

## 1 $\delta$ 函数(狄拉克函数)

狄拉克函数是由英国物理学家狄拉克引入的函数，虽然在物理方面有明确的意义并广泛使用，但直到20世纪30年代才建立了完整的数学理论。被称为广义函数论或者分布论，本书不做讨论。

在物理里面，我们常常会用一个点来表示一个物体，并把物体的所有质量集中在该点上，称为质点。那么如何用密度函数来表示质点的密度分布？我们假设 $x$ 轴上分布着某种物质 $A$ ，总计质量为1，全部位于 $x$ 轴的零点。我们将物质 $A$ 在 $x$ 轴上密度函数记为 $\rho(x)$ ，显然在零点之外，物质 $A$ 分布的密度函数为0，因而

$$\rho(x) = 0, x \neq 0.$$

而在零点，其密度只能取无穷大。如果给物质 $A$ 赋予速度 $v(x)$ （方向沿着 $x$ 轴，连续分布），则冲量为

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x)\rho(x)dx = v(0).$$

特别地，如果 $v = 1$ ，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho dx = 1.$$

我们将这样的密度函数称为 $\delta$ 函数，记为 $\delta(x)$ 。 $\delta(x)$ 为满足以下两个条件缺一不可的函数：

(1)

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0, \\ +\infty, x = 0. \end{cases}$$

(2)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$

特别地，上述两条条件与 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$ 对所有连续函数 $f$ 成立等价。狄拉克函数可以看作一个作用在连续函数空间的线性算符，

$$\delta(x) : f(x) \rightarrow f(0).$$

一般来说如果需要我们要求算符作用在速降函数空间上（ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^m f^{(n)}(x) = 0, \forall m, n \in \mathbb{N}$ ）。任何我们常见的函数都能看成一个算符（一般不包括指数函数），两个算符相等当且仅当作用在所有速降函数上的取值相等，例如要说明 $x\delta(x) = 0$ ，仅需说明

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x\delta(x))f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)(xf(x))dx = 0 \times f(0) = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} (0)f(x)dx$$

对所有速降（连续）函数成立即可。

如果我们改变下积分区域则

$$\int_a^b \delta(x)dx = \begin{cases} 1, x \in (a, b), \\ 0, x \notin [a, b]. \end{cases}$$

对于 $a = 0$ 或者 $b = 0$ 的情况我们不做考虑。

如果质量1集中在 $x = \xi$ 点，则密度函数 $\rho(x) = \delta(x - \xi)$ 。设 $f(x)$ 为连续函数，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi)f(x)dx = f(\xi).$$

**例子1.** 有一根无限长紧绷的弦, 在  $x=0$  敲一下, 给它冲量1, 求初始速度分布。

**解.** 对于任何连续密度函数  $\rho(x)$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)v(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(0)v(x)dx = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\frac{\delta(x)}{\rho(0)}dx.$$

所以  $v(x) = \frac{\delta(x)}{\rho(0)}$ .

狄拉克函数的一些性质:

- (1) 对称性:  $\delta(x) = \delta(-x)$ 。更一般地  $\delta(x-\xi) = \delta(\xi-x)$ 。将狄拉克函数看作质点的密度分布, 则对称性是显然的。我们由以下卷积公式

$$\delta * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\xi)f(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi)f(x-\xi)dx = f(x).$$

即

$$\delta * f = f.$$

- (2) 求导: 我们可以清楚知道狄拉克函数在非零点的导数是零, 但在零点的导数呢? 因此我们要以算符来理解: 设  $f$  无限可导, 则由分部积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)f(x)dx = \delta(x)f(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f'(x)dx = -f'(0).$$

即,  $\delta'(x): f \rightarrow -f'(0)$ 。同样的理解:  $\delta^{(n)}(x): f \rightarrow (-1)^n f^{(n)}(0)$ 。这样的算符在数学上称为广义函数。

- (3) 傅里叶变换: 依照狄拉克函数的定义

$$F[\delta(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{i\lambda x}dx = e^{i\lambda \times 0} = 1.$$

即狄拉克函数的傅里叶变换为1; 反之, 1 的傅里叶反变换为狄拉克函数, 即

$$F^{-1}[1] = \delta(x).$$

把傅里叶反变换的公式代入, 有形式表达式

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}d\lambda.$$

用算符来理解:

$$\begin{aligned} \langle \delta, f \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}d\lambda dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(-\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{-i\lambda \times 0}d\lambda = f(0). \end{aligned}$$

又  $e^{-i\lambda x} = \cos(\lambda x) - i \sin(\lambda x)$ , 注意到  $\sin(\lambda x)$  是关于  $x$  的奇函数, 所以有形式表达式

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda x) d\lambda.$$

同样地,  $\delta(x - \xi)$  的傅里叶变换

$$F[\delta(x - \xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) e^{i\lambda x} dx = e^{i\lambda \xi}.$$

反过来

$$F^{-1}[e^{i\lambda \xi}] = \delta(x - \xi).$$

**例子2.** 设有一根长为  $2l$  温度为  $0$  各种绝热的细杆无热源, 在细杆的中间烧一下, 给他一个热量  $c\rho$ , 求杆上的温度变换。

**解.** 设温度为  $u(t, x)$ , 则初始温度  $u(0, x)$  满足

$$u(0, x) = \begin{cases} 0, & x \neq l, \\ +\infty, & x = l. \end{cases}$$

和  $\int_0^{2l} u(0, x) c\rho dx = c\rho$ . 所以  $u(0, x) = \delta(x - l)$ 。

写出定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < 2l, t > 0 \\ u(0, x) = \delta(x - l) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 2l) = 0. \end{cases}$$

用分离变量法, 设  $u(t, x) = T(t)X(x)$ , 则得到

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

设为  $-\lambda$ , 则得到固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = X'(2l) = 0. \end{cases}$$

以及

$$T' + \lambda^2 a^2 T = 0.$$

有零固有值  $\lambda_0 = 0$ , 固有函数为  $X_0 = 1$ 。其余固有值全部为正, 解得  $X = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$ 。所以

$$B = 0, \sin(2l\sqrt{\lambda}) = 0.$$

解得固有值及固有函数

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{4l^2}, X_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2l}x\right), n = 1, 2, \dots.$$

将固有值代入  $T$  的方程, 得到

$$T_0 = C_0, T_n = C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4l^2} a^2 t}, n = 1, 2, 3, \dots.$$

所以

$$u(t, x) = C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4l^2} a^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{2l} x\right).$$

确定系数, 令  $t = 0$ , 则

$$C_0 = \frac{1}{2l}, C_n = \frac{\int_0^{2l} \delta(x-l) X_n(x) dx}{\int_0^{2l} X_n(x) X_n(x) dx} = \frac{X_n(l)}{l}.$$

得到当  $n \geq 1$  时,

$$C_n = \begin{cases} 0, n = 2k + 1 \\ \frac{(-1)^k}{l}, n = 2k. \end{cases}$$

所以

$$u(t, x) = \frac{1}{2l} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{l} e^{-\frac{k^2 \pi^2}{l^2} a^2 t} \cos\left(\frac{k\pi}{l} x\right).$$

**例子3.**  $f(t)$  连续, 计算积分

$$I = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^t f(\tau) \sin(\lambda x) \sin(a\lambda(t-\tau)) d\tau.$$

$a > 0, at > x > 0$ .

