数字信号处理B

PB21511897 李霄奕

HW2

Exercise 1

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$
$$X(z) < \infty\text{：收敛域}$$

(1)

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= -\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}z + 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} \end{aligned} \qquad ROC: 0 < |z| < \infty$$

(2)

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\cos(\omega_0 n) + \sin(\omega_0 n)]\left(\frac{a}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\frac{1-j}{2}\exp(j\omega_0)\frac{a}{z}]^n + [\frac{1+j}{2}\exp(-j\omega_0)\frac{a}{z}]^n \\ &= \frac{1 + (\sin\omega_0 - \cos\omega_0)az^{-1}}{1 - (2\cos\omega_0)az^{-1} + a^2z^{-2}} \end{aligned} \qquad ROC = |z| > |a|$$

(3)

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1]$$
$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \\ &= \frac{-7z^{-1}}{4 - 7z^{-1} + 2z^{-2}} \end{aligned}$$
$$ROC = |z| > \frac{1}{4} \bigcap |z| < 2 = \frac{1}{4} < |z| < 2$$

Exercise 2

$$k_1 = 0.8, k_2 = -0.5, k_3 = 0.6$$

$$b_3^{(3)} = -k_3 = -0.6, b_2^{(2)} = -k_2 = 0.5, b_1^{(1)} = -k_1 = -0.8$$

$$\text{由} b_1^{(1)} = (b_2^{(1)} + k_2 b_2^{(1)})/(1 - k_2^2)$$

$$\text{得} b_2^{(1)} = -1.2$$

$$\text{由} b_2^{(1)} = (b_3^{(1)} + k_3 b_3^{(2)})/(1 - k_3^2)$$

$$\text{且} b_2^{(2)} = (b_3^{(2)} + k_3 b_3^{(1)})/(1 - k_3^2)$$

$$\text{得} \begin{aligned} b_3^{(1)} &= -1.5 \\ b_3^{(2)} &= 1.22 \end{aligned}$$

