第6章

第6章　无限冲激响应(IIR）数字滤波器设计

巴特沃思模拟低通滤波器的极点及其几何位置对应和变量取值关系

$$p_k = \exp\left[\mathrm{j}\frac{2k+N-1}{2N}\pi\right]$$

$$k = 1,2,\cdots,2N$$

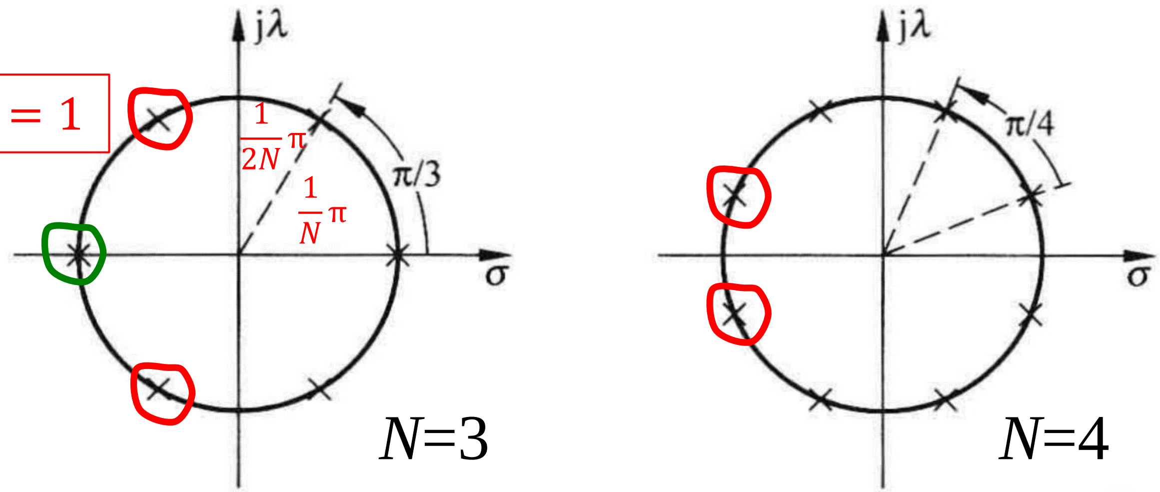
$$\frac{2k+N-1}{2N}$$

$$k = 1:\ 90^{\mathrm{o}} + \frac{1}{2N}\pi$$

$$k = 1$$

$G(p)G(-p)$

极点分布:



即$2N$个极点均匀分布在p平面半径为 1 的圆上，应取左半平面的N个赋予$G(p)$，$k = 1,2,\cdots,N$；右半平面的N个赋予$G(-p)$。

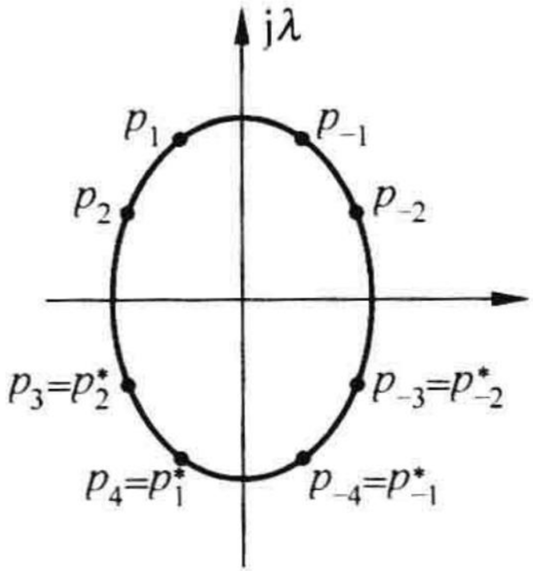
$$s_k = \Omega_{\mathrm{p}} e^{\mathrm{j}\left(\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$$

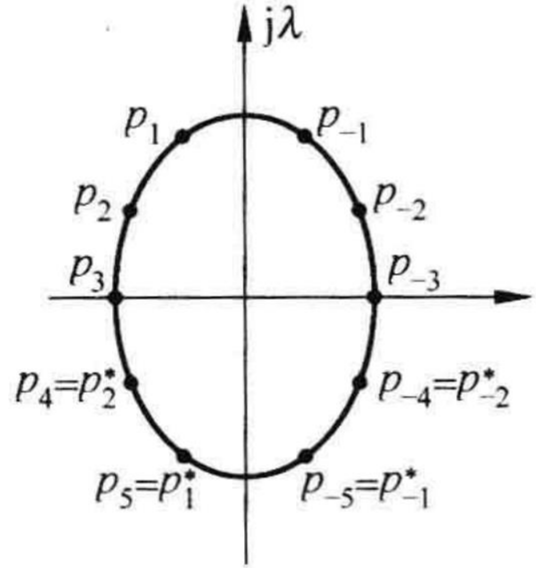
切比雪夫模拟低通滤波器的极点及其几何位置对应和变量取值关系

令 $p_k=\sigma_k+\mathrm{j}\lambda_k$，有：$$\left(\frac{\sigma_k}{\sinh(\varphi_2)}\right)^2+\left(\frac{\lambda_k}{\cosh(\varphi_2)}\right)^2=1$$

即实部、实部满足椭圆方程，如下图所示：

切比雪夫滤波器的极点分布





求出的$2n$个极点p_k，一半属于$G(p)$，一半属于$G(-p)$，把左半平面的极点赋于$G(p)$，即$k=1,2,\cdots,n$。

$$p_k=-\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]\sinh(\varphi_2)+\mathrm{j}\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]\cosh(\varphi_2)$$

$k=1,2,\cdots,n;\quad \varphi_2>0$

6.3 模拟高通、带通及带阻滤波器的设计

给定高通、带通或带阻的技术指标

$\eta = \Omega/\Omega_{\mathrm{p}}, q = \mathrm{j}\eta$

$\eta_{\mathrm{p}}, \eta_{\mathrm{s}}, \alpha_{\mathrm{p}}, \alpha_{\mathrm{s}}$

高通滤波器设计

频率转换

$\eta \Rightarrow \lambda$

低通滤波器技术指标

借助低通滤波器设计资源

$\lambda_{\mathrm{p}}, \lambda_{\mathrm{s}}, \alpha_{\mathrm{p}}, \alpha_{\mathrm{s}}$

