第3章

第3章 离散时间信号的傅里叶变换

3.1 CTFS， CTFT

3.2 DTFT

3.3 CT信号的抽样

3.4 DTFS，DFS

为了引出DFT

3.5 DFT 重点内容

3.6 用DFT计算线性卷积

3.7 与DFT有关的几个问题

3.8 二维傅里叶变换

3.9 Hilbert 变换

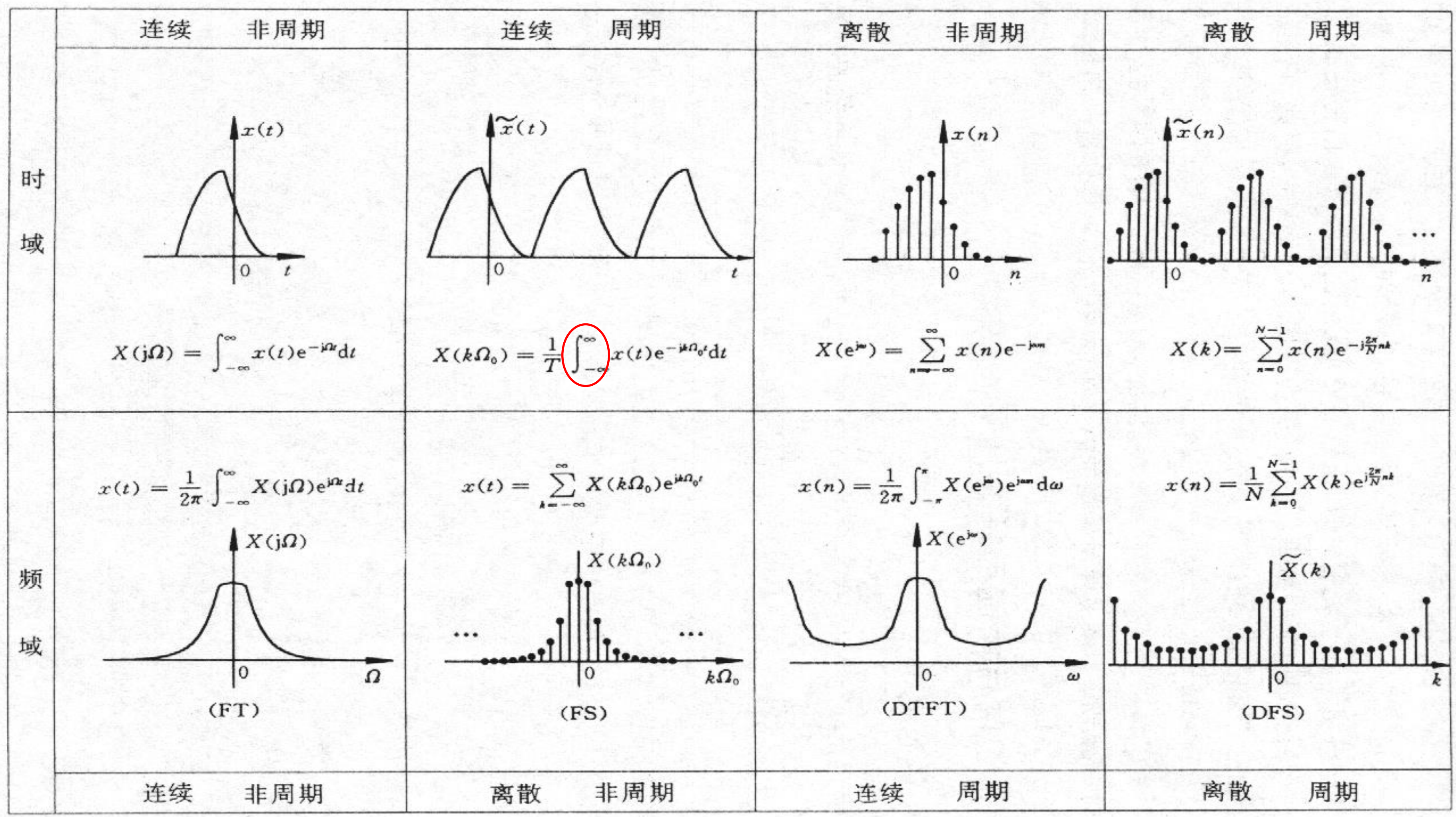
傅立叶变换是信号分析与处理的基本工具

四种傅立叶变换

时域		频域	
1.	连续非周期 ⟺	非周期连续(Ω)	CTFT
2.	连续周期 ⟺	非周期离散(Ω)	CTFS
3.	离散非周期 ⟺	周期连续（ω）	DTFT
4.	离散周期 ⟺	周期离散	DTFS

切实理解四种FT之间的对应关系

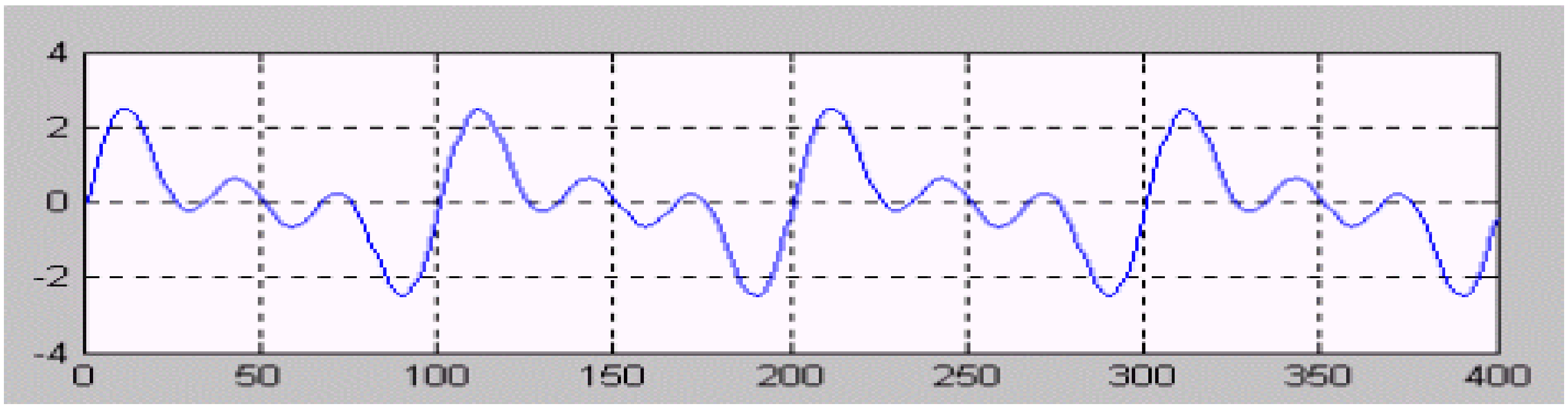
四种傅立叶变换



对偶性；DFS本质上是DTFS，定标因子转移了

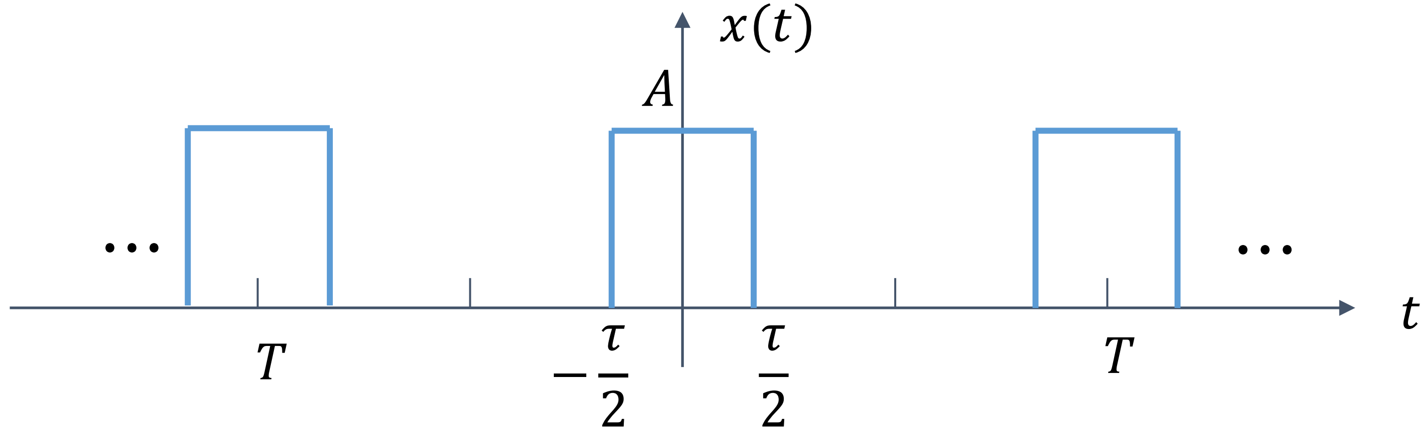
3.1 连续时间信号的傅立叶变换

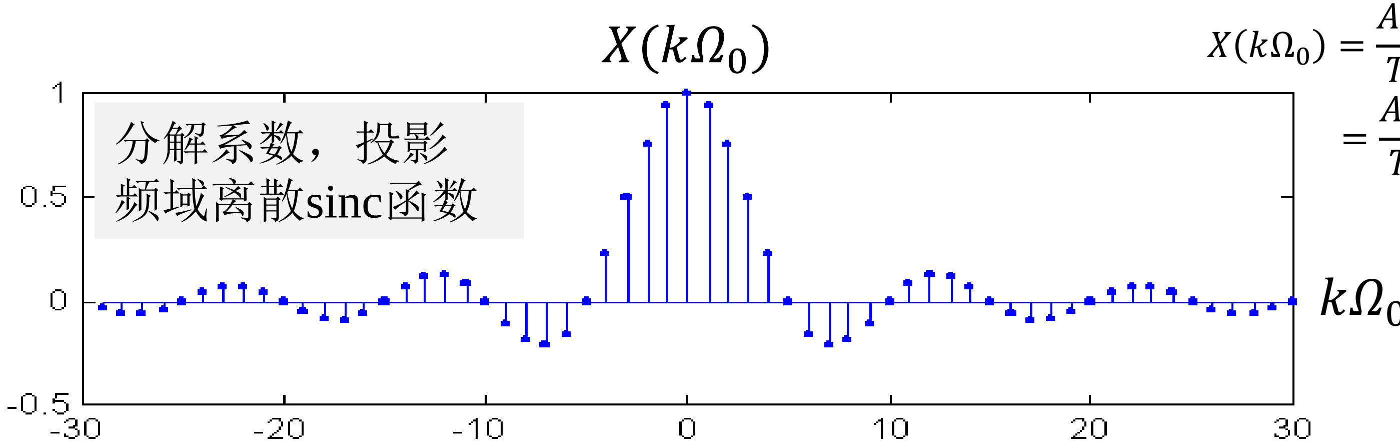
1. 傅立叶级数 $x(t) = x(t + nT)$ $\Omega_0 = 2\pi/T$



$$\text{FS}\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \\ X(k\Omega_0) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t}^{t+T} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} \mathrm{d}t \end{cases}$$