**解.** 首先

$$I = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^t f(\tau) \sin(\lambda x) \sin(a\lambda(t-\tau)) d\tau.$$

用三角函数的积化和差公式:

$$\sin(\lambda x) \sin(a\lambda(t-\tau)) = \frac{1}{2} (\cos(a\lambda(t-\tau) - \lambda x) - \cos(a\lambda(t-\tau) + \lambda x))$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \frac{a}{2\pi} \int_0^t f(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \cos(a\lambda(t-\tau) - \lambda x) - \cos(a\lambda(t-\tau) + \lambda x) d\lambda \\ &= a \int_0^t f(\tau) (\delta(a(t-\tau) - x) - \delta(a(t-\tau) + x)) d\tau \\ &= a \int_0^t f(\tau) \delta(a(t-\tau) - x) d\tau \\ &= a \int_{at-x}^{-x} f\left(\frac{at-\eta-x}{a}\right) \delta(\eta) d\frac{at-\eta-x}{a} \\ &= \int_{-x}^{at-x} f\left(\frac{at-\eta-x}{a}\right) \delta(\eta) d\eta \\ &= f\left(t - \frac{x}{a}\right). \end{aligned}$$

我们同样可以定义高维的狄拉克函数。将质量为1 的质点置于三维空间的零点, 则密度函数  $\delta(x, y, z)$  满足

(1)

$$\delta(x, y, z) = \begin{cases} 0, (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ +\infty, (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) \delta(x, y, z) dx dy dz = f(0, 0, 0).$$

我们发现 $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ 也满足上述条件, 所以 $\delta(x)\delta(y)\delta(z) = \delta(x, y, z)$ . 记 $M = (x, y, z)$ , 用 $\delta(M)$ 表示 $\delta(x, y, z)$ . 高维狄拉克函数的性质是类似的:

(1) 对称性:  $\delta(M) = \delta(-M)$ . 更一般地 $\delta(M - M_0) = \delta(M_0 - M)$ . 卷积公式

$$\delta * f = f(M) = \int_{\mathbb{R}^3} f(M_0) \delta(M - M_0) dM_0.$$

(2) 求导: 我们可以清楚知道狄拉克函数在非零点的导数是零, 但在零点的导数呢? 因此我们要以算符来理解: 设 $f$ 无限可导, 则由分布积分公式

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \delta(x, y, z)}{\partial x} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \delta(z) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x, y, z) dx \right) dy dz \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \delta(z) \frac{\partial f}{\partial x}(0, y, z) dy dz \\ &= - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0). \end{aligned}$$

(3) 傅里叶变换: 回顾高维的傅里叶变换

$$F[f(x, y, z)] = \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) e^{i(\lambda x + \mu y + \nu z)} dx dy dz.$$

傅里叶反变换

$$F^{-1}[F(\lambda, \mu, \nu)] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) e^{-i(\lambda x + \mu y + \nu z)} d\lambda d\mu d\nu.$$

依照狄拉克函数的定义

$$F[\delta(x, y, z)] = \int_{-\mathbb{R}^3} \delta(x, y, z) e^{i(\lambda x + \mu y + \nu z)} dx dy dz = 1.$$

即狄拉克函数的傅里叶变换为1; 反之, 1的傅里叶反变换为狄拉克函数, 即

$$F^{-1}[1] = \delta(x, y, z).$$

## 2 场势方程基本解与格林函数

书上的形式更一般, 但我们直接考虑泊松方程. 在三维真空空间中的零点, 我们放电量为 $-\varepsilon_0$ 的点电荷( $\varepsilon_0$ 为真空介电常数), 其电荷密度设为 $\rho(x, y, z)$ , 则

(1)

$$\delta(x, y, z) = \begin{cases} 0, (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ +\infty, (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y, z) dx dy dz = -\varepsilon_0.$$

所以  $\rho(x, y, z) = -\varepsilon_0 \delta(x, y, z)$ 。回忆泊松方程，我们设电势函数为  $u(x, y, z)$ ，则有

$$\Delta_3 u = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0} = \delta(x, y, z).$$

该方程的解称为泊松方程  $\Delta_3 u = 0$  的基本解。我们解该方程，做高维傅里叶变换，有

$$-(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \bar{u}(\lambda, \mu, \nu) = 1.$$

其中  $\bar{u}$  为  $u$  的傅里叶变换。用球坐标，设  $\lambda = \rho \sin \theta \cos \varphi, \mu = \rho \sin \theta \sin \varphi, \nu = \rho \cos \theta$ ，则

$$\bar{u} = -\frac{1}{\rho^2}.$$

做傅里叶反变换，得到

$$u(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(\lambda, \mu, \nu) e^{-i(\lambda x + \mu y + \nu z)} d\lambda d\mu d\nu$$

我们设  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ，容易发现  $u(x, y, z)$  的取值只与  $r$  有关，所以我么只要求  $u(0, 0, r)$  就可以了，

$$\begin{aligned} u(0, 0, r) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(\lambda, \mu, \nu) e^{-i\rho r \cos \theta} d\lambda d\mu d\nu \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} -\frac{1}{\rho^2} e^{-i\rho r \cos \theta} \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\rho \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} -e^{-i\rho r \cos \theta} \sin \theta d\theta d\rho \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\rho r \cos \theta}}{-i\rho r} \Big|_0^{\pi} d\rho = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{2 \sin(\rho r)}{\rho r} d\rho = -\frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\rho)}{\rho} d\rho \\ &= -\frac{1}{4\pi r}. \end{aligned}$$

所以

$$u = -\frac{1}{4\pi r}.$$

至此，我们得到了泊松方程的基本解。因为我们摆放的是负电荷，所以电势为负，如果我们摆放的是正电荷，那么电势为正，即

$$\tilde{u} = \frac{1}{4\pi r}.$$

我们设  $M = (x, y, z)$ ， $M_0 = (\xi, \eta, \zeta)$ ，如果我们一开始的点电荷  $-\varepsilon_0$  不是放在零点，而是放在  $M_0$  点，那么电势为

$$u(M; M_0) = -\frac{1}{4\pi r(M, M_0)},$$

其中  $r(M, M_0)$  表示两个点之间的间距。此为

$$\Delta_3 u = \delta(x - \xi, y - \eta, z - \zeta).$$

的解。

如果空间的电荷密度为 $\rho(M)$ ，则相应的泊松方程为

$$\Delta_3 u = -\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

我们可以将 $-\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$  分解为狄拉克函数的积分叠加，

$$-\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(M_0) \delta(M - M_0) dM_0.$$