所以，转移函数为：

$$H(z) = 1 - 1.5z^{-1} + 1.22z^{-2} - 0.6z^{-3}$$

差分方程为：

$$y[n] = x[n] - 1.5x[n-1] + 1.22x[n-2] - 0.6x[n-3]$$

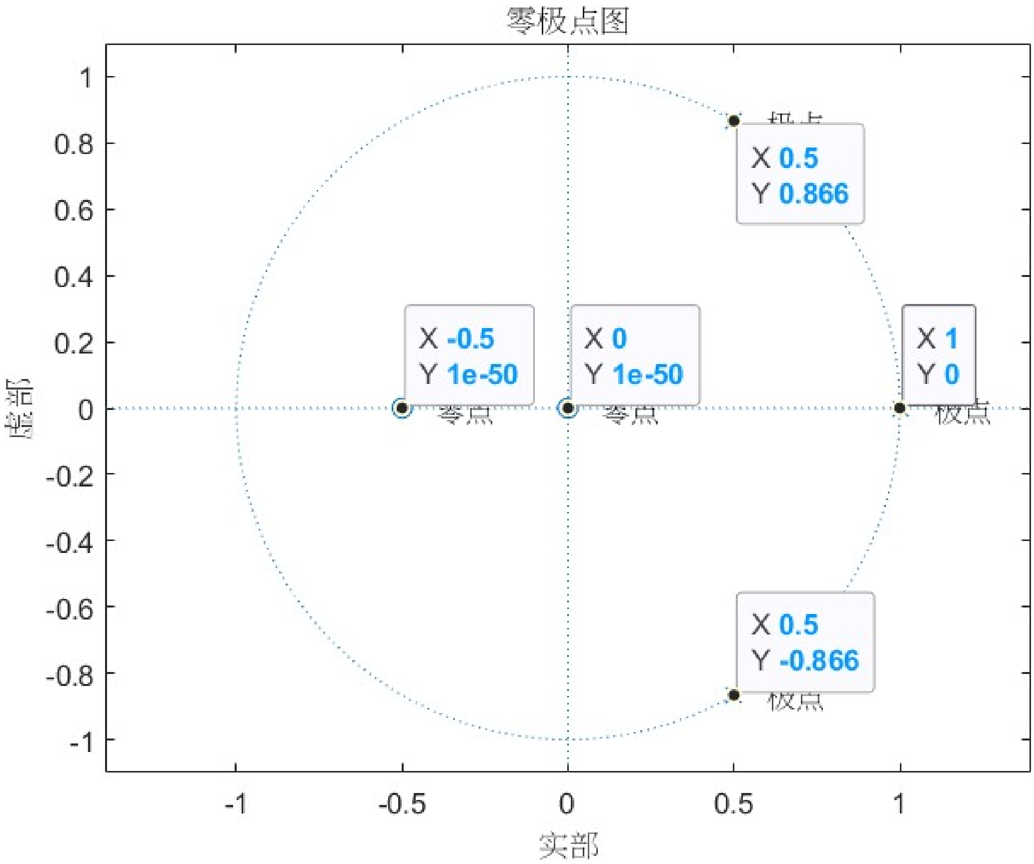
Exercise 3

代码部分如下：

```
a=[1,-2,2,-1];
b=[0,2,1,0];
[z,p,k]=tf2zp(b,a);
zplane(b,a)
text(real(z)+0.1,imag(z),"零点")
text(real(p)+0.1,imag(p),"极点")
```

结果：

```
零点：
z=[0,-0.5];
极点：
p=[1.0000 + 0.0000i,0.5000 + 0.8660i,0.5000 - 0.8660i];
增益：
k=2;
```