傅立叶系数$X(k\Omega_0)$是第k次谐波的系数，所以$X(k\Omega_0)$在频率坐标轴上是离散的，间隔是Ω_0。





$$X(k\Omega_0)=\frac{A\tau}{T}\frac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\Omega_0\tau/2}$$
$$=\frac{A\tau}{T}\frac{\sin(k\pi f_0\tau)}{k\pi f_0\tau}$$

周期信号傅里叶级数展开（分解）：复指数信号正交分解，三角函数形式的级数展开；CTFS存在的条件：周期内平方可积、Dirichlet条件。第一种sinc函数，且频域、离散

2. 傅立叶变换

$$\text{FT:}\quad \begin{cases} X(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t \\ x(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega \end{cases}$$

$$\text{FS:}\quad X(k\Omega_0)=\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T}x(t)e^{-\mathrm{j}k\Omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Omega_0)e^{\mathrm{j}k\Omega_0 t}$$

若$x(t)$是非周期信号，可以认为：$x(t)$的周期$T\Rightarrow\infty$

$$x(t)\text{的周期}T \Rightarrow \infty$$

$$\Omega_0 = 2\pi/T \Rightarrow 0, \quad k\Omega_0 = \Omega \ \Rightarrow \text{连续}$$

由 $$X(k\Omega_0) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}\mathrm{d}t$$

有 $$\lim_{T\to\infty} TX(k\Omega_0) = \lim_{\Omega_0\to 0}\frac{2\pi X(k\Omega_0)}{\Omega_0}$$

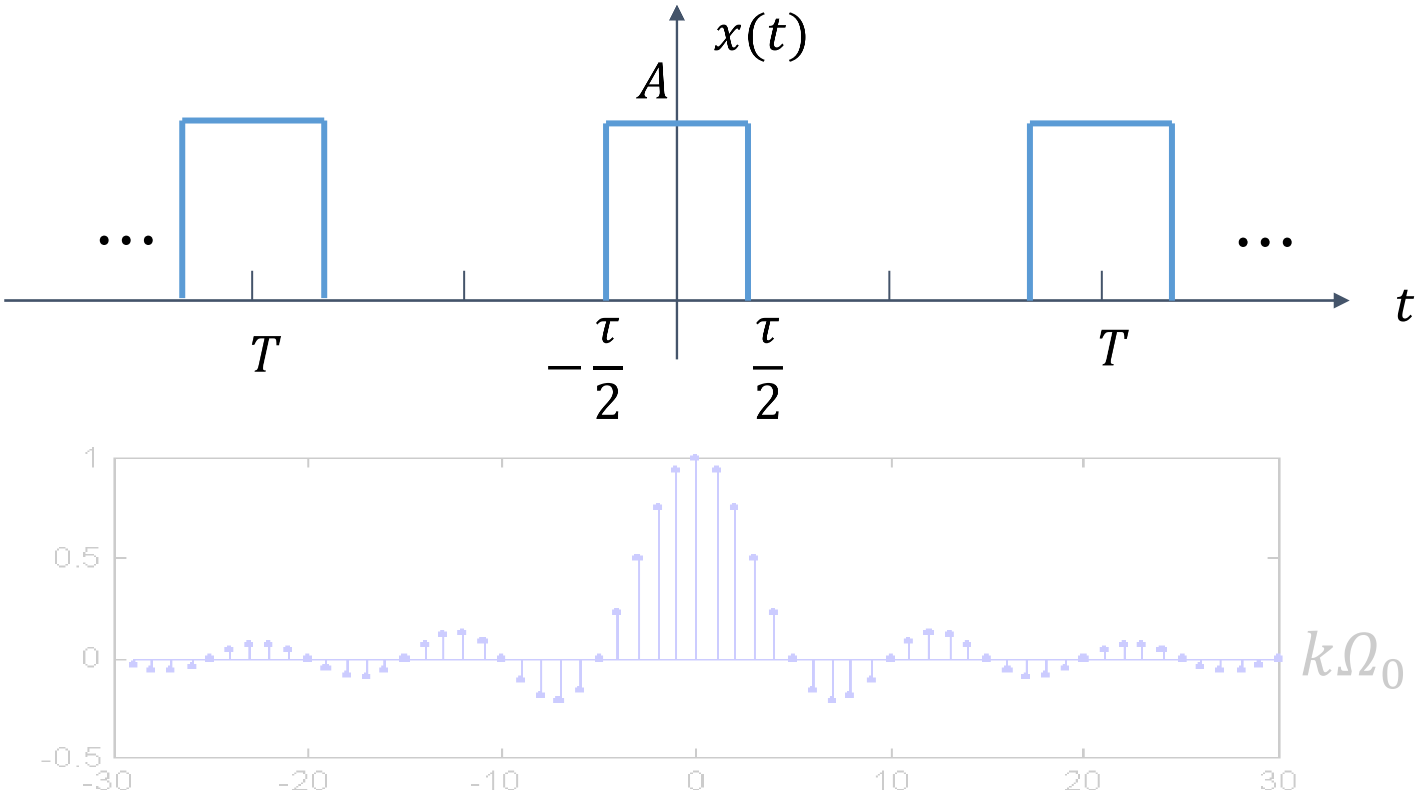
$$= \lim_{T\to\infty}\int_t^{t+T} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}\mathrm{d}t$$

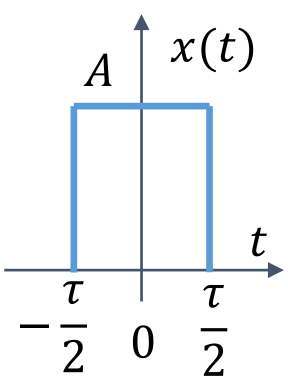
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$= X(j\Omega)$$

频谱密度

傅里叶变换存在条件：整个区间上平方可积、Dirichlet条件。绝对可积可导出平方可积，反之不一定成立，例如$x(t) = \sin(2\pi t)/(\pi t)$。实际工作中主要考虑平方可积即可。





$\frac{\sin(x)}{x}$

频域连续

sinc函数

CTFT

二者的关系

设周期为T的信号， CTFS： $x(t) \Leftrightarrow X(k\Omega_0) = a_k$

主值周期区间信号， CTFT： $x_\tau(t) \Leftrightarrow X(\mathrm{j}\Omega)$

有：
$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{T} X(\mathrm{j}\Omega)\Big|_{\Omega = k\Omega_0} = a_k$$

Parseval定理

周期信号的功率 $P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X(k\Omega_0)|^2$

能量信号的能量 $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\mathrm{j}\Omega)|^2 \mathrm{d}\Omega$

掌握定理的推导

周期信号：　可以实现傅里叶级数的分解，

属于功率信号；

非周期信号：可以实现傅里叶变换，

属于能量信号；

那么，周期信号可否实现傅里叶变换？

在经典数学的意义上是不可实现的，
但在引入了**奇异函数**后，可以实现。

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{CTFT}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-\mathrm{j}\Omega t} \mathrm{d}t = 1_{\text{频域}}$$

$$1_{\text{频域}} \xrightarrow{\text{ICTFT}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{\mathrm{j}\Omega t} \mathrm{d}\Omega = \delta(t)$$，即有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{j}\Omega t} \mathrm{d}\Omega = 2\pi\delta(t)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{j}\Omega t} \mathrm{d}\Omega = 2\pi\delta(t)}$$

又根据对偶性质：

$$1_{\text{时域}} = 1(t) \xrightarrow{\text{CTFT}} 2\pi\delta(\Omega)$$，即有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1(t) e^{-\mathrm{j}\Omega t} \mathrm{d}t = 2\pi\delta(\Omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{j}\Omega t} \mathrm{d}t = 2\pi\delta(\Omega)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{j}\Omega t} \mathrm{d}t = 2\pi\delta(\Omega)}$$

综上，有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm\mathrm{j}xy} \mathrm{d}x = 2\pi\delta(y)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm\mathrm{j}xy} \mathrm{d}x = 2\pi\delta(y)}$$

$$X(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\underline{x(t)}e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

$\boxed{\text{周期信号}}$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\underline{\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Omega_0)e^{\mathrm{j}k\Omega_0 t}}\Big]e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

$\boxed{\text{FS}}$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Omega_0)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathrm{j}(\Omega-k\Omega_0)t}\mathrm{d}t$$

$$\because\int_{-\infty}^{\infty}e^{\pm\mathrm{j}xy}\mathrm{d}x=2\pi\delta(y)$$

$$\therefore\ \underline{X(\mathrm{j}\Omega)}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underline{X(k\Omega_0)}\,\delta(\Omega-k\Omega_0)$$

FT
密度

FS
强度

例1 令$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$，求其傅立叶变换。

因为：$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t \to \infty$所以，严格意义上的傅立叶变换不存在，可将其展开为傅立叶级数：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0) e^{\mathrm{j}\Omega_0 t}$$
$$= [e^{\mathrm{j}\Omega_0 t} + e^{-\mathrm{j}\Omega_0 t}]/2$$

