

# 第6章

# 第6章 无限冲激响应(IIR) 数字滤波器设计

- 6.1 滤波器的基本概念
- 6.2 模拟低通滤波器设计
- 6.3 模拟高通、带通及带阻滤波器设计
- 6.4 用冲激响应不变法设计IIR数字低通滤波器
- 6.5 用双线性Z变换法设计IIR数字低通滤波器
- 6.6 数字高通、带通及带阻滤波器的设计

# 信号

信号分析, 信号处理

# 系统

## 系统分析

系统6大性质; LTIDTS的单位脉冲响应; LTIDTS的卷积和; 频率响应; 系统函数; 极零分析; 数字滤波器频率响应与零极点关系

DTS的相频响应; FIR系统的线性相位特点; 全通系统与最小相位系统; 系统的信号流图与结构; 系统的Lattice结构; 谱分解、反卷积、系统辨识

## 系统设计/综合

离散时间系统的综合

DF 设计  
IIR DF设计  
FIR DF设计

实现滤波  
参数提取  
系统校正

# 滤波

在各种不同的应用中，改变一个信号中各频率成分的相对大小，或全部消除某些频率分量的过程。

## 滤波器

实现滤波的装置、设备、系统

## 滤波器频率响应

**幅频响应**：反映输入信号通过系统后各频率成分在幅度上发生的衰减情况；

**相频响应**：反映输入信号通过系统后各频率成分在时间上发生的位移情况。

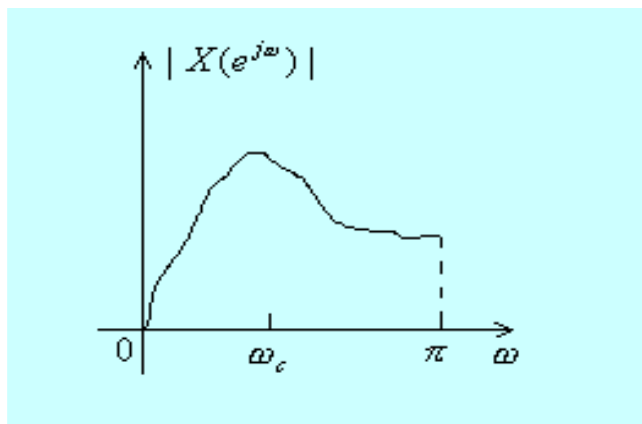
## 滤波器设计

根据技术指标，寻找一套合适的理论、设计方法、器件，以实现预定要求。

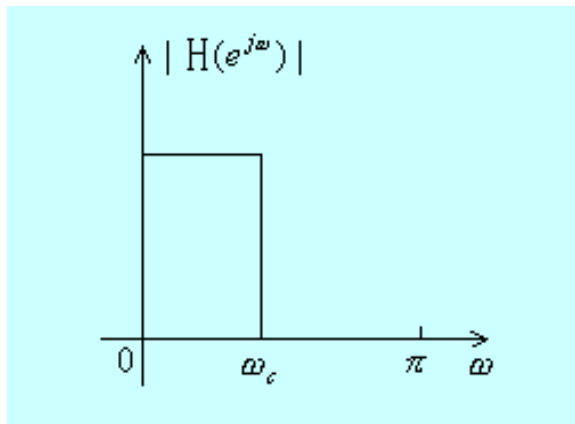
# 6.1 滤波器的基本概念

## 1. 滤波原理

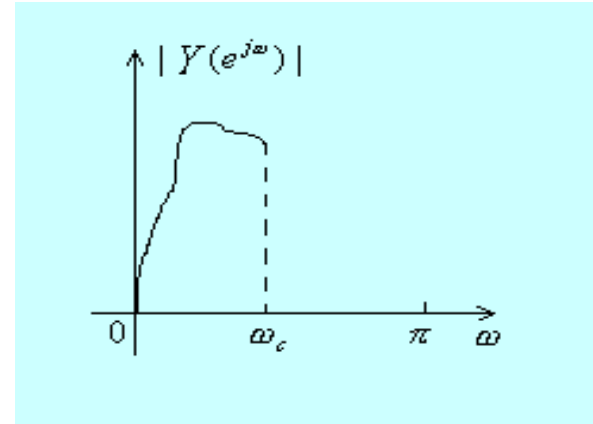
理想滤波器  
理想截止频率



(a)  $|X(e^{j\omega})|$



(b)  $|H(e^{j\omega})|$



(c)  $|Y(e^{j\omega})|$

$x(n)$ 通过系统 $h(n)$ 后使输出 $y(n)$ 中不再含有 $|\omega| > \omega_c$ 的频率成分,而使 $|\omega| < \omega_c$ 的成分"不失真的通过"。

