装订线 答题时不要超过此线

一、计算以下问题：（每小题 8 分，共 56 分）

1. 试求 $x[n]$ 的 Z 变换为 $X(z)=\dfrac{1}{(z-1)(1-z^{-6})}$，$|z|>1$，概画出它的零、极点图，并求其反 Z 变换，概画出 $x[n]$ 的序列图形。

2. $X(s)=\dfrac{(s-2)}{s^2+4s+5}$ 为某连续时间**因果**信号 $x(t)$ 的像函数，概画出其零、极点图和收敛域，并求出该信号 $x(t)$。

3. 已知 $y(t)=x_1(t)+x_2(t)\cos(2\omega_M t)$，其中 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的频谱如图 1.3 所示，试概画出 $y(t)$ 的频谱；若对 $y(t)$ 进行连续时间抽样，试求不产生混叠(即临界抽样时)的最大抽样间隔 $T_{\max}$(即临界抽样时的抽样间隔)。

3.

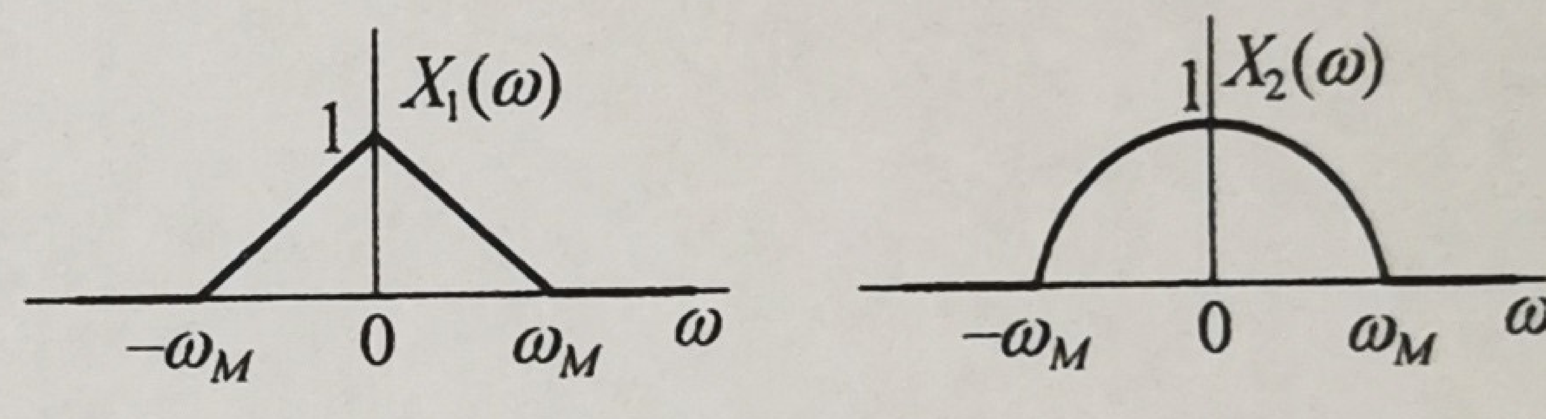


图 1.3

4. 已知某连续时间 LTI 系统的 $h_1(t)=\begin{cases}1/\pi(t-1), & t\neq 1\\ 0, & t=1\end{cases}$，试求两个这样的系统级联后的总单位阶跃响应 $s(t)$。

5. 计算一个有限长时间序列 $x[n]=e^{j\frac{2\pi}{N}n}+\sin(\dfrac{4\pi}{N}n)$，$0\le n<N-1$ 的 N 点 DFT.