设计模拟低通滤波器$G(p)$

频率转换

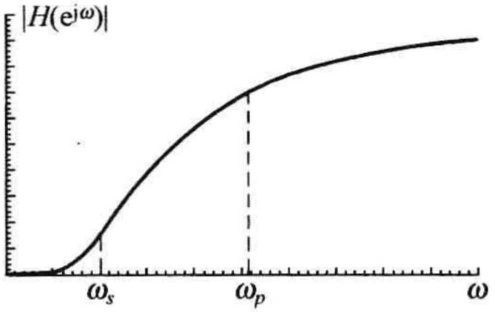
$p \Rightarrow q$

s

得到高通、带通或带阻滤波器$H(s)$

模拟高通、带通、带阻滤波器设计流程

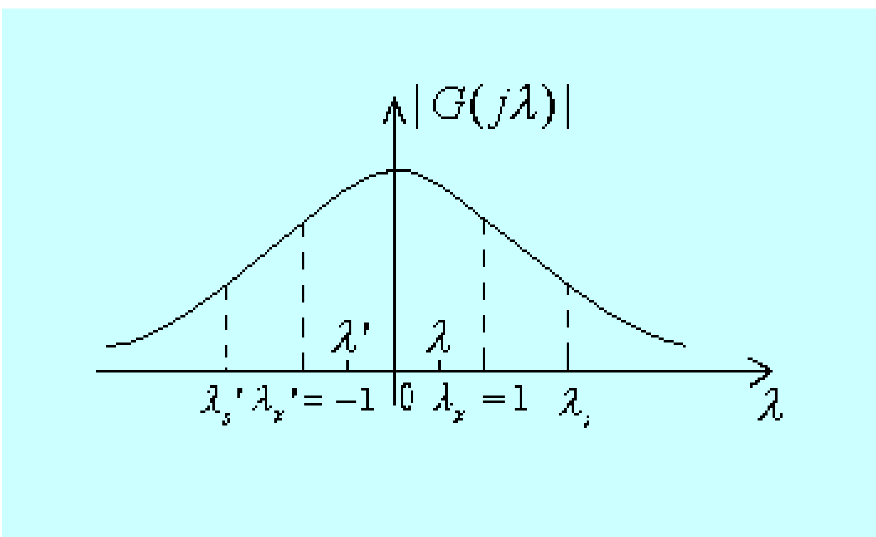
一、模拟高通滤波器的设计



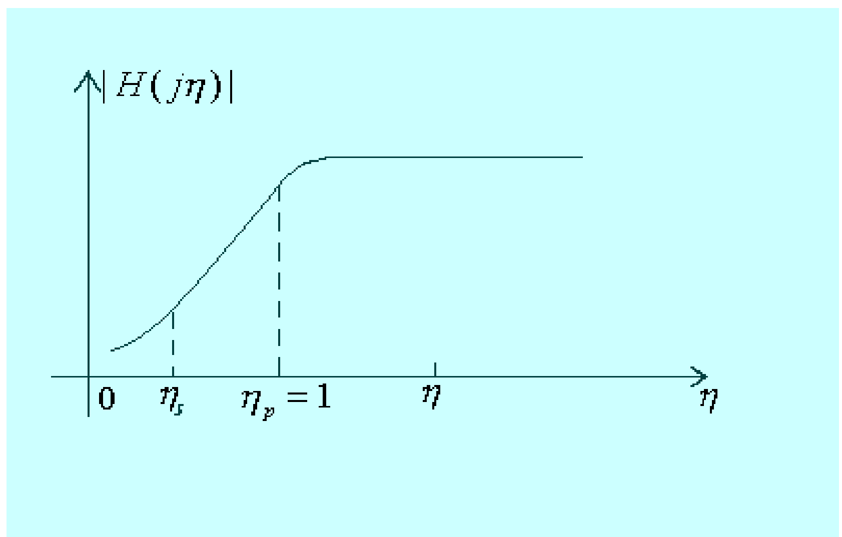
给定高通滤波器的技术指标： $\Omega_{\mathrm{p}}, \Omega_{\mathrm{s}}, \alpha_{\mathrm{p}}, \alpha_{\mathrm{s}}$

频率归一化： $\eta = \Omega/\Omega_{\mathrm{p}}, \therefore \eta_{\mathrm{p}} = 1,\ \eta_{\mathrm{s}} < 1$

