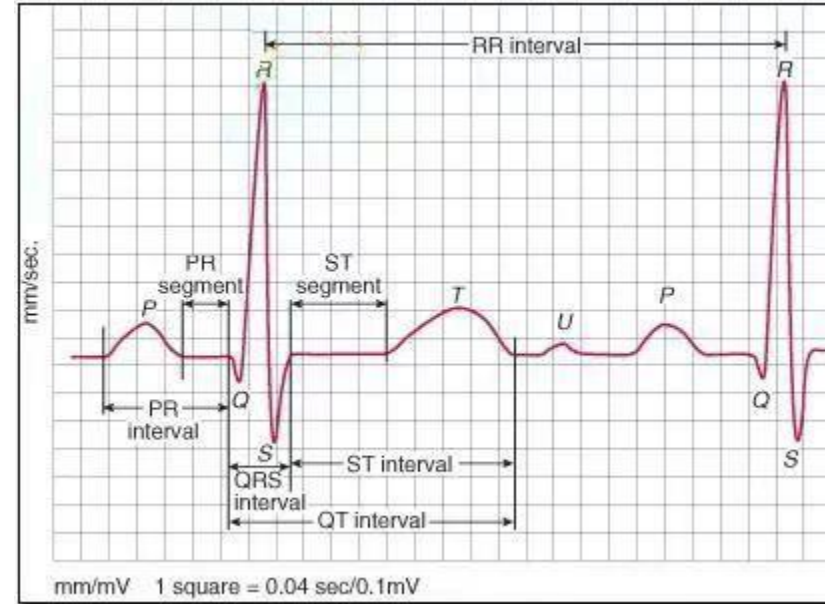


```
Fs = 100;  
t = 0:1/Fs:1;  
x = sin(2*pi*t*3)+0.25*sin(2*pi*t*40);  
b = ones(1,10)/10;    % 10 point averaging filter  
yff = filtfilt(b,1,x);  % zero phase digital filtering  
yft = filter(b,1,x);    % normal filtering  
plot(t,x,t,yff,'--',t,yft,':')  
xlabel('时间t');  
ylabel('幅度');  
legend('原信号','filtfilt滤波后信号','filter滤波后信号');
```

# Zero-Phase Filtering of an Electrocardiogram Waveform

Zero-phase filtering helps preserve features in a filtered time waveform exactly where they occur in the unfiltered signal.

Use `filtfilt` to zero-phase filter a synthetic electrocardiogram (ECG) waveform.



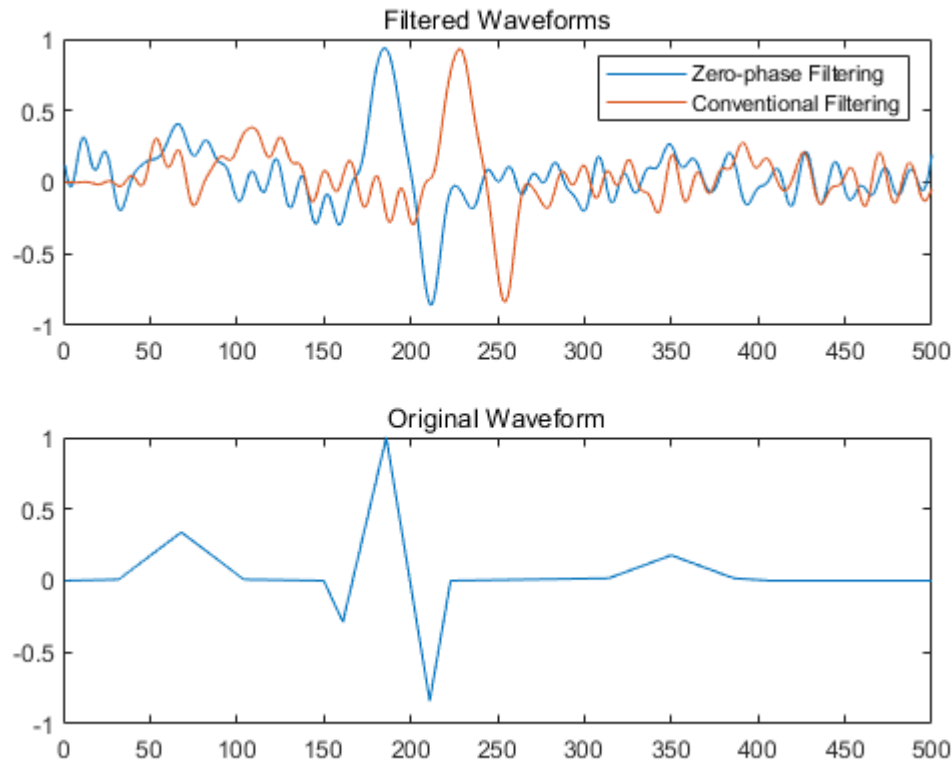
The **QRS complex** is an important feature in the ECG. Here it begins around time point 160.

