引言

要想探索自然界的奥秘就得解微分方程。—牛顿

数学物理方程，通常指从物理学及其他各门自然科学、技术科学中所产生的偏微分方程（也包括一些常微分方程，积分方程，差分方程等）．它们反映了有关的未知变量关于时间的导数和关于空间变量的导数之间的制约关系.例如，

- 波的传播所满足的波动方程
- 热传导问题和扩散问题中的热传导方程
- 静电势和引力势满足的$Laplace$方程或$Poisson$方程
- 描写电磁场运动变化的$Maxwell$方程组
- 微观物质运动基本规律的$Schrödinger$方程和$Dirac$方程

数理方程的产生和发展:

(1) 18世纪初,人们已经将弦线振动的问题归结为弦振动方程.$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f$

(2) 19世纪初,傅立叶做出了关于热的解析理论的工作.

(3) 19世纪中期三类二阶线性偏微分方程:

1. 波动方程:$u_{tt} = a^2 \Delta u + f$
2. 输运方程:$u_t = a^2 \Delta u + f$
3. Poisson方程: $\Delta u = -h$

(4) 20世纪,偏微分方程是应用数学的重要研究方向,与泛函分析,变分法等数学分支紧密结合,解决物理问题,例如高阶微分方程,非线性方程
KdV方程: $u_t + \sigma u u_x + u_{xxx} = 0$
薛定谔方程, 冲击波方程......

用数理方法研究问题的步骤

(1) 将物理问题翻译成数学语言,建立偏微分方程,确定具体问题的定解条件.

(2) 求解定解问题:
求解定解问题的多种方法:分离变量法,积分变换法,特殊函数法,基本解方法等.

(3) 分析解答:
$$\begin{cases}\text{解的物理意义} \\ \text{解的适定性}\begin{cases}\text{存在性} \\ \text{唯一性} \\ \text{稳定性}\end{cases}\end{cases}$$

本课程的主要内容

第一章 ：介绍基本概念、三种重要方程及定解条件的物理背景

第二章 ：分离变量法

第三章 ：特殊函数

第四章 ：积分变换法

第五章 ：基本解和解的积分表达式

§1. 数学物理中的偏微分方程

基本定义

1. 含有未知多元函数和未知函数的各阶偏导数的等式称为偏微分方程.
2. 方程中含有未知函数最高阶偏导数的阶数称为方程的阶.
3. 方程中对于未知函数和其偏导数都是线性的，方程称为线性方程
4. 若存在函数$u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在区域V有相应的连续偏导数，代入方程

$$F(\overrightarrow{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}) = 0$$

使得等式成立，则函数称为此PDE的古典解.

Example 1

$u=u(t,x)$, 求解方程$u_t=0$.

两边对t积分可得 $u(t,x)=f(x)$, $f(x)$是任意连续函数.

Example 2

求方程$u_{xy}+\frac{2}{y}u_x=2x$的通解.

解： 令$H=u_x$, 方程化为$H_y+\frac{2}{y}H=2x$

$$H=e^{-\int \frac{2}{y}\mathrm{d}y}\left[\int 2xe^{\int \frac{2}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+f_1(x)\right]=\frac{2xy}{3}+\frac{f_1(x)}{y^2}$$

再对x积分得

$$u(x,y)=\int H\mathrm{d}x=\frac{x^2y}{3}+\frac{f(x)}{y^2}+g(y),$$

$f(x),g(y)$是任意一阶可导函数.

Example 3

$u=u(x,y)$, 求解方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$.

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0.$

对x积分一次得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi(y)$, $\varphi(y)$是连续函数.

再对y积分一次得

$$u(x,y)=\int\varphi(y)\mathrm{d}y+g(x)\triangleq f(y)+g(x)$$

Example 4

求解定解问题 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{2}x^2 y \\ u(x,0) = x^2, \quad u(0,y) = y^2 \end{cases}$

解： 设$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}x^2 y, \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \\ w(x,0) = x^2 - v(x,0), \\ w(0,y) = y^2 - v(0,y) \end{cases}$$

积分两次可得$v(x,y) = \dfrac{1}{12}x^3 y^2$

第二个方程的通解是$w(x,y) = f(x) + g(y)$,

$$w(x,0) = f(x) + g(0) = x^