10-8 作业

36. 由 X 的分布律，易得 Y_1, Y_2, Y_3 的分布律分别为：

$$Y_1 \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad Y_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad Y_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

37. (1) 由分布函数的有界性：

$$\begin{cases} F(-\infty) = a - \frac{\pi}{2}b = 0 \\ F(\infty) = a + \frac{\pi}{2}b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 1/\pi \end{cases}$$

(2) 由分布函数可得 X 的密度函数为 $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$，$x \in \mathbb{R}$.
$y = 3 - \sqrt[3]{x}$ 为严格减函数，其反函数为 $x = (3-y)^3$. 所以 $Y = 3 - \sqrt[3]{X}$ 的密度函数为

$$f_Y(y) = \frac{3(y-3)^2}{\pi[1+(3-y)^6]}, \ x \in \mathbb{R}.$$

(3)$Z = 1/X$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi[1+(1/z)^2]} \cdot \left| -\frac{1}{z^2} \right| = \frac{1}{\pi(1+z^2)}, \ z \in \mathbb{R}.$$

所以 X 与 $1/X$ 具有相同的分布。

39. $X \sim EXp(\lambda)$, 则其分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$
$Y = XI_{(t,\infty)}(X)$ 的取值范围为 $Y \geq 0$.
(1) 当 $t \leq 0$ 时，显然 Y 与 X 同分布，即 $Y \sim Exp(\lambda)$, 分布函数如上所示。
(2) 当 $t > 0$, Y 的取值范围为 $Y = 0$ 及 $Y > t$.
当 $y < 0$ 时，$P(Y \leq y) = 0$;
当 $0 \leq y < t$ 时，直观理解可得

$$P(Y \leq y) = P(Y = 0) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

(或用全概率公式可得相同结果：

$$\begin{aligned}P(Y\le y)&=P(XI_{(t,\infty)}(X)\le y)\\&=\sum_{i=0}^{1}P(XI_{(t,\infty)}(X)\le y\big|I_{(t,\infty)}(X)=i)P(I_{(t,\infty)}(X)=i)\\&=1\cdot P(X\le t)+0\cdot P(X>t)\\&=1-e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

当 $y\ge t$ 时，直观理解可得

$$P(Y\le y)=P(Y=0)+P(t<Y\le y)=1-e^{-\lambda t}+(e^{-\lambda t}-e^{-\lambda y})=1-e^{-\lambda y}.$$

(或用全概率公式可得相同结果：

$$\begin{aligned}P(Y\le y)&=P(XI_{(t,\infty)}(X)\le y)\\&=\sum_{i=0}^{1}P(XI_{(t,\infty)}(X)\le y\big|I_{(t,\infty)}(X)=i)P(I_{(t,\infty)}(X)=i)\\&=1\cdot P(X\le t)+P(t<Y\le y)\\&=1-e^{-\lambda t}+(e^{-\lambda t}-e^{-\lambda y})\\&=1-e^{-\lambda y}\end{aligned}$$

Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 1-e^{-\lambda t}, & 0\le y<t,\\ 1-e^{-\lambda y}, & y\ge t.\end{cases}$

40. $X\sim U(0,1)$, 则其密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

(1) 因为 $Y_1=e^X$ 的可能取值范围为 $(1,e)$，且 $y_1=e^x$ 在 $(0,1)$ 上为严格增函数，其反函数为 $x=h(y_1)=\ln y_1$, 对应导数 $h'(y_1)=\frac{1}{y_1}$. 所以 Y_1 的密度函数为

$$f_1(y_1)=\left\{\begin{array}{cc}f_X(\ln y_1)\cdot\left|\frac{1}{y_1}\right|, & 1<y_1<e\\ 0, & 其他\end{array}\right.=\begin{cases}\frac{1}{y_1}, & 1<y_1<e,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(2) $Y_2 = X^{-1}$ 的可能取值范围为 $(1,\infty)$，且 $y_2 = x^{-1}$ 在 $(0,1)$ 上为严格减函数，$x = h(y_2) = 1/y_2$, $h'(y_2) = -1/y_2^2$. 所以 Y_2 的密度函数为

$$f_2(y_2) = \begin{cases} f_X(y_2^{-1}) \cdot |-1/y_2^2|, & y_2 > 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{y_2^2}, & y_2 > 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(3) $Y_3 = -\frac{1}{\lambda}\ln X \in (0,\infty)$, 且 $y_3 = -\frac{1}{\lambda}\ln x$ $(\lambda > 0)$ 在 $(0,1)$ 上为严格减函数, $x = h(y_3) = e^{-\lambda y_3}$, $h'(y_3) = -\lambda e^{-\lambda y_3}$. 所以 Y_3 的密度函数为

$$f_3(y_3) = \begin{cases} f_X(e^{-\lambda y_3}) \cdot \left|-\lambda e^{-\lambda y_3}\right|, & y_3 > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y_3}, & y_3 > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

42. 证明：$Y = F(X)$ 的取值范围为 $[0,1]$. 当 $0 \le y < 1$ 时, 利用函数 $F(x)$ 的严格单调性, 则

$$\mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(F(X) \le y) = \mathbb{P}\left(X \le F^{-1}(y)\right) = F\left(F^{-1}(y)\right) = y.$$

从而有 $Y \sim U(0,1)$.