6. 因果连续时间信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换的像函数为 $\boldsymbol{X(s)=(2s-3)/(s^2+5s+6)}$，试求信号 $x(t)$ 的初值 $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t)$ 和终值 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$。

7. 已知 $y[n]+\dfrac{1}{6}y[n-1]-\dfrac{1}{3}y[n-2]=x[n]-\dfrac{1}{2}x[n-1]-3x[n-2]$ 表示的因果 LTI 系统，请概画出该系统的幅频响应。

二．对差分方程 $y[n]+\dfrac{3}{4}y[n-1]+\dfrac{1}{8}y[n-2]=x[n]+3x[n-1]$ 所表示的因果系统，试求：（16 分）

1. 对输入 $x[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$ 的零状态响应和零输入响应及全响应，已知系统的附加条件为 $y[0]=1$， $y[-1]=-6$。（10 分）

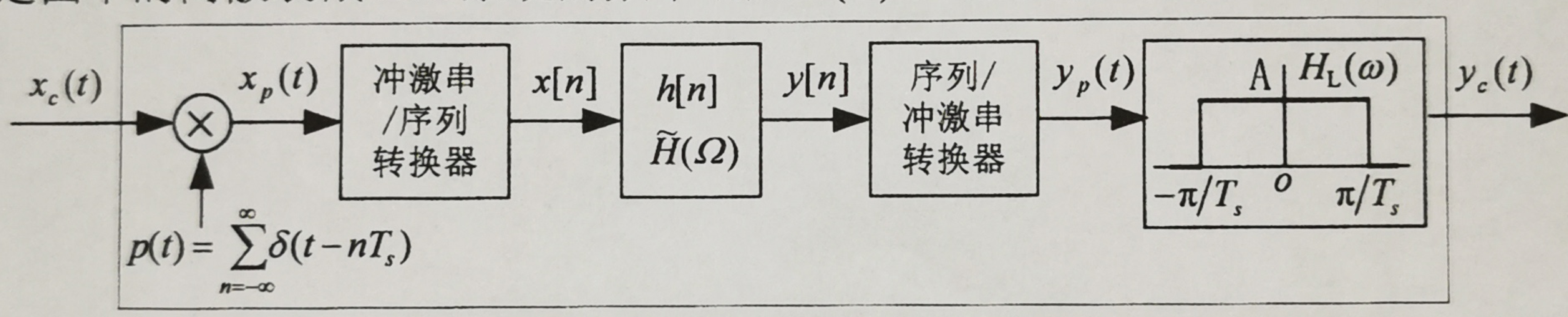
2. 对由以上方程表示的因果 LTI 系统，试用两个一阶系统的并联和级联实现该系统。(6 分)

三. 在一些有声音反射情况下录制的音乐信号，为消除这种反射，可以采用下图的连续时间信号的离散时间处理系统。现假设要处理的信号为 $x_c(t)=x(t)+\alpha x(t-T)$，$0<|\alpha|<1$，其中，$x(t)$ 是带限于 ω_M 的带限信号，且满足 $\omega_M<\pi/T_s$，$\alpha x(t-T)$ 代表经历衰减和延时的反射波，希望通过下图的离散时间处理将其消除。即在下图中，当输入为 $x_c(t)$ 时，系统输出 $y_c(t)$ 正比于 $x(t)$。（14 分）

1. $x_c(t)$ 是否是带限信号，如果是，它的最高频率是多少？ （4 分）

2. 如果上式中的反射延时 $T<\pi/\omega_M$，并且选择抽样间隔 $T_s=T$，为使 $y_c(t)$ 正比于 $x(t)$，试确定离散时间 LTI 系统的单位冲激响应 $h[n]$。并确定理想低通滤波器增益 A，使得 $y_c(t)=x(t)$。 （6 分）

