DSP_HW6

msh

April 2024

Exercise 1

一个离散时间系统的转移函数是:

$$H(z) = (1-0.95e^{j0.3\pi}z^{-1})(1-0.95e^{-j0.3\pi}z^{-1})\times(1-1.4e^{j0.4\pi}z^{-1})(1-1.4e^{-j0.4\pi}z^{-1}) \tag{1}$$

通过移动其零点，保证：新系统和 H(z) 具有相同的幅频响应；新系统的单位抽样响应仍为实值且和原系统同样长。试讨论:

(1) 可以得到几个不同的系统?

(2) 哪一个是最小相位的? 哪一个是最大相位的?

(3) 对所得到的系统，求 h(n)，计算 $E(M) = \sum_{n=0}^{M} h^2(n), M \leq 4$，并比较各个系统的能量积累情况。

HW 6.1.

(1) 原系统有两对共轭零点，分别位于单位圆内和单位圆外，是一个混合相位系统.

通过对两对共轭零点中的一对或两对取单位圆镜像，可得到三个新系统，满足需求.

$$H_1(z) = (1-0.95e^{j0.3\pi}z^{-1})(1-0.95e^{-j0.3\pi}z^{-1}) \times (1.4e^{-j0.4\pi}-z^{-1})(1.4-e^{j0.4\pi}z^{-1})$$

$$H_2(z) = (0.95e^{j0.3\pi}-z^{-1})(0.95e^{j0.3\pi}-z^{-1}) \times (1-1.4e^{j0.4\pi}z^{-1})(1-1.4e^{-j0.4\pi}z^{-1})$$

$$H_3(z) = (0.95e^{-j0.3\pi}-z^{-1})(0.95e^{j0.3\pi}-z^{-1}) \times (1.4e^{-j0.4\pi}-z^{-1})(1.4e^{j0.4\pi}-z^{-1})$$

(2) $H_1(z)$ 是最小相位系统

$H_2(z)$ 最大相位

$H_3(z)$ 混合相位系统.

(3) 三个新系统的单位抽样响应系数分别是:

$$(1-r_1e^{j\theta_1}z^{-1})(1-r_1e^{-j\theta_1}z^{-1})(1-r_2e^{j\theta_2}z^{-1})(1-r_2e^{-j\theta_2}z^{-1}) = 1-2(r_1\cos\theta_1+r_2\cos\theta_2)z^{-1} + (r_1^2+r_2^2+4r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2)z^{-2} - 2r_1r_2(r_1\cos\theta_2+r_2\cos\theta_1)z^{-3} + r_1^2r_2^2z^{-4}$$

$h_1(n) = \{1.96, -3.0542, 3.7352, -1.8977, 0.9025\}$

$h_2(n) = \{0.9025, -1.8977, 3.7352, -3.0542, 1.96\}$

$h_3(n) = \{1.7689, -2.9698, 3.8288, -1.9820, 1\}$.

代入可得 $E_1(m)$、$E_2(m)$、$E_3(m)$

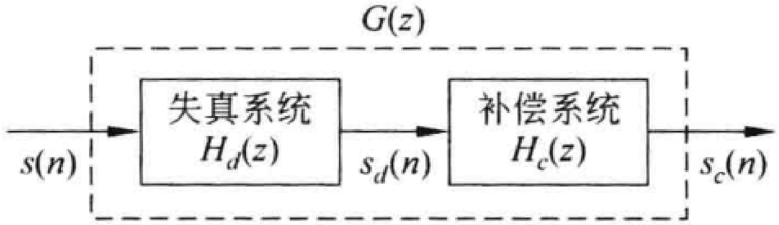
$E_1(m) = 106.3927$，$E_2(m) = 82.8306$，$E_3(m) = 103.7601$.