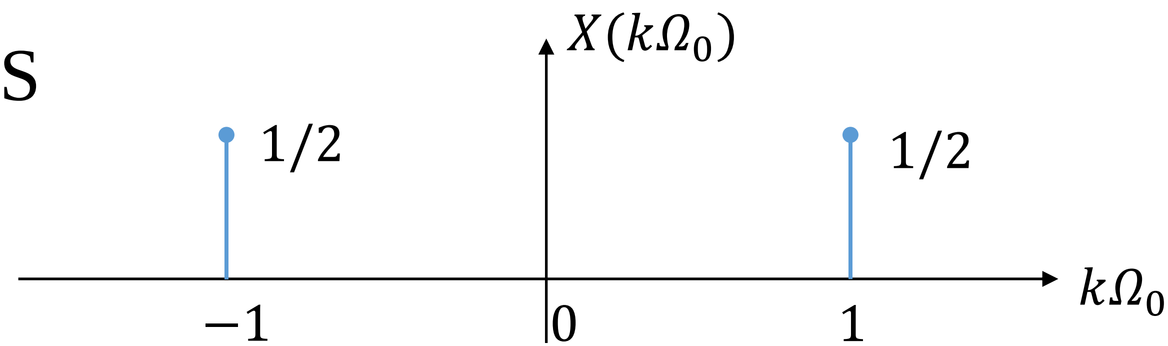
$$X(k\Omega_0) = 1/2, \qquad k = 1, -1$$

现利用δ函数将$x(t)$作傅立叶变换：

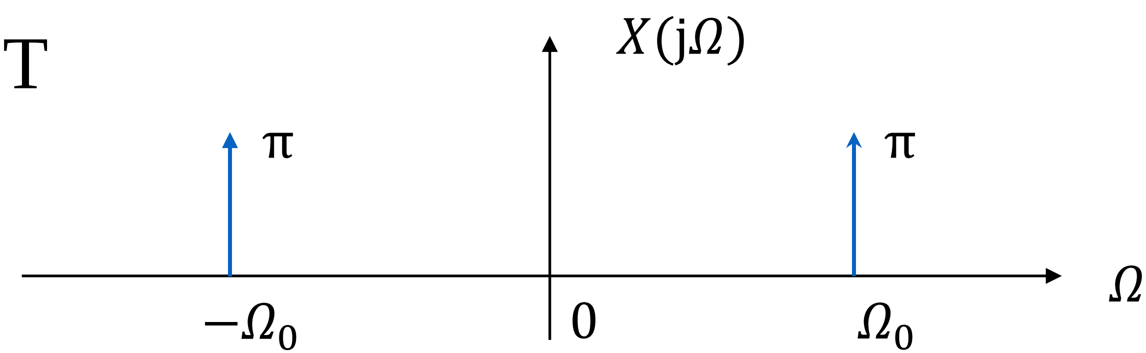
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-\mathrm{j}(\Omega-\Omega_0)t} + e^{-\mathrm{j}(\Omega+\Omega_0)t}\right]\mathrm{d}t$$
$$= \pi\delta(\Omega-\Omega_0) + \pi\delta(\Omega+\Omega_0)$$

线谱

FS



FT



例2

$$x(t)=e^{\mathrm{j}\Omega_0 t}\xrightarrow{\text{CTFT}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{j}\Omega_0 t}e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mathrm{j}(\Omega-\Omega_0)t}\mathrm{d}t=\underline{2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)}$$

因为有$\underline{1(t)}\xrightarrow{\text{CTFT}}\underline{2\pi\delta(\Omega)}$，利用频移性质，有

$\underline{1(t)\cdot e^{\mathrm{j}\Omega_0 t}}\xrightarrow{\text{CTFT}}\underline{2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)}\leftarrow$ 或 相乘性质

推广：$e^{\mathrm{j}k\Omega_0 t}$的CTFT为

$$1(t)\cdot e^{\mathrm{j}k\Omega_0 t}\xrightarrow{\text{CTFT}}\underline{2\pi\delta(\Omega-k\Omega_0)}$$

例3 $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$

$$p(t)\xrightarrow{\text{CTFS}}P(k\Omega_0)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-\mathrm{j}k\Omega_0 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}$$

$$p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}P(k\Omega_0)e^{\mathrm{j}k\Omega_0 t}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{j}k\Omega_0 t}$$

周期信号FS展开

所以有：

$$p(t)\xrightarrow{\text{CTFT}}P(\mathrm{j}\Omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_0)=\Omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_0)$$

线性（齐次性，可加性），频移性质

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_0)\xrightarrow{\text{ICTFT}}\frac{1}{\Omega_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

频域采样用到： $\Omega_0=\frac{2\pi}{T}$，频域间隔为Ω_0，时域周期为T

3.2 离散时间信号的傅里叶变换

Discrete Time Fourier Transform, DTFT

（一）定义 $X(e^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-\mathrm{j}\omega n}$

对一般信号$x(n)$

对系统特征$h(n)$

DTFT和Z变换的关系！

$$X(z) = \sum_{n} x(n) z^{-n}$$

$$X(e^{\mathrm{j}\omega}) = X(z)|_{z=e^{\mathrm{j}\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-\mathrm{j}\omega n}$$

（二）特点

1. $x(n)$是离散的，所以变换需要求和；

2. $X(e^{j\omega})$是ω的**连续函数**；

3. $X(e^{j\omega})$是ω的周期函数，周期为2π；

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi)n}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})$$

4. $X(e^{j\omega})$存在的条件是$x(n) \in l_1$空间；

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Omega_0)e^{\mathrm{j}k\Omega_0 t},\Omega_0=2\pi/T$$

5. DTFT

$$X(e^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-\mathrm{j}\omega n}$$

可以看作是将 $X(e^{\mathrm{j}\omega})$ 在频域展开为傅立叶级数，傅立叶系数即是$x(n)$；

6. ω是z在单位圆上取值时的z变换：

$$X(e^{\mathrm{j}\omega})=X(z)|_{z=e^{\mathrm{j}\omega}}$$

7. 由$X(e^{\mathrm{j}\omega})$可以得到$x(n)$的幅度谱、相位谱及能量谱，从而实现离散信号频谱分析；

8. 反变换

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega = \int_{-\pi}^{\pi}[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}]e^{j\omega m}d\omega$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(n-m)}d\omega$$

$$= 2\pi x(m)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(n-m)}d\omega = \begin{cases} 2\pi & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

对比: $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm jxy}dx = 2\pi\delta(y)}$

（三）性质

1. 线性

$$F[ax_1(n)+bx_2(n)]=aX_1(e^{\mathrm{j}\omega})+bX_2(e^{\mathrm{j}\omega})$$

2. 移位

$$F[x(n-n_0)]=e^{-\mathrm{j}\omega n_0}X(e^{\mathrm{j}\omega})$$

3. 奇偶、虚实性质

$$X(e^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-\mathrm{j}\omega n}=X_R(e^{\mathrm{j}\omega})+\mathrm{j}X_I(e^{\mathrm{j}\omega})$$

$$=|X(e^{\mathrm{j}\omega})|e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

$$\begin{cases} X_R(e^{j\omega}) & |X(e^{j\omega})| & \omega & even \\ X_I(e^{j\omega}) & \varphi(\omega) & \omega & odd \end{cases}$$

如果$x(n)$是实信号，即$x^*(n) = x(n)$

$$X^*(e^{j\omega}) = [\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}]^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j(-\omega)n} = X(e^{-j\omega})$$

如果$x(n)$是实偶序列，即$x(n) = x(-n)$

$X(e^{j\omega})$是ω的实偶函数！

4. 如果 $$y(n) = x(n) * h(n)$$

则: $$Y(e^{\mathrm{j}\omega}) = X(e^{\mathrm{j}\omega})H(e^{\mathrm{j}\omega})$$

5. 如果 $$y(n) = x(n) \cdot h(n)$$

则: $$Y(e^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{\mathrm{j}\theta})H(e^{\mathrm{j}(\omega-\theta)})\mathrm{d}\theta$$

时域卷积定理，频域卷积定理

6. 时域相关定理

如果 $x(n) \rightarrow X(e^{j\omega})$

则有 $x(-n) \rightarrow X(e^{-j\omega})$

$x^*(n) \rightarrow X^*(e^{-j\omega})$

$x^*(-n) \rightarrow X^*(e^{j\omega})$

根据相关与卷积的计算关系，以及考虑一般性信号，则有：

$$r_{xy}(m) = x^*(-n) * y(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} X^*(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$$

互相关： $r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)y(n+m)$

DTFT

$$E_{xy}(e^{j\omega})=X^*(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$$

自相关： $\underline{r_x(m)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)x(n+m)$

$$\underline{\mathrm{DTFT}\{r_x(m)\}}=X^*(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$=\underline{\left|X(e^{j\omega})\right|^2}\xrightarrow{\text{记为}}\underline{E_x(e^{j\omega})}$$

自相关函数与 DTFT 模平方关联起来了：自相关函数的 DTFT=序列DTFT的模平方，且始终是ω的实函数！

7. Parseval's 定理

时域总能量： $\underline{E_x} = \underline{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2} = \langle x, x\rangle = \|x\|_2^2$

频域总能量：

$$\underline{E_x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\right]d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)\, e^{j\omega n}\right]d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})d\omega$$

$$= \underline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega} = \underline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{E_x(e^{j\omega})}^{\text{信号的能量谱}} d\omega}$$

8. Wiener—Khinchin 定理

功率信号自相关函数定义为

$$r_x(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)x(n+m)$$

自相关函数的DTFT

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_x(m) e^{-\mathrm{j}\omega m} = \lim_{N\to\infty} \frac{\left|X_{2N}(e^{\mathrm{j}\omega})\right|^2}{2N+1} = \underbrace{P_x(e^{\mathrm{j}\omega})}_{\text{信号的功率谱}}$$

信号功率 $P_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_x(e^{\mathrm{j}\omega})\,\mathrm{d}\omega$