那么相应的解也是积分叠加：

$$u(M) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(M_0) u(M; M_0) dM_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(M_0)}{r(M; M_0)} dM_0.$$

对于基本解，我们还可以这么理解，我们再零点放上大小为 $-\varepsilon_0$  电荷。由高斯公式，通过封闭曲面的电通量等于封闭曲面的电荷除上介电常数，且由对称性，电场强度只与与零点的距离有关，方向指向零点，设其大小为 $E(a)$ （方向就不管了）。因而通过以零点为圆心， $a$  为半径的电通量为

$$-E(a) \times 4\pi a^2 = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = -1$$

即

$$E(a) = \frac{1}{4\pi a^2}$$

假设无穷远处电势为零，则 $r$  处电势为

$$U(+\infty) - U(r) = \int_r^\infty \frac{1}{4\pi a^2} da = -\frac{1}{4\pi a} \Big|_r^\infty = \frac{1}{4\pi r},$$

即

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi r}$$

和我们计算的结果是一致的，这说明虽然我们没说，但我们已经默认了无穷远处电势为零。但这种默认并不总是正确的，例如，当我们求二维泊松方程

$$\Delta_2 u(x, y) = \delta(x, y)$$

的时候，此时

$$-E(a) \times 2\pi a = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = -1$$

得到

$$E(a) = \frac{1}{2\pi a},$$

这时候再默认无穷远处电势为零，则

$$U(+\infty) - U(r) = \int_r^\infty \frac{1}{2\pi a} da = \text{不可积},$$

这时候我们就不能默认无穷远处电势为零，否则没法算。电势是个相对量，可以默认任何地方电势为零，然后求其他点的相对电势，因而我们可以默认 $a = 1$  处电势为零，则

$$U(1) - U(r) = \int_r^1 \frac{1}{2\pi a} da = \frac{\ln a}{2\pi} \Big|_r^1 = -\frac{\ln r}{2\pi}.$$

所以

$$U(r) = \frac{\ln r}{2\pi}.$$

与后面结果是一致的。那么如果是一维呢？

$$\Delta_1 u(x) = \delta(x).$$

此时

$$-E(a) \times 2 = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = -1$$

得到

$$-E(a) = -\frac{1}{2},$$

我们干脆默认零点的电势为零，则

$$U(0) - U(r) = \int_r^0 \frac{1}{2} da = \frac{a}{2} \Big|_r^0 = -\frac{r}{2}.$$

所以

$$U(r) = \frac{r}{2}.$$

## 2.1 格林函数及其物理意义

设有一个由金属球壳围成的区域 $V$ ，金属球壳接地（电势为零），内部 $M_0$ 处放一点电荷，电量为 $\varepsilon_0$ ，则 $V$ 内部电势分布 $u$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u = -\delta(M - M_0), M \in V \\ u|_{\partial V} = 0. \end{cases}$$

该定解问题的解我们称为格林函数，记为 $G(M; M_0)$ ，格林函数是有两部分组成的，一部分是有点电荷 $\varepsilon_0$ 产生的电势，这个已经在前面讲过，为

$$(1) \quad u(M; M_0) = \frac{1}{4\pi r(M, M_0)},$$

其中 $r(M, M_0)$ 表示两个点之间的间距。另一部分是由感应电荷产生的电势，满足如下定解问题：

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta u = 0, M \in V \\ u(M)|_{\partial V} = -\frac{1}{4\pi r(M, M_0)}. \end{cases}$$

$G(M, M_0) = (1) + (2)$ 的解即为格林函数，这也提供了一个求格林函数的办法，只要求出(2)就可以了，然而还是难求，我们只能对一些特殊的情形求格林函数。

**定理.** 格林函数具有对称性，即 $G(M_1; M_2) = G(M_2; M_1)$ ， $M_1, M_2$ 为 $V$ 内两点。

**证明.** 推导需要用到格林第二公式

$$\int_V w \Delta v - v \Delta w dV = \int_S w \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} dS$$



设  $G(M; M_i), i = 1, 2$  满足定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = -\delta(M - M_i), M \in V \\ u(M)|_{\partial V} = 0. \end{cases}$$

在格林第二公式中取  $w = G(M; M_1), v = G(M; M_2)$ , 得到左边

$$\begin{aligned} & \int_V G(M; M_1) \Delta G(M; M_2) - G(M; M_2) \Delta G(M; M_1) dV \\ &= \int_V G(M; M_1) (-\delta(M - M_2)) - G(M; M_2) (-\delta(M - M_1)) dV \\ &= G(M_1; M_2) - G(M_2; M_1) \end{aligned}$$

右边

$$\int_S G(M; M_1) \frac{\partial G(M; M_2)}{\partial \vec{n}} - G(M; M_2) \frac{\partial G(M; M_1)}{\partial \vec{n}} dS = 0$$

对照得到

$$G(M_1; M_2) = G(M_2; M_1).$$

如果我们知道了格林函数, 我们可以求出一般泊松方程边值问题的解。即

**定理.** 泊松方程边值问题:

$$\begin{cases} \Delta u = -f(x, y, z), M \in V \\ u|_{\partial V} = \varphi(x, y, z). \end{cases}$$

的解为

$$u(M) = - \int_S \varphi(M_0) \frac{\partial_{M_0} G}{\partial \vec{n}} dS + \int_V G(M; M_0) f(M_0) dM_0,$$

其中  $G = G(M; M_0)$ 。

**证明.** 解有两部分, 后面部分  $\int_V G f(M_0) dM_0$  为定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = -f(x, y, z), M \in V \\ u|_{\partial V} = 0. \end{cases}$$

的解。我们只要证明前面部分  $v(M) = - \int_S \varphi(M_0) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dS$  为定解问题

$$\begin{cases} \Delta v = 0, M \in V \\ v|_{\partial V} = \varphi(x, y, z). \end{cases}$$

的解即可。由格林第二公式

$$\begin{aligned} \int_S G(M; M_0) \frac{\partial v(M_0)}{\partial \vec{n}} - v(M_0) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dS &= \int_V G(M; M_0) \Delta v(M_0) - v(M_0) \Delta G(M; M_0) dM_0 \\ &= \int_V 0 + v(M_0) \delta(M - M_0) dM_0 = v(M). \end{aligned}$$

又在边界上  $G(M; M_0) = 0$ , 所以在边界上

$$\varphi(M) = - \int_S v(M_0) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dS = - \int_S \varphi(M_0) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dS.$$

这样我们验证了边界条件, 现在我们来验证泛定方程。

$$\Delta(v(M)) = - \int_S \varphi(M_0) \frac{\partial_{M_0} \Delta_M G}{\partial \vec{n}} dS = - \int_S \varphi(M_0) \frac{\partial_{M_0} \delta(M - M_0)}{\partial \vec{n}} dS = 0.$$