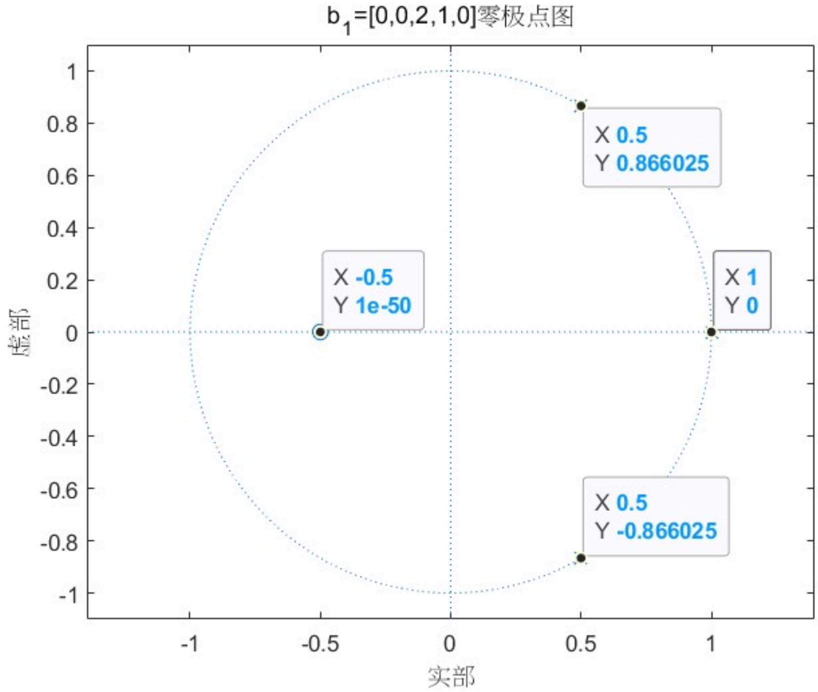
因此，系统零极点表达式为：

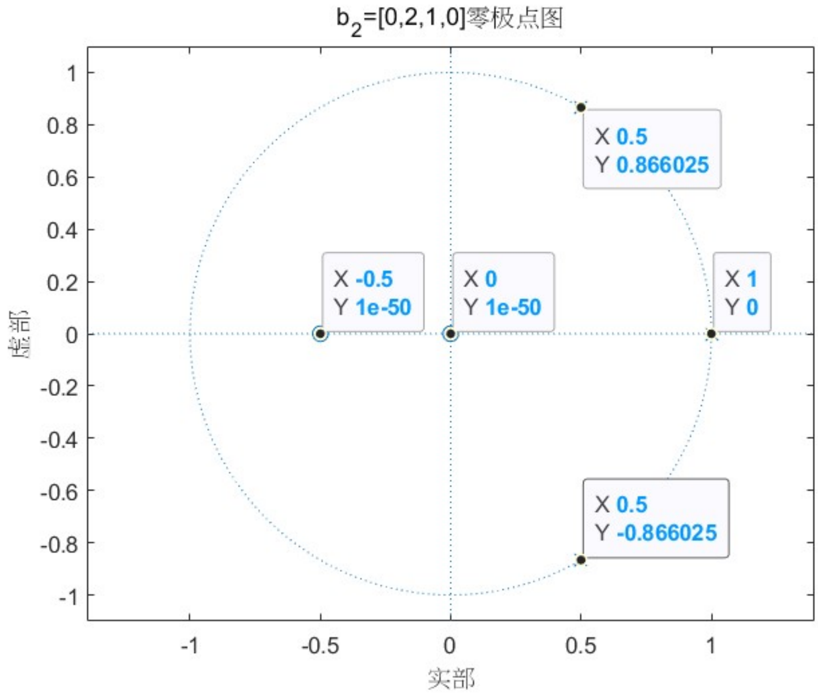
$$H(z)=\frac{z(z+0.5)}{(z-1)(z-0.5+0.866j)(z-0.5-0.866j)}$$

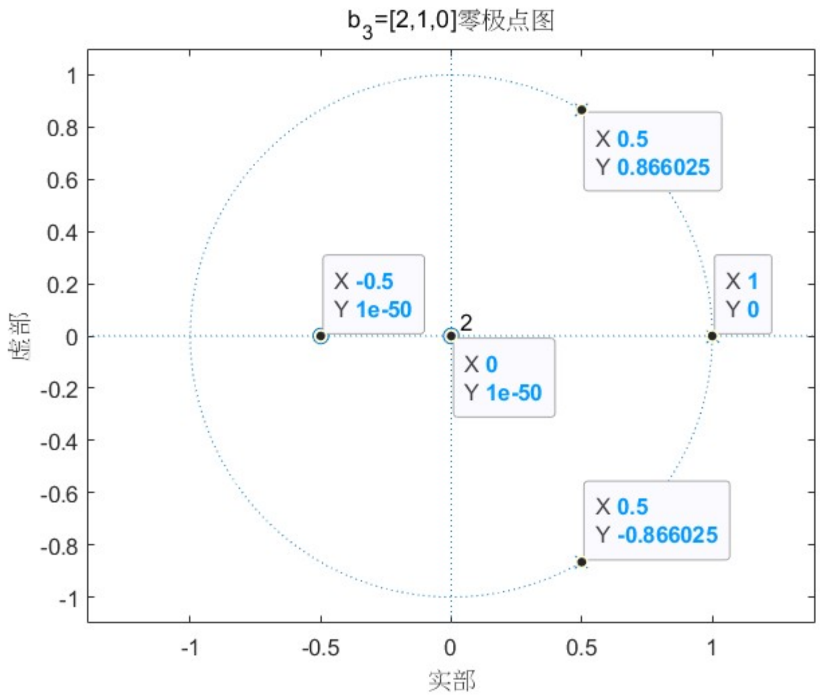
接下来替换不同的分子多项式向量，代码如下：

```
a=[1,-2,2,-1];
b_1=[0,0,2,1,0];
b_2=[0,2,1,0];
b_3=[2,1,0];
zplane(b_1,a)
zplane(b_2,a)
zplane(b_3,a)
```

结果如下：


b1=[0,0,2,1,0]零极点图
X 0.5
Y 0.866025
X -0.5
Y 1e-50
X 1
Y 0
X 0.5
Y -0.866025
虚部
实部


b2=[0,2,1,0]零极点图
X 0.5
Y 0.866025
X -0.5
Y 1e-50
X 0
Y 1e-50
X 1
Y 0
X 0.5
Y -0.866025
虚部
实部



这三个向量造出的系统区别是$z=0$零点的个数不同，且向量越长越零点次数越少，因为：

$$[0,0,2,1,0]\text{对应的分母多项式为：}z^4-2z^3+2z^2-z=z(z^3-2z^2+2z-1)$$
$$[0,2,1,0]\text{对应的分母多项式为：}z^3-2z^2+2z^1-1=1(z^3-2z^2+2z-1)$$
$$\text{所以，系统多识别了一个极点}z=0\text{，抵消掉了零点}$$
$$[2,1,0]\text{对应的分子多项式为：}2z^3+z^2=z(z^2+z^1)$$
$$[0,2,1,0]\text{对应的分子多项式为：}1(z^2+z^1)$$
$$\text{所以，系统多识别了一个零点}z=0\text{，加强了零点}$$