相关函数和**功率谱**：随机信号分析与处理的主要工具，它们都需要靠“估计”得到，这就形成了丰富的“估值理论”。

例1 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{CTFT}} 1$$

$$1(t) \xrightarrow{\text{CTFT}} 2\pi\delta(\Omega)$$

$$e^{j\Omega_0 t} \xrightarrow{\text{CTFT}} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$$

$$e^{jk\Omega_0 t} \xrightarrow{\text{CTFT}} 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

$$x(n) = \delta(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) = 1$$

$$x(n) = \delta(n-m) \xrightarrow{\text{DTFT}} e^{-j\omega m}$$

$x(n) = e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{\text{DTFT}} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$ 证明：假设与验证

$x(n) = 1 \xrightarrow{\text{DTFT}} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi k)$，上例中$\omega_0 = 0$

有：$x(n) = \cos(\omega_0 n) = \left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right]/2$

$\Downarrow$ DTFT

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k) + \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)]$$

还有：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi k)$$

例2 $x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)$ 证明:

$$\underline{x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)}\xrightarrow{\text{DTFT}}\underline{\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{N}k\right)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)\right)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)\,e^{-j\omega n}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega Nk}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(N\omega+2\pi k)$$

$$=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega n}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+2\pi k)}$$

$$\boxed{\delta(at)=\frac{1}{a}\delta(t),a>0}$$

频域采样用到: $\boxed{\text{频域间隔为}\omega_0=\frac{2\pi}{N}\text{，时域周期为}N}$

（四）应用

例1 $d(n)=\begin{cases}1 & n=0,1,\cdots,N-1\\ 0 & n\text{为其他值}\end{cases}$

$$D(e^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-\mathrm{j}\omega n}=\frac{1-e^{-\mathrm{j}\omega N}}{1-e^{-\mathrm{j}\omega}}$$

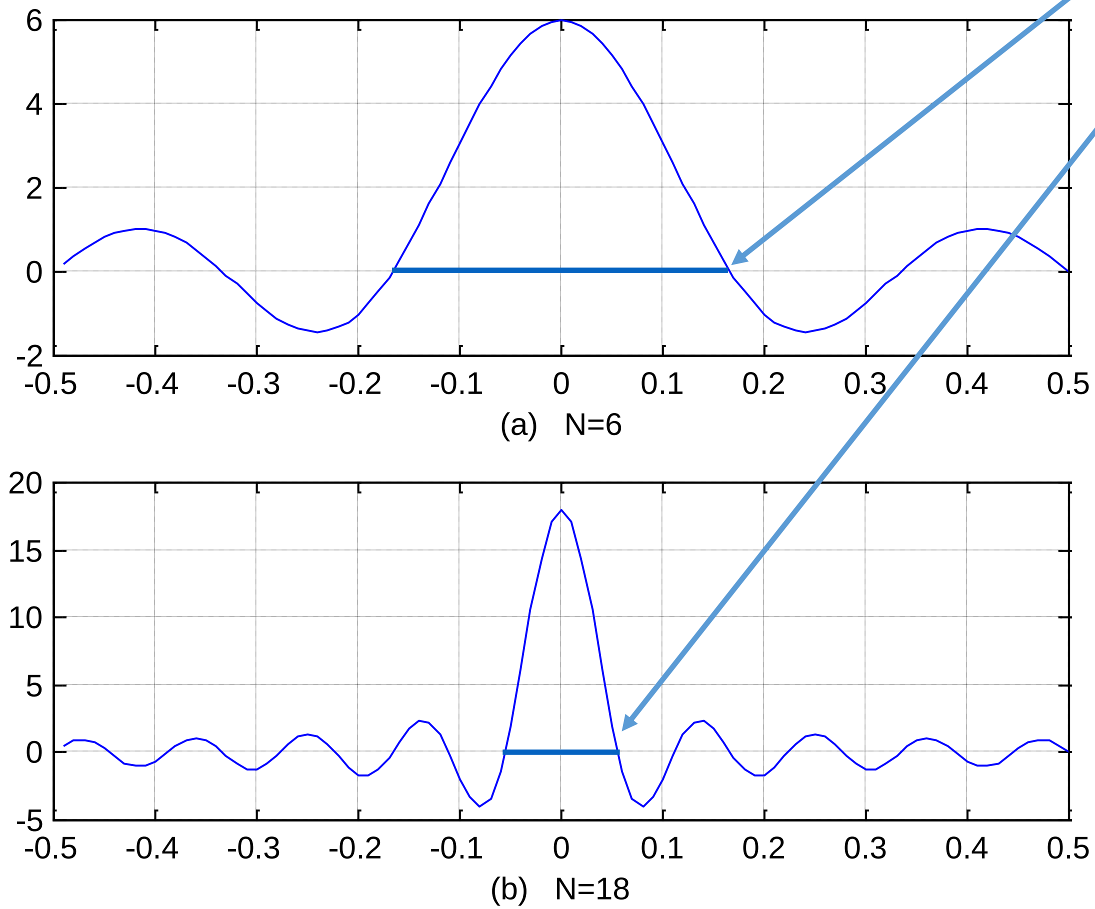
$$=e^{-\mathrm{j}(N-1)\omega/2}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

$$=e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}D_g(\omega)$$

增益$D_g(\omega)$可正可负

$$D_g(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$ sinc函数

$$\frac{2\pi}{N}$$



(a) N=6

(b) N=18

$$\frac{\omega N}{2} = k\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{N}k$$

过零点

N越大

主瓣越窄

例2. 信号截短 $\begin{cases} x_N(n) = x(n)d(n) \\ X_N(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) * D(e^{j\omega}) \end{cases}$

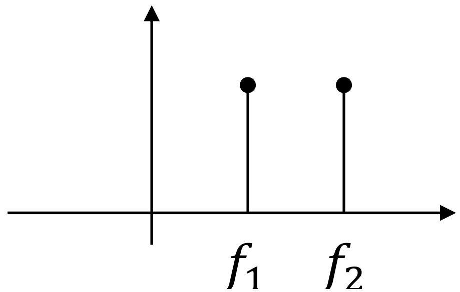
注意：所有有限长的信号都应看作一无限长的信号和一矩形窗相乘的结果。关键是对频域的影响。

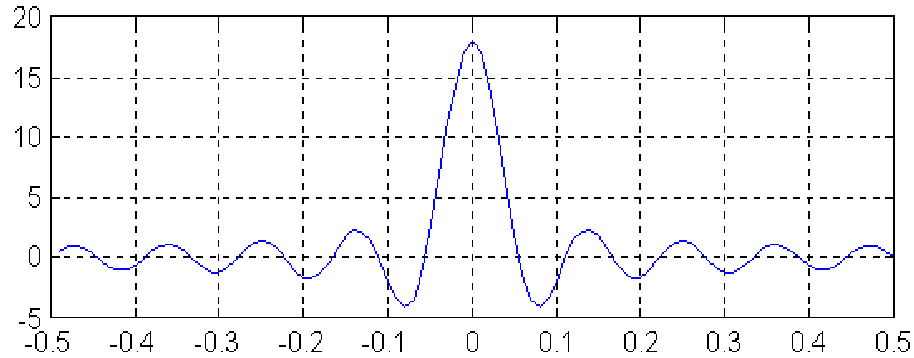
令： $x(n) = \cos(\omega_0 n)$

则： $X(e^{j\omega})$ 是周期的线谱，与 $D(e^{j\omega})$ 卷积后，频谱将发生失真，影响其分辨率(Resolution)