理想滤波器单位脉冲响应是非因果的,物理上不可实现。

理想与实际:  
理想时钟脉冲波形  
理想信号转换波形

信号上升沿: 10%~90%, 20%~80%  
10%波纹、分辨率  
信号转换速率/时钟速率: 10%

## 2. 滤波器的分类

根据**器件**分：模拟滤波器，数字滤波器

根据**功能**分：频率成形滤波器，频率选择性滤波器（LP、HP、BP、BS）

根据**理论**分：经典滤波器，现代滤波器

根据**实现方法**分：数字滤波器有IIR和FIR类型

本课程讨论**频率选择性数字经典滤波器**设计

# 经典滤波器

$$x(n) = s(n) + u(n)$$



加法性噪声

若 $x(n)$ 中的有用成分 $s(n)$ 和希望去除的成分 $u(n)$ 各自占有不同的频带，通过一个线性系统可将 $u(n)$ 有效去除。

四种：低通(LP)，高通(HP)，带通(BP)，带阻(BS)

每一种又有模拟(AF)、数字(DF)两种滤波器。

应用实例：彩色电视信号传输用YUV，接收时用梳状滤波器进行亮色分离。  
不是噪声！

早期用模拟器件实现。参考课件。

去除→分离

对**数字滤波器**，从实现方法上有**IIR滤波器**和**FIR滤波器**之分，转移函数分别为：

FIR DF

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

IIR DF

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

在性能和**设计**方法上，二者有区别

**IIR DF设计的基本设计思路**

可分三类

**间接设计**：模拟滤波器  $\Rightarrow$  **数字滤波器**

**完全设计**：将上述设计方法中的若干步骤合并

**直接设计**：时域逼近，频域逼近；例如LPC方法，等

以**模拟低通原型滤波器设计**为核心，通过**频带转换**可设计模拟高通、带通、带阻滤波器，再通过**模数转换**，得到数字化

噪声环境下短语音的说话人识别；噪声环境下改善语音质量，提高信号的信噪比（SNR）；用这类滤波器的降噪，效果不好。



# 现代滤波器

时域乘积频域卷积；时域卷积频域乘积。加窗操作；系统响应。

$$x(n) = s(n)u(n)$$



乘法性噪声

$$x(n) = s(n) * u(n)$$



卷积性噪声

更复杂：  
鸡尾酒会

信号的频谱和噪声道频谱混迭在一起，靠经典的滤波方法难以去除噪声。**目标：**从含有噪声的数据记录（又称时间序列）中估计出信号的某些特征或信号本身。**种类：**维纳滤波器、卡尔曼滤波器、线性预测、自适应滤波器。

**维纳滤波器**是这类滤波器的典型代表。**现代数字信号处理**的基本内容：**现代滤波器设计、现代谱估计。**

语音  
信号  
解卷

**LPC参数解卷：**系统参数和激励信号（准周期信号或噪声）

**倒谱域解卷：**在倒谱域，声道的倒谱信号与激励的倒谱信号是几乎不在一个区间上；例9.7.1，分离声音信号和系统

不为  
噪声  
而是  
激励

**例 9.7.1** 某声源给出的声音信号是  $s(n)$ ，在距该声源一定距离处有一接收器，该接收器接收到的信号为  $x(n)$ 。 $x(n)$  中不但含有  $s(n)$ ，还包含了  $s(n)$  达到不同反射面后反射回来的信号。这些反射信号称为  $s(n)$  的回波(echo)。相对  $s(n)$ ，回复信号在时间上产生了延迟，幅度上都会减小，可用数学公式表示为