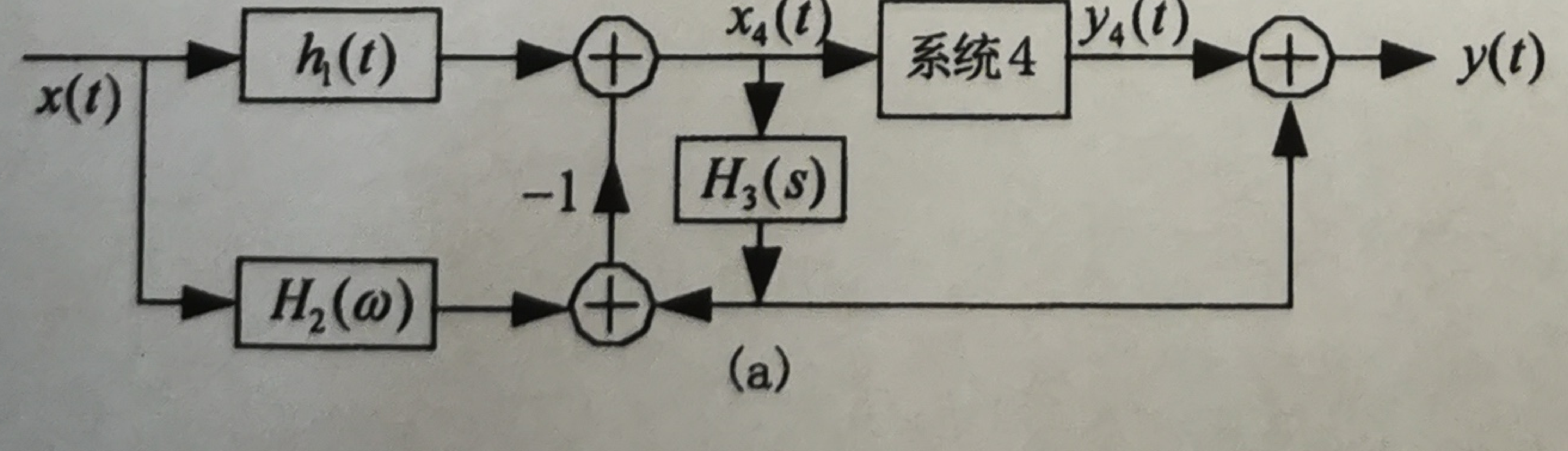
3. 若反射延时满足 $\pi/\omega_M<T<2\pi/\omega_M$，为使得 $y_c(t)=x(t)$，试选择抽样间隔 T_s，并确定图中的离散衰减 LTI 系统的频率响应 $\tilde{H}(\Omega)$ 和理想低通滤波器的 A 值。 （4 分）



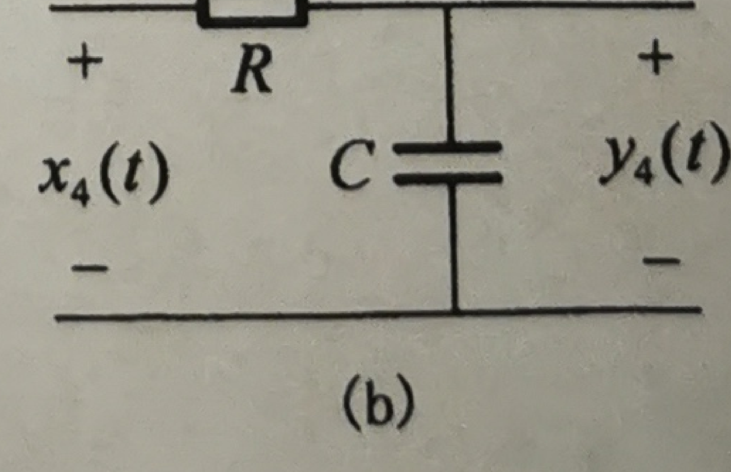
四. 对于下图(a)所示的连续时间 LTI 系统，已知 $h_1(t)=\frac{\sin t}{\pi t}$；$H_2(\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega}, & |\omega|<1 \\ 0, & |\omega|>1 \end{cases}$；$H_3(s)=\frac{1}{s}, \mathrm{Re}\{s\}>0$；系统 4 是图(b)所示的 RC 积分电路，其时间常数为 $\tau=RC=1ms$。试求： （14 分）

1. 当系统输入 $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t-4n)$，其中 $r(t)=\begin{cases} 1, & |t|<0.5 \\ 0, & |t|>0.5 \end{cases}$ 时，整个系统的输出 $y(t)$。（6 分）

2. 该系统的单位冲激响应 $h(t)$，并概画出它的波形。 （8 分）



(a)



(b)

习题课

二、某连续时间LTI系统的单位冲激响应$h(t)=tu(t)-2(t-2)u(t-2)+(t-4)u(t-4)$，该系统因果吗？稳定吗？并求该系统对图 2 所示周期输入信号$x(t)$下的输出信号$y(t)$。(共 12 分)

