习题课 II

2.(1) 解固有值问题

$$\begin{cases} y''-2ay'+\lambda y=0 & (0<x<1,\ a\text{为常数}) \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$$

解：特征方程此时为 $r^2-2ar+\lambda=0$，判别式 $\Delta=4a^2-4\lambda$

两根 $r_1=a+\sqrt{a^2-\lambda}$　$r_2=a-\sqrt{a^2-\lambda}$

① 当 $\Delta>0$，即 $-|a|<\lambda<|a|$ 时，方程解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ $(r_1,r_2\in\mathbb{R})$.

将 $y(0)=y(1)=0$ 代入，有 $\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1e^{r_1}+C_2e^{r_2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ C_2=0 \end{cases}$ （舍去）

② 当 $\Delta=0$ 时，即 $\lambda=\pm a$ 时，方程解为 $y=(C_1+C_2x)e^{ax}$

将 $y(0)=y(1)=0$ 代入，有 $\begin{cases} C_1=0 \\ (C_1+C_2)e^{a}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ C_2=0 \end{cases}$ （舍去）

③ 当 $\Delta<0$ 时，即 $\lambda>|a|$ 时 $\lambda<-|a|$ 时．方程解为 $y=C_1e^{ax}\cos\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x+C_2e^{ax}\sin\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x$

将 $y(0)=0$，$y(1)=0$ 代入，有 $\begin{cases} C_1=0 \\ C_2\sin\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}=0 \end{cases}$ 当 $\Delta=-4n^2\pi^2$ 时，C_2 非零．

即 $\lambda=a^2+n^2\pi^2$.

所以固有值 $\lambda_n=a^2+n^2\pi^2$，固有函数 $y=e^{ax}\sin n\pi x$

4、求解边值问题 $\begin{cases} \Delta_2 u=0 & (r<a) \\ u|_{r=a}=f. \end{cases}$

(PS. 做内积时，尽量将 $f(\theta)$ 写成三角函数形式)

$u(r,\theta)=C_0+D_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}(C_nr^n+D_nr^{-n})\cdots$

这里 $r=0$ 时有界，所以 $D_0=0$.

(1) $f=A$.

解：圆内 Laplace 方程的解是

$$u(r,\theta)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$

$A_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\,d\theta$

$B_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\,d\theta$

又 $u(a,\theta)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}a^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)=A$.　$C_0=\frac{A_0}{2}$

利用三角函数正交性做内积．可得 $A_n=B_n=0$.

(2) $f=A\cos\theta$.

利用公式计算可得 $A_1=\frac{A}{a}$，其它 $=0$.

$u(r,\theta)=\frac{A}{a}r\cos\theta$.

(3) $f=Axy$.

$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow f=Ar^2\cos\theta\sin\theta=\frac{Ar^2}{2}\sin 2\theta$

利用公式计算可得 $B_2=\frac{A}{2}$，其它 $=0$

$u(r,\theta)=\frac{A}{2}r^2\sin 2\theta$

(4) $f=$ ~~$\cos\theta\sin 2\theta=2\cos^2\theta\sin\theta=2(1-\sin^2\theta)$~~

积化和差：$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$.

$f=\cos\theta\sin 2\theta=\frac{1}{2}(\sin\theta+\sin 3\theta)$.

此时系数 $B_1=\frac{1}{2a}$，$B_3=\frac{1}{2a^3}$ 其它 $=0$.

$u(r,\theta)=\frac{r}{2a}\sin\theta+\frac{r^3}{2a^3}\sin 3\theta$.

(5) $f=A\sin^2\theta+B\cos^2\theta=\frac{1}{2}(A+B)+(\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A)\cos 2\theta$.

$C_0=\frac{1}{2}(A+B) \quad A_2=\frac{B-A}{2a^2}$

$u(r,\theta)=\frac{A+B}{2}+\frac{B-A}{2a^2}r^2\cos 2\theta$.

① 三角函数系的正交性 用来求 A_n，B_n.

② 利用有界性 来确定 D_0（下一题例外）.

③ 记住公式 $u(r,\theta)=C_0+D_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n r^n+D_n r^{-n})(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$

④ 光滑函数的 Fourier 展开唯一.

5 (6) 求解环域上的狄氏问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u=0 & (a<r<b) \\ u(a,\theta)=1, \quad u(b,\theta)=0. \end{cases}$$

解：$u(r,\theta)=C_0+D_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}(C_nr^n+D_nr^{-n})(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$.

