DSP_HW3

msh

March 2024

Exercise 1

已知 x(n) 为 N 点序列,n=0,1,···,N-1, 而 N 为偶数，其 DFT 为 X(k)。

(1)

$$\text{令 } y_1(n)=\begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right) & n \text{ 为偶数} \\ 0 & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

所以 y_1(n) 为 2N 点序列。试用 X(k) 表示 Y_1(k).

(2)

令 $y_2(n) = x(N-1-n), y_3(n) = (-1)^n x(n)$, 且 $y_2(n), y_3(n)$ 都是 N 点序列，N 为偶数，试用 X(k) 表示 $Y_2(k), Y_3(k)$

(1) $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$, $W_N=e^{-j2\pi/N}$.

HW3.1

$$Y_1(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}y_1(n)W_{2N}^{nk}=\sum_{n=\text{even}}^{2N-1}x(\tfrac{n}{2})W_{2N}^{nk},$$

令 $m=\frac{n}{2}$, 则 $Y_1(k)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{mk}$

$$=X(k),\quad k=0,1,\cdots N-1.$$

当 $N\le k\le 2N-1$ 时.

$$Y_1(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}y_1(n)W_{2N}^{nk}=\sum_{n=\text{even}}^{2N-1}x(\tfrac{n}{2})W_{2N}^{2mk}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{mk}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{m(k-N)}=X(k-N)$$

$$\therefore\ Y_1(k)=\begin{cases}X(k) & k=0,1,\cdots N-1\\ X(k-N) & k=N,\cdots 2N-1.\end{cases}$$

题中 $y_1(n)$ 是 $x(n)$ 插值所得, $Y_1(k)$ 则是 $X(k)$ 的周期延拓.

(2). $Y_2(k)=\sum_{n=0}^{N-1}y_2(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(N-1-n)W_N^{nk}$.

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{(N-1-m)k}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{-(m+1)k}.$$

$$=W_N^{-k}\sum_{m=0}^{N-1}x(m)[W_N^{mk}]^*=W_N^{-k}X^*(k).$$

$$Y_3(k)=\sum_{n=0}^{N-1}y_3(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n x(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)[-W_N^k]^n.$$

当 $0\le k\le\frac{N}{2}-1$ 时, $Y_3(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{(k+\frac{N}{2})n}=X(k+\frac{N}{2})$

当 $\frac{N}{2}-1\le k\le N-1$ 时, $Y_3(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{(k-\frac{N}{2})n}=X(k-\frac{N}{2})$.

Exercise 2

对离散傅里叶变换，试证明 Parseval 定理。

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2 \tag{1}$$

HW3.2

$$X(k)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk} & 0\le k\le N-1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk} & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot x^*(n)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)W_N^{nk}\right].$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)\cdot X(k)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2.$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{N-1}|X(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2.$$

Exercise 3

设 x(n),y(n) 的 DTFT 分别是 $X(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$，试证明

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega \tag{2}$$

这一关系被称为两个序列的 Parseval 定理。若 x(n),y(n) 都是 N 点序列，其 DFT 分别是 X(k) 和 Y(k)，试导出类似的关系。

HW3.3

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{jw}) e^{jwn} dw\right]^*$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y^*(e^{jw}) e^{-jwn} dw$$

$$\cancel{= \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-jwn}\right] \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y^*(e^{jw}) dw}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-jwn}\right] Y^*(e^{jw}) dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw}) Y^*(e^{jw}) dw.$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \left(\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y(k) W_N^{-nk}\right)^*$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y^*(k) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) W_N^{nk}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) \cdot Y^*(k).$$