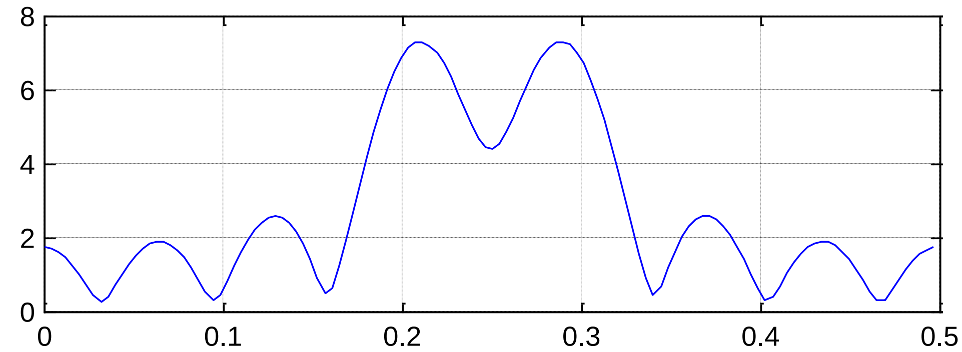
两个线谱和 *sinc* 函数的卷积：

$$f_1 = 0.226$$
$$f_2 = 0.274$$

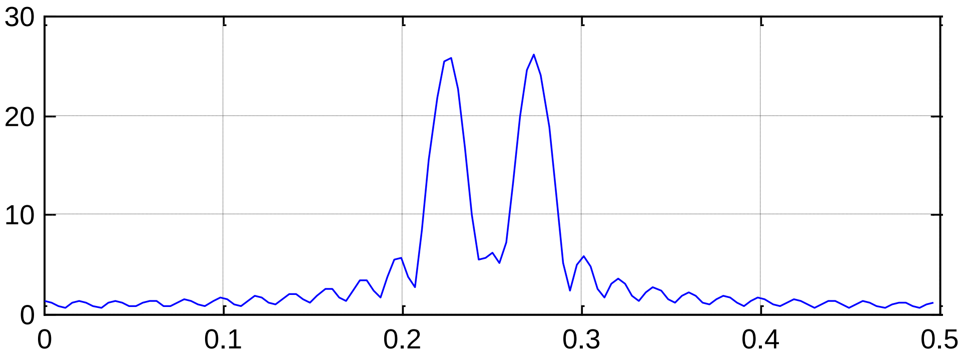


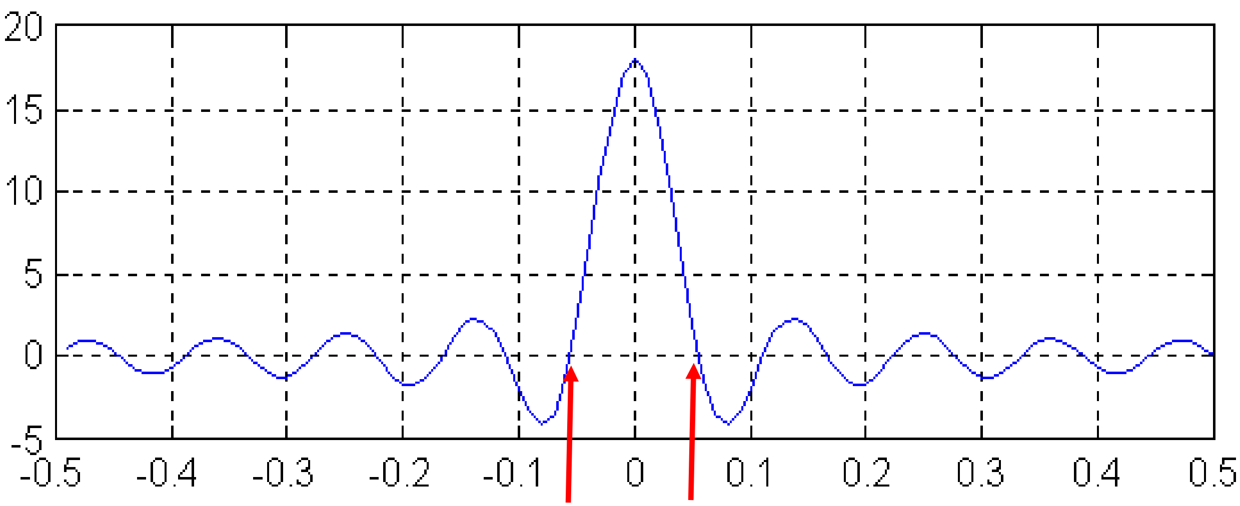


$$N = 31$$



$$N = 51$$





窗函数频谱

峰值左、右第一个过零点之间的距离称为主瓣，主瓣外第一个峰值称为边瓣。希望主瓣的宽度越小越好，边瓣的幅度越小越好。若想要分辨出ω_1, ω_2两个谱峰，**数据长度**应满足：

$$\frac{4\pi}{N} < |\omega_1 - \omega_2|, \qquad \frac{4\pi}{N} \text{ 是矩形窗主瓣宽度}$$

加窗的影响

- 对频率分辨率的影响
  - 窗函数的主瓣对信号的频谱起到了平滑作用，降低了信号中谱峰的分辨能力

- 产生频谱泄露的后果
  - 频谱泄露的具体分析将在滤波器设计中讲解
  - 主瓣越窄越好，旁瓣越小且衰减得越快越好。其它窗：汉明窗，汉宁窗

关于窗函数的更多内容，参见7.2节

3.3 连续时间信号的抽样

$$x(t) \Rightarrow x(n) = x(t)|_{t=nT_s}$$

A/D

连续到离散

模拟到数字

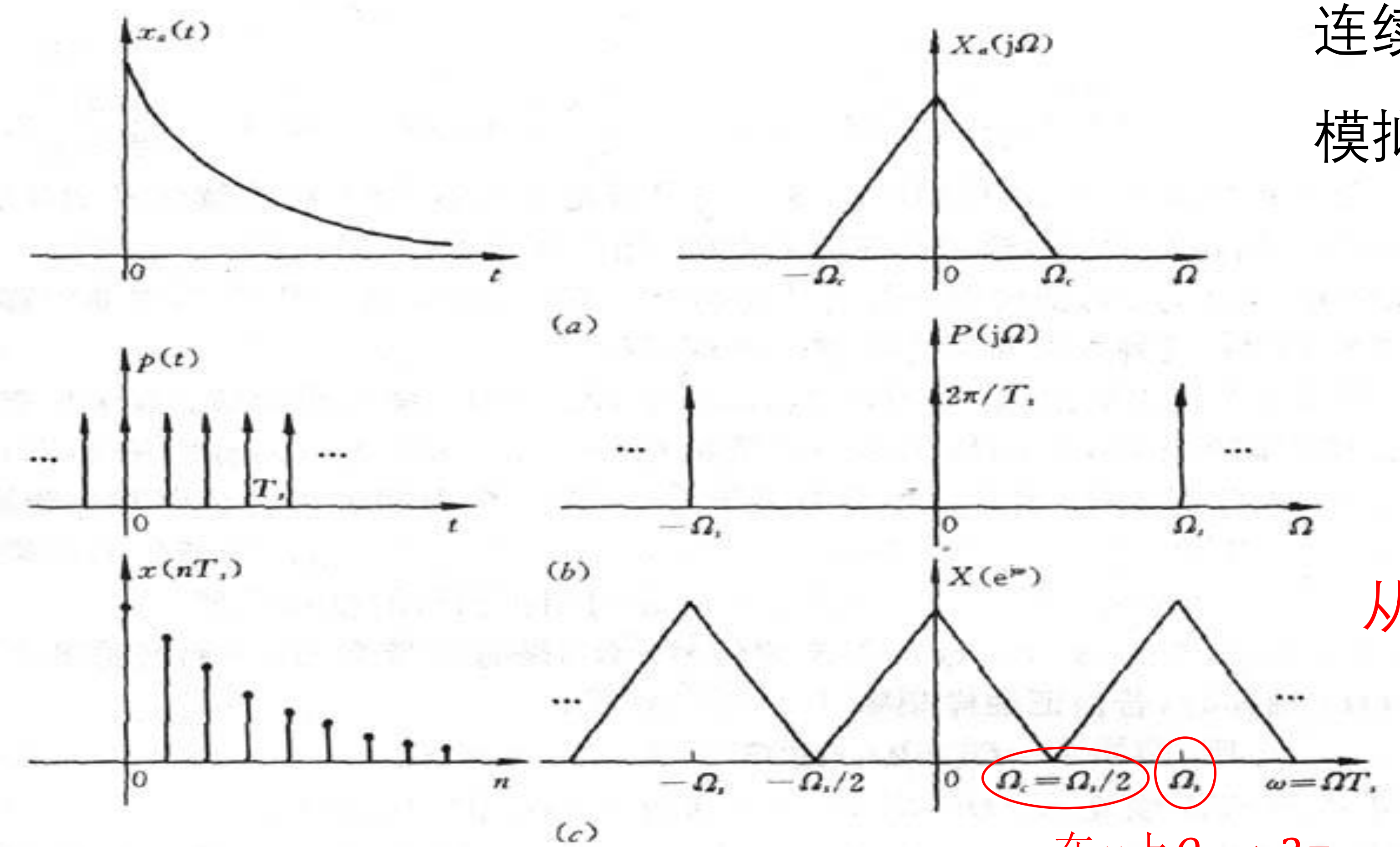
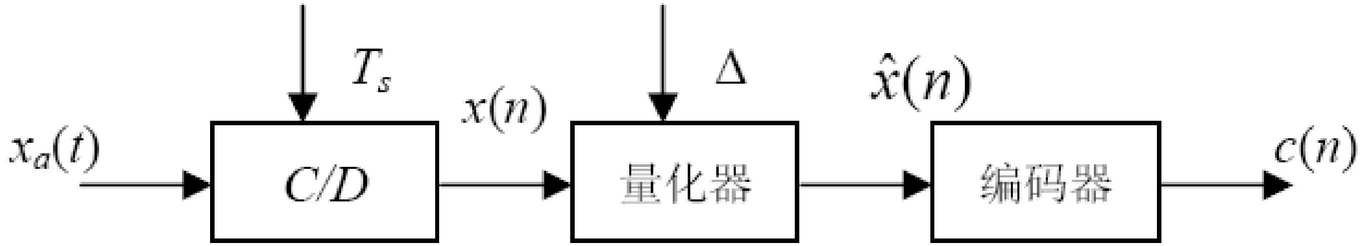


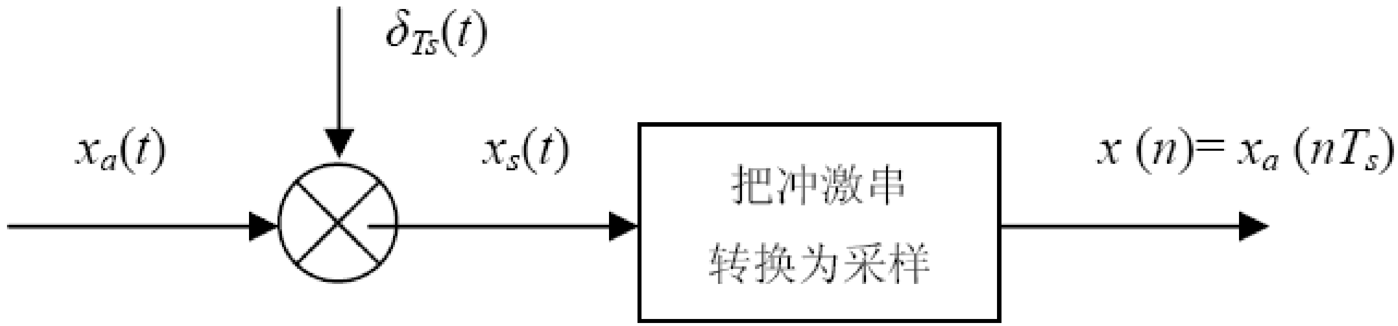
图 3.3.1　抽样定理的图形导出

(a) $x_a(t)$ 及 $X_a(j\Omega)$； (b) $p(t)$ 及 $P(j\Omega)$； (c) $x(nT_s)$ 及 $X(e^{j\omega})$

从Ω到ω

在ω上$\Omega_s \rightarrow 2\pi$





- A/D转换器由采样器、量化器、编码器三个环节组成
  - 采样器，即连续-离散（C/D）转换器，或说理想A/D转换器
  - 分别输出离散时间信号、数字信号、编码信号

$$x_a(t) \to x_s(t) \to x_a(nT_s) \to x(n)$$

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \qquad x_s(t) = x_a(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$x(n) = x_a(nT_s)$$