为了方便, 我们经常交换  $M, M_0$  的位置。

$$u(M_0) = - \int_S \varphi(M) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dS + \int_V G f(M) dM.$$

## 2.2 用镜像法求格林函数

一般来说格林函数很难求, 但是对于特殊的情况, 格林函数可以用镜像法求出。

### 1) 半空间的格林函数: 定解问题

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) = -\delta(M - M_0), z > 0 \\ G|_{z=0} = 0. \end{cases}$$

的解称为半空间的格林函数。从物理角度看, 这就是在  $M_0 = (\xi, \eta, \zeta)$  处放上电量为  $\varepsilon_0$  的电荷  $Q$ ,  $z = 0$  为无限大的接地的金属板, 求上半空间的电势分布。方法是镜像法, 也就是在  $(\xi, \eta, \zeta)$  关于  $z = 0$  的对称点  $M'_0 = (\xi, \eta, -\zeta)$  处放上电量为  $-\varepsilon_0$  的电荷  $Q'$ , 并移掉金属板。则由电荷  $Q$  和电荷  $Q'$  产生的电势为

$$u(M) = \frac{1}{4\pi r(M, M_0)} - \frac{1}{4\pi r(M, M'_0)}.$$

由对称性, 在  $z = 0$  处, 电势为 0。并且

$$\Delta u = -\delta(M - M_0) + \delta(M - M'_0).$$

在上半平面正好为

$$\Delta u = -\delta(M - M_0).$$

所以

$$G(M; M_0) = u(M) = \frac{1}{4\pi r(M, M_0)} - \frac{1}{4\pi r(M, M'_0)} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r(M, M_0)} - \frac{1}{r(M, M'_0)} \right).$$

就是我们要求的格林函数。即

$$G(M; M_0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2}} \right).$$

对于一般形式定解问题:

$$\begin{cases} \Delta u = -f(x, y, z), z > 0 \\ G|_{z=0} = \varphi(x, y). \end{cases}$$

我们代入蓝色公式，有

$$u(M) = - \int_S \varphi(M_0) \frac{\partial_{M_0} G}{\partial \vec{n}} dS + \int_V G f(M_0) dM_0.$$

其中前面一半

$$- \int_S \varphi(M_0) \frac{\partial_{M_0} G}{\partial \vec{n}} dS = \int_S \varphi(M_0) \frac{G(M, M_0)}{\partial \zeta} dM_0 = \int_S \varphi(\xi, \eta) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial \zeta} dM_0.$$

计算

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} &= -\frac{1}{8\pi} \left( \frac{2(\zeta - z)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{3/2}} - \frac{2(\zeta + z)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2)^{3/2}} \right) \Big|_{\zeta=0} \\ &= \frac{z}{2\pi((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

所以定解问题

$$\begin{cases} \Delta v = 0, z > 0 \\ v|_{z=0} = \varphi(x, y). \end{cases}$$

的解为

$$v(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(\xi, \eta) z}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2)^{3/2}} d\xi d\eta.$$

或者写成

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(x, y) \zeta}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2)^{3/2}} dx dy.$$

书上答案自然是错的。

所以半平面求格林函数的关键是在 $M_0$ 关于半平面的对称点 $M'_0$ 虚设一个电量为 $-\varepsilon_0$ 的电荷，并将两个电荷产生的电势叠加。所以关键是找对称点，解析几何书上应该有公式（好吧，反正百度找不到）。求 $M_0 = (\xi, \eta, \zeta)$ 关于 $ax + by + cz + d = 0$ 的对称点。先做经过 $M_0$ 和平面垂直的线，有参数表示 $(\xi + pa, \eta + pb, \zeta + pc)$ 。然后求该线和平面的交点 $P$ 。只要解出 $p$

$$a(\xi + pa) + b(\eta + pb) + c(\zeta + pc) + d = 0.$$

最后对称点即为

$$2P - (\xi, \eta, \zeta) = (\xi + 2pa, \eta + 2pb, \zeta + 2pc)$$

**例子4.** 区域 $\Omega = \{(x, y, z) : x + y + z > 0\}$ ，求格林函数。

**解.** 在 $\Omega$ 区域的 $M_0 = (\xi, \eta, \zeta)$ 放电量为 $\varepsilon_0$ 的点电荷，在它的关于 $x + y + z = 0$ 的对称点 $M'_0 = (\frac{\xi-2\eta-2\zeta}{3}, \frac{\eta-2\xi-2\zeta}{3}, \frac{\zeta-2\xi-2\eta}{3})$ 放另一点电荷，电量为 $-\varepsilon_0$ 。格林函数为两个电荷产生电势的叠加：即

$$G(M; M_0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - \frac{\xi-2\eta-2\zeta}{3})^2 + (y - \frac{\eta-2\xi-2\zeta}{3})^2 + (z - \frac{\zeta-2\xi-2\eta}{3})^2}} \right).$$

**例子5.** 区域 $\Omega = \{(x, y, z) : x > y\}$ ，求格林函数。

解. 在 $\Omega$  区域的 $M_0 = (\xi, \eta, \zeta)$  放电量为 $\varepsilon_0$  的点电荷, 在它的关于 $x = y$  的对称点 $M'_0 = (\eta, \xi, \zeta)$  放另一点电荷, 电量为 $-\varepsilon_0$ . 格林函数为两个电荷产生电势的叠加: 即

$$G(M; M_0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\eta)^2 + (y-\xi)^2 + (z-\zeta)^2}} \right).$$

外单位法向为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$ , 所以定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x + y > 0 \\ u|_{x=y} = \varphi(x). \end{cases}$$

的解为

$$u(M) = - \int_S \varphi(M_0) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dS = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) (G_{\xi} - G_{\eta})|_{\eta=\xi} d\xi d\zeta.$$

最后求得

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-y)\varphi(\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\xi)^2 + (z-\zeta)^2}^3} d\xi d\zeta.$$

实际上, 可以进一步化简为

$$u(M) = \frac{x-y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\xi)^2}} d\xi.$$

例子6. 求定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + 4u_{yy} + 9u_{zz} = 0, x > 0 \\ u|_{x=0} = \varphi(y, z). \end{cases}$$

解. 设 $\bar{x} = x, \bar{y} = \frac{1}{2}y, \bar{z} = \frac{1}{3}z$ , 则定解问题化为

$$\begin{cases} u_{\bar{x}\bar{x}} + u_{\bar{y}\bar{y}} + u_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \bar{x} > 0 \\ u|_{\bar{x}=0} = \varphi(2\bar{y}, 3\bar{z}). \end{cases}$$

