1.(1) $x\delta(x)=0$

证明：$\forall f(x)\in K$，有 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,x\,\delta(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(xf(x))\delta(x)\,dx=0\cdot f(0)=0$

所以 $x\delta(x)=0$

(2) $f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a)$

证明：$\forall g(x)\in K$，有 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\delta(x-a)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(g(x)f(x))\delta(x-a)\,dx=g(a)f(a)$

所以 $f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a)$.

(3) $\delta(ax)=\frac{\delta(x)}{|a|}$.

证明：$\forall f(x)\in K$，有 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(ax)\,dx=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{t}{a})\delta(t)\,dt=\frac{f(0)}{|a|}$

所以 $\delta(ax)=\frac{\delta(x)}{|a|}$，（注意 a 的符号．会改变上下限顺序）.

(4) $\delta'(-x)=-\delta'(x)$

证明：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)\delta'(x)\,dx=f(-x)\delta(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty} f'(-x)\delta(x)\,dx$

$=f'(0)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} -f(x)\delta'(x)\,dx=-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta(x)\,dx=f'(0)$.

所以 $\delta'(-x)=-\delta'(x)$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,x\,\delta'(x)\,dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}(xf(x))'\delta(x)\,dx=-(xf(x))'\Big|_{x=0}$

$=-f(0)$.

所以 $x\delta'(x)=-\delta(x)$.

2. $\forall f\in K$，有 $\iint f(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0)\,dx\,dy=\iint |J|\cdot f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\,\tilde{\delta}(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)\,d\xi\,d\eta$

所以 $\tilde{\delta}(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)=\frac{1}{|J|}\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)$. 得证.

在极坐标换元下，有 $|J|=r$，所以 $\delta(x-x_0,y-y_0)=\frac{1}{r}\delta(r-r_0,\theta-\theta_0)$

3.(2) $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (0<x<l,\ t>0) \\ u_x(t,0)=u_x(t,l)=0 \\ u(0,x)=0,\ u_t(0,x)=\delta(x-\xi) & (0<\xi<l) \end{cases}$

解：分离变量 $u=X(x)T(t)$，则有 $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=X'(l)=0 \end{cases}$ $T''+\lambda a^2T=0$

解固有值问题可得 $\begin{cases} X_n=\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \end{cases}$.

考虑时间方程 $T''+\lambda a^2T=0$，观察到固有值为0时，对应解为 $T_0=A_0+B_0t$.

则通解为 $u=A_0+B_0t+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right)\right]\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$.

代入边界条件有 $u(0,x)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=0 \Rightarrow A_n=0$.

考虑另一边边界条件 $u_t(0,x)=B_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n\pi a}{l}\right)B_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=\delta(x-\xi)$.

利用三角函数正交性可得 $B_0=\frac{1}{l}\int_0^l\delta(x-\xi)\,dx=\frac{1}{l}$，$\left(\frac{n\pi a}{l}\right)B_n\cdot\left(\frac{l}{2}\right)=\int_0^l\delta(x-\xi)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$

$\Rightarrow B_n=\frac{2}{n\pi a}\cos\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)$

综上，最后结果为 $u(t,x)=\frac{t}{l}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n\pi a}\cos\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$.

4.(1) $u_{xx}+\beta^2u_{yy}=0$.

作坐标变换，考 $\begin{cases}\xi=x \\ \eta=\frac{y}{\beta}\end{cases}$. 考虑基本解有 $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\frac{1}{\beta}\delta(\xi,\eta)$.

套结论有 $u=\iint\frac{1}{4\pi}\ln(\xi^2+\eta^2)\frac{1}{\beta}\delta(\xi,\beta\eta)\,d\xi d\eta=\frac{1}{4\pi\beta}\left(x^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2\right)$

(PPT P36)(记住)

(Remark. 答案给的是 $u(x,y)=\frac{1}{4\pi\beta}\ln(\beta^2x^2+y^2)$，相差常数项，不影响结果).

4.(2) $\Delta_2\Delta_2 u=0$

解：设 $\Delta_2 u = v$，此时先求解 $\Delta_2 v = \delta(x,y)$.

其基本解为 $v(x,y)=\frac{1}{2\pi}\ln r$.