高通到低通的转换：



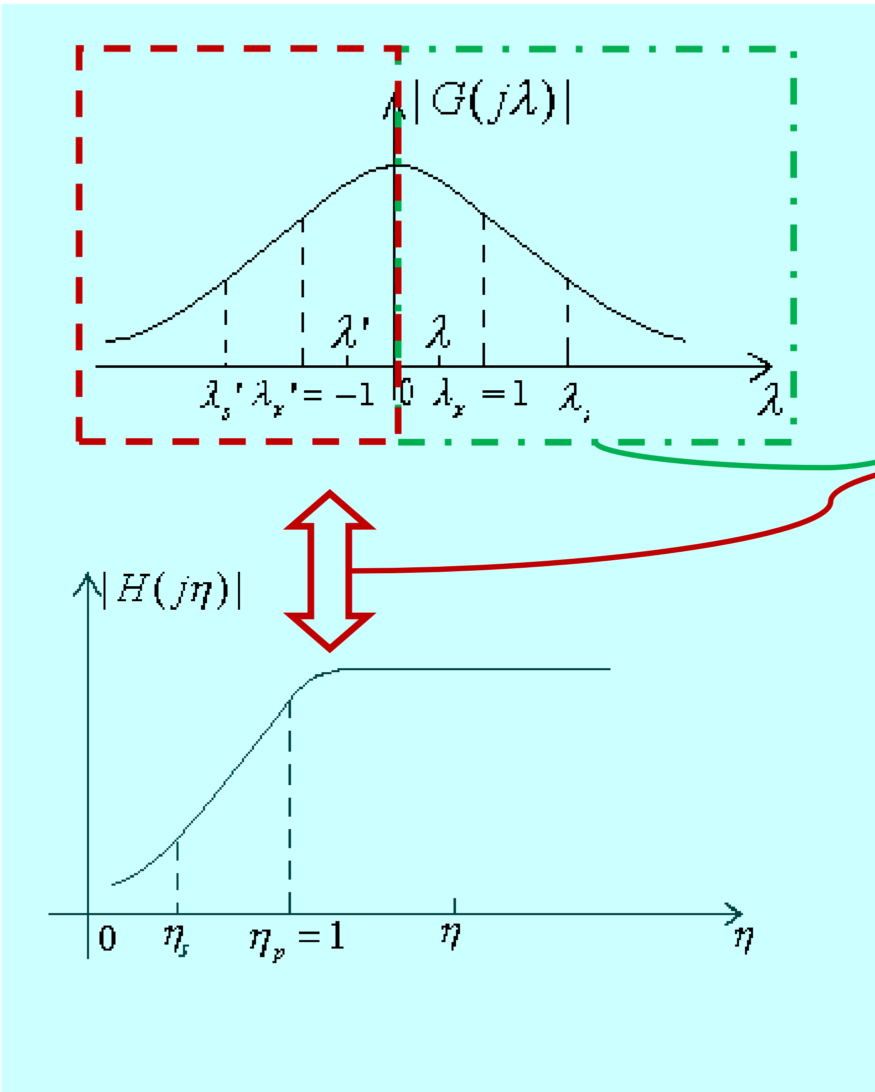
低通幅频



高通幅频

保证指定频率点上满足要求

1. 频率变换关系



频率变换关系$\lambda = f(\eta)$

$$\begin{cases} \lambda\eta = 1 \\ \lambda = \dfrac{1}{\eta} \end{cases}$$

或

$$\lambda'\eta = -1$$

$-\infty$	$\Leftrightarrow$	0
λ'_s	$\Leftrightarrow$	η_s
$\lambda'_p = -1$	$\Leftrightarrow$	$\eta_p = 1$
λ'	$\Leftrightarrow$	η
0	$\Leftrightarrow$	∞

2. 衰减参数保持不变

3. 系统函数

先归一化模拟低通滤波器$G(p)$；再去归一化得到系统函数$H(s)$

由：$\eta=\Omega/\Omega_{\mathrm{p}},\quad \lambda=1/\eta$

实现：$\eta \Rightarrow \lambda$ → 设计出 $G(p)$ （LP）

如何：$G(p)$ → $H(s)$ （HP）

$$q=\mathrm{j}\eta=\mathrm{j}\frac{1}{\lambda}=-\frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p}$$

q： 归一化高通滤波器的复变量

p： 归一化低通滤波器的复变量

得:

$$H(q)=G(p)\big|_{p=\frac{1}{q}}=G(\frac{1}{q})$$

两个归一化系统函数的转换

$$q=\mathrm{j}\eta=\mathrm{j}\frac{\Omega}{\Omega_{\mathrm{p}}}=\frac{s}{\Omega_{\mathrm{p}}}$$

$$\therefore\quad H(s)=G(p)\big|_{p=\Omega_{\mathrm{p}}/s}$$

去归一化

$$G(p)\xrightarrow{p\text{和}q\text{的关系:}\ p=1/q}H(q)\xrightarrow{q\text{和}s\text{的关系:}\ q=s/\Omega_{\mathrm{p}}}H(s)$$

$$G(p)\xrightarrow{p\text{和}s\text{的关系:}\ p=\Omega_{\mathrm{p}}/s}H(s)$$

于是得到: 模拟高通滤波器的转移函数

例 6.3.1 用巴特沃思滤波器设计一个高通模拟滤波器，要求 $f_p=100\text{Hz}$，$\alpha_p=3\text{dB}$，$f_s=50\text{Hz}$，$\alpha_s=30\text{dB}$。

解 ① 先将频率归一化，得 $\eta_p=1$，$\eta_s=0.5$。

② 做频率转换，得 $\lambda_p=1$，$\lambda_s=2$，仍有 $\alpha_p=3\text{dB}$，$\alpha_s=30\text{dB}$。

③ 设计低通巴特沃思滤波器。由例 6.2.1 可知，$C=1$，$N=5$，因而得归一化转移函数为

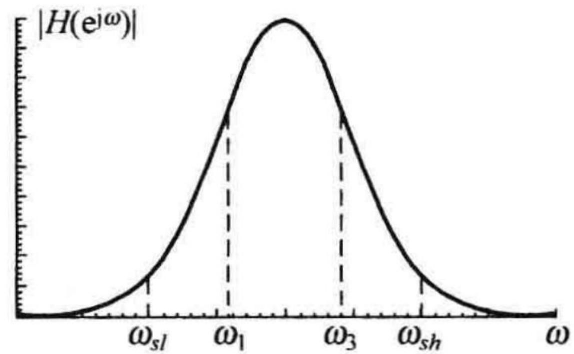
$$G(p)=\frac{1}{(p+1)(p^2+0.618p+1)(p^2+1.618p+1)}$$