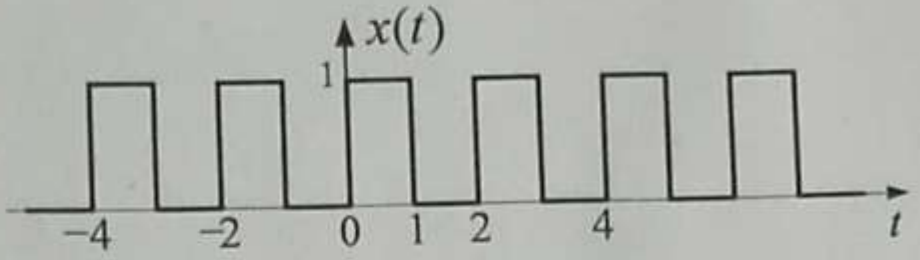
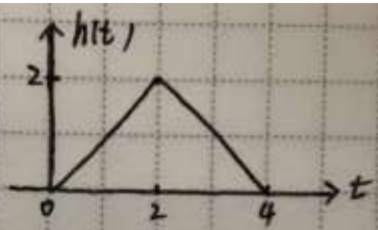
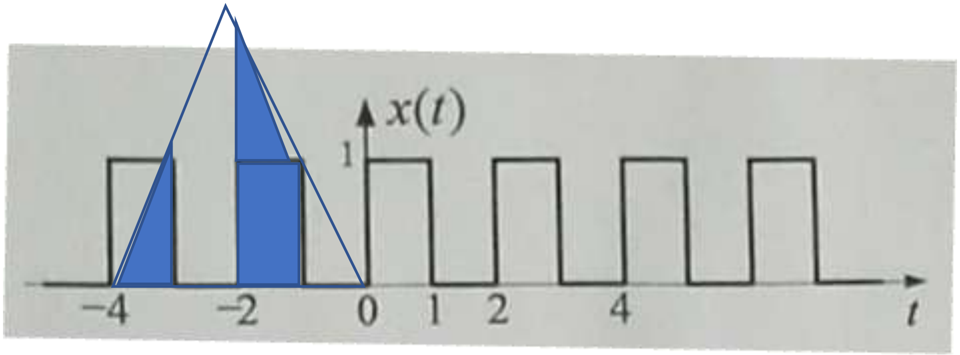


图 2

解：h(t) 的波形



根据卷积的公式 $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$



h(t)因果，稳定。

对于任意的t，卷积积分的值始终为2。因此可得，输出y(t)为常数信号，y(t)=2。

7. 已知一个离散时间 LTI 系统，它的单位冲激响应 $h[n]$ 为著名的 Fibonacci 序列，即当 $n<0$ 时 $h[n]=0$，$h[0]=1$, $h[1]=1$，当 $n\geq 2$ 时 $h[n]=h[n-1]+h[n-2]$。请判断它是否是可逆的系统？若不是，请说明原因；若是，请找出它的逆系统的单位冲激响应。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	…
h[n]	1	1	2	3	5	8	13	21	…
h[n-1]	0	1	1	2	3	5	8	13	…
Δh[n]	1	0	1	1	2	3	5	8	…

观察可得，Δh[n]=δ[n]+h[n-2]

又$\Delta h[n]=h[n]-h[n-1]=h[n]*\{\delta[n]-\delta[n-1]\}$

$$\delta[n]+h[n]*\delta[n-2]=h[n]*\{\delta[n]-\delta[n-1]\}$$

$$\delta[n]=h[n]*\{\delta[n]-\delta[n-1]-\delta[n-2]\}$$

所以，该系统可逆，逆系统的单位冲激响应为$h_{inv}[n]=\delta[n]-\delta[n-1]-\delta[n-2]$

5. 求 $\dfrac{e^{s}}{s(1+e^{-s})}$， $\mathrm{Re}\{s\}>0$ 的拉普拉斯反变换。

$$\frac{e^{s}}{s(1+e^{-s})}=\frac{e^{s}}{s}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(e)^{-ks}=\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}e^{(1-k)s}$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{s}\}=u(t)$$

$$f(t-t_0)\Rightarrow F(s)e^{-st_0}$$

$$L^{-1}\{X(s)\}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}u(t+1-k)$$

拉普拉斯变换

6.已知 $x(t)=\begin{cases}1/t, t\neq 0\\ 0, t=0\end{cases}$， 求 $y(t)=x(t)*x(t)$， 其中 * 表示卷积运算。

