9-26 作业

20. 由题意知：

$$P(1<X<2)=\int_1^2 axdx=\frac{a}{2}x^2\Big|_1^2=\frac{3}{2}a$$

$$P(2<X<3)=\int_2^3 bdx=b=\frac{3}{2}a$$

$$\text{且}\quad P(1<X<2)+P(2<X<3)=1$$

所以, $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$.

21. (1) 由密度函数的正则性：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{1+x^2}dx=a\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=a\pi=1$$

得 $a=1/\pi$.

(2) 由分布函数的定义及有界性：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{1}{\pi}\arctan x+c,$$

$$F(-\infty)=0,\ F(\infty)=1$$

得 $c=1/2$. 所以分布函数为 $F(x)=\frac{1}{\pi}\arctan x+\frac{1}{2}, x\in R$.

(3)

$$P(|X|<1)\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{1}{2}.$$

22. 由题意知

$$S=\int_0^2(2x-x^2)dx=\left(x^2-x^3/3\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}$$

当 $0\le x<2$ 时，

$$P(X\le x)=\int_0^x(2t-t^2)dt/S=\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}x^3,$$

所以,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4}x^3, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}x^2, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

27. 证：令 $F(x)$ 为 X 的分布函数，对于 $\forall n,m\in\mathbb{N}_+,m\le n$, 有

$$F(\frac{1}{n})-F(0)=F(\frac{2}{n})-F(\frac{1}{n})=...=F(1)-F(\frac{n-1}{n})$$

又因为 $\sum_{i=1}^{n}(F(\frac{i}{n})-F(\frac{i-1}{n}))=F(1)-F(0)=1$, 所以上式每一项等于 $1/n$.
对于 $(0,1)$ 之间的有理数 $x=m/n$,

$$F(\frac{m}{n})=\sum_{i=1}^{m}\Big(F(\frac{i}{n})-F(\frac{i-1}{n})\Big)=\frac{m}{n},\ m\le n,$$

所以对于有理数 $x,F(x)=x$ 成立。再由连续函数的右连续性知 $F(x)=x$ 对 $(0,1)$ 中的无理数也成立。这就证明了 $X\sim U(0,1)$.

28. 由题意知，$X\sim\exp(\lambda)$,
(1)$P(X>2)=\int_2^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\big|_2^\infty=e^{-2}$;

(2) 由指数分布的无记忆性，$P(X>4|X>2)=P(X>2)=e^{-2}$.
(与直接求解 $P(X>4\mid X>2)=\frac{P(X>4)}{P(X>2)}=e^{-2}$ 结果一致。)

31. 由题意知，$\frac{X-1}{2}\sim N(0,1)$.

$$\begin{aligned}(1)\ & P(0\le X\le 4)=P\Big(\frac{0-1}{2}\le\frac{X-1}{2}\le\frac{4-1}{2}\Big)=\Phi(1.5)-\Phi(-0.5)\approx 0.6247\\ & P(X>2.4)=P\Big(\frac{X-1}{2}>\frac{2.4}{2}\Big)=1-\Phi(0.7)\approx 0.2420\\ & P(|X|>2)=1-P(-2\le X\le 2)=1-\Phi(0.5)+\Phi(-1.5)\approx 0.3753\end{aligned}$$

(2) $P(X>c)=2P(X\le c)$, 即 $1-\Phi(\frac{c-1}{2})=2\Phi(\frac{c-1}{2})$，得 $\Phi(\frac{c-1}{2})=\frac{1}{3}$. 查表可知：

$$\frac{c-1}{2}\approx -0.4307\ \Rightarrow\ c\approx 0.1386.$$