④ 求高通滤波器的转移函数 $H(s)$。令 $p=\Omega_p/s=200\pi/s$，并代入上式，即可得高通滤波器的转移函数 $H(s)$。

本例在频率转换后，与例6.2.1相比，在模拟低通原型滤波器的指标上4个参数是相同的，所以得到了同样的低通原型滤波器。实际频率并不相同。

带通、带阻滤波器和高通滤波器的转换过程大体相同。

二、模拟带通滤波器的设计



4个频率参数

定义通带带宽：　$\Omega_{\mathrm{BW}} = \Omega_3 - \Omega_1$

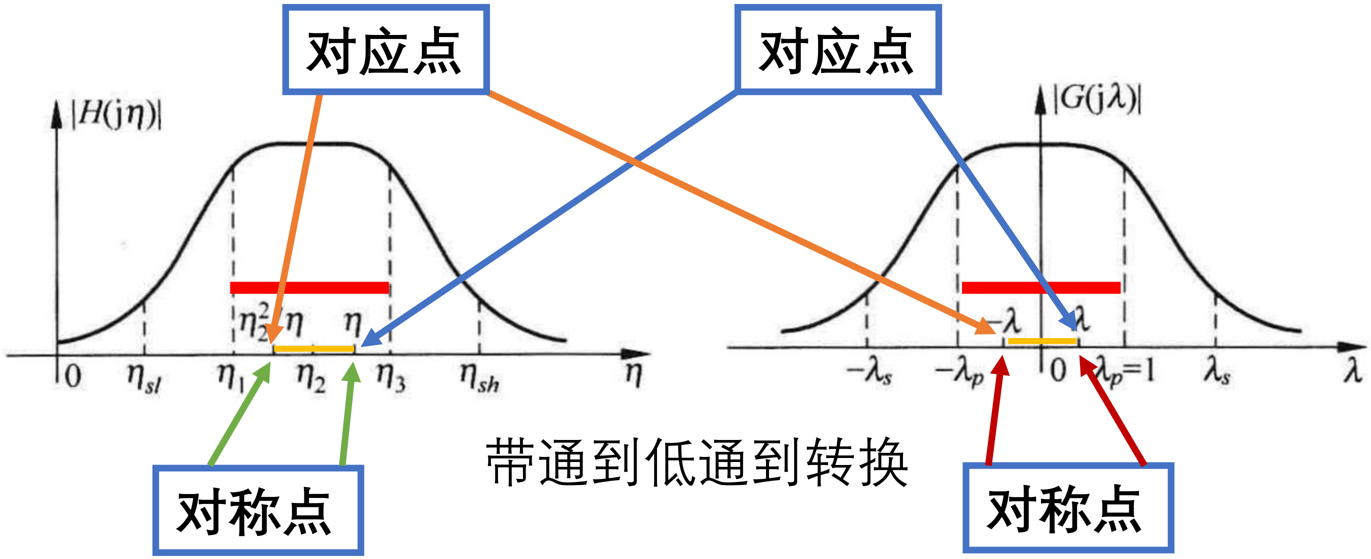
对Ω轴归一化：　$\eta = \Omega / \Omega_{\mathrm{BW}}$

定义通带中心频率：$\Omega_2^2 = \Omega_1 \Omega_3$　　$\eta_2^2 = \eta_1 \eta_3$

按比例找对应关系

- 在通带内设定变量λ和η
- 对应点，对称点
- 实现带通滤波器技术指标到低通的转换的关键问题是找到对应关系

$$\eta \Leftrightarrow \lambda$$?



带通到低通到转换

保证指定频率点上满足要求

λ:	$-\infty$	$-\lambda_s$	$-\lambda_p$	0	λ_p	λ_s	∞
η:	0	η_{sl}	η_1	η_2	η_3	η_{sh}	∞

$\eta \Leftrightarrow \lambda$

$$\boxed{\frac{\eta - \eta_2^2/\eta}{\eta_3 - \eta_1} = \frac{2\lambda}{2\lambda_p}}$$

几何比例关系

由于 $\eta_3 - \eta_1 = 1, \quad \lambda_{\mathrm{p}} = 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda = \dfrac{\eta^2 - \eta_2^2}{\eta}}$

$$p = \mathrm{j}\lambda = \mathrm{j}\frac{\eta^2 - \eta_2^2}{\eta} = \mathrm{j}\frac{(q/\mathrm{j})^2 - \eta_2^2}{(q/\mathrm{j})}$$

p和q的关系

$$= \frac{q^2 + \eta_2^2}{q} = \frac{(\frac{s}{\Omega_{\mathrm{BW}}})^2 + \frac{\Omega_1\Omega_3}{\Omega_{\mathrm{BW}}^2}}{(s/\Omega_{\mathrm{BW}})}$$

q和s的关系

去归一化频率转换关系

$$\boxed{p = \frac{s^2 + \Omega_1\Omega_3}{s(\Omega_3 - \Omega_1)}}$$

p和s的关系

设计模拟低通归一化滤波器时衰减参数不变。

模拟带通滤波器的转移函数

由上分析，可得 $H(s)=G(p)\big|_{p=\frac{s^2+\Omega_1\Omega_3}{s(\Omega_3-\Omega_1)}}$

N阶低通滤波器转换到带通后，阶次变为$2N$。

例 6.3.2 试设计一个切比雪夫带通滤波器，要求带宽为 200Hz，中心频率等于 1 000Hz，通带内衰减不大于 3dB，在频率小于 830Hz 或大于 1 200Hz 处的衰减不小于 25dB。

解 由题意知，$\Omega_{BW}=2\pi\times200$，$\Omega_2=2\pi\times1\,000$，$\alpha_p=3\text{dB}$，$\Omega_{sl}=2\pi\times830$，$\Omega_{sh}=2\pi\times1\,200$，$\alpha_s=25\text{dB}$。

① 将频率归一化，有 $\eta_2^2=25$，$\eta_{sl}=4.15$，$\eta_{sh}=6$，由 $\eta_3-\eta_1=1$，$\eta_2^2=\eta_1\eta_3$，可求出 $\eta_1=4.525$，$\eta_3=5.525$。

② 求低通滤波器的技术指标。由图 6.3.2 及(6.3.3)式，有

$$\lambda_p=\frac{\eta_3^2-\eta_2^2}{\eta_3}=1,\quad -\lambda_p=\frac{\eta_1^2-\eta_2^2}{\eta_1}=-1$$

$$\lambda_s=\frac{\eta_{sh}^2-\eta_2^2}{\eta_{sh}}=1.833,\quad -\lambda_s=\frac{\eta_{sl}^2-\eta_2^2}{\eta_{sl}}=-1.874$$

$\lambda_p=1$ 可以不用计算而直接给出，但 λ_s 与 $-\lambda_s$ 的绝对值略有不同。这是由于所给的技术要求并不完全对称所致。取 λ_s 为其中绝对值较小者，即 $\lambda_s=1.833$，这样在 $\lambda_s=1.833$ 处的衰减保证为 25dB，在 $\lambda=1.874$ 处的衰减更能满足要求。

③ 设计低通切比雪夫滤波器 $G(p)$。由技术参数 $\alpha_p=3\text{dB}$，$\alpha_s=25\text{dB}$，$\lambda_p=1$，$\lambda_s=1.833$，得

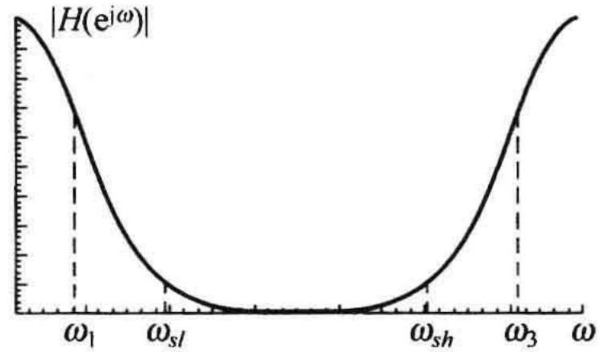
$$\varepsilon^2=0.995\,262\,3,\quad n=3$$

$$G(p)=\frac{1}{\varepsilon\times 2^2(p+0.298\,6)(p^2+0.298\,6p+0.839\,2)}$$

④ 求带通转移函数 $H(s)$，即有

$$H(s)=G(p)\Big|_{p=\frac{s^2+\Omega_1\Omega_3}{s(\Omega_3-\Omega_1)}}=G(p)\Big|_{p=\frac{s^2+4\pi^2\times1000^2}{s\times2\pi\times200}}$$