$$x(n) = s(n) + \sum_{k=1}^M \alpha_k s(n - n_k) \quad (9.7.9)$$

式中  $0 < n_1 < n_2 < \dots < n_M$ ， $|\alpha_k| < 1$ 。如果令

$$p(n) = \delta(n) + \sum_{k=1}^M \alpha_k \delta(n - n_k) \quad (9.7.10)$$

那么

$$x(n) = s(n) * p(n) \quad (9.7.11)$$

考虑只有一个回波的简单情况，即得

$$p(n) = \delta(n) + \alpha_1 \delta(n - n_1) \quad (9.7.12a)$$

$$x(n) = s(n) + \alpha_1 s(n - n_1) \quad (9.7.12b)$$

通常，信号  $s(n)$  的长度远大于时延的宽度  $n_1$ ，因此，由(9.7.12b)式合成起来的信号必然会产生失真。该失真由回波产生的，因此，我们希望能将(9.7.11)式中的  $s(n)$  和  $p(n)$  分开，显然，这是一个简单的同态滤波问题。由步骤 1~步骤 6，有

$$X(z) = S(z)P(z), \quad P(z) = 1 + \alpha_1 z^{-n_1} \quad \begin{matrix} (1) \text{ 取ZT} \\ (2) \text{ 取对数} \end{matrix}$$

$$\hat{X}(z) = \ln X(z) = \ln S(z) + \ln(1 + \alpha_1 z^{-n_1}) = \hat{S}(z) + \hat{P}(z) \quad (9.7.13)$$

将该式两边取 Z 反变换，有

(3) 做IZT

$$\hat{x}(n) = \hat{s}(n) + \hat{p}(n)$$

(9.7.14)

因为 $|\alpha_1| < 1$ , 很容易证明

$$\hat{p}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\alpha_1^k}{k} \delta(n - kn_1) \quad (9.7.15)$$

显然,  $\hat{p}(n)$  是相距为  $n_1$  的整数倍的脉冲串序列, 其幅度随着  $k$  的增加而急剧减小。这样, 还需将(9.7.14)式的加法性的倒谱信号相分离。在步骤4中, 我们将  $\hat{x}(n)$  送入一线性滤波器  $h(n)$  得  $\hat{y}(n)$ , 并使  $\hat{y}(n) = \hat{s}(n)$ 。在本例的情况下, 若  $h$  是一“频不变”的“时间陷波器”<sup>[14]</sup>, 即  $\hat{x}(n)$  通过  $h$  后恰好将  $\hat{p}(n)$  陷去, 那么可得  $\hat{y}(n) = \hat{s}(n)$ 。 (4) 倒谱域滤波

以下两步是对  $\hat{y}(n)$  做 Z 变换, 然后再做指数运算, 由(9.7.8)式, 可实现  $s(n)$  和  $p(n)$  的分离。 (5) 倒谱滤波信号做 ZT (6) 再做指数运算, 最终实现分离