由边界条件可得

$$\begin{cases} C_0+D_0\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}(C_na^n+D_na^{-n})(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)=1. \\ C_0+D_0\ln b+\sum_{n=1}^{\infty}(C_nb^n+D_nb^{-n})(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)=0. \end{cases}$$

即求解 $\begin{cases} C_0+D_0\ln a=1 \\ C_0+D_0\ln b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0=-\frac{\ln b}{\ln a-\ln b} \\ D_0=\frac{1}{\ln a-\ln b} \end{cases}$

此时 $u(r,\theta)=\frac{\ln r-\ln b}{\ln a-\ln b}$

T2 (3) 求解固有值问题 $\begin{cases} y^{(4)}+\lambda y=0 & (0<x<l) \\ y(0)=y(l)=y''(0)=y''(l)=0 \end{cases}$

① $\lambda=w^4$ 时，对应的特征方程为 $r^4+w^4=0$ 对应的四个根为 $r_1=e^{\frac{\pi}{4}i}w$, $r_2=e^{\frac{3\pi}{4}i}w$

$r_3=e^{\frac{5\pi}{4}i}w$, $r_4=e^{\frac{7\pi}{4}i}w$. $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+C_3e^{r_3x}+C_4e^{r_4x}$

此时对应的通解为 $y=e^{\frac{\sqrt2}{2}wx}(C_1\cos\frac{\sqrt2}{2}wx+iC_2\sin\frac{\sqrt2}{2}wx)+e^{-\frac{\sqrt2}{2}wx}(C_3\cos\frac{\sqrt2}{2}wx+iC_4\sin\frac{\sqrt2}{2}wx)$.

代入边界条件有

$$\begin{cases} C_1+C_3=0 \\ e^{\frac{\sqrt2}{2}wl}(C_1\cos\frac{\sqrt2}{2}wl+iC_2\sin\frac{\sqrt2}{2}wl)+e^{-\frac{\sqrt2}{2}wl}(C_3\cos\frac{\sqrt2}{2}wl+iC_4\sin\frac{\sqrt2}{2}wl)=0 \\ w^2iC_2-w^2iC_4=0 \\ e^{\frac{\sqrt2}{2}wl}w^2(-C_1\sin\frac{\sqrt2}{2}wl+iC_2\cos\frac{\sqrt2}{2}wl)+e^{-\frac{\sqrt2}{2}wl}w^2(C_3\sin\frac{\sqrt2}{2}wl-iC_4\cos\frac{\sqrt2}{2}wl)=0 \end{cases}$$

计算可得 仅有零解，舍去。

② $\lambda=0$ 时，通解为 $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3$.

代入边界条件有 $\begin{cases} C_1=0 \\ C_1+C_2l+C_3l^2+C_4l^3=0 \\ 2C_3=0 \\ 2C_3+6C_4l=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ C_2=0 \\ C_3=0 \\ C_4=0 \end{cases}$ 舍去

③ $\lambda=-w^4$ 时，~~方程通解~~ 特征方程 $r^4-w^4=0$ $r_1=w$ $r_2=iw$ $r_3=-w$ $r_4=-iw$.

通解 $y=C_1e^{wx}+C_2e^{-wx}+C_3\cos wx+C_4\sin wt$.

$$\begin{cases} C_1+C_2+C_3=0 \\ C_1e^{wl}+C_2e^{-wl}+C_3\cos wl+C_4\sin wl=0 \\ C_1w^2+C_2w^2-C_3w^2=0 \\ C_1w^2e^{wl}+C_2w^2e^{-wl}-C_3w^2\cos wl-C_4w^2\sin wl=0 \end{cases}$$

解得当 $w=\frac{n\pi}{l}$ 时，有非零解，$\lambda_n=-(\frac{n\pi}{l})^4$，固有函数 $y_n=\sin\frac{n\pi x}{l}$ $(n=1,2\ldots)$

~~10、(2) 解非齐次定解问题~~ $\cancel{\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} \\ u(t,0)=0,\ u_x(t,l)=\frac{q}{k} \\ u(0,x)=u_0 \end{cases}}$

10 (3) 求解 $\begin{cases} \frac{\partial^2u}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial u}{\partial t}+Ae^{-2x}=0 \\ u(t,0)=u(t,l)=0 \\ u(0,x)=T_0 \end{cases}$

解：设 $u(x,t)=V(x)+W(x,t)$，$V(x)$ 为非齐次问题的特解. $W(x,t)$ 为齐次问题通解.