继而求解 $\Delta_2 u = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\ln r}$. $\longrightarrow$ 仅和 r 相关. 设 $u(r)$.

$\Rightarrow \frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=\frac{1}{2\pi}\ln r$ （即Euler方程）.

令 $r=e^t$，有 $\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{te^{2t}}{2\pi} \Rightarrow u=\frac{1}{8\pi}r^2\ln r-\frac{1}{8\pi}r^2+C_2\ln r+C_1$.

取 $C_1=C_2=0$. 又 $-\frac{1}{8\pi}r^2$ 在原点处为0，对点源不构成贡献，可略去.

所以基本解为 $u=\frac{1}{8\pi}r^2\ln r$.

5. 此时需求解 $\Delta_3 u+k^2u=\delta(x,y,z)$.

三维Fourier变换 $\bar{u}=\iiint u e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}dxdydz$

$\Longrightarrow -(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\bar{u}+k^2\bar{u}=1 \Rightarrow \bar{u}=\frac{1}{k^2-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)}$

引入 $\rho^2=\lambda^2+\mu^2+\nu^2$，利用球坐标公式进行逆变换有

$$u=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{+\infty}\rho^2d\rho\int_0^{\pi}\sin\theta\frac{e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}}{k^2-\rho^2}d\theta$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{+\infty}\rho^2d\rho\int_0^{\pi}\frac{1}{k^2-\rho^2}\cdot\frac{1}{ir\rho}d(e^{-ir\rho\cos\theta})$$

$$=\frac{1}{2\pi^2 r}\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{\rho\sin(r\rho)}{k^2-\rho^2}d\rho}$$ $\longrightarrow$ （需用留数定理计算）.

考虑 $I=\int_{\mathbb{R}}\frac{\rho\sin(r\rho)}{k^2-\rho^2}d\rho$，$I'=\int_{\mathbb{R}}\frac{\rho e^{ir\rho}}{k^2-\rho^2}d\rho=i\int_{\mathbb{R}}\frac{\rho\sin(r\rho)}{k^2-\rho^2}d\rho=2iI$.

构造 $f(z)=\frac{ze^{irz}}{k^2-z^2}$. 奇点 $z_{1,2}=\pm k$.

积分 $I' = -\frac{i\pi}{2}(e^{ikr}+e^{-ikr}) = -i\pi\cos kr \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2}\cos kr$.

综上，$u = -\frac{\cos kr}{4\pi r}$.

（留数定理：$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f,a_k]$）

6.(1) 四分之一空间 $x>0, y>0$.

$M_1(\xi,\eta,\zeta) \xRightarrow{3个对称点} M_2(\xi,-\eta,\zeta)\quad M_3(-\xi,-\eta,\zeta)\quad M_4(-\xi,\eta,\zeta)$.

$$G = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(M,M_1)} - \frac{1}{r(M,M_2)} + \frac{1}{r(M,M_3)} - \frac{1}{r(M,M_4)}\right).$$

(2) 上半球面：$x^2+y^2+z^2<a^2,\ z>0$.

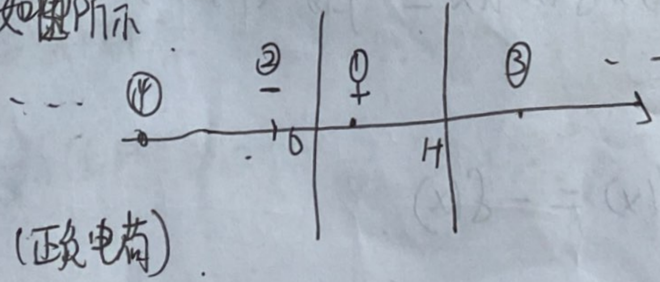
三维半球有两类边界. 第一步添加 $-\frac{a}{\rho_0}$ 的点荷 2 使半球电势为0.

第二步添加电荷量为 +1 和 $\frac{a}{\rho_0}$ 的电荷 3, 4 使底面电势为0、

设 M_1 为 M_0 关于球面对称点. M_2 为 M_0 关于z面对称点，M_3 为 M_1 关于z面对称点.

所以 $G = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r(M,M_0)} + \frac{a}{\rho_0 r(M,M_3)} - \frac{a}{\rho_0 r(M,M_1)} - \frac{1}{r(M,M_2)}\right]$.