我们求 $\bar{x} > 0$  区域的格林函数, 设 $M_0 = (\xi, \eta, \zeta)$  为 $\xi > 0$ , 其关于 $\bar{x} = 0$  的对称点 $M'_0 = (-\xi, \eta, \zeta)$ , 在 $M_0$  点放上 $\varepsilon_0$  的电荷, 在 $M'_0$  放上 $-\varepsilon_0$  的电荷. 所以格林函数

$$G(M; M_0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{(\bar{x}-\xi)^2 + (\bar{y}-\eta)^2 + (\bar{z}-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\bar{x}+\xi)^2 + (\bar{y}-\eta)^2 + (\bar{z}-\zeta)^2}} \right).$$

单位外法向为 $\vec{n} = (-1, 0, 0)$ , 所以

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}|_{\xi=0} = -\frac{\partial G}{\partial \xi}|_{\xi=0} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y}-\eta)^2 + (\bar{z}-\zeta)^2}^3}.$$

所以

$$u = \frac{\bar{x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(2\eta, 3\zeta)}{\sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y}-\eta)^2 + (\bar{z}-\zeta)^2}^3} d\eta d\zeta = \frac{x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(2\eta, 3\zeta)}{\sqrt{x^2 + (\frac{y}{2}-\eta)^2 + (\frac{z}{3}-\zeta)^2}^3} d\eta d\zeta.$$

2). 球形域上的格林函数: 假设有一个金属球壳, 接地, 球内  $M_0 = (\xi, \eta, \zeta)$  处有  $\varepsilon_0$  的电荷, 求球内电势分布. 我们设  $\rho_0 = r(O, M_0)$ ,  $\rho_1 = R^2/\rho_0$ . 在

$$M'_0 = \frac{\rho_1}{\rho_0} M_0 = \frac{R^2}{\rho_0^2} (\xi, \eta, \zeta)$$

处摆放电荷, 电量为

$$-\frac{R}{\rho_0} \varepsilon_0.$$

我们可以验证这两电荷产生的电势在球壳上的电势为零. 对于任意金属球壳上的点  $M$ , 三角形  $OMM_0$  与三角形  $OMM'_0$  相似, 所以

$$\frac{|MM'_0|}{|MM_0|} = \frac{|MO|}{|OM_0|} = \frac{R}{\rho_0},$$

所以当  $M$  在金属球壳上的时候,  $M$  处的电势为

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|MM_0|} - \frac{R}{|MM'_0|\rho_0} \right) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{|MM_0|} - \frac{1}{|MM_0|} \right) = 0.$$

因而由这两电荷生成电势分布的叠加就是我们要求的格林函数为

$$G(M; M_0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r(M, M_0)} - \frac{R}{\rho_0 r(M, M'_0)} \right).$$

如果我们记  $OM_0$  与  $OM$  之间的夹角为  $\psi$ , 则由余弦定理

$$r(M, M_0) = \sqrt{r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos \psi},$$

和

$$r(M, M_0) = \sqrt{r^2 + \rho_1^2 - 2r\rho_1 \cos \psi} = \sqrt{\frac{r^2 \rho_0^2 + R^4 - 2R^2 r \rho_0 \cos \psi}{\rho_0^2}}.$$

所以

$$G(M; M_0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos \psi}} - \frac{R}{\sqrt{r^2 \rho_0^2 + R^4 - 2R^2 r \rho_0 \cos \psi}} \right).$$

特别地,

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} G(M; M_0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2}} - \frac{R}{\sqrt{R^4}} \right) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

所以

$$G_{\rho_0}|_{\rho_0=R} = -\frac{1}{8\pi} \left( \frac{2\rho_0 - 2r \cos \psi}{\sqrt{r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos \psi}}^3 - \frac{R(2\rho_0 r^2 - 2R^2 r \cos \psi)}{\sqrt{r^2 \rho_0^2 + R^4 - 2R^2 r \rho_0 \cos \psi}}^3 \right) |_{\rho_0=R}.$$

即

$$G_{\rho_0}|_{\rho_0=R} = -\frac{1}{4\pi} \frac{R^2 - r^2}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \psi}}^3.$$

定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r \leq R \\ u|_{r=R} = \phi(\theta, \varphi). \end{cases}$$

的解为

$$u = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \phi(\theta, \varphi) \frac{R^2 - r^2}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \psi}}^3 \sin \theta d\theta d\varphi$$

### 2.2.1 二维情形

我们求半平面的格林函数，首先求以下基本解问题

$$\Delta_2 u = \delta(x, y).$$

这个在前面我们已经求过了，基本解为

$$u = \frac{\ln r}{2\pi}.$$

这是在0点摆放了一个 $-\varepsilon_0$ 电荷产生的电势。同样的如果我们在零点摆放 $\varepsilon_0$ 电荷产生的电势为

$$-\frac{\ln r}{2\pi}.$$

当然我们也可以用书上的解法，由物理直观，解应该有对称性，所以 $u = u(r)$ ， $r$ 为 $M = (x, y)$ 到零点距离。则有

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} = 0, r > 0$$

即

$$r^2 u_{rr} + r u_r = 0.$$

这是欧拉方程，做变量替换 $r = e^t$ ，得到

$$u_{tt} = 0.$$

所以

$$u = A + Bt = A + B \ln r, r > 0$$

取 $A = 0$ ，并对小圆域做积分

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_2 u dx dy = \int_{C_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dl = \int_{C_\varepsilon} \frac{B}{r} dl = 2\pi B.$$

所以 $B = \frac{1}{2\pi}$ 。所以

$$u = \frac{\ln r}{2\pi}.$$

现在我们假设在上半平面 $y > 0$ 的某位置 $M_0 = (\xi, \eta)$ 处摆放了电荷 $\varepsilon_0$ 。 $y = 0$ 是金属板接地。我们求格林函数，即求：

$$\begin{cases} \Delta_2 u = -\delta(M - M_0), y > 0 \\ u|_{y=0} = 0. \end{cases}$$

方法类似，同样在 $M_0$ 关于 $y = 0$ 的对称点 $M'_0 = (\xi, -\eta)$ 处摆放电荷 $-\varepsilon_0$ 。格林函数即是由这两电荷产生电势的叠加，即

$$G(M; M_0) = -\frac{1}{2\pi} (\ln r(M, M_0) - \ln r(M, M'_0)) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

三维的定解问题公式对二维依然成立，以下定解问题：

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, y > 0 \\ u|_{y=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

的解为

$$u(x, y) = - \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} d\xi.$$

$\vec{n} = (0, -1)$  为单位外法向, 所以

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}|_{\eta=0} = -G_{\eta}|_{\eta=0} = -\frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2}.$$

所以

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi.$$

一般定解问题:

$$\begin{cases} \Delta_2 u = -f(x, y), y > 0 \\ u|_{y=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

的解为

$$u(x, y) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi, \eta) G d\xi d\eta + \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi.$$

例子7. 求定解问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + 4u_{yy} = 0, x < 0 \\ u|_{x=0} = \varphi(y). \end{cases}$$