现研究信号抽样的数学模型: $\Omega \Rightarrow \omega$

$$p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_\mathrm{s})$$

$\Big\downarrow$ FT

$$P(\mathrm{j}\Omega)=\frac{2\pi}{T_\mathrm{s}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_\mathrm{s})$$

时域间隔是T_s，对应频域周期是Ω_s

$$x(n)=x_a(t)p(t)$$

$\Big\downarrow$ DTFT的性质

$$X(e^{\mathrm{j}\omega})=\frac{1}{2\pi}P(\mathrm{j}\Omega)*X(\mathrm{j}\Omega)\Big|_{\omega=\Omega T_\mathrm{s}}$$

对比3.1节例题3，频域采样间隔为Ω_0，对应时间长度为T

$$X_s(j\Omega) = FT\{x_s(t)\} = \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * FT\{\delta_{T_s}(t)\} = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\Omega - k\Omega_s))$$

$$X_s(j\Omega) = FT\{x_s(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) FT\{\delta(t - nT_s)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) e^{-j\Omega n T_s}$$

$$X(e^{j\omega}) = FT\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) e^{-j\omega n}$$

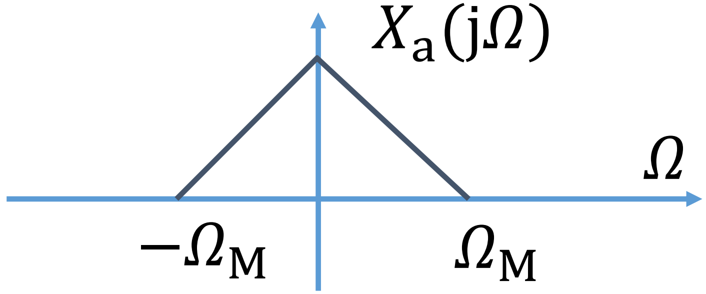
$$X(e^{j\omega}) = X_s(j\Omega)\Big|_{\Omega=\omega/T_s}$$

即 $X(e^{j\omega})$ 是 $X_s(j\Omega)\Big|$ 的频率标度形式，其标度定义为 $\omega = \Omega T_s$

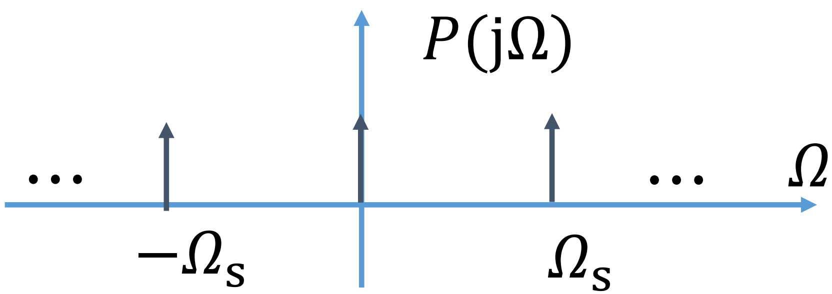
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\Omega - k\Omega_s))\Bigg|_{\Omega=\omega/T_s} = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\frac{\omega}{T_s} - \frac{2\pi}{T_s}k))$$

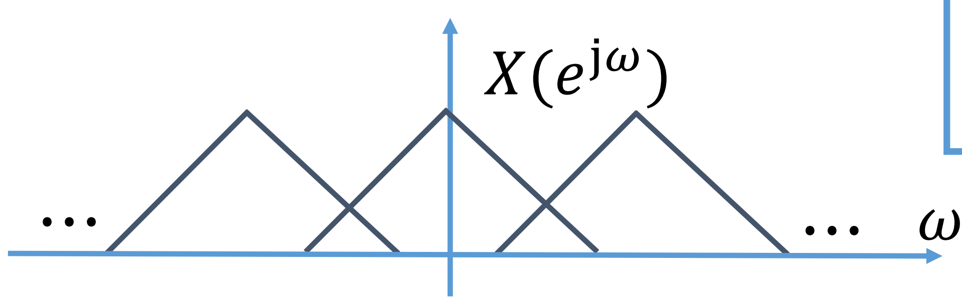
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s)\Big|_{\Omega=\omega/T_s}$$

周期延拓，无穷迭加



设$x_a(t)$是带限信号





迭加后可能产生的影响：混叠

若保证 $X(e^{j\omega})$ $\xleftrightarrow[(-\pi\sim\pi)]{}$ $X_a(j\Omega)$ 相等

则 $x(n)$ $\xleftrightarrow[\text{可保留}]{}$ $x(t)$ 全部信息

要求： $\Omega_s > 2\Omega_M$ $2\Omega_M$一般称为奈奎斯特率

Ω_M往往称为奈奎斯特频率

或 $f_s > 2f_M$

$f_s/2$ ： 折迭频率

即：**抽样频率** f_s 至少要大于**信号最高频率** f_M的两倍。此即**时域抽样定理**。

Nyquist 抽样定理，或 Shannon 抽样定理

$$X(e^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{1}{T_{\mathrm{s}}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(\mathrm{j}\Omega - \mathrm{j}k\Omega_{\mathrm{s}}) \Bigg|_{\Omega=\omega/T_{\mathrm{s}}}$$

- 说明了用数字方法估计信号频谱是可行的
  - 即后面的DFT方法
- 原始信号的频谱有明确的物理意义
- 等价的不同表示是在不同物理轴意义上的表现

关于正弦信号的抽样

$f_s = 2f_0$

窄带信号
抽样定理

问题的提出：

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t), \quad f_s = 2f_0$$

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n / f_s) = \sin(n\pi)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad \cdots$$

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t), \quad f_s = 2f_0$$

$$x(0) = 1, \quad x(1) = -1, \quad \cdots$$

问题的关键是正弦信号是一类特殊的信号，它是单频率信号，带宽为零，所以要单独考虑。

几点建议：

1. 抽样频率应为正弦频率的整数倍；
2. 抽样点数应包含整周期，数据长度最好是2的整次幂；
3. 每个周期最好是四个点或更多；
4. 数据后不要补零。

按以上要求，对离散正弦信号做 DFT 得到的频谱正好是线谱，完全等同于连续正弦信号的线谱。

3.4 离散时间傅立叶级数DFS到DFT概念引出

$$x(n) = x(n + N)$$

如何对$x(n)$作**频谱分析？**

$x(n)$是离散的，故频谱是周期的；$x(n)$是周期的，故频谱是离散的；即$x(n)$的频谱应是离散的、且是周期的。

$x(n)$是功率信号，不能直接作DTFT；

可以采用的做法：DTFS（或DFS），或者在频域引入冲激函数。引入冲激函数不便于数字计算机系统来操作和实现。所以从DTFS入手较好。

DFS $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk} \quad k = -\infty \sim \infty$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk} \quad n = -\infty \sim \infty$$

DFS 中，变量n和k取无穷长，实际上没必要!

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk} \qquad k=-\infty\sim\infty$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk} \qquad n=-\infty\sim\infty$$

改为:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk} \qquad k=0,1,\cdots N-1$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk} \qquad n=0,1,\cdots,N-1$$

此即 DFT公式！

为什么要由DFS过渡到DFT?

1. 从原理上，$\tilde{x}(nT_s)$和$\tilde{X}(k\Omega_0)$的各自一个周期即可表示完整的序列;

2. 从实际上，当我们在计算机上实现信号的频谱分析时，要求：时域、频域都是离散的；时域、频域都是有限长;

3. FT、FS、DTFT、DFS 都不符合要求，但利用DFS的时域、频域的周期性，各 取一个周期，就形成新的变换对。

DFT并不是“第五种”傅立叶变换!

3.5 离散傅立叶变换（DFT）

- 基本FT变换
  - CTFT、CTFS、DTFT、DFS（DTFS）
- 数字设备实现频谱分析的基本要求
  - 时域和频域的离散化和有限长
- 可能的FT形式：DFS
- 可行的方案：取DFS的主值序列
- 实际的做法
  - 对有限长度为N的信号，构造周期大于等于N的周期信号
  - 对无限长信号截短，并构造周期信号
    - 问题：截多长？近似度？
  - 对应DFS，取能代表信号时域和空域的信息段
    - DFS时域和频域的主值序列：DFT