$E_1(m) > E_2(m) > E_2(m)$

最小相位系统的能量集中在n取较小的范围

Exercise 2

在通信信道上传输信号时，信号可能会产生失真。该失真可以看作是信号通过了一个 LSI 系统的结果。为了解决该失真问题，这时候需要用一个补偿系统来处理这个失真信号，如下图所示, 如果能实现完全的补偿，那么 $s_c(n) = s(n)$，如果 $H_d(z) = (1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1}) \times (1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})$，求其补偿系统 $H_c(z)$ 的表达式。



HW6.2

总系统函数是. $G(z) = H_d(z) \cdot H_c(z)$

要实现完全补偿，则要求 $G(z)$ 是一个全通滤波器

即 $G(z) = H_d(z) \cdot H_c(z) = H_{ap}(z)$

则 $H_c(z) = H_{ap}(z) / H_d(z)$

又∵一个稳定因果系统可以分解为一个最小相位系统和一个全通系统的级联，因此.

$H_d(z) = H_{dmin}(z) H_{ap}(z)$

这样分解，能满足补偿系统是稳定因果的.

$H_c(z) = 1 / H_{dmin}(z)$

$H_d(z)$ 只有零点 $z = 0.9e^{j0.6\pi}$, $z = 0.9e^{-j0.6\pi}$, $z = 1.25e^{j0.8\pi}$, $z = 1.25e^{-j0.8\pi}$

因此，要将单位圆外的 $z = 1.25e^{j0.8\pi}$ 和 $z = 1.25e^{-j0.8\pi}$ 零点反射到单位圆内与它们成共轭倒数的位置上，从而构成一个最小相位系统 $H_{dmin}(z)$,

$$H_{dmin}(z) = (1.25)^2 (1 - 0.9e^{j0.6\pi} z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi} z^{-1}) \times (1 - 0.8e^{-j0.8\pi} z^{-1})(1 - 0.8e^{j0.8\pi} z^{-1})$$

与 $H_{dmin}(z)$ 和 $H_d(z)$ 有关的全通系统是

$$H_{ap}(z) = \frac{(z^{-1} - 0.8e^{-j0.8\pi})(z^{-1} - 0.8e^{j0.8\pi})}{(1 - 0.8e^{-j0.8\pi} z^{-1})(1 - 0.8e^{j0.8\pi} z^{-1})}$$

$$\therefore H_c(z) = 1 / H_{dmin}(z) = \frac{0.64}{\quad}$$

Exercise 3

令 $H_{\min}(z)$ 为最小相位序列 $h_{\min}(n)$ 的 z 变换。若 h(n) 为某一因果非最小相位序列，其傅里叶变换幅度等于 $|H_{\min}(e^{jw})|$，试证明

$$|h(0)| < |h_{\min}(0)| \tag{2}$$

HW6.3 ∵ $h(n)$ 是非最小相位序列，其 Z 变换 $H(z)$ 可以表示为 $H(z)=H_{min}(z)H_{ap}(z)$

其中 $H_{min}(z)$ 是最小相位序列的 Z 变换，$H_{ap}(z)$ 是全通系统部分，

$H_{min}(z)$ 包含 $H(z)$ 中位于单位圆内的零极点，再加上与 $H(z)$ 中单位圆外的零点成共轭倒数的那些零点。

$H_{ap}(z)$ 由全部 $H(z)$ 中位于单位圆外的零点和与 $H_{min}(z)$ 中反射进来的共轭倒数零点相抵消的极点所组成。其中

$H_{ap}(z)$ 由若干个 $\dfrac{(z^{-1}-c^{*})}{(1-cz^{-1})}$ 组成，$z=c$ 在单位圆内，所以 $|c^{*}|<1$

由初值定理可知，$h(0)=\lim\limits_{z\to\infty} H(z)$

$$=\lim_{z\to\infty}\left(H_{min}(z)H_{ap}(z)\right)$$

$$=\lim_{z\to\infty} H_{min}(z)\cdot\lim_{z\to\infty} H_{ap}(z)$$

因此 $|h(0)|=\left|\lim\limits_{z\to\infty} H(z)\right|=\left|\lim\limits_{z\to\infty} H_{min}(z)\right|\prod\lim\limits_{z\to\infty}\left|\dfrac{(z^{-1}-c^{*})}{(1-cz^{-1})}\right|$

$$=\left|\lim_{z\to\infty} H_{min}(z)\right|\prod|c^{*}|$$

$$<\left|\lim_{z\to\infty} H_{min}(z)\right|=h_{min}(0)$$

即 $|h(0)|<|h_{min}(0)|$.