解. 设  $\bar{x} = x, \bar{y} = \frac{1}{2}y$ , 则定解问题化为

$$\begin{cases} u_{\bar{x}\bar{x}} + u_{\bar{y}\bar{y}} = 0, \bar{x} < 0 \\ u|_{\bar{x}=0} = \varphi(2\bar{y}). \end{cases}$$

我们求  $\bar{x} < 0$  区域的格林函数, 设  $M_0 = (\xi, \eta)$  为  $\xi < 0$ , 其关于  $\bar{x} = 0$  的对称点  $M'_0 = (-\xi, \eta)$ , 所以格林函数

$$G(M; M_0) = -\frac{1}{2\pi} (\ln r(M, M_0) - \ln r(M, M'_0)) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(\bar{x} + \xi)^2 + (\bar{y} - \eta)^2}{(\bar{x} - \xi)^2 + (\bar{y} - \eta)^2}.$$

单位外法向为  $\vec{n} = (1, 0)$ , 所以

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}|_{\xi=0} = \frac{\partial G}{\partial \xi}|_{\xi=0} = \frac{1}{\pi} \frac{\bar{x}}{\bar{x}^2 + (\bar{y} - \eta)^2}.$$

所以

$$u = -\frac{\bar{x}}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(2\eta)}{\bar{x}^2 + (\bar{y} - \eta)^2} d\eta = -\frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{4\varphi(2\eta)}{4x^2 + (y - 2\eta)^2} d\eta.$$

例子8. 设平面区域  $\Omega = \{(x, y) : x + y > 0\}$ ,

(1) 求区域  $\Omega$  的格林函数;

(2) 求区域  $\Omega$  的定解问题:

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, x + y > 0 \\ u|_{x+y=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

解. (1). 设  $M_0 = (\xi, \eta)$  为  $\Omega$  内点, 则  $M_0$  关于  $x + y = 0$  的对称点为  $M'_0 = (-\eta, -\xi)$  所以格林函数为

$$G(M; M_0) = -\frac{1}{2\pi} (\ln r(M, M_0) - \ln r(M, M'_0)) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x + \eta)^2 + (y + \xi)^2}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

(2). 单位外法向为  $\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ , 所以

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}|_{\xi+\eta=0} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(G_\xi + G_\eta)|_{\xi+\eta=0} = -\frac{x+y}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{(x-\xi)^2 + (y+\xi)^2}.$$

所以

$$u(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{2}\pi} \int \frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2 + (y+\xi)^2} dl = \frac{x+y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2 + (y+\xi)^2} d\xi.$$

2). 圆域上的格林函数: 二维区域为半径为  $R$  的圆内部, 求格林函数, 在圆内  $M_0 = (\xi, \eta, \zeta)$  处有  $\varepsilon_0$  的电荷, 圆周上电势为零, 求圆内电势分布. 我们设  $\rho_0 = r(O, M_0)$ ,  $\rho_1 = R^2/\rho_0$ . 在

$$M'_0 = \frac{\rho_1}{\rho_0} M_0 = \frac{R^2}{\rho_0^2} (\xi, \eta, \zeta)$$

处摆放电荷, 电量为

$$-\varepsilon_0.$$

此时, 可以计算得到圆周上的电势虽然不是0, 但是常数. 实际上对于圆周上的任意点  $M$ , 三角形  $OMM_0$  与三角形  $OMM'_0$  相似, 所以

$$\frac{|MM'_0|}{|MM_0|} = \frac{|MO|}{|OM_0|} = \frac{R}{\rho_0},$$

所以当  $M$  在圆周上的时候,  $M$  处的电势为

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|MM'_0|}{|MM_0|} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho_0}.$$

因而格林函数为

$$G(M; M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r(M, M'_0)}{r(M, M_0)} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho_0} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho_0 r(M, M'_0)}{R r(M, M_0)}.$$

当  $M$  再圆周上的时候,

$$G(M; M_0) = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{\rho_0 r(M, M'_0)}{R r(M, M_0)} \right) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho_0 R}{R \rho_0} = 0.$$

以下定解问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, 0 \leq r \leq R \\ u|_{r=R} = \varphi(\theta). \end{cases}$$

的解为

$$u(x, y) = - \int \varphi \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} dl = - \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) G_{\rho_0} R d\theta.$$

设  $\psi$  为  $OM$  与  $OM_0$  夹角. 由余弦公式:

$$r(M, M_0) = \sqrt{r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos \psi}$$



和

$$r(M, M'_0) = \sqrt{r^2 + \rho_1^2 - 2r\rho_1 \cos \psi} = \sqrt{\frac{r^2 \rho_0^2 + R^4 - 2R^2 r \rho_0 \cos \psi}{\rho_0^2}}.$$

所以

$$G(M; M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho_0 r(M, M'_0)}{Rr(M, M_0)} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{r^2 \rho_0^2 + R^4 - 2R^2 r \rho_0 \cos \psi}}{R\sqrt{r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos \psi}}.$$

所以

$$G_{\rho_0}|_{\rho_0=R} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{2\rho_0 r^2 - 2R^2 r \cos \psi}{r^2 \rho_0^2 + R^4 - 2R^2 r \rho_0 \cos \psi} - \frac{2\rho_0 - 2r \cos \psi}{r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos \psi} \right) |_{\rho_0=R}.$$

即

$$G_{\rho_0}|_{\rho_0=R} = \frac{1}{2\pi R} \frac{r^2 - R^2}{r^2 + R^2 - 2rR \cos \psi}.$$

所以

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\theta)(R^2 - r^2)}{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi)} d\theta,$$

其中  $\phi$  为  $M$  的幅角。

我们的最后一个例子是书上的，用分离变量法求格林函数。

**例子9.** 区域为  $\Omega: 0 < x < a, 0 < y < b$ ，求格林函数。

**解.** 只要解如下定解问题：

$$\begin{cases} \Delta_2 u = \delta(\xi, \eta), 0 < x < a, 0 < y < b \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0. \end{cases}$$

### 2.3 热方程初始问题的基本解

我们说某些现象具有时间和空间的平移不变性，如果当初始状态做一个时间和空间的平移后，相应的物理过程也相应的做一个时间和空间的平移。特别地一个数学物理方程如果它的系数是与时间和空间无关的常数，那么它描述的物理过程就具有时间和空间的平移不变性，当初始状态发生平移后，我们仅需要对相应的解平移（把原来到时间空间换成相对时间和相对空间）即可。

设  $\mathcal{L}$  是  $x, y, z$  的常系数（时间和空间的平移性质）线性微分算子。称

$$II_1: \begin{cases} u_t = \mathcal{L}u, t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = \delta(x, y, z). \end{cases}$$

为柯西问题

$$II_2: \begin{cases} u_t = \mathcal{L}u + f(t, x, y, z), t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = \varphi(x, y, z). \end{cases}$$