Corrupt the **ECG with additive noise**.

Construct a **lowpass FIR equiripple filter** and filter the noisy waveform using both zero-phase and conventional filtering.

**Zero-phase filtering** reduces noise in the signal and preserves the QRS complex at the same time it occurs in the original.

**Conventional filtering** reduces noise in the signal, but delays the QRS complex.



## 扩展：“同形”又有用的知识点

设  $X(n)$  为一平稳随机信号，它通过一线性移不变系统  $H(z)$  后，输出为  $Y(n)$ ，由于

$$Y(n) = X(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)h(n-k)$$

所以， $Y(n)$  也是随机的，且也是平稳的。若  $X(n)$  是确定性信号，则  $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ ，由于随机信号不存在傅里叶变换，因此，我们需要从相关函数和功率谱的角度来研究随机信号通过线性系统的行为。为了讨论方便起见，现假定  $X(n)$  是实信号，这样， $Y(n)$  也是实的。 $X(n)$  和  $Y(n)$  之间的关系主要有如下 4 个

$$r_Y(m) = r_X(m) * h(m) * h(-m)$$

$$P_Y(e^{j\omega}) = P_X(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2$$

$$r_{XY}(m) = r_X(m) * h(m)$$

$$P_{XY}(e^{j\omega}) = P_X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

DTLTI系统，时域卷积→频域乘积：

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$\text{相关域：} \quad r_y(m) = r_x(m) * r_h(m)$$

$$\text{对应平稳随机信号，有：} \quad r_Y(m) = r_X(m) * r_h(m)$$

## 回顾：DTFT时域相关定理

如果  $x(n) \rightarrow X(e^{j\omega})$

则有  $x(-n) \rightarrow X(e^{-j\omega})$

$$x^*(n) \rightarrow X^*(e^{-j\omega})$$

$$x^*(-n) \rightarrow X^*(e^{j\omega})$$

根据相关与卷积的计算关系，以及考虑一般性信号，则有：

$$r_{xy}(m) = x^*(-m) * y(m) \xrightarrow{DTFT} X^*(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$$

## 5.2 FIR 系统的线性相位特性

在绝大部分信号处理的场合，人们都期盼系统具有线性相位，但是，如何实现线性相位？

对 FIR 系统，如果保证：

$$h(n) = \pm h(N-1-n) \\ n = 0, 1, \dots, N-1$$

因果单位脉冲响应  
关于中点奇/偶对称

则该系统具有线性相位。

## 上述对称，有四种情况

$$h(n) = h(N - 1 - n)$$

$h(n)$ 偶对称

$$\begin{cases} N: & \text{even} \\ N: & \text{odd} \end{cases}$$

第一类 FIR 系统

$$h(n) = -h(N - 1 - n)$$

$h(n)$ 奇对称

$$\begin{cases} N: & \text{even} \\ N: & \text{odd} \end{cases}$$

第二类 FIR 系统

## 1. $N$ 为奇数

第一类 FIR 系统

$$h(n) = h(N - 1 - n)$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\left(\frac{N-3}{2}\right)} h(n) e^{-j\omega n} + \sum_{n=\left(\frac{N+1}{2}\right)}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right) e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$$