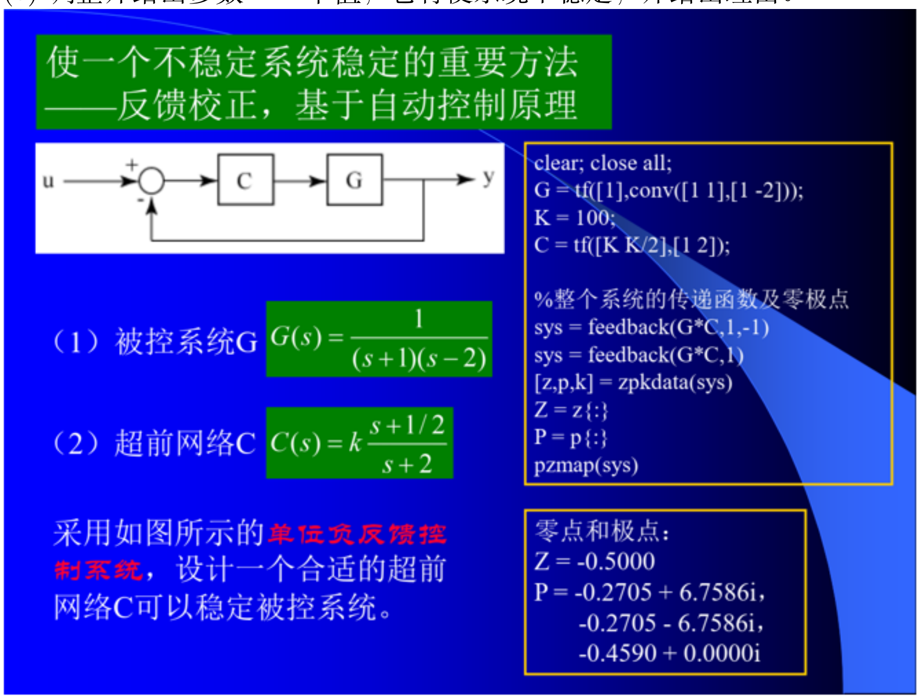
Exercise 4(optional)

根据教学课件完成:

(1) 理论推导出输入为 u、输出为 y 的整个系统的传递函数 H(s);

(2) 补充代码，绘制系统的阶跃响应和冲激响应；提示使用 step 和 impulse 函数

(3) 调整并给出参数 k 一个值，它将使系统不稳定，并给出理由。



hw6.4 (1) $Y(s) = C(s)\cdot G(s)\cdot[U(s) - Y(s)]$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C(s)\cdot G(s)}{1+C(s)\cdot G(s)}$$

$$= \frac{\frac{K(s+\frac{1}{2})}{s+2}\cdot\frac{1}{(s+1)(s-2)}}{1+\frac{K(s+\frac{1}{2})}{(s+2)(s+1)(s-2)}}$$

$$= \frac{K(s+\frac{1}{2})}{s^3+s^2+(K-4)s+\frac{1}{2}K-4}$$

$$= \frac{K(s+\frac{1}{2})}{(s+2)(s+1)(s-2)+K(s+\frac{1}{2})}.$$

(3) 令 $K=4$,

$$H(s) = \frac{4(s+\frac{1}{2})}{s^3+s^2-2} = \frac{4(s+\frac{1}{2})}{(s-1)(s^2+2s+2)}.$$

系统在右半平面有极点，不稳定.