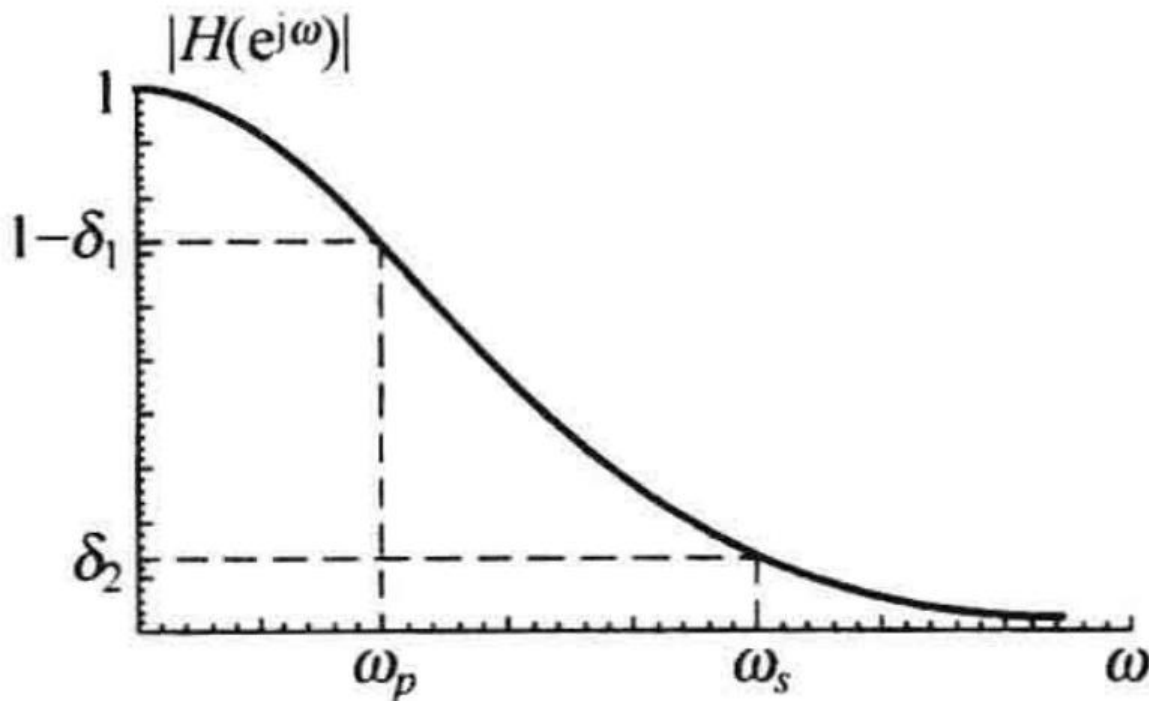
复倒谱域

这样的操作, 并不难做到

用DTFT代替ZT, 且对模取对数; 实际用DFT; →倒谱, 倒谱域语音信号处理, 对相位相对不是很敏感; 正负25之内, 声道倒谱

### 3. 滤波器的技术要求

低通：



$\omega_p$ ：通带截止频率，又称通带上限频率

$\omega_s$ ：阻带起始频率，又称阻带下限截止频率

$\delta_1$ ：通带内的起伏

$\delta_2$ ：阻带内的衰减

## 技术要求

3个频率带：通带、阻带、*过渡带*

频率参数：

容限参数： $\delta_1, \delta_2$

容限参数又称波纹参数，表示了波动的幅度。允许在通带内或阻带内是波动的。波动的更好实例参见切比雪夫幅频特性曲线，等波纹特性。

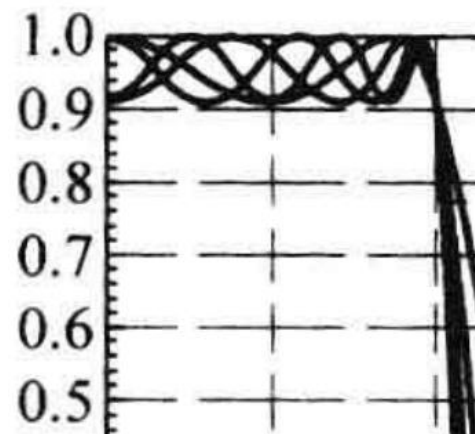
衰减参数（通常给定的指标）

通带内衰减不能太大

阻带内衰减要足够大

$\alpha_p$ ：通带内所允许的最大衰减

$\alpha_s$ ：阻带内应达到的最小衰减



$$\alpha_p = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|} = -20 \lg |H(e^{j\omega_p})| \quad |H(e^{j0})| \text{归一化}$$

$$\alpha_s = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_s})|} = -20 \lg |H(e^{j\omega_s})|$$

单位 (dB)