令  $m = N - 1 - n$ ，并利用  $H(e^{j\omega})$  的对称性，有

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) e^{-j\omega n} + \sum_{m=0}^{\frac{N-3}{2}} h(N-1-m) e^{-j(N-1-m)\omega} +$$
$$h\left(\frac{N-1}{2}\right) e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(N-1)\omega/2} \left\{ 2 \sum_{m=0}^{\frac{(N-3)}{2}} h(m) \cos\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \omega + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\}$$

简化三角函数项

令：  $n = (N-1)/2 - m$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(N-1)\omega/2} \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\frac{(N-1)}{2}} h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \cos(\omega n) + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\}$$

实数

再令：

$$a(n) = \begin{cases} h\left(\frac{N-1}{2}\right) & n = 0 \\ 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) & n = 1, 2, \dots, \frac{(N-1)}{2} \end{cases}$$



最后有：

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(N-1)\omega/2} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n)\cos(\omega n)$$

$$\varphi(\omega) = -(N-1)\frac{\omega}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{相位}$$

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n)\cos(\omega n) \quad \Rightarrow \quad \text{增益}$$

所以，只要保证滤波器的系数偶对称，该滤波器必然具有线性相位。

## 2. $N$ 为偶数

第一类 FIR 系统

$$h(n) = h(N - 1 - n)$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(N-1)\omega/2} \sum_{n=1}^{N/2} 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

令：

$$b(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

则：

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(N-1)\omega/2} \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

## 第二类 FIR 系统

$$h(n) = -h(N - 1 - n)$$

### 3. $N$ 为奇数

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right)} \sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n) \sin(\omega n)$$

$$c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \quad n = 1, 2, \dots, \frac{(N-1)}{2}$$

$$\varphi(\omega) = -(N-1)\omega/2 + \pi/2$$

## 4. $N$ 为偶数

第二类 FIR 系统

$$h(n) = -h(N - 1 - n)$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right)} \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin \left[ \left( n - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$$

$$d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

$$\varphi(\omega) = -(N - 1)\omega/2 + \pi/2$$

掌握四种情况下线性相位表达式的推导方法

# 说明:

第一类 FIR 系统是

$$\cos(\omega n)$$

的线性组合，在 $\omega = 0$ 时， $H(e^{j\omega})$ 易取得最大值，因此这一类滤波器易体现低通特性，且是偶函数。

通过频率移位，又可体现高通、带通、带阻特性。

所以，经典的低通、高通、带通和带阻滤波器的 $h(n)$ 都是偶对称的。

## 第二类 FIR 系统是

$$\sin(\omega n)$$

的线性组合，在 $\omega = 0$ 时， $H(e^{j\omega})$ 的值为零，且是奇函数。

这一类滤波器都是作为特殊形式的滤波器，如 Hilbert变换器、差分器等。

**思考：**四类滤波器的对称点在何处？

**建议：** $N$ 最好取为奇数，以便以中心点为对称。

## 5.3 线性相位FIR系统零点分布

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \pm \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n)z^{-n}$$

令：  $m = N - 1 - n$

则： 
$$H(z) = \pm \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-(N-1)+m}$$