Exercise 4

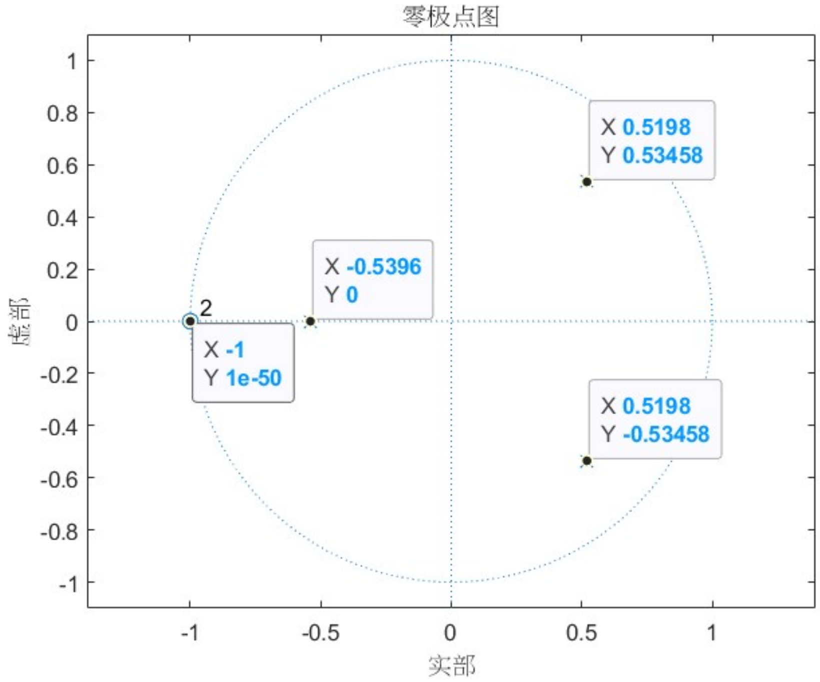
$$H(z)=\frac{z^2+2z+1}{z^3-0.5z^2-0.005z+0.3}$$