若幅度下降到 0.707，则幅平方下降 0.5（半功率点）：

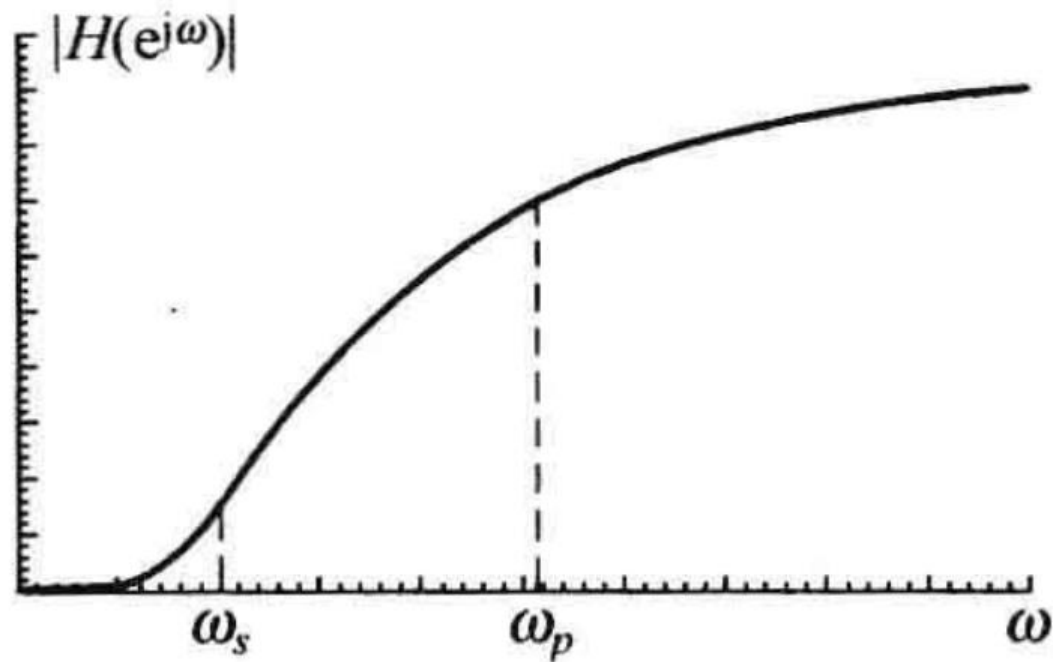
$$\alpha_p = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|} = 20 \lg \frac{1}{0.707} = 3\text{dB}$$

若幅度下降到 0.01：

$$\alpha_s = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|} = 20 \lg \frac{1}{0.01} = 40\text{dB}$$