44. X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1-(1-x)^2, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$

记 $Y = g(X)$, 则要使 $Y \sim Exp(1)$, $y \ge 0$ 时，

$$P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = P(X \le g^{-1}(y)) = 1 - \left(1 - g^{-1}(y)\right)^2 = 1 - e^{-y}$$

得： $g(x) = -2\ln(1-x)$, $x \in (0,1)$.

46. $X \sim Exp(\lambda)$, 分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0 & x \le 0. \end{cases}$$

$Y = \begin{cases} X, & 若 X \ge 1, \\ -X^2, & 若 X < 1. \end{cases}$ 则 Y 的可能取值范围为 $(-1,0) \cup [1,\infty)$, 先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

当 $-1<y<0$ 时,

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-X^2\le y)=P(X\ge\sqrt{-y})=e^{-\lambda\sqrt{-y}};$$

当 $y\ge 1$ 时,$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X\le y)=1-e^{-\lambda y}$.
所以 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{\lambda}{2\sqrt{-y}}e^{-\lambda\sqrt{-y}}, & -1<y<0,\\ \lambda e^{-\lambda y} & y\ge 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

10-10 作业

6. 由题意知：$X\sim Ge(p),Y\sim Nb(2,p)$
(1) 对于 $x\in\{1,2,\cdots\},y\in\{2,3,\cdots\}$,

$$P(Y=y\mid X=x)=P(Y-X=y-x\mid X=x)=P(Y-X=y-x)=(1-p)^{y-x-1}p$$

所以,

$$\begin{aligned}P(X=x,Y=y)&=P(X=x)P(Y=y\mid X=x)\\&=(1-p)^{x-1}p(1-p)^{y-x-1}p\\&=(1-p)^{y-2}p^2,\ x=1,2,\cdots,y=2,3,\cdots,x<y.\end{aligned}$$

(2)X,Y 的边缘分布为

$$P(X=x)=\sum_{y=x+1}^{\infty}P(X=x,Y=y)=p^2\frac{(1-p)^{x-1}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{x-1},\ x=1,2,\cdots$$

$$P(Y=y)=\sum_{x=1}^{\infty}P(X=x,Y=y)=(y-1)p^2(1-p)^{y-2},\ y=2,3,\cdots$$

9. (1) 由分布函数的有界性得：

$$\begin{cases}F(\infty,\infty)=a(b+\pi/2)(c+\pi/2)=1\\ F(-\infty,y)=a(b-\pi/2)(c+\arctan y)=0\\ F(x,\infty)=a(b+\arctan x)(c-\pi/2)=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a=1/\pi^2\\ b=\pi/2\\ c=\pi/2\end{cases}$$

(2) 由分布函数的定义，

$$\begin{aligned} P(X>0,Y>0) &= F(\infty,\infty)-F(\infty,0)-F(0,\infty)+F(0,0) \\ &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(3) 由边缘分布及密度函数的定义，

$$f_X(x)=(F_X(x))'=(F(x,\infty))'=\left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\right]'=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad x\in\mathbb{R};$$

同理，$f_Y(y)=\dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$，$y\in\mathbb{R}$.

11. (1) 由联合密度可得 X 的边缘密度为

$$f_X(x)=\int_0^x f(x,y)dy=xe^{-x},\quad x>0.$$

所以条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) Y 的边缘密度为 $f_Y(y)=\int_y^\infty f(x,y)dx=e^{-y}, y>0$.

$$P(Y\le 1)=\int_0^1 e^{-y}dy=1-e^{-1}$$

$$P(X\le 1,Y\le 1)=\int_0^1\int_0^x e^{-x}dydx=1-2e^{-1}$$

所以，$P(X\le 1\mid Y\le 1)=\dfrac{P(X\le 1,Y\le 1)}{P(Y\le 1)}=\dfrac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}}=\dfrac{e-2}{e-1}$

12. 由密度函数的正则性，

$$\begin{aligned} \iint_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} Ae^{-2x^2+2xy-y^2}dxdy &= A\int_{x\in\mathbb{R}} e^{-x^2}\left(\int_{y\in\mathbb{R}} e^{-(y-x)^2}dy\right)dx \\ &= A\sqrt{\pi}\int_{x\in\mathbb{R}} e^{-x^2}dx \\ &= A\pi = 1 \\ \Rightarrow \quad A &= \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

X 的边缘密度函数为

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\int_{y\in\mathbb{R}} e^{-2x^2+2xy-y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

所以条件密度

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\sqrt{\pi}e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2}, y \in \mathbb{R}.$$

13. 由密度函数的正则性，

$$\iint_{0<|x|<y<1} Ax^2\ dxdy = \int_0^1 \Big(\int_{-y}^{y} Ax^2dx\Big)dy = A\int_0^1 \frac{2}{3}y^3dy = \frac{1}{6}A = 1$$

$$\Rightarrow \quad A = 6$$

Y 的边缘密度，及条件密度为

$$f_Y(y) = \int f(x,y)\ dx = \int_{-y}^{y} 6x^2dx = 4y^3,\ 0 < y < 1.$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{3x^2}{2y^3},\ 0 < |x| < y < 1.$$

所以，

$$P(X \le 0.25|Y = 0.5) = \int_{-1/2}^{1/4} 3x^2 \cdot 4\ dx = \frac{9}{16}.$$