$X(\omega)=F\{x(t)\}=-j\pi Sgn(\omega)$ 计算过程P175例5.12

$$Y(\omega)=-\pi^{2}$$

$$y(t)=-\pi^{2}\delta(t)$$

卷积性质

3、微分方程 $y'(t)+2y(t)=x(t)$ 描述一个起始松弛的连续时间系统，试求当输入信号 $x(t)=\cos(2t)$，$-\infty<t<\infty$ 时系统的输出 $y(t)$。

LTI系统对复指数输入的响应

解：根据微分方程得到系统函数 $H(s)=\dfrac{1}{s+2}$

利用欧拉公式 $x(t)=\cos(2t)=0.5(e^{j2t}+e^{-j2t})$

因为 $e^{s_0 t}\xrightarrow{H(s)}H(s_0)e^{s_0 t}$

所以 $y(t)=0.5[H(j2)e^{j2t}+H(-j2)e^{-j2t}]$

$$=0.5[\frac{1}{2+j2}e^{j2t}+\frac{1}{2-j2}e^{-j2t}]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\cos(2t-\frac{\pi}{4})$$

5. 利用傅里叶变换求$\int_0^{\infty}\cos(\omega t)d\omega$的积分值。

傅里叶反变换

解：$\delta(t)\xrightarrow{CFT}1$

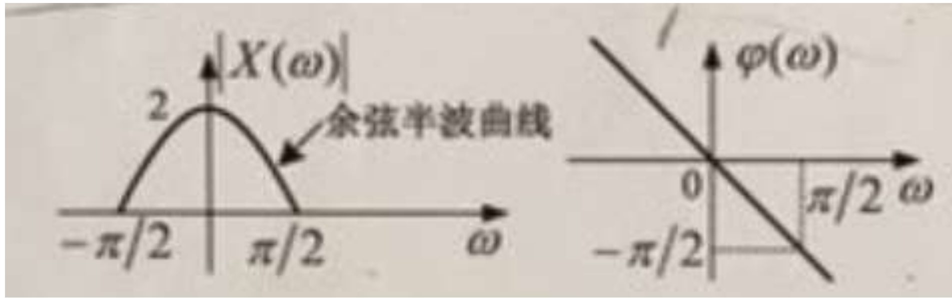
$$\therefore\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\cos\omega t+j\sin\omega t]d\omega$$

（傅里叶反变换公式）

考虑到cos为偶函数，sin为奇函数，所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin\omega td\omega=0,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega td\omega=\delta(t)\Rightarrow\int_0^{\infty}\cos\omega td\omega=\pi\delta(t)$$

6. 试画出信号$x(t)=\dfrac{\sin(\pi t/2)}{\pi t}+\dfrac{\sin(\pi t/2-\pi)}{\pi t-2\pi}$的幅度频谱曲线$|X(\omega)|$和相位频谱曲线$\varphi(\omega)$，并求出对这个信号进行采样的奈奎斯特间隔$T_s$。



解：记 $x_0(t)=\dfrac{\sin(\pi t/2)}{\pi t}\xrightarrow{CFT}X_0(\omega)=u(\omega+\pi/2)-u(\omega-\pi/2)$

则有$x(t)=x_0(t)+x_0(t-2)\xrightarrow{CFT}X(\omega)=X_0(\omega)+X_0(\omega)e^{-j2\omega}=[u(\omega+\pi/2)-u(\omega-\pi/2)](1+e^{-j2\omega})$

$$=[u(\omega+\pi/2)-u(\omega-\pi/2)](e^{j\omega}+e^{-j\omega})e^{-j\omega}$$

$$=2\cos\omega e^{-j\omega}[u(\omega+\pi/2)-u(\omega-\pi/2)]$$

时移性质、采样定理

所以，$|X(\omega)|=2\cos\omega[u(\omega+\pi/2)-u(\omega-\pi/2)],\varphi(\omega)=e^{-j\omega}$