**衰减参数**的更好理解，参考后面定义的**衰减函数**

## 高通



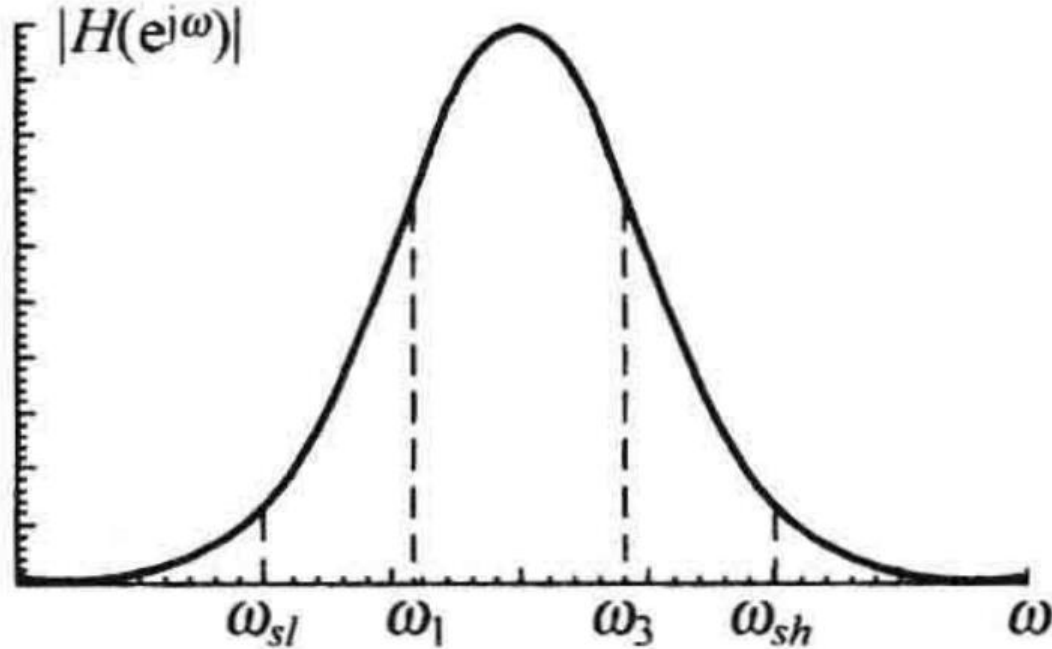
$\omega_p$ : 通带截止频率, 又称通带下限频率

$\omega_s$ : 阻带上限截止频率

$\alpha_p$ : 通带允许的最大衰减

$\alpha_s$ : 阻带内应达到的最小衰减

## 带通



$\omega_1$ : 通带下限截止频率

$\omega_{sl}$ : 下阻带截止频率

$\omega_3$ : 通带上限截止频率

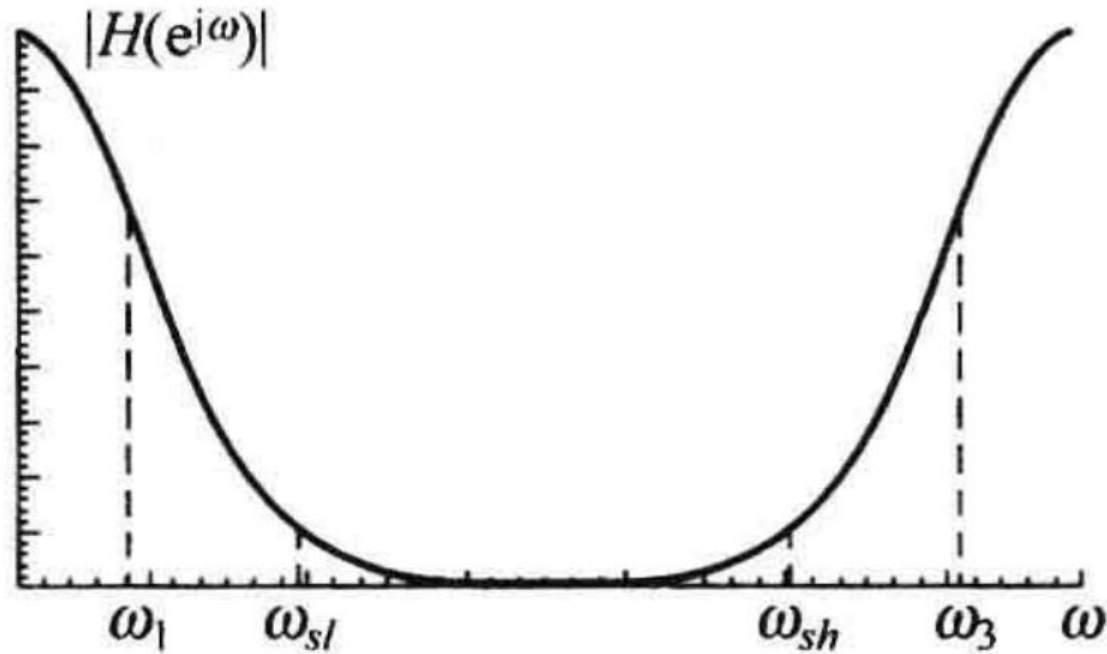
$\omega_{sh}$ : 上阻带截止频率

$\alpha_p$ : 通带允许的最大衰减

$\alpha_s$ : 阻带内应达到的最小衰减



## 带阻



$\omega_1$ : 通带下限截止频率

$\omega_{sl}$ : 阻带下限截止频率

$\omega_3$ : 通带上限截止频率

$\omega_{sh}$ : 阻带上限截止频率

$\alpha_p$ : 通带允许的最大衰减

$\alpha_s$ : 阻带内应达到的最小衰减

# 数字滤波器设计的一般步骤

1. 给定所设计的滤波器的技术指标:

$$\omega_p, \omega_s, \alpha_p, \alpha_s, F_s$$



LP, HP

$$\omega_{sl}, \omega_{sh}, \omega_1, \omega_3, \alpha_p, \alpha_s, F_s$$



BP, BS

要给定采样频率，用 $F_s$ 表示，以区别阻带截止频率 $f_s$

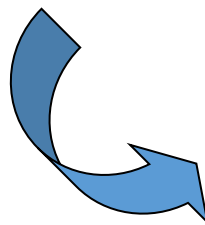
2. 设计出一个 $H(z)$ ，使

$$|H(e^{j\omega})|$$



满足给定的技术要求

如何设计 $H(z)$



没有考虑相位

间接设计法思路：借助于模拟滤波器设计资源

选定模拟滤波器模型

Butterworth, Chebyshev, 等等

幅平方特性在模拟滤波器设计中有重要作用，有不同的可供采用的 $|G(j\Omega)|^2$ 表达式。

$$|G(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + C^2(\Omega^2)^N}$$

$$|G(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\Omega)}$$

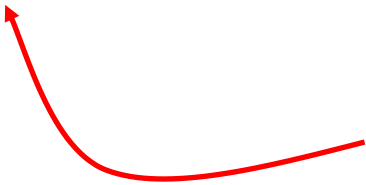
滤波器频域参数  $\rightarrow$  滤波器模型参数

幅度平方函数：  $A^2(\Omega) = |G(j\Omega)|^2$

得到系统函数：  $G(s)$

变换到数字域：  $G(s) \rightarrow H(z)$

冲激响应不变法  
阶跃响应不变法  
双线性变换法



# IIR DF间接法设计的具体步骤

给定数字滤波器的技术指标  $\omega_p, \omega_s, \alpha_p, \alpha_s$  (更多)



转换成模拟滤波器的技术指标  $\Omega_p, \Omega_s, \alpha_p, \alpha_s$  (更多)



转换成模拟低通滤波器的技术指标  $\lambda_p, \lambda_s, \alpha_p, \alpha_s$



设计模拟低通滤波器  $G(p)$



得到模拟低通、高通、带通、带阻滤波器  $H(s)$



得到数字低通、高通、带通、带阻滤波器  $H(z)$

## 6.2 模拟低通滤波器的设计

### 一、概述

给定模拟低通滤波器的技术指标 $\alpha_p, \Omega_p, \alpha_s, \Omega_s$   
设计低通滤波器 $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{d_0 + d_1s + \cdots + d_{N-1}s^{N-1} + d_Ns^N}{c_0 + c_1s + \cdots + c_{N-1}s^{N-1} + c_Ns^N}$$

使其对数幅频响应  $10 \lg |G(j\Omega)|^2$  在 $\Omega_p, \Omega_s$ 处分别达到 $\alpha_p, \alpha_s$ 的要求。

定义衰减函数 $\alpha(\Omega)$

$$\alpha(\Omega) = 10 \lg \left| \frac{X(j\Omega)}{Y(j\Omega)} \right|^2 = 10 \lg \frac{1}{|G(j\Omega)|^2}$$

$$|G(j\Omega)|^2 = 10^{-\alpha(\Omega)/10}$$

$$\alpha_p = \alpha(\Omega_p) = -10 \lg |G(j\Omega_p)|^2$$

$$\alpha_s = \alpha(\Omega_s) = -10 \lg |G(j\Omega_s)|^2$$



上面两式将要求的**衰减**和模拟滤波器的**幅平方特性**联系了起来。

注意：由于衰减指标只有两个，因此也只能和幅平方特性的两个特殊频率相联系。

目的：由幅平方特性 $|G(j\Omega)|^2$ 求出模拟滤波器的转移函数 $G(s)$ 。

如何将二者联系起来？

$G(s)$ 联系着系统的零极点！

回顾：

CTFT的实信号的共轭对称性

若 
$$x(t) \xrightarrow{CTFT} X(j\Omega)$$

则 
$$x^*(t) \xrightarrow{CTFT} X^*(-j\Omega)$$
 一般信号的共轭性

若  $x(t)$  为实函数

则 
$$X^*(-j\Omega) = X(j\Omega)$$

即 
$$X(-j\Omega) = X^*(j\Omega)$$
 实信号的共轭对称性

所以：

$$|G(j\Omega)|^2 = G(j\Omega)G^*(j\Omega) = G(j\Omega)G(-j\Omega)$$



冲激响应是实数

而

$$G(j\Omega)G(-j\Omega) = G(s)G(-s) \Big|_{s=j\Omega}$$

有

$$|G(j\Omega)|^2 = [G(s)G(-s)]_{s=j\Omega}$$

$$G(s)G(-s) = |G(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega^2 = -s^2}$$

$G(j\Omega)$ 是关于 $\Omega$ 的有理多项式之比，因此 $|G(j\Omega)|^2$ 是 $\Omega^2$ 的有理多项式之比，所以，由 $|G(j\Omega)|^2$ 容易得到所需要的 $G(s)$ 。