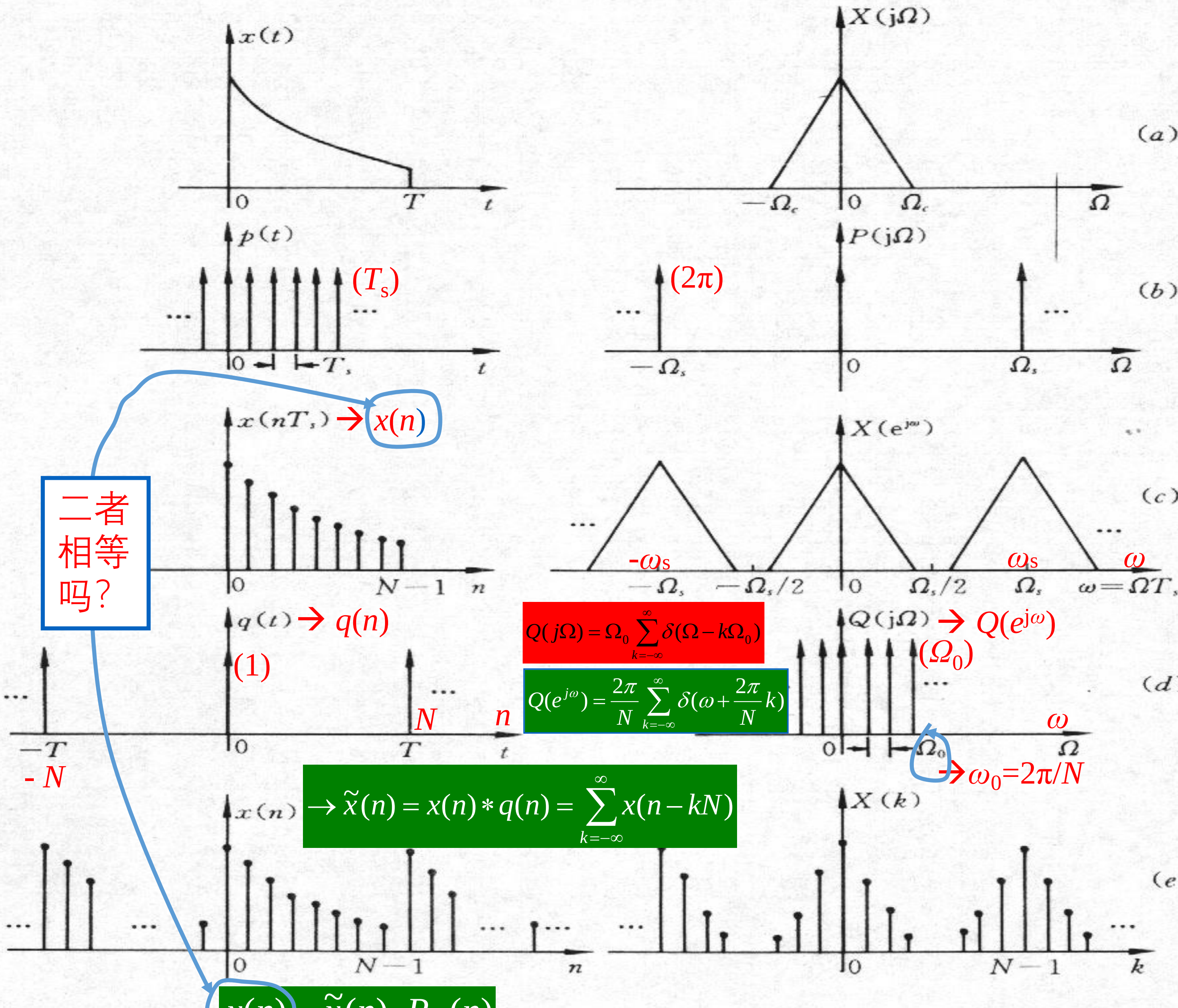
$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N{}^{nk}, \qquad W_N=e^{-\mathrm{j}2\pi/N}$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N{}^{-nk} \qquad n,k=0,1,\cdots,N-1$$

这一对式子，左、右两边都是离散的，有限长，因此可方便地用来实现频谱分析。

但使用时，一定要想到，它们均来自DFS, 即$x(n)$和$X(k)$都是周期的!

DFT 的图形解释



$$Q(j\Omega)=\Omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_0)$$

$$Q(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+\frac{2\pi}{N}k)$$

$$\rightarrow\tilde{x}(n)=x(n)*q(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n-kN)$$

$$x(n)=\tilde{x}(n)\cdot R_N(n)$$

DFT 的图形解释

- **时域抽样及基本结论**
  - $x_a(t)$信号截短成$x_T(t)$， 长度为T
  - 单位冲激串时域周期抽样序列$p(t)$
  - 理想抽样信号$x_s(t)$
  - 抽样样本序列$x(n)$
  - 信号和抽样序列的频谱
  - 时域乘积→频域卷积
  - 信号序列与模拟信号的频谱关系

$$x_a(t) \rightarrow x_T(t) \rightarrow \underset{\uparrow}{\otimes} \rightarrow x_s(t) \rightarrow x(n) = x_T(t)\Big|_{t=nT_s}$$

$$p(t) = \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_T(j(\Omega - k\Omega_s))\Bigg|_{\Omega=\omega/T_s} = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_T(j(\frac{\omega}{T_s} - \frac{2\pi}{T_s}k))$$

- **频域抽样及基本结论**
  - 单位冲激串频域周期抽样序列
  - 频域乘积，时域卷积
  - 频域抽样定理

$Q(\mathrm{j}\Omega)=\Omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_0)$，$\quad \Omega_0=\frac{\Omega_s}{N}=\frac{2\pi}{NT_s}=\frac{2\pi}{T}$

$Q(e^{\mathrm{j}\omega})=Q(\mathrm{j}\Omega)|_{\Omega=\omega/T_s}=\Omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\frac{\omega}{T_s}-k\frac{\omega_0}{T_s})$

$=\Omega_0 T_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$

$$\Omega_0=\frac{2\pi}{NT_s}\qquad \Omega_0 T_s=\frac{2\pi}{N}\qquad \omega_0=\Omega_0 T_s=\frac{2\pi}{N}$$

$Q(e^{\mathrm{j}\omega})\xrightarrow{\text{IDTFT}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)=q(n)$

$X(e^{\mathrm{j}\omega})\cdot Q(e^{\mathrm{j}\omega})\longrightarrow x(n)*q(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n-kN)=\tilde{x}(n)$

$x(n)=\tilde{x}(n)\cdot R_N(n)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)$$
$$\downarrow \text{DTFT}$$
$$\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+\frac{2\pi}{N}k)$$

$$x(n) \underset{?}{=} \tilde{x}(n) \cdot R_N(n)$$

- 设时域抽样点数为：$N_1 = T/T_s$
- 设频域抽样点数为：$N_2 = \omega_s/\omega_0$
- 若$N_2 \geq N_1$，则频域抽样之后对应的时间序列（周期延拓相加的时间序列）……（混叠？）
- $N_2 = \frac{\omega_s}{\omega_0} \geq N_1 = T/T_s$，则有

$$\boxed{\omega_0 \leq \omega_s \frac{T_s}{T} \Rightarrow \Omega_0 \leq \Omega_s \frac{T_s}{T} = \frac{2\pi}{T}}$$

频域抽样定理

参见教材例题3.7.4

ZT、 DTFT、DFT 的取值范围

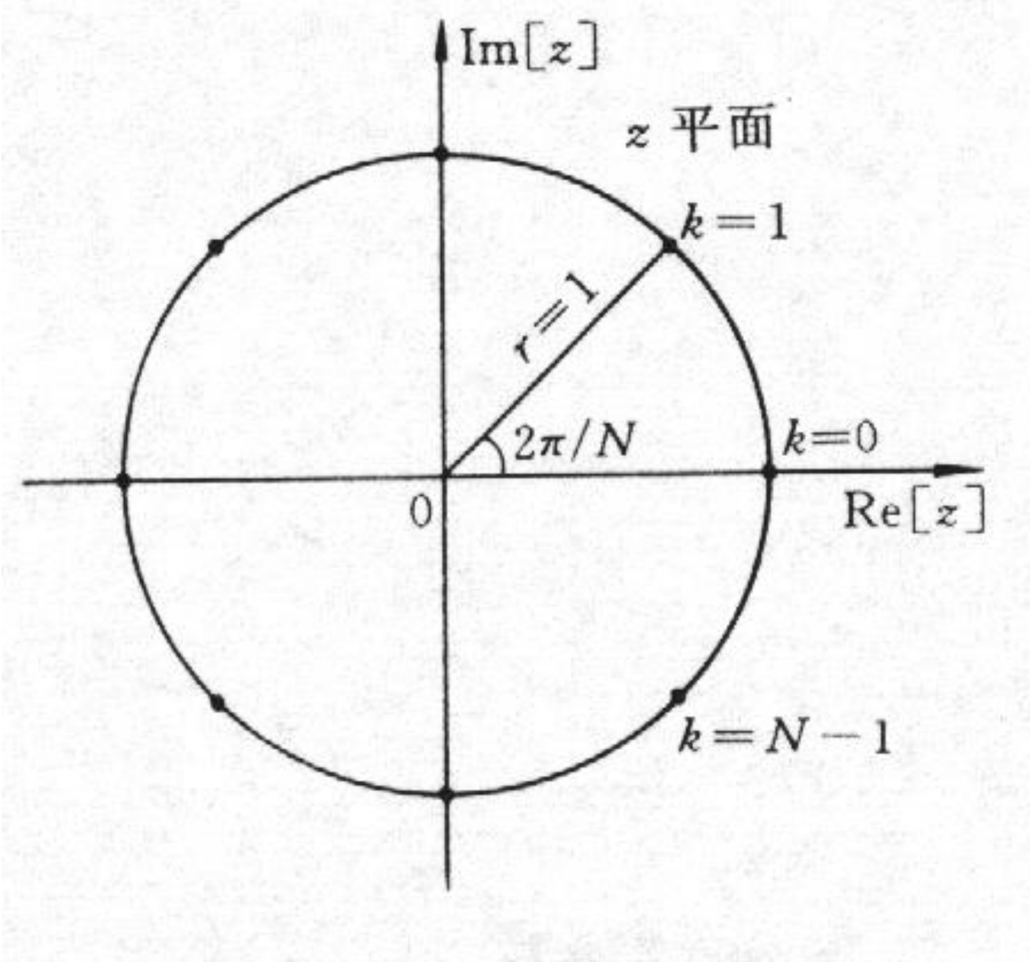


图 3.5.2 三个变换自变量的取值

关系

$$x(n) \rightarrow X(k)$$
$$n, k = 0, 1, \cdots, N-1$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)(re^{j\omega})^{-n}$$

$z = e^{j\omega}, \quad or$

$r = 1$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\omega n}$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \Bigg|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

$$X(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1-e^{-j2\pi k/N} z^{-1}}$$

$X(k)$是在[0~2π]上对$x(n)$的频谱密度函数等间隔取样的结果；
一个是**连续频谱**
一个是**离散频谱**

信号频谱分析

$$x_a(t) \Leftrightarrow X_a(\mathrm{j}\Omega)$$

$$x(n) \Leftrightarrow X(e^{\mathrm{j}\omega})$$

插值法

由数字设备得到 $X(k)$

从系统而言，要关心系统的**频率特性**和**系统设计**。

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

DFT的性质

1. 线性

$$\mathrm{DFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k)$$

2. 正交性

$$\boldsymbol{W}_N = [W^{nk}] = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \cdots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W^0 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \cdots & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

正交阵

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{W}_N \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{W}_N^{-1} = \frac{1}{N}\boldsymbol{W}_N^{*}, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{W}_N^{-1}\boldsymbol{X}$$