的基本解。如果我们能解出  $II_1$ ，那么  $II_2$  的解也就知道了。设  $II_1$  的解为

$$U(t, M), M = (x, y, z).$$

则由时间和空间的平移性质,

$$(c): \begin{cases} u_t = \mathcal{L}u, t > \tau, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(\tau, x, y, z) = \delta(M - M_0). \end{cases}$$

的解为

$$U(t - \tau, M - M_0).$$

则  $II_2$  的解为

$$U(t, M) * \varphi(M) + \int_0^t U(t - \tau, M) * f(\tau, M) d\tau.$$

为了理解这个式子, 我们可以将  $II_2$  用叠加原理分成两部分

$$(a): \begin{cases} u_t = \mathcal{L}u, t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = \varphi(x, y, z). \end{cases}$$

和

$$(b): \begin{cases} u_t = \mathcal{L}u + f(t, x, y, z), t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = 0. \end{cases}$$

解的前半部分即是(a) 的解, 其实

$$\varphi(M) = \varphi(M) * \delta(M) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(M_0) \delta(M - M_0) dM_0.$$

从而(a) 的解为将上式中狄拉克函数替换为(c) 的解。即为

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(M_0) U(t, M - M_0) dM_0 = U(t, M) * \varphi(M).$$

至于(b), 我们可以用冲量原理, 只要求

$$(d): \begin{cases} u_t = \mathcal{L}u, t > \tau, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = f(\tau, x, y, z). \end{cases}$$

其解为

$$f(\tau, M) * U(t - \tau, M).$$

由冲量原理, (b) 的解为

$$\int_0^t f(\tau, M) * U(t - \tau, M) d\tau.$$

这样我们将(a) 和(b) 合起来就得到了  $II_2$  的解。

上述是一般形式, 我们回到热方程的基本解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta_3 u, t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = \delta(x, y, z). \end{cases}$$

需要注意的是, 一维二维三维的热方程基本解有相同的形式, 因而此处我们仅说明三维的情形。做三维的傅里叶变换

$$\bar{U}(t, \lambda, \mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}^3} u(t, x, y, z) e^{i(\lambda x + \mu y + \nu z)} dx dy dz.$$

则

$$\begin{cases} \bar{U}_t = -a^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\bar{U}, t > 0, -\infty < \lambda, \mu, \nu < \infty \\ \bar{U}(0, \lambda, \mu, \nu) = 1. \end{cases}$$

这是一个以 $t$  为自变量的常微分方程。解之

$$\bar{U} = C(\lambda, \mu, \nu)e^{-a^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)t}.$$

令 $t = 0$ , 得到

$$C(\lambda, \mu, \nu) = 1.$$

所以

$$\bar{U} = e^{-a^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)t}.$$

做傅里叶反变换。

$$\begin{aligned} u(t, x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)t} e^{-i(\lambda x + \mu y + \nu z)} d\lambda d\mu d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-a^2\lambda^2 t} e^{-i\lambda x} d\lambda \times \dots \end{aligned}$$

配平方

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-a^2\lambda^2 t} e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi a\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(a\lambda\sqrt{t} + \frac{ix}{a\sqrt{t}})^2 - \frac{x^2}{4a^2t}} d(a\sqrt{t}\lambda) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2\pi a\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}.$$

所以基本解为

$$U(t, x, y, z) = \left( \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \right)^3 e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4a^2t}}.$$

二维热方程的基本解为

$$U(t, x, y) = \left( \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \right)^2 e^{-\frac{x^2 + y^2}{4a^2t}}.$$

一维热方程的基本解为

$$U(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

可以看出热扩散时候始终保持正态分布, 并且保持曲线或则曲面或者高维曲面下总体积不变, 即能量守恒, 后者可以通过傅里叶变换很容易得到, 实际上

$$\int_{\mathbb{R}^3} U(t, x, y, z) dx dy dz = \bar{U}(t, 0, 0, 0).$$

而

$$\bar{U}_t(t, 0, 0, 0) = 0 \text{ 即 } \bar{U}(t, 0, 0, 0) \text{ 恒等于常数.}$$

所以能量守恒。

## 2.4 波动方程初始问题的基本解

设 $\mathcal{L}$  是 $x, y, z$  的常系数（时间和空间的平移性质）线性微分算子。称

$$II_1 : \begin{cases} u_{tt} = \mathcal{L}u, t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = 0, u_t(0, x, y, z) = \delta(x, y, z). \end{cases}$$

为柯西问题

$$II_2 : \begin{cases} u_{tt} = \mathcal{L}u + f(t, x, y, z), t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), u_t(0, x, y, z) = \psi(x, y, z). \end{cases}$$

的基本解。如果我们能解出 $II_1$ ，那么 $II_2$  的解也就知道了。设 $II_1$  的解为

$$U(t, M).$$

则 $II_2$  的解为

$$u(t, M) = \frac{\partial}{\partial t}[U(t, M) * \varphi(M)] + U(t, M) * \psi(M) + \int_0^t U(t - \tau, M) * f(\tau, M) d\tau.$$

这个方程的解有三部分，后面两部分都好理解，我们仅需要验证第一部分为定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = \mathcal{L}u, t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), u_t(0, x, y, z) = 0. \end{cases}$$

的解即可。首先验证其满足泛定方程：即

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}[U(t, M) * \varphi(M)] = \frac{\partial}{\partial t}[\frac{\partial^2}{\partial t^2}[U(t, M)] * \varphi(M)] = \frac{\partial}{\partial t}[\mathcal{L}[U(t, M)] * \varphi(M)] = \mathcal{L} \frac{\partial}{\partial t}[U(t, M) * \varphi(M)].$$

其中

$$\mathcal{L}[U(t, M)] * \varphi(M) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}[U(t, M - M_0)] \varphi(M_0) dM_0 = \mathcal{L}[\int_{\mathbb{R}^3} U(t, M - M_0) \varphi(M_0) dM_0] = \mathcal{L}[U(t, M) * \varphi(M)].$$

然后验证初始条件：

$$\frac{\partial}{\partial t}[U(t, M) * \varphi(M)]|_{t=0} = U_t(t, M)|_{t=0} * \varphi(M) = \delta(M) * \varphi(M) = \varphi(M);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[U(t, M) * \varphi(M)]|_{t=0} = U_{tt}(t, M)|_{t=0} * \varphi(M) = \mathcal{L}[U(t, M)]|_{t=0} * \varphi(M) = \mathcal{L}[U(t, M)|_{t=0}] * \varphi(M) = 0.$$

这样我们就完成了验证。

**例子10.** 波动方程柯西问题的基本解：

$$II_1 : \begin{cases} U_{tt} = a^2 \Delta_3 U, t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ U(0, x, y, z) = 0, U_t(0, x, y, z) = \delta(x, y, z). \end{cases}$$

**解.** 做三维的傅里叶变换

$$\bar{U}(t, \lambda, \mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}^3} u(t, x, y, z) e^{i(\lambda x + \mu y + \nu z)} dx dy dz.$$