① 对于 $V(x)$ 满足 $\begin{cases} V''=-Ae^{-2x} \\ V(0)=V(l)=0 \end{cases}$

解得 $V(x)=\int(\int-Ae^{-2x}dx+C_1)dx+C_2=-\frac{A}{4}e^{-2x}+C_1x+C_2$

代入边界条件有 $C_1=\frac{A}{4l}(e^{-2l}-1)$，$C_2=\frac{A}{4}$

所以 $V(x)=-\frac{A}{4}e^{-2x}+\frac{A}{4l}(e^{-2l}-1)x+\frac{A}{4}$

② 对于 $W(x,t)$ 满足 $\begin{cases} W_{xx}-a^2W_t=0 \\ W(0,t)=W(l,t)=0 \\ W(x,0)=T_0-V(x) \end{cases}$ 考虑 $W(x,t)=T(t)X(x)$.

(1) 求解固有值问题 $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$ $\Longrightarrow$ 固有值 $\lambda=(\frac{n\pi}{l})^2$
固有函数 $X_n=\sin\frac{n\pi x}{l}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

(2) 则 $T'+\frac{\lambda}{a^2}T=T'+(\frac{n\pi}{al})^2T=0 \Longrightarrow T_n=A_ne^{-(\frac{n\pi}{al})^2t}$

$W(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=T_0-V(x) \Longrightarrow A_n=\frac{2T_0}{n\pi}[1-(-1)^n]-\frac{2Al^2[1-(-1)^ne^{-2l}]}{n\pi(4l^2+n^2\pi^2)}$.

所以 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-(\frac{n\pi}{al})^2t}+V(x)$ ④

Scanned with CamScanner

10 (2) 求解 $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(t,0)=0,\ u_x(t,l) = -\frac{q}{k} \\ u(0,x) = u_0 \end{cases}$ 并求 $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x)$

解：设 $u(x,t) = \cancel{V(x,t)}\ V(x) + w(x,t)$

其中 $\cancel{V(x,t)}\ V(x)$ 满足边界条件 $\cancel{V(t,0)=0}\ V(0)=0$，$\cancel{V_x(t,l)}\ V_x(l) = -\frac{q}{k}$，不妨取 $V(x,t) = -\frac{q}{k}x$

$w(x,t)$ 满足定解条件 $\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} \\ w(t,0)=0,\ w_x(t,l)=0 \\ w(0,x) = u_0 + \frac{q}{k}x \end{cases}$

设 $w(x,t) = X(x)T(t)$，代入有 $\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + a^2\lambda T = 0 \end{cases}$$

代入 $X(0)=0$，$X'(l)=0$ 可以得到 $\lambda_n = \left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}\right)^2$，$X_n = \sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}x$

$$T_n = C_n e^{-\lambda_n a^2 t}$$

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n a^2 t} \sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}x.$$

又 $w(\cancel{x},0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l} = u_0 + \frac{q}{k}x.$

$$\Rightarrow C_n = \frac{\int_0^l (u_0+\frac{q}{k}x)\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}x\,dx}{\int_0^l \sin^2\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}x\,dx} = \frac{4ku_0(2n+1)\pi + 8q(-1)^n}{k(2n+1)^2\pi^2}$$

代入即可算出 $u(x,t)$.

$u(x,t) = -\frac{q}{k}x + \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n a^2 t} \sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{l}$，$t\to+\infty$ 有 $u(x,t) \to -\frac{q}{k}x$

2、(1) 计算 $\frac{d}{dx}(J_0(ax))$

(2) 计算 $\frac{d}{dx}[xJ_1(ax)]$.

下标注意

解: (1) $J_0(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \Rightarrow J_0'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!\,n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!\,n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}=-J_1(x)$

$\frac{d}{dx}(J_0(ax))=aJ_0'(ax)=-aJ_1(ax)$.

