12-12 作业

4. (1)σ 已知时，$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$，所以置信区间为

$$\left[\bar{X} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

其中 $\bar{X} = \frac{1}{9}(2.15 + ... + 2.13) \approx 2.1322, n = 9, \sigma = 0.01, \alpha = 0.1$，代入可得 $[2.1267, 2.1377]$。
(2)σ 未知时，$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，所以置信区间为

$$\left[\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right],$$

这里

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left((X_1 - \bar{X})^2 + ... + (X_n - \bar{X})^2\right)} \approx 0.01986,$$

所以置信区间为 $[2.1199, 2.1445]$。

5. (1)X_i 表示学生的身高，$i = 1, 2, ..., 18$，男孩的人数为 n_1，女孩的人数为 n_2，当 σ 未知时，有 $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,
所以置信区间为

$$\left[\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right],$$

查表得 [119.80, 124.54]
(2)Y_i 表示男孩的身高，$i = 1, 2, ..., 8$，则 $\frac{\bar{Y}-\mu_y}{S_y/\sqrt{n_1}} \sim t(n_1 - 1)$,
所以置信区间为

$$\left[\bar{Y} - t_{0.025}(n_1-1)\frac{S_y}{\sqrt{n_1}}, \quad \bar{Y} + t_{0.025}(n_1-1)\frac{S_y}{\sqrt{n_1}}\right],$$

有 [118.69, 127.53]
(3) 同理可得女孩身高得置信区间为 [118.43, 124.01]

11. (1) 设更换策略前的销量为 X_{1i}，更换策略后的销量为 X_{2i}，$i = 1, 2, ..., 11$. 因为 $\frac{\bar{X}_1-\mu_1}{S_1/\sqrt{n_1}} \sim t(n_1 - 1)$, 所以置信区间为

$$\left[\bar{X} - \frac{S_1}{\sqrt{n_1}}t_{0.025}(n_1-1), \quad \bar{X} + \frac{S_1}{\sqrt{n_1}}t_{0.025}(n_1-1)\right],$$

得 [71.21, 110.79]
(2) 同理可得置信区间 [72.41, 114.77]
(3) 令 $d_i = X_{2i} - X_{1i}$，则 $\frac{\bar{d}-\mu}{S_d/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，同理可得置信区间为 $[-10.06,\ 4.88]$.

12. (仅要求 (3) 的方差之比置信区间)
(1) 因为 $\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1)$，所以置信区间为

$$\left[\frac{(n_1-1)S_1^2}{\chi^2_{0.025}(n_1-1)}, \quad \frac{(n_1-1)S_1^2}{\chi^2_{0.975}(n_1-1)}\right],$$

查表可得置信区间为 $[431.37, 2721.25]$.
(2) 同理可得 $[494.01, 3116.42]$。
(3) 因为 $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$，所以置信区间为

$$\left[\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{0.025}(n_1-1,n_2-1)}, \quad \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{0.975}(n_1-1,n_2-1)}\right],$$

可得 $[0.23, 3.25]$.

16. (1)μ 已知时，有 $\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$，
置信区间为

$$\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{0.025}(n)}, \quad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{0.975}(n)}\right],$$

计算得 $[0.14,\ 0.89]$

(2)μ 未知时，有 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，
置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)}, \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}\right],$$

计算得 $[0.15,\ 1.05]$