非零频谱范围为$[-\pi/2,\pi/2]$，所以奈奎斯特间隔$T_s=\pi/\omega_M=\pi\big/\tfrac{\pi}{2}=2$

6、某一个实的连续时间因果稳定系统具有最小相移，其频率响应 $H(\omega)$ 满足关系 $|H(\omega)|^2=\dfrac{\omega^2+9}{\omega^4+5\omega^2+4}$，试求系统函数 $H(s)$，并概画出零极点图和收敛域。

解：由于实系统的频谱响应满足共轭对称性，即 $H^*(\omega)=H(-\omega)$ ，则

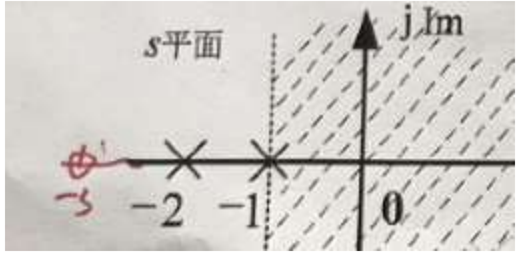
$$|H(\omega)|^2=H(\omega)H^*(\omega)=H(\omega)H(-\omega)$$

由于系统稳定，$H(\omega)=H(s)|_{s=j\omega}$ ，得到 $|H(s)|^2=H(s)H(-s)$

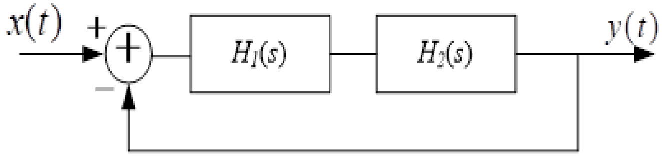
所以 $|H(s)|^2=\dfrac{9-s^2}{4-5s^2+s^4}=\dfrac{(3-s)(3+s)}{(s+2)(s-2)(s+1)(s-1)}=\dfrac{3+s}{(s+2)(s+1)}\bullet\dfrac{3-s}{(-s+2)(-s+1)}$

得到 $H(s)=\dfrac{3+s}{(s+2)(s+1)}$

系统因果，所以收敛域 $\mathrm{Re}\{s\}>-1$



三、某 LTI 系统的系统结构如图 3 所示，其中 $H_2(s)=\dfrac{k}{s-1}$，子系统 $H_1(s)$ 满足条件：



当子系统 $H_1(s)$ 的输入是 $x_1(t)=2e^{-3t}u(t)$ 时，对应 $H_1(s)$ 的子系统输出为 $y_1(t)$；而在输入为 $x_2(t)=\dfrac{dx_1(t)}{dt}$ 时，对应 $H_1(s)$ 的子系统输出为 $-3y_1(t)+e^{-2t}u(t)$；求：（共 12 分）

(1) 子系统 $H_1(s)$ 和对应的单位冲激响应函数 $h_1(t)$（5 分）

(2) 整个系统的 $H(s)$（5 分）

(3) 若要使系统 $H(s)$ 稳定，k 的取值范围（2 分）

解：（1）

$$H_1(s)\frac{2}{s+3}=Y_1(s)$$

$$H_1(s)\frac{2s}{s+3}=-3Y_1(s)+\frac{1}{s+2}$$

$$H_1(s)=\frac{1/2}{s+2}$$

$$h_1(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

（2）

$$\tilde{H}(s)=\frac{H_1(s)H_2(s)}{1+H_1(s)H_2(s)}=\frac{\dfrac{k/2}{(s+2)(s-1)}}{1+\dfrac{k/2}{(s+2)(s-1)}}=\frac{k/2}{s^2+s-2+k/2}$$

（3）系统稳定，所有极点都位于左半平面

$$-2+k/2>0$$

$$k>4$$

系统结构，系统性质

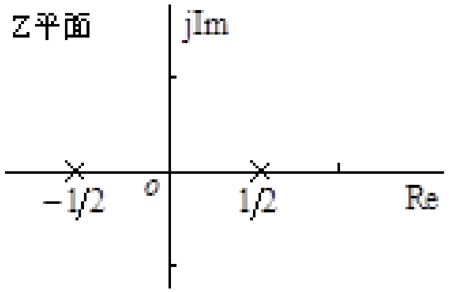
四、已知实的离散时间因果 LTI 系统的零、极点如图 5 所示，且它在输入为 $x[n]=\cos(\pi n)$ 时的输出为 $y[n]=(-1)^n$.{提示：在有限 z 平面上没有零点}（共 15 分）