注意，由于衰减指标只有两个，只能和幅平方特性的两个特殊频率相联系，因此，幅平方特性的表达式必须简化。

注：对于 $LT$ ，有

$$x(t) \rightarrow G(s) \quad x^*(t) \rightarrow G^*(s^*)$$





## 谱分解

### 特点分析

首先得到的是 $G(s)G(-s)$

$G(s)G(-s)$ 由零极点表征

$G(s)G(-s)$ 的零极点是象限对称分布的

需要的是 $G(s)$

如何分离零极点？

$G(s)$ 的极点

系统要稳定，取左半平面的极点

$G(s)$ 的零点

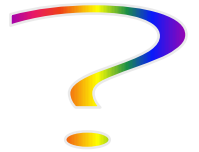
随意些。若要求最小相位特性，则取左半平面零点；虚轴上的零点都是偶次的，取一半。

$$(\alpha_p, \Omega_p, \alpha_s, \Omega_s) \Rightarrow |G(j\Omega)|^2 \Rightarrow G(s)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$   
 通过衰减函数      冲激响应实信号  
 以及零极点分离

$|G(j\Omega)|^2$  是关键

如何给定  $|G(j\Omega)|^2$



$$20 \log |G(j\Omega)| = 10 \log |G(j\Omega)|^2$$

对数幅频特性，反映了增益概念

$$10 \log \frac{1}{|G(j\Omega)|^2} \quad \text{反映衰减之意}$$

例：根据以下幅平方特性 $|G(j\Omega)|^2$ 确定系统函数 $G(s)$ 。

$$|G(j\Omega)|^2 = \frac{16(25 - \Omega^2)^2}{(49 + \Omega^2)(36 + \Omega^2)}$$

解：因为 $|G(j\Omega)|^2$ 是 $\Omega$ 的非负有理函数，它在 $j\Omega$ 轴上的零点是偶次的，所以满足幅平方特性函数条件。先求出 $G(s)G(-s)$ 的零极点分布：

$$G(s)G(-s) = |G(j\Omega)|_{\Omega^2 = -s^2}^2 = \frac{16(25 + s^2)^2}{(49 - s^2)(36 - s^2)}$$

极点： $s = \pm 7, s = \pm 6$ ；零点： $s = \pm j5$ ，二重零点。

再选取左半平面上的极点和虚轴上的一对共轭零点为 $G(s)$ 的极零点，并设增益为 $k$ ，则 $G(s)$ 为：

$$G(s) = \frac{k(s^2 + 25)}{(s + 7)(s + 6)}$$

由 $G(0) = |G(j0)|$ 的条件得到增益常数 $k=4$ ，所以

$$G(s) = \frac{4s^2 + 100}{s^2 + 13s + 42}$$

将 $G(s)$ 按不同的原则简化, 可得到不同形式的滤波器, 即不同的 $|G(j\Omega)|^2$ 表达式

### 1. 巴特沃思(Butterworth)滤波器

$$|G(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + C^2(\Omega^2)^N}$$

$C$ 为待定常数,  $N$ 为待定的滤波器阶次

### 2. 切比雪夫I型(Chebyshev-I)滤波器

$$\text{定义 } C_n^2(\Omega) = \cos^2(n \cos^{-1} \Omega)$$

$$|G(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\Omega)}$$

### 3. 切比雪夫II型滤波器

$$|G(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[ \frac{C_n^2(\Omega_s)}{C_n^2(\Omega_s/\Omega)} \right]^2}$$

### 4. 椭圆滤波器

$$|G(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_n^2(\Omega)}$$

$U_n^2(\Omega)$  : Jacobian 函数

本课程只讨论 Butterworth 和 Chebyshev-I 滤波器的设计

# 设计规范化

频率参数归一化

对于低通滤波器

归一化频率

$$\lambda = \Omega / \Omega_p$$

$$\lambda_p = \Omega_p / \Omega_p = 1$$

$$\lambda_s = \Omega_s / \Omega_p$$

归一化复变量

$$p = j\lambda = j\Omega / \Omega_p = s / \Omega_p$$

$$\alpha_p: \Omega_p$$

一般定义3dB衰减频率:

$$\alpha_p = 3\text{dB}: \Omega_c$$

$\Omega_c$ : 3dB频率点