(2) $J_1(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}\Rightarrow J_1'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$

$\frac{d}{dx}[xJ_1(ax)]=J_1(ax)+axJ_1'(ax)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!}\cdot\left(\frac{ax}{2}\right)^{2n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)(-1)^n}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{ax}{2}\right)^{2n+1}$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\cdot\frac{(ax)^{2n+1}}{2^{2n}}=ax\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1)}\left(\frac{ax}{2}\right)^{2n}$

$=axJ_0(ax)$

5. 利用3.2节例(1)的结果证明:

(1) $1=J_0(x)+2\sum_{k=1}^{+\infty}J_{2k}(x)$

(2) $\sin x=2\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^kJ_{2k+1}(x)$

(3) $\cos x=J_0(x)+2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^kJ_{2k}(x)$

3.2节例(1)公式 ① $\cos(x\sin\theta)=J_0(x)+2\sum_{k=1}^{+\infty}J_{2k}(x)\cos(2k\theta)$

② $\sin(x\sin\theta)=2\sum_{k=0}^{+\infty}J_{2k+1}(x)\sin(2k+1)\theta$

(1) 在①式中令 $\theta=0$ 即得证

(2) 在②式中令 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 即得证

(3) 在①式中令 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 即得证

T6(2) 利用递推公式证明:

$J_3(x)+3J_0'(x)+4J_0^{(3)}(x)=0$

$\frac{d}{dx}[x^{v}J_v(x)]=x^{v}J_{v-1}(x)$

$\frac{d}{dx}[x^{-v}J_v(x)]=-x^{-v}J_{v+1}(x)$

递推公式 $\begin{cases} J_{v-1}(x)-J_{v+1}(x)=2J_v'(x) \\ J_{v-1}(x)+J_{v+1}(x)=\frac{2v}{x}J_v(x) \end{cases}$

证明: $J_0'(x)=-J_1(x)$

$J_0''(x)=-J_1'(x)=-\frac{1}{x}J_1(x)+J_2(x)$

$J_0'''(x)=(-\frac{1}{x}J_1(x)+J_2(x))'=J_2'(x)+\frac{J_2(x)}{x}$

此时只需证明: $J_3(x)+3J_0'(x)+\frac{4}{x}J_2(x)+4J_2'(x)=0$

递推公式 $\begin{cases} J_1(x)+J_3(x)=\frac{4}{x}J_2(x)=-J_0'(x)+J_3(x) \quad \cdots\cdots ① \\ J_1(x)-J_3(x)=2J_2'(x)=-J_0'(x)-J_3(x) \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$

$-J_0'(x)=J_1(x)$

①+2×②可以得证.

7、试证明: $\frac{d}{dx}[J_v^2(x)]=\frac{x}{2v}[J_{v-1}^2(x)-J_{v+1}^2(x)]$.

证明: $\frac{d}{dx}[J_v^2(x)]=2J_v(x)J_v'(x)=2\cdot\frac{x}{2v}[J_{v-1}(x)+J_{v+1}(x)]\cdot\frac{1}{2}\cdot[J_{v-1}(x)-J_{v+1}(x)]$

$=\frac{x}{2v}[J_{v-1}^2(x)-J_{v+1}^2(x)]$.

8、证明: $\int_0^x t^n J_0(t)\,dt=x^nJ_1(x)+(n-1)x^{n-1}J_0(x)-(n-1)^2\int_0^x t^{n-2}J_0(t)\,dt$

并计算

(1) $\int_0^x t^3J_0(t)\,dt$

(2) $\int_0^x t^4J_1(t)\,dt$

证明: $\int_0^x t^nJ_0(t)\,dt=\int_0^x t^n[J_1'(t)+\frac{1}{t}J_1(t)]\,dt$

$=\int_0^x t^nJ_1'(t)\,dt+\int_0^x t^{n-1}J_1(t)\,dt$

$=x^nJ_1(x)-n\int_0^x t^{n-1}J_1(t)\,dt+\int_0^x t^{n-1}J_1(t)\,dt$

$$= x^n J_1(x) - (n-1)\int_0^x t^{n-1} J_1(t)\,dt$$

$$= x^n J_1(x) + (n-1)\int_0^x t^{n-1} J_0'(t)\,dt$$

$$= x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1} J_0(x) - (n-1)^2\int_0^x t^{n-2} J_0(t)\,dt$$

(1) 代入 $n=3$ 可得 $\int_0^x t^3 J_0(t)\,dt = x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4\int_0^x t J_0(t)\,dt$ 继续套公式

$$= x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4x J_1(x)$$

(2) $\int_0^x t^4 J_1(t)\,dt = -\int_0^x J_0'(t)\, t^4\,dt = -x^4 J_0(x) + \underbrace{4\int_0^x t^3 J_0(t)\,dt}_{\text{代入(1)中结果}}$

$$= x^2(8-x^2) J_0(x) + 4x(x^2-4) J_1(x)$$

Scanned with CamScanner