三、模拟带阻滤波器的设计



带阻滤波器频率归一化方法同带通滤波器

4个频率参数:

定义阻带带宽: $\Omega_{\mathrm{BW}} = \Omega_3 - \Omega_1$

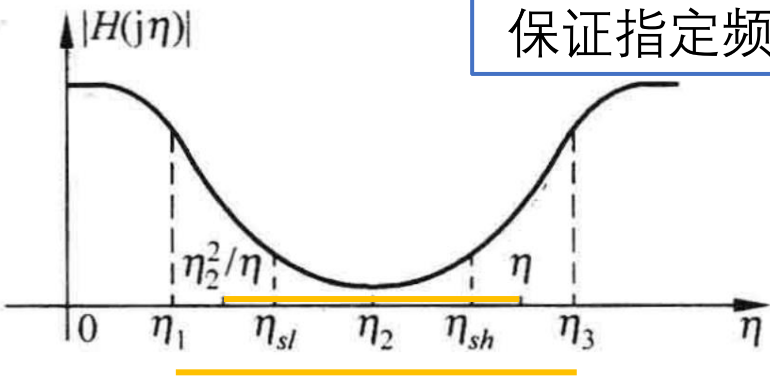
对Ω轴归一化: $\eta = \Omega/\Omega_{\mathrm{BW}}$

定义阻带中心频率: $\Omega_2^2 = \Omega_1\Omega_3$ ⇒ $\eta_2^2 = \eta_1\eta_3$

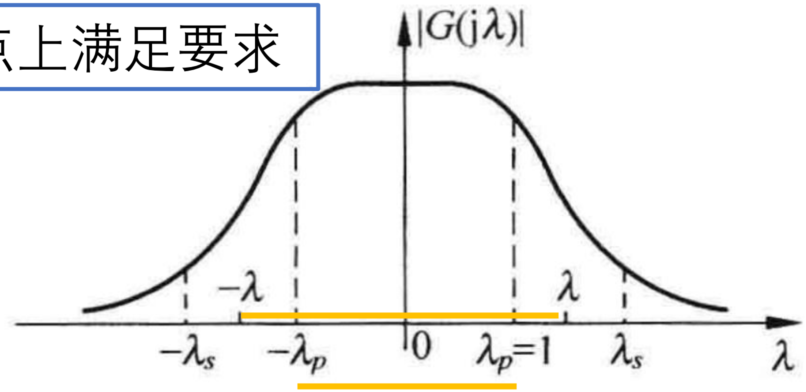
按比例找对应关系

- 在过渡带内设定变量λ和η
- 对应点，对称点
- 实现带通滤波器技术指标到低通的转换的关键问题是找到对应关系

$$\eta \Leftrightarrow \lambda \ ?$$



保证指定频率点上满足要求



λ:	$-\infty$	$-\lambda_s$	$-\lambda_p$	0	0	λ_p	λ_s	∞
η:	η_2	η_{sh}	η_3	$+\infty$	0	η_1	η_{sl}	η_2

几何比例关系：

$$\boxed{\frac{\eta-\eta_2^2/\eta}{\eta_3-\eta_1}=\frac{2\lambda_p}{2\lambda}}$$

归一化频率变换关系 $\Rightarrow$

$$\because \quad \eta_3-\eta_1=1, \lambda_p=1,$$

$$\therefore \quad \lambda=\frac{\eta}{\eta^2-\eta_2^2}$$

$$p \xrightarrow[\lambda=f(\eta)]{\eta=g(\lambda)} q \xrightarrow{q=\mathrm{j}\eta=\mathrm{j}\frac{\Omega}{\Omega_{\mathrm{BW}}}=\frac{s}{\Omega_{\mathrm{BW}}}} s$$

得到:

$$p=\frac{s(\Omega_3-\Omega_1)}{s^2+\Omega_1\Omega_3}$$

去归一化频率变换关系

设计模拟低通归一化滤波器时衰减参数不变。

$\boxed{\text{模拟带阻滤波器的转移函数}}$

$$H(s)=G(p)\Big|_{p=\frac{s(\Omega_3-\Omega_1)}{s^2+\Omega_1\Omega_3}}$$

例 6.3.3 给定模拟带阻滤波器的技术指标：$\Omega_1=2\pi\times905$，$\Omega_{sl}=2\pi\times980$，$\Omega_{sh}=2\pi\times1\,020$，$\Omega_3=2\pi\times1\,105$，$\alpha_p=3\text{dB}$，$\alpha_s=25\text{dB}$，试设计巴特沃思带阻滤波器。

解 (1) $\Omega_{BW}=\Omega_3-\Omega_1=2\pi\times200$，$\Omega_2^2=\Omega_1\times\Omega_3=4\pi^2\times104\,975$

$\eta_1=4.525$，$\eta_3=5.525$，$\eta_{sl}=4.9$，$\eta_{sh}=5.1$，$\eta_2^2=\eta_1\eta_3=25$，$\eta_3-\eta_1=1$

(2) 由(6.3.6)式，有

$$-\lambda_s=\frac{\eta_{sl}}{\eta_{sl}^2-\eta_2^2}=-4.949,\quad \lambda_s=\frac{\eta_{sh}}{\eta_{sl}^2-\eta_2^2}=5.049$$

取 $\lambda_s=4.949$， 且 $\lambda_p=1$。

(3) 由 $\alpha_p=3\text{dB}$，$\alpha_s=25\text{dB}$，$\lambda_p=1$，$\lambda_s=4.949$ 设计出的巴特沃思滤波器的阶次 $N=2$，所以

$$G(p)=\frac{1}{p^2+\sqrt{2}p+1}$$

(4) 将

$$p=\frac{s(\Omega_3-\Omega_1)}{s^2+\Omega_1\Omega_3}=\frac{s\times400\pi}{s^2+4\pi^2\times104\,975}$$