$$= \pm z^{-(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^n$$

$$= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

结论：  $H(z)$ 的零点也是 $H(z^{-1})$ 的零点，反之亦然。

## $H(z)$ 的零点分布

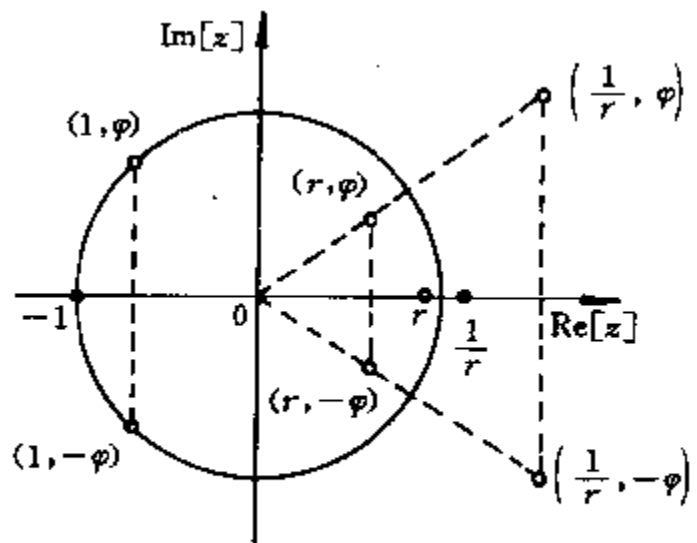


图 6.1.2 线性相位 FIR 滤波器零点位置示意图

$H(z)$ 零点分布可能有四种情况：

1. 不在实轴也不在圆上，应是一对共轭零点，模 $<1$ ；
2. 不在实轴，但在圆上，也是一对共轭零点，模 $=1$ ；
3. 在实轴但不在圆上，无共轭，角度 $=0, \pi$ ，模 $<1$ ；
4. 在实轴，但在圆上，无共轭，角度 $=0, \pi$ ，模 $=1$ ；



# 1. $\varphi_k \neq 0, \pi, \quad r_k < 1, \quad z_k$ 在单位圆内

四个零点同时存在，构成四阶系统：

$$H_k(z) = (1 - z^{-1}r_k e^{j\varphi_k})(1 - z^{-1}r_k e^{-j\varphi_k}) \times \left(1 - z^{-1}\frac{1}{r_k} e^{j\varphi_k}\right) \left(1 - z^{-1}\frac{1}{r_k} e^{-j\varphi_k}\right)$$

四个零点  
对应关系

$z_k$ 与 $z_k^*$ 是一对共轭零点

$z_k^{-1}$ 与 $z_k^{*(-1)}$ 是一对共轭零点

$z_k$ 与 $z_k^{*(-1)}$ 是一对单位圆镜像零点

$z_k^*$ 与 $z_k^{-1}$ 是一对单位圆镜像零点

线性相位  
子系统？

把该式展开，其系数是对称的

2.  $\varphi_k = 0, \pi, r_k < 1, z_k$  在实轴上

$$H_m(z) = (1 - z^{-1}r_k) \left( 1 - z^{-1}\frac{1}{r_k} \right)$$

无共轭零点, 有镜像零点

3.  $\varphi_k \neq 0, \pi, r_k = 1, z_k$  在单位圆上

$$H_l(z) = (1 - z^{-1}e^{j\varphi_k})(1 - z^{-1}e^{-j\varphi_k})$$

无镜像对称零点, 有共轭零点

4.  $\varphi_k = 0, \pi, r_k = 1, z_k = 1, -1$

$$H_n(z) = (1 \pm z^{-1})$$

无镜像零点，也无共轭零点

一个线性相位FIR数字滤波器的转移函数可表示为上述四类 FIR 子系统的级联，即：

$$H(z) = \left[ \prod_k H_k(z) \right] \left[ \prod_m H_m(z) \right] \left[ \prod_l H_l(z) \right] \left[ \prod_n H_n(z) \right]$$

很容易证明，每一个子系统的系数都是对称的，因此它们都具有线性相位。

# 幅频响应特点

$$H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

## 讨论 $H(1)$ 与 $H(-1)$

对于类型 I 滤波器

$$H(1) = H(1), H(-1) = H(-1)$$

对于类型 II 滤波器

$$H(1) = H(1), H(-1) = -H(-1)$$

对于类型 III 滤波器

$$H(1) = -H(1), H(-1) = -H(-1)$$

对于类型 IV 滤波器

$$H(1) = -H(1), H(-1) = H(-1)$$

## 增益表示式的分析

对于类型 I 滤波器

$\cos(\omega n)$  对  $\omega = 0, \pi, 2\pi$  都是偶对称的,  
所以  $H_g(e^{j\omega})$  对  $\omega = 0, \pi, 2\pi$  也都是偶对称的。

对于类型 II 滤波器

$\cos((n - 1/2)\omega)$  对  $\omega = \pi$  都是奇对称的,  
所以  $H_g(e^{j\omega})$  对  $\omega = \pi$  也是奇对称的。