(3) 本题镜象电荷无穷多，如图所示



依次填加的电荷为 $(-\xi,-)$ ←（正负电荷）

$(2H+\xi,+)$，$(-2H-\xi,-)$ …

设 $M_n(\xi,\eta,2nH+\zeta)$ $\quad M_n'(\xi,\eta,\zeta-2nH)$

~~$r_n = r(M,M_n)$~~

所以 $G = \frac{1}{4\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_n'}\right)$ $\quad r_n = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-2nH-\xi)^2}$

$r_n' = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-2nH+\xi)^2}$

7.(2) 处理方法参考 6(2).

8、求方程 $u_t=a^2u_{xx}+bu$ 的柯西问题的基本解.

解：基本解满足 $\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}+bu \\ u(0,x)=\delta(x) \end{cases}$.

无界问题、做 Fourier 变换得 $\begin{cases} \bar{u}_t=-a^2\lambda^2\bar{u}+b\bar{u} \\ \bar{u}(0,\lambda)=1 \end{cases}$

解得 $\bar{u}=e^{(-a^2\lambda^2+b)t}$

做 Fourier 反变换得 $u=e^{bt}\cdot F^{-1}(e^{-a^2\lambda^2t})=\dfrac{e^{bt}}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$

9.(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial t}-2u \quad (t>0,\ -\infty<x<+\infty,\ a>0) \\ u|_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x). \end{cases}$

（课本提示有误，把 b 改成 b^2）

解：先求基本解 $\begin{cases} u_{tt}+2u_t=a^2u_{xx}-2u \\ u(0,x)=0,\ u_t(0,x)=\delta(x) \end{cases}$

做 Fourier 变换有 $\begin{cases} \bar{u}_{tt}+2\bar{u}_t=-a^2\lambda^2\bar{u}-2\bar{u} \\ \bar{u}(0,\lambda)=0,\ \bar{u}_t(0,\lambda)=1. \end{cases}$

求解二阶 ODE，对应特征方程为 $y^2+2y+(2+a^2\lambda^2)=0$

$\Rightarrow y_{\pm}=-1\pm i\sqrt{a^2\lambda^2+1}$

则 $\bar{u}=\dfrac{e^{-t}\sin\sqrt{a^2\lambda^2+1}}{\sqrt{a^2\lambda^2+1}}$，利用逆变换为 $u=\dfrac{e^{-t}}{2a}J_0\left(\dfrac{\sqrt{a^2t^2-x^2}}{a}\right)$

Scanned with CamScanner

$$u = \mathcal{U} * \psi(x) = \frac{e^{-t}}{2a}\int_{-at}^{at} J_0\left(\frac{1}{a}\sqrt{a^2t^2-\xi^2}\right)\psi(x-\xi)\,d\xi$$

10. 试写出定解问题 $\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx}+u_{yy}) + f(t,x,y) \\ u(0,x,y)=0,\ u_t(0,x,y)=0 \end{cases}$ 的解的积分表达公式.

解：考虑方程基本解 $\mathcal{U}(t,x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-x^2-y^2}} & (x^2+y^2 \le a^2t^2) \\ 0 & (x^2+y^2 > a^2t^2) \end{cases}$

则 $u(t,x,y) = \int_0^t \mathcal{U}(t-\tau,x,y) * f(\tau,x,y)\,d\tau$

$$= \int_0^t \iint_D \frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{f(\tau,\xi,\eta)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta\,d\tau$$

这里 D：$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \le a^2(t-\tau)^2$.

12. 根据已知公式直接求解：$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} \\ u(0,x) = \exp\{-x^2\} \end{cases}$.

解：$u(x,t) = \mathcal{U}(x,t) * \psi(x) + \int_0^t \mathcal{U}(x,t-\tau) * f(x,\tau)\,d\tau$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} e^{-\xi^2}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1+4a^2t}{4a^2t}\left(\xi-\frac{x}{1+4a^2t}\right)^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}}\,d\xi.$$

令 $M = \sqrt{\frac{1+4a^2t}{4a^2t}}\left(\xi-\frac{x}{1+4a^2t}\right)$，然后可以得到 $u(x,t) = \frac{M}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-M^2}\cdot e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}}\,dM$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+4a^2t}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2t+1}\right\}.$$