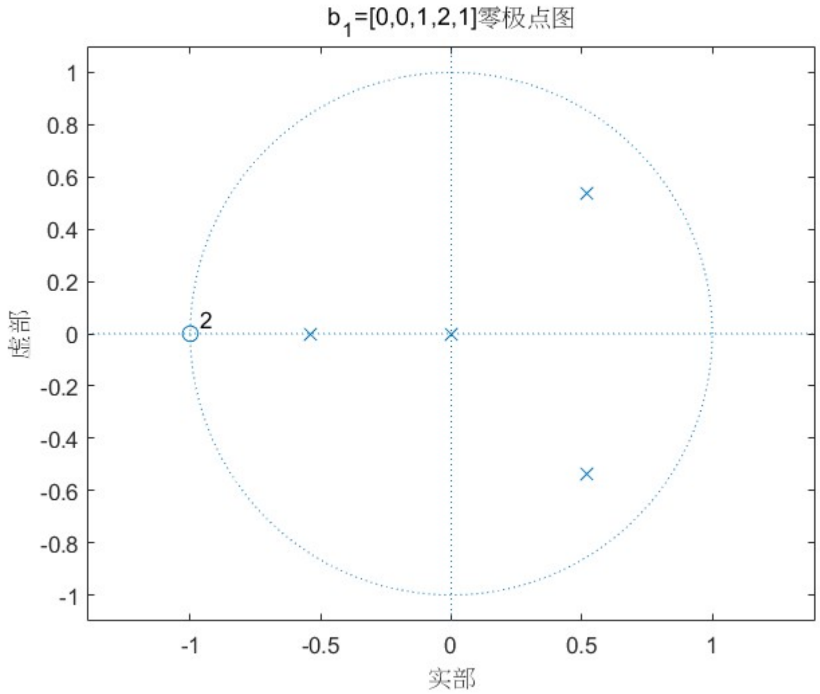
零极点图

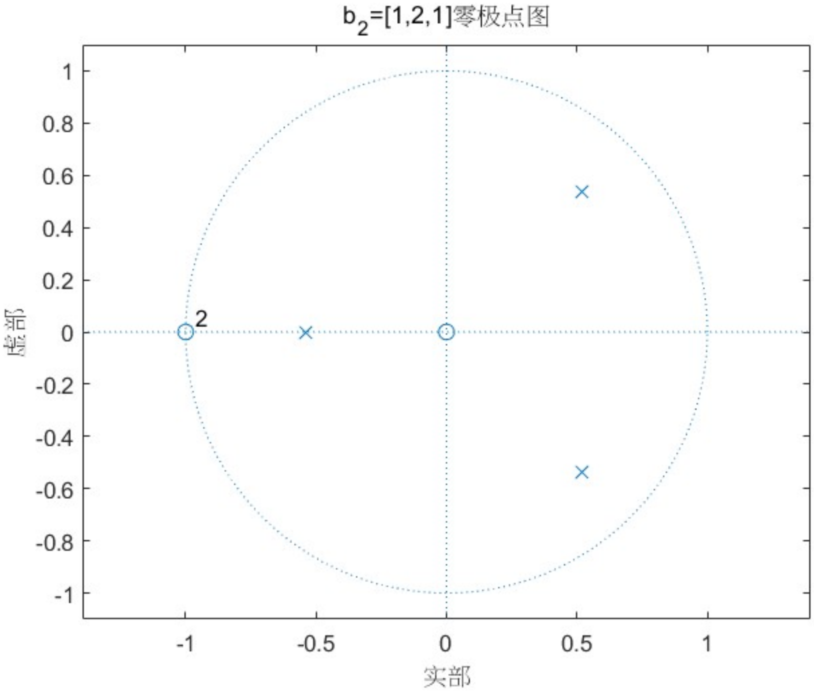
代码如下：

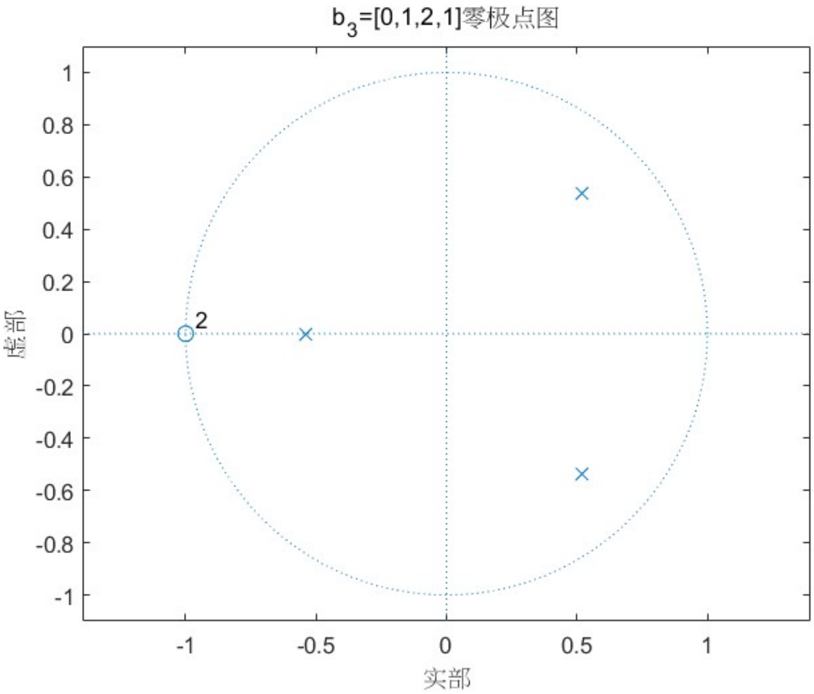
```
a=[1,-0.5,-0.005,0.3];
b=[0,1,2,1];
zplane(b,a)
b_1=[0,0,1,2,1];
b_2=[1,2,1];
b_3=[0,1,2,1];
zplane(b_1,a)
zplane(b_2,a)
zplane(b_3,a)
```