代入上式，即得所设计的带阻滤波器的转移函数 $H(s)$。

以上讨论的是模拟低通、高通、带通及带阻滤波器的设计。

这并不是我们的目的。我们的目的是设计数字滤波器。

首要的问题是如何将数字滤波器的技术指标**转换**为模拟滤波器的技术指标，最后再实现模拟滤波器到数字滤波器的**转换**。

6.4 用冲激响应不变法设计 IIR DF

给定数字滤波器的技术指标 $\omega_p, \omega_s, \alpha_p, \alpha_s$　（更多）

转换成模拟滤波器的技术指标 $\Omega_p, \Omega_s, \alpha_p, \alpha_s$　（更多）

转换成模拟低通滤波器的技术指标 $\lambda_p, \lambda_s, \alpha_p, \alpha_s$

设计模拟低通滤波器 $G(p)$

得到模拟高通、带通、带阻滤波器 $H(s)$

$s \Rightarrow z$

得到数字高通、带通、带阻滤波器 $H(z)$

最直接的方法：应用傅里叶扩展变换LT和ZT关系上s平面和z平面的映射规律。

$$z = e^{sT_\mathrm{s}}, \quad s = \frac{1}{T_\mathrm{s}} \ln z$$

$\omega_\mathrm{p}, \omega_\mathrm{s}, \alpha_\mathrm{p}, \alpha_\mathrm{s}$

$$\omega = \Omega T_\mathrm{s}$$

$\varOmega_\mathrm{p}, \varOmega_\mathrm{s}$ $\alpha_\mathrm{s}, \alpha_\mathrm{p}$不变

利用前面知识设计出模拟滤波器 $G(p), G(s)$

$\Rightarrow \quad H(z)$?

$$H(z) = G(s)|_{s=\frac{1}{T_\mathrm{s}}\ln z}$$

问题：$H(z)$将不再是z的有理多项式，给极－零分析带来困难

$G(s) \rightarrow H(s)$的可行方案：冲激响应不变法

数字滤波器的单位抽样响应

模拟滤波器的单位冲激响应

令:

$$h(nT_s) = g(t)|_{t=nT_s} = g(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT_s)z^{-n}$$

1. 会这么计算吗？ ……

2. 注意:

$$H(e^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G(\mathrm{j}\Omega - \mathrm{j}k\Omega_s)\bigg|_{\Omega=\omega/T_s}$$

关联三者：模拟信号的CTFT、理想采样信号的CTFT、序列的DTFT；即是原理利用，也将是问题所致。

基本转换单元

$$G(s)=\frac{A}{s+\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad H(z)=\frac{A}{1-e^{-\alpha T_s}z^{-1}}$$

$$g(t)=Ae^{-\alpha t} \quad \Rightarrow \quad h(nT_s)=Ae^{-\alpha nT_s} \quad \Uparrow$$

$$G(s)=\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \Leftrightarrow g(t)=e^{\alpha t}\sin(\beta t)u(t)$$

$$H(z)=\frac{ze^{\alpha T_s}\sin(\beta T_s)}{z^2-z[2e^{\alpha T_s}\cos(\beta T_s)]+e^{2\alpha T_s}}$$

$$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \Leftrightarrow \frac{1-z^{-1}e^{\alpha T_s}\cos(\beta T_s)}{1-2z^{-1}e^{\alpha T_s}\cos(\beta T_s)+z^{-2}e^{2\alpha T_s}}$$

$$g(t)=e^{\alpha t}\cos(\beta t)u(t) \Rightarrow h(n)=g(t)\Big|_{t=nT_s} \quad \Uparrow$$

一阶系统的转换关系

$$\frac{1}{s+\alpha} \Rightarrow \frac{1}{1-e^{-\alpha T_s} z^{-1}}$$

s平面极点$-\alpha \Rightarrow z$ 平面极点 $e^{-\alpha T_s}$

T_s的作用

一般地，对于共轭极点 s_k, s_k^*

$$\frac{A_k}{s-s_k} \Rightarrow \frac{A_k}{1-e^{s_k T_s} z^{-1}}$$

$$\frac{A_k^*}{s-s_k^*} \Rightarrow \frac{A_k^*}{1-e^{s_k^* T_s} z^{-1}}$$

$G(s)$总可由一阶和二阶系统并联而成，故由上面两式可实现由$G(s)$到$H(z)$的转换，该转换所遵循的基本关系仍是$z=e^{sT_\mathrm{s}}$。

步骤　(1)利用$\omega=\Omega T_\mathrm{s}$，将 ω_p，ω_s转换为 Ω_p，Ω_s，　$\alpha_\mathrm{s},\alpha_\mathrm{p}$不变。

线性转换关系

(2) 设计低通模拟滤波器$G(s)$。

(3) 将$G(s)$转换为$H(z)$。

缺点　$\left|H\left(e^{\mathrm{j}\omega}\right)\right|$相对于$|G(\mathrm{j}\Omega)|$有较大失真，这是因为抽样频率过小时易产生混迭。此外，该方法对高通、带阻滤波器不适用。

分析混叠失真

例 6.4.1 图 6.4.1(a)是一个简单的一阶 $R\text{-}C$ 电路，令 $\alpha=1/RC$，不难求出

$$G(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha},\quad g(t)=\alpha e^{-\alpha t}$$

注意到(6.4.4)式中 $H(e^{j\omega})$和 $G(j\Omega)$之间有一定标因子 T_s^{-1}，为了去掉这一定标因子，我们可令

$$h(nT_s)=T_s g(t)\big|_{t=nT_s} \tag{6.4.8}$$

对本例，有

$$h(nT_s)=T_s\alpha e^{-\alpha nT_s},\quad H(e^{j\omega})=\frac{T_s\alpha}{1-e^{-\alpha T_s}e^{-j\omega}},\quad H(z)=\frac{T_s\alpha}{1-e^{-\alpha T_s}z^{-1}}$$