则

$$\begin{cases} \bar{U}_{tt} = -a^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\bar{U}, t > 0, -\infty < \lambda, \mu, \nu < \infty \\ \bar{U}(0, \lambda, \mu, \nu) = 0, \bar{U}_t(0, \lambda, \mu, \nu) = 1. \end{cases}$$

为了书写方便, 我们设  $\rho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$ , 并记球极坐标

$$\lambda = \rho \sin \theta \cos \phi, \mu = \rho \sin \theta \sin \phi, \nu = \rho \cos \theta.$$

则

$$\begin{cases} \bar{U}_{tt} = -a^2 \rho^2 \bar{U}, t > 0, -\infty < \lambda, \mu, \nu < \infty \\ \bar{U}(0, \lambda, \mu, \nu) = 0, \bar{U}_t(0, \lambda, \mu, \nu) = 1. \end{cases}$$

这是一个以  $t$  为自变量的常微分方程。解之

$$\bar{U} = C(\lambda, \mu, \nu) \cos(a\rho t) + D(\lambda, \mu, \nu) \sin(a\rho t).$$

代入初始条件得到

$$C(\lambda, \mu, \nu) = 0, D(\lambda, \mu, \nu) = \frac{1}{a\rho}.$$

所以

$$\bar{U} = \frac{\sin(a\rho t)}{a\rho}.$$

做傅里叶反变换,

$$U = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(a\rho t)}{a\rho} e^{-i(\lambda x + \mu y + \nu z)} d\lambda d\mu d\nu.$$

通过观察, 我们发现解应该是球对称的。也就是说  $U$  的取值只是与时间和  $M$  到零点的距离有关。

即  $U = U(t, r)$ 。所以

$$\begin{aligned} U(t, r) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(a\rho t)}{a\rho} e^{-i\rho r \cos \theta} \rho^2 \sin \theta d\theta d\phi d\rho \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{\rho \sin(a\rho t)}{a} e^{-i\rho r \cos \theta} \sin \theta d\theta d\rho \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\sin(a\rho t)}{iar} e^{-i\rho r \cos \theta} \Big|_0^\pi d\rho \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{2 \sin(\rho r) \sin(a\rho t)}{ar} d\rho \\ &= \frac{1}{8\pi^2 ar} \int_{-\infty}^\infty \cos(\rho r - a\rho t) - \cos(\rho r + a\rho t) d\rho. \end{aligned}$$

用公式

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \cos(\lambda x) d\lambda.$$

得到

$$U(t, r) = \frac{1}{4\pi ar} (\delta(r - at) - \delta(r + at)).$$

因为  $r, a, t > 0$ , 所以

$$U(t, r) = \frac{\delta(r - at)}{4\pi ar}.$$

这说明波以零点为中心, 向四周以匀速  $a$  扩散。这样我们就得到了三维波动方程的基本解。

有了三维波动方程的基本解，我们可以给出三维自由波的解。三维自由波定解问题为

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta_3 u, t > 0, -\infty < x, y, z < \infty \\ u(0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), u_t(0, x, y, z) = \psi(x, y, z). \end{cases}$$

其解为

$$u(t, M) = \frac{\partial}{\partial t} [U(t, M) * \varphi(M)] + U(t, M) * \psi(M).$$

其中后面项

$$\begin{aligned} U(t, M) * \psi(M) &= \int_{\mathbb{R}^3} U(t, M - M_0) \psi(M_0) dM_0 \\ &= \frac{1}{4\pi a} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta(r - at)}{r} \psi(M_0) dM_0. \end{aligned}$$

这里  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ . 由狄拉克函数的取值规则，我们可以立马得到状态函数  $u(t, M)$  只与与  $M$  点距离  $at$  的点的初始状态有关。把  $M_0 = (\xi, \eta, \zeta)$  写成以  $M = (x, y, z)$  为中心的球坐标形式，

$$\begin{cases} \xi = x + r \sin \theta \cos \varphi \\ \eta = y + r \sin \theta \sin \varphi \\ \zeta = z + r \cos \theta. \end{cases}$$

并取  $\tilde{\psi}(r, \theta, \varphi) = \psi(\xi, \eta, \zeta)$ 。得到

$$\begin{aligned} U(t, M) * \psi(M) &= \frac{1}{4\pi a} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\delta(r - at)}{r} \tilde{\psi}(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{4\pi a} \frac{1}{at} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tilde{\psi}(at, \theta, \varphi) (at)^2 \sin \theta d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}} \psi(M_0) dS \\ &= t \left[ \frac{1}{4\pi (at)^2} \int_{S_{at}} \psi(M_0) dS \right]. \end{aligned}$$

中括号里相当于对球面求平均。记

$$M_{at}(\psi) = \frac{1}{4\pi (at)^2} \int_{S_{at}} \psi(M_0) dS.$$

则可以得到自由波的传播公式：

$$u(t, M) = \frac{\partial}{\partial t} [t M_{at}(\varphi)] + t M_{at}(\psi).$$

通常称之为泊松公式。

值得注意的是波动方程不同维数的基本解并不统一，下面我们给出一维波动方程的基本解，实际上，以前算过。

$$II_1 : \begin{cases} U_{tt} = a^2 U_{xx}, t > 0, -\infty < x < \infty \\ U(0, x) = 0, U_t(0, x) = \delta(x). \end{cases}$$

解. 做傅里叶变换

$$\bar{U}(t, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^3} u(t, x) e^{i(\lambda x)} dx dy dz.$$

则

$$\begin{cases} \bar{U}_{tt} = -a^2(\lambda^2)\bar{U}, t > 0, -\infty < \lambda < \infty \\ \bar{U}(0, \lambda) = 0, \bar{U}_t(0, \lambda) = 1. \end{cases}$$

这是一个以  $t$  为自变量的常微分方程。解之

$$\bar{U} = C(\lambda) \cos(a\lambda t) + D(\lambda) \sin(a\lambda t).$$

代入初始条件得到

$$C(\lambda) = 0, D(\lambda) = \frac{1}{a\lambda}.$$

所以

$$\bar{U} = \frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda}.$$

做傅里叶反变换,

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda} e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\lambda at} - e^{-i\lambda at}}{2a\lambda i} e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

所以

$$U(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & x \in [-at, at] \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

所以一维的基本解是简单的。

将一维波动方程的基本解代入一开始的公式, 我们可以得到达朗贝尔公式。一维自由波

$$II_1 : \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, t > 0, -\infty < x < \infty \\ u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \psi(x). \end{cases}$$

的解为

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} [u(t, x) * \varphi(x)] + u(t, x) * \psi(x).$$

通过计算:

$$u(t, x) * \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t, \xi) \psi(x - \xi) d\xi = \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(x - \xi) d\xi = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

这是达朗贝尔公式的后半部分。

$$\frac{\partial}{\partial t} [u(t, x) * \varphi(x)] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi \right] = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2}.$$

这是达朗贝尔公式的前半部分。