结果如下：


零极点图
X 0.5198
Y 0.53458
X -0.5396
Y 0
X -1
Y 1e-50
X 0.5198
Y -0.53458
2
虚部
实部


b_1=[0,0,1,2,1]零极点图
2
虚部
实部





原因与Exercise 3完全相同，这里再做解释：

$$[0,0,1,2,1]\text{对应的分母多项式为：}z^4-0.5z^3-0.005z^2+0.3z=z(z^3-0.5z^2-0.005z+0.3)$$

$$[0,1,2,1]\text{对应的分母多项式为：}z^3-0.5z^2-0.005z+0.3=1(z^3-0.5z^2-0.005z+0.3)$$

$$\text{所以，系统多识别了一个极点}z=0\text{，抵消掉了零点}$$

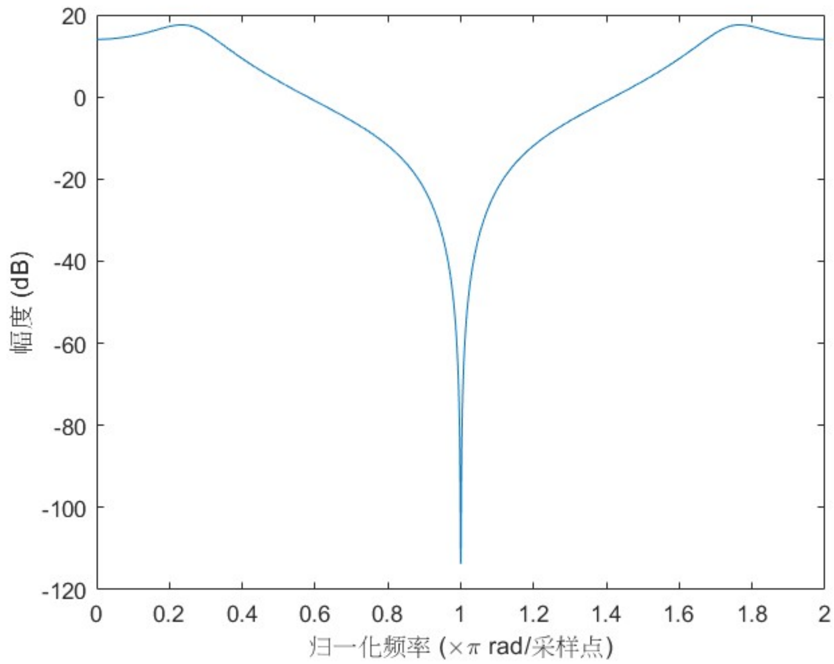
$$[1,2,1]\text{对应的分子多项式为：}z^3+2z^2+z=z(z^2+2z+1)$$

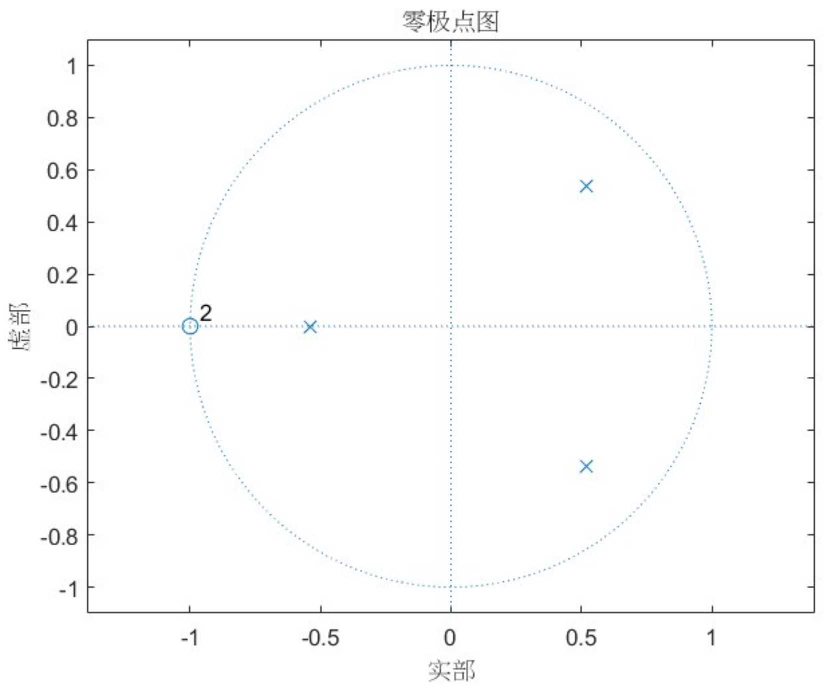
$$[0,1,2,1]\text{对应的分子多项式为：}1(z^2+2z+1)$$