MATLAB程序设计中要善用矩阵乘法、数组乘法。矩阵运算遵循线性代数的法则，而数组运算执行逐元素运算并支持多维数组。

3. 循环移位

$$\begin{cases} \mathrm{DFT}[x(n+m)] = W^{-km}X(k) \\ \mathrm{DFT}[x(n-m)] = W^{km}X(k) \end{cases}$$

$$\boxed{W_N = e^{-\mathrm{j}2\pi/N}}$$

$$X'(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n+m)e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}, \qquad let: \ n+m=r$$

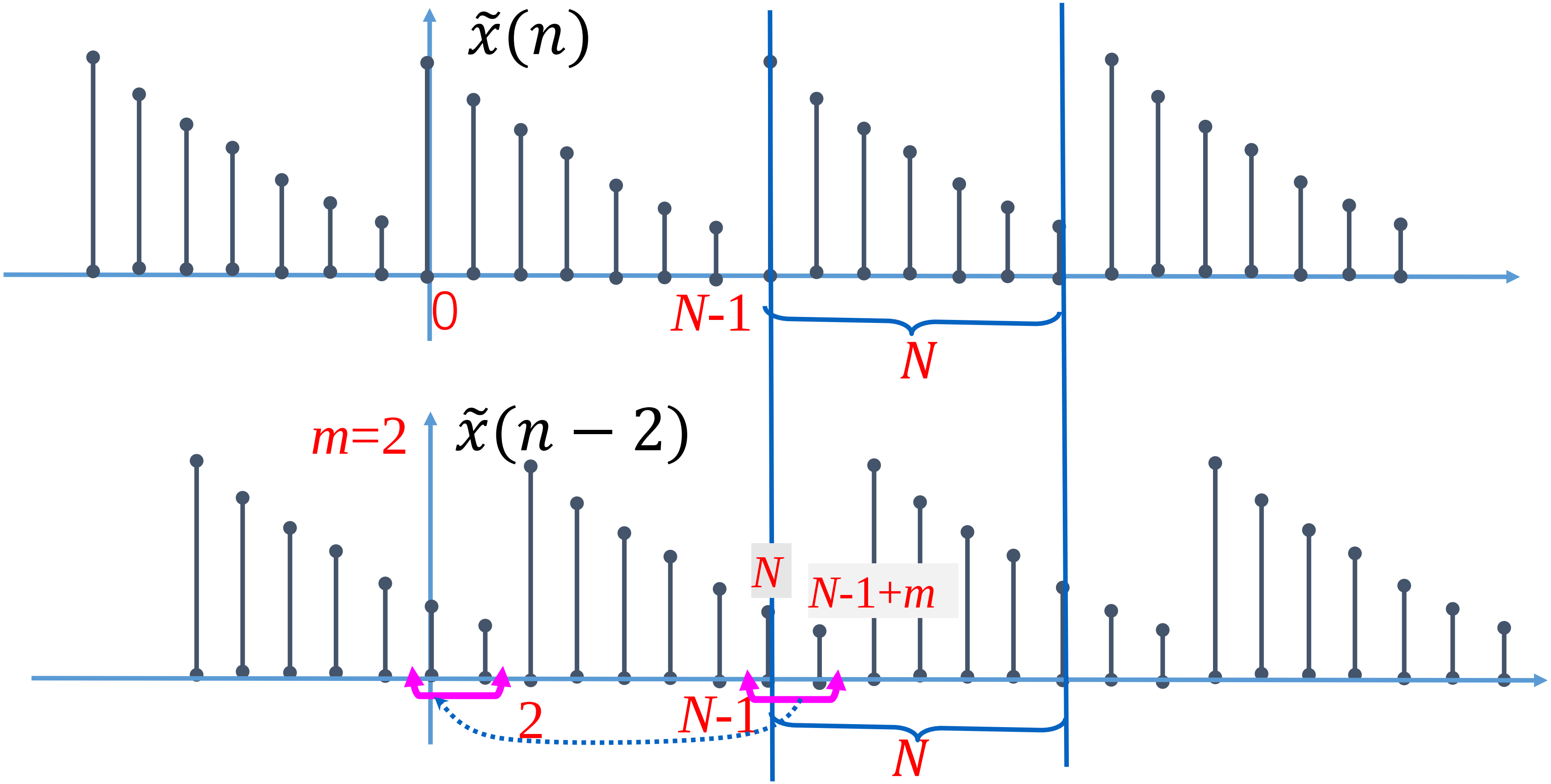
$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

$$= \sum_{r=m}^{N-1+m} x(r)e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}(r-m)k}$$

$$= W_N^{-mk}\left[\sum_{r=m}^{N-1} x(r)e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}rk} + \sum_{r=N}^{N-1+m} x(r)e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}rk}\right]$$

$$= W_N^{-mk}X(k)$$

思考：结合DTFT如何证明？



$$\sum_{r=m}^{N-1} x(r)e^{-j\frac{2\pi}{N}rk} + \sum_{r=N}^{N-1+m} x(r)e^{-j\frac{2\pi}{N}rk} = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)e^{-j\frac{2\pi}{N}rk}$$

m=2 N-1+m=N+1

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

4. 奇、偶、虚、实对称性质

$x(n)$为实序列：　　　　思考：结合DTFT如何证明？

$$X^*(k) = X(-k) = X(N-k)$$

$$X_R(k) = X_R(-k) = X_R(N-k)$$

$$X_I(k) = -X_I(-k) = -X_I(N-k)$$

$$|X(k)| = |X(N-k)|$$

$$\arg[X(k)] = -\arg[X(-k)]$$

$$x(n)\begin{cases}\text{复序列}\\ \text{纯虚序列}\end{cases}$$

5. Parseval's 定理

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$$

6. 循环卷积

$x(n)$，$h(n)$ 都是 N 点序列

（用循环卷积计算）线性卷积

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k), \quad y(n): \ 2N-1$$

当和DFT联系起来时，注意到$x(n)$、$h(n)$都是以N为周期的周期序列。移位时移进也有出 。

循环卷积定义

三个序列都是周期为N的周期序列

$$y(n,\ \mathrm{mod}\ \ N) = x(n) * h(n)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} x(i,\ \mathrm{mod}\ \ N)h(n-i,\ \mathrm{mod}\ \ N)$$

循环卷积定理

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)h(n-i), \quad y(n): N\text{点序列}$$

$$Y(k) = X(k)H(k)$$

$$y(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{[X(k)H(k)]}_{Y(k)} W_N{}^{-nk}$$

掌握证明过程

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}(k-l)n\right] = \begin{cases} N, & k-l=0, N, 2N, \cdots \\ 0, & others \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}(k-l)i\right] = \begin{cases} N, & l=k \\ 0, & l \neq k \end{cases}, \quad l,k = 0,1,\cdots N-1$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)h(n-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\exp\left(j\frac{2\pi}{N}ki\right)\right]\left[\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} H(l)\exp\left(j\frac{2\pi}{N}l(n-i)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} X(k)H(l)\exp\left(j\frac{2\pi}{N}ln\right)\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\exp\left(j\frac{2\pi}{N}(k-l)i\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)H(k)\exp\left(j\frac{2\pi}{N}kn\right)\frac{1}{N}N$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)H(k)\exp\left(j\frac{2\pi}{N}kn\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y(k)\exp\left(j\frac{2\pi}{N}kn\right) \Leftrightarrow y(n)$$

为什么有循环卷积？

DFT对应周期信号，所以，$x(n)$，$h(n)$ 及 $y(n)$ 都是周期的！

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h(0) & h(N-1) & \cdots & h(1) \\ h(1) & h(0) & \cdots & h(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(N-1) & h(N-2) & \cdots & h(0) \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}=\boldsymbol{Hx}$$

循环矩阵

MATLAB程序设计中要**善用**矩阵乘法、数组乘法。矩阵运算遵循线性代数的法则，而数组运算执行逐元素运算并支持多维数组。

例 1．以 $20kHz$ 的采样率对最高频率为 $10kHz$ 的带限信号 $x_a(t)$ 采样，然后计算 $x(n)$ 的 $N=1000$ 个采样点的 DFT ,即

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\text{，}\quad N=1000$$

(a). $k=150$ 对应的模拟频率是多少？ $k=800$ 呢？

(b).频谱采样点之间的间隔是多少？

解：(a). 采样率 Ω_s： $\Omega_s=2\pi/T_s=2\pi f_s=40000\pi$

数字角频率 ω 与模拟角频率 Ω 之间的关系是：$\Omega=\omega/T_s=20000\omega$

根据 DFT 与 $DTFT$ 的关系，DFT 的 N 个频率点上的频率值 ω_k：

$$\omega_k=\frac{2\pi}{N}k,k=0,1,\cdots,N-1\text{，本题 }N=1000$$

所以，DFT 的第 $k=150$ 个频率点对应的模拟角频率 Ω_{150}，频率 f_{150} 分别为：

$$\Omega_{150} = \omega_{150}/T_s = 20000\omega_{150} = 20000\frac{2\pi}{N}150 = 6k\pi(rad/s)$$

$$f_{150} = \Omega_{150}/2\pi = 6k\pi/2\pi = 3kHz$$

$k=800$ 时，$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k = \frac{2\pi}{N}(k-N) = -200\frac{2\pi}{N}$，对应的模拟频率为

$$\Omega_{800} = \omega_{800}/T_s = 20000\omega_{800} = 20000(-200\frac{2\pi}{N}) = -8k\pi(rad/s)$$

$$f_{800} = \Omega_{800}/2\pi = -8k\pi/2\pi = -4kHz$$

(b). 频谱采样点之间的间隔 Δf： $\Delta f = 20000/N = 20Hz$

Δf $\quad \frac{\Delta\Omega}{2\pi} = \frac{\Omega_{k+1}-\Omega_k}{2\pi}$ $\quad \frac{\omega_{k+1}-\omega_k}{2\pi T_s}$ $\quad \omega_{k+1} = \frac{2\pi}{N}(k+1)$

$$\frac{\omega_{k+1}-\omega_k}{2\pi T_s} = \frac{2\pi}{N}\frac{1}{2\pi T_s} = \frac{1}{NT_s} = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{T}$$

$T = NT_s$

对模拟信号
截断、采样