与图 6.4.1(a)相对应，图(b)给出了 $H(z)$的信号流图，图 6.4.2(a)和(b)分别给出了$g(t)$与 $h(nT_s)$的曲线。

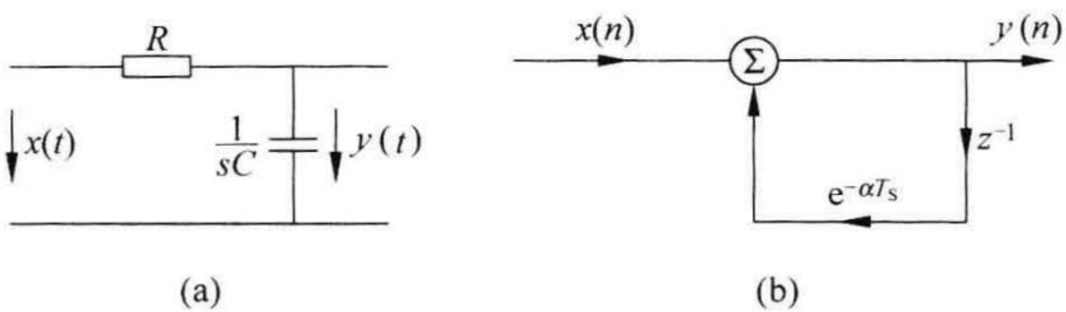


图 6.4.1 模拟系统与数字系统的对应关系

(a) 一阶 R-C 电路；(b) 对应的一阶数字系统

$$\Omega = 2\pi f$$
$$\Omega_s = 2\pi F_s$$
$$\Omega_s/2 = \pi/T_s$$

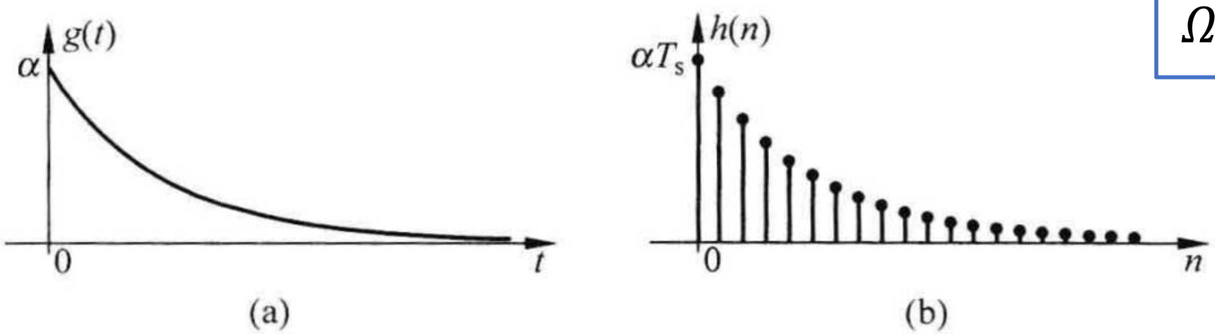


图 6.4.2　单位冲激响应 $g(t)$和单位抽样响应 $h(n)$的对应关系

(a) $g(t)$；(b) $g(t)$的抽样 $h(nT_s)$

现令 $\alpha=1\,000$，且分别令 $T_s=0.001\text{s}$，$T_s=0.000\,1\text{s}$，$T_s=0.000\,05\text{s}$，计算

$$|G(\mathrm{j}\Omega)| = \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\Omega^2}\right)^{1/2}, \quad 0 \leqslant \Omega = \omega/T_s \leqslant \pi/T_s$$

定义域

$$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| = \left(\frac{T_s^2\alpha^2}{1-2\cos\omega \mathrm{e}^{-\alpha T_s}+\mathrm{e}^{-2\alpha T_s}}\right)^{1/2}, \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \pi$$

T_s的作用

相应的幅频响应曲线示于图 6.4.3(a)，(b)和(c)。

注意： $\pi/T_s > \Omega_{max}$

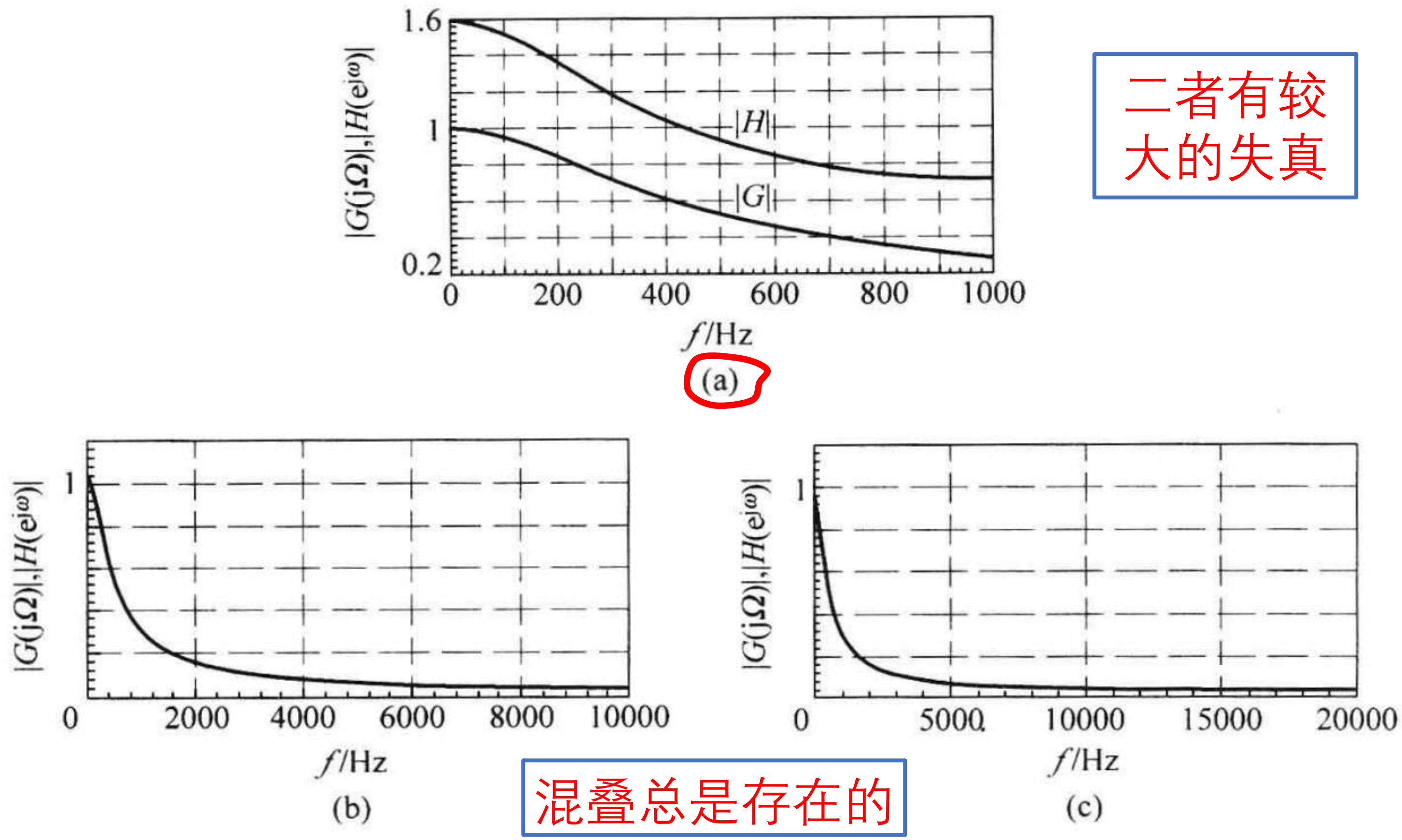


图 6.4.3　$|G(\mathrm{j}\Omega)|$和$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$曲线($\alpha=1000$)