$$\text{所以，系统多识别了一个零点}z=0\text{，加强了零点}$$

频率响应

```
a=[1,-0.5,-0.005,0.3];
b=[0,1,2,1];
[h,w] = freqz(b,a,'whole',2001);
plot(w/pi,20*log10(abs(h)))
ylabel('幅度 (dB)')
xlabel('归一化频率 (\times\pi rad/采样点)')
zplane(b,a)
```

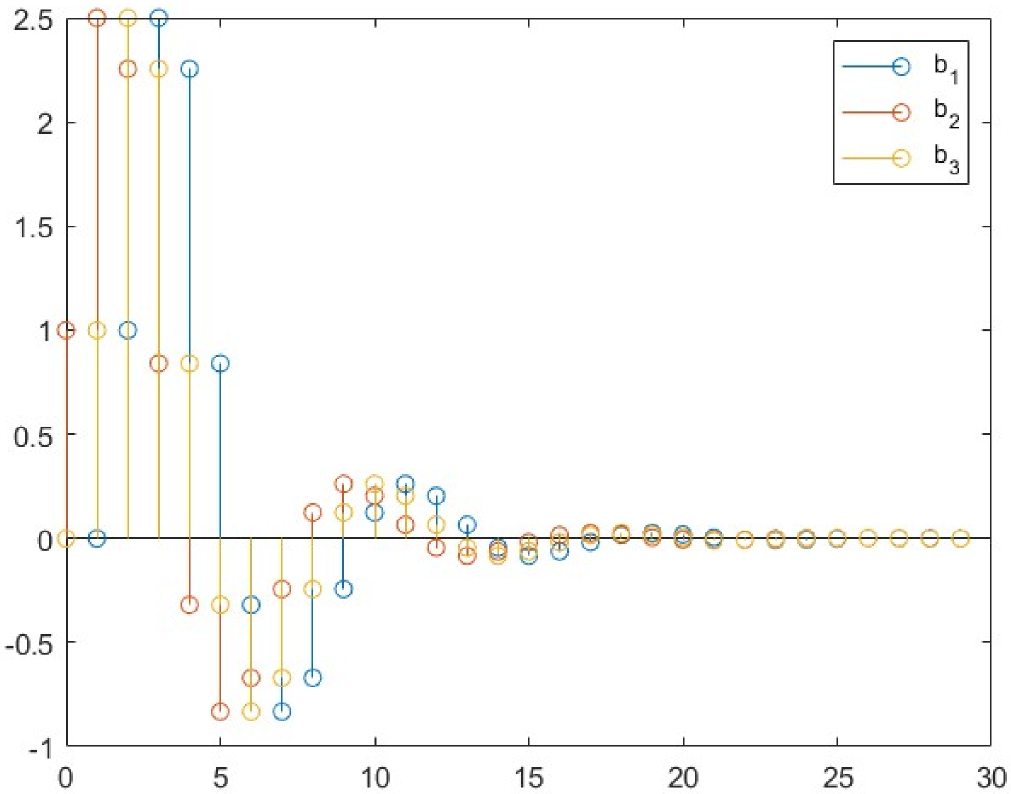




所有极点全部位于单位圆内，系统是稳定的

冲激响应

```
a=[1,-0.5,-0.005,0.3];
b=[0,1,2,1];
b_1=[0,0,1,2,1];
b_2=[1,2,1];
b_3=[0,1,2,1];
[h_1,t] = impz(b_1,a,30);
[h_2,t] = impz(b_2,a,30);
[h_3,t] = impz(b_3,a,30);
h=[h_1,h_2,h_3];
stem(t,h)
legend('b_1','b_2','b_3')
```



可以看到，这三种信号的冲激响应不同在于有了时延，原因正如前面分析，系统响应函数多乘或者多除了z相当于给系统整体提前或者延时了1时刻。

其中，b2的信号是合理的。