## 增益表示式的分析

对于类型III滤波器

$\sin(\omega n)$ 对 $\omega = 0$ 、 $\pi$ 、 $2\pi$ 都是奇对称的，  
所以 $H_g(e^{j\omega})$ 对 $\omega = 0$ 、 $\pi$ 、 $2\pi$ 呈奇对称。

对于类型IV滤波器

$\sin((n - 1/2)\omega)$ 对 $\omega = 0$ 、 $2\pi$ 都是奇对称的，  
所以 $H_g(e^{j\omega})$ 对 $\omega = 0$ 、 $2\pi$ 呈奇对称。

一个 FIR 系统, 如果其零点具有图 5.3.1 所示的对称性或满足(5.3.1)式, 我们称这样的  $H(z)$  为镜像对称的多项式(mirror-image polynomial, MIP)。现在我们进一步分析一下这些 MIP 在  $z=1$  或  $z=-1$  处幅频响应的特点。

对类型 I 滤波器, 由于  $N$  为奇数, 故  $(N-1)$  为偶数, 由(5.3.1)式, 当  $z=1$  和  $-1$  时,

$$H(1) = (1)^{-(N-1)} H(1^{-1}) = H(1)$$

$$H(-1) = (-1)^{-(N-1)} H((-1)^{-1}) = H(-1)$$

所以, 无论  $z=1$  还是  $z=-1$  都会保证(5.3.1)式成立。若  $H(z)|_{z=1}=0$ , 那么该系统将具有高通或带通型的幅频特性; 若  $H(z)|_{z=-1}=0$ , 那么该系统将具有低通或带通型的幅频特性。

对类型 II 滤波器, 由于  $N$  为偶数, 故  $(N-1)$  为奇数, 类似上述情况, 有

$$H(1) = H(1)$$

$$H(-1) = (-1)^{-(N-1)} H((-1)^{-1}) = -H(-1)$$

所以,  $z$  可以为 1, 但不能为  $-1$ 。也就是说,  $H(z)$  在  $z=-1$  处一定要有零点以保证  $H(-1)=0$ , 即  $H(e^{j\pi})=0$ 。因此, 该系统可以具有低通或带通型的幅频特性, 但不能具有高通或带阻型的幅频特性。

对类型 III 滤波器,  $(N-1)$  为偶数, 有

$$H(1) = -1^{-(N-1)} H(1^{-1}) = -H(1)$$

$$H(-1) = -(-1)^{-(N-1)} H((-1)^{-1}) = -H(-1)$$

所以,这种类型的滤波器在  $z=1$  和  $z=-1$  处都要有零点;同理,对类型Ⅳ滤波器,它在  $z=1$  处也一定要有零点。

由(5.2.2)式和(5.2.9)式可知,类型Ⅰ、Ⅱ滤波器的幅频特性是  $\cos(\omega n)$  的线性组合,它是  $\omega$  的偶函数,且在  $\omega=0$  时的值为 1,这两种情况下的  $h(n)$  也都是偶对称的,因此,它们适合我们通常所说的低通、高通、带通和带阻型滤波器。由于类型Ⅱ滤波器在设计高通和带阻滤波器时的限制,因此  $N$  一般都取为奇数。与此相对比,类型Ⅲ、Ⅳ滤波器只适用于一些特殊意义上的滤波器,如差分器、希尔伯特变换器等,有关内容我们将在后续的章节中继续讨论。

## 证明线性相位

$$H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2} [H(z) \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) [z^{-n} \pm z^{-(N-1)} z^n] \\ &= z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[ \frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2} \right] \end{aligned}$$

## 偶对称时

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right]$$

$$H_g(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right]$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = -\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega$$

结论： 线性相位



## 奇对称时

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = j e^{-j(\frac{N-1}{2})\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[(\frac{N-1}{2} - n)\omega] \\ &= e^{-j(\frac{N-1}{2})\omega + j\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[(\frac{N-1}{2} - n)\omega] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_g(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[(\frac{N-1}{2} - n)\omega] \\ \arg[H(e^{j\omega})] &= -(\frac{N-1}{2})\omega + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

结论：线性相位