(a) $T_s=0.001\mathrm{s}$; (b) $T_s=0.000\,1\mathrm{s}$; (c) $T_s=0.000\,05\mathrm{s}$

显然,图 6.4.3(a)中的$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$相对$|G(\mathrm{j}\Omega)|$有了较大的失真,这是因为$T_s$较大($T_s=0.001\mathrm{s}$)的原因,随着$T_s$的减小,$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$对$|G(\mathrm{j}\Omega)|$的近似也越来越好,如图(b)和(c)所示。但由于本例中的$G(\mathrm{j}\Omega)$不是带限的,所以$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$的混叠总还是存在。由计算可知,当$T_s=0.001\mathrm{s}$时,$|G(\mathrm{j}0)|=1$,$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0})|=1.582$,$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0})|$正是由$G(\mathrm{j}0)$,$G(\mathrm{j}2\,000\pi)$,$G(-\mathrm{j}2\,000\pi)$等叠加而成。

注意：

由图 6.1.2 可知，高通、带阻滤波器不是带限的，因此不能用冲激响应不变法实现 $G(s)$ 到 $H(z)$的转换。对于低通和带通滤波器，当 T_s 足够小时，冲激响应不变法可给出较为满意的结果。例 6.4.2 说明了用冲激响应不变法设计 IIR 滤波器的过程。

冲激响应不变法设计IIR滤波器

例 6.4.2 试设计一个低通数字滤波器，要求在通带 $0\sim0.2\pi$ 内衰减不大于 3dB，在阻带 $0.6\pi\sim\pi$ 内衰减不小于 20dB，给定 $T_s=0.001\text{s}$。

解 (1) 将数字滤波器技术要求转化为模拟滤波器技术要求。

由 $\omega=\Omega T_s$，得 $\Omega_p=\omega_p/T_s=200\pi$，$\Omega_s=\omega_s/T_s=600\pi$，仍有 $\alpha_p=3\text{dB}$，$\alpha_s=20\text{dB}$。

(2) 设计模拟低通滤波器 $G(s)$。

N的计算公式
归一化原型设计
去归一化转换

令 $\lambda=\Omega/\Omega_p$，得 $\lambda_p=1$，$\lambda_s=3$，求得 $N=2$ 及

$$G(p)=\frac{1}{p^2+\sqrt{2}p+1}$$

$$G(s)=G(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}}=\frac{\Omega_p^2}{s^2+\sqrt{2}\Omega_p s+\Omega_p^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\Omega_p\Omega_p/\sqrt{2}}{\left[s-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega_p\right)\right]^2+\left(-\frac{\Omega_p}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

(3) 将 $G(s)$转换为数字滤波器 $H(z)$。

由(6.4.6)式，令 $\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega_p$，$\beta=\Omega_p/\sqrt{2}$，$\alpha T_s=-0.444$，$\beta T_s=0.444$，则

$$H(z)=\frac{zT_s e^{\alpha T_s}\sin(\beta T_s)(\sqrt{2}\Omega_p)}{z^2-z2e^{\alpha T_s}\cos(\beta T_s)+e^{2\alpha T_s}}$$

$$=\frac{0.244\,9z^{-1}}{1-1.158\,0z^{-1}+0.411\,2z^{-2}}$$

上式的分子比(6.4.6)式的分子多了一个 T_s，这是由于 $h(nT_s)$ 是按(6.4.8)式抽样所产生的。图 6.4.4 同时给出了 $G(j\Omega)$ 和 $H(e^{j\omega})$ 的对数幅频曲线。模拟滤波器完全符合技术要求，但数字滤波器在阻带没有达到技术要求，在 $f_s=300\text{Hz}$ 处，衰减为 -16.8dB，这正是由于混叠所造成的。

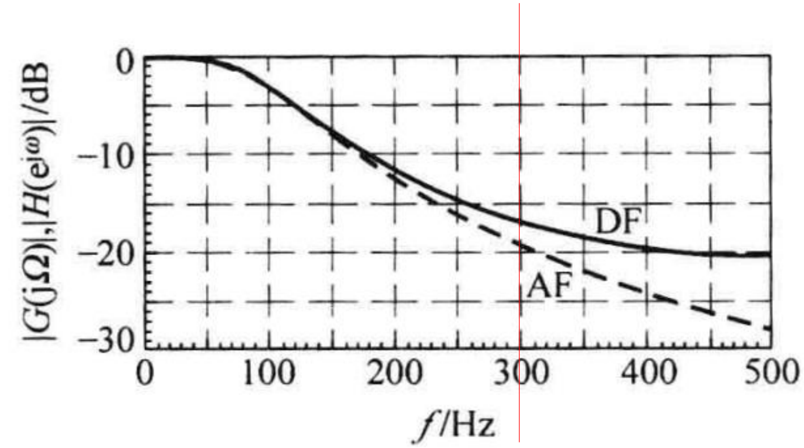


图 6.4.4　例 6.4.2 的对数幅频响应曲线

冲激响应不变法的优点与注意事项

优点：时域逼近良好；角频率之间呈线性关系（因此，对于线性相位的AF，如贝塞尔滤波器，可以映射成线性相位的DF）。

注意：当模拟滤波器是带限的，且带限于折叠频率π/T_s内，才能使DF的频率响应不发生混叠失真，这时有：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} G(j\frac{\omega}{T_s}), |\omega| \le \pi$$

办法：可以减小T_s，以增大折叠频率，使之尽量超过Ω_{max}，从而可以减小折叠频率处（对应数字的最高频率π）的混叠。

奈奎斯特频率，奈奎斯特率，折叠频率