(1) 写出它的系统函数 $H(z)$ 和收敛域。(6 分)

(2) 写出系统的差分方程表示。(2 分)

(3) 对于差分方程描述的系统，用并联型和级联型结构实现结构，要求延时单元不多于 2 个。(4 分)

(4) 求其单位冲激响应。(3 分)



解：（1）根据零极点图得到 $H(z)=H_0\dfrac{z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.5z^{-1})},|z|>0.5$

输入 $x[n]=\cos(\pi n)=(-1)^n$，则 $y[n]=H(-1)(-1)^n$，所以 $H(-1)=1$

$$H_0\frac{(-1)^{-2}}{(1+0.5(-1)^{-1})(1-0.5(-1)^{-1})}=1\Rightarrow H_0=\frac{3}{4}$$

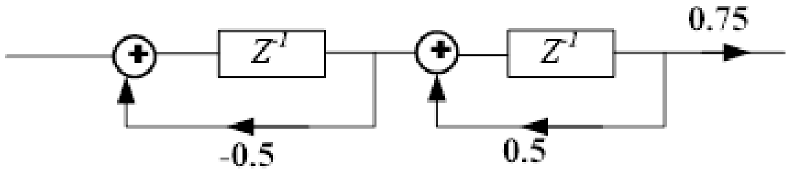
$$H(z)=\frac{3}{4}\frac{z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$$

（2）$$H(z)=\frac{3}{4}\frac{z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.5z^{-1})}=\frac{3}{4}\frac{z^{-2}}{1-0.25z^{-2}}$$

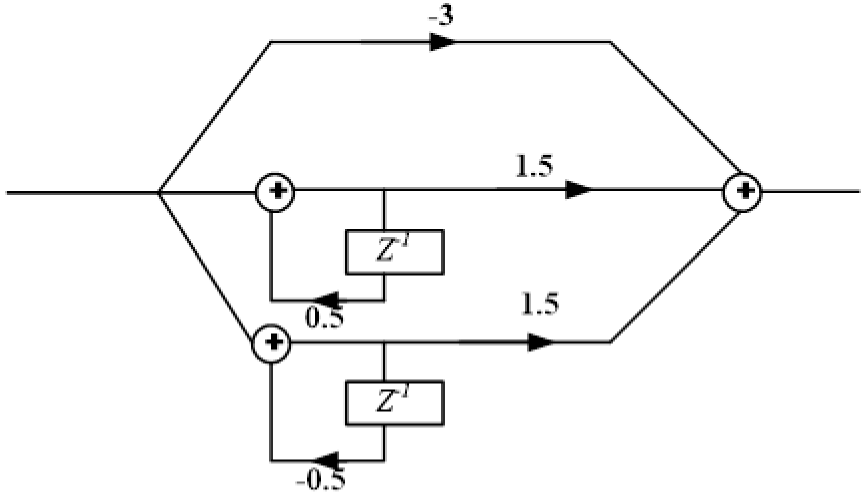
$$y[n]-0.25y[n-2]=3/4x[n-2]$$

系统函数，系统结构

(3) 级联型 $H(z)=\frac{3}{4}\frac{z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1\text{-}0.5z^{-1})}=\frac{3}{4}\frac{z^{-1}}{(1+0.5z^{-1})}\bullet\frac{z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})}$



并联型 $H(z)=\frac{3}{4}\frac{z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1\text{-}0.5z^{-1})}=\frac{3}{2}\frac{1}{1+0.5z^{-1}}+\frac{3}{2}\frac{1}{1-0.5z^{-1}}-3$



(4) $H(z)=\frac{3}{4}\frac{z^{-2}}{(1+0.5z^{-1})(1\text{-}0.5z^{-1})}=\frac{3}{2}\frac{1}{1+0.5z^{-1}}+\frac{3}{2}\frac{1}{1-0.5z^{-1}}-3$

$h[n]=-3\delta[n]+1.5(\frac{1}{2})^{n}u[n]+1.5(-\frac{1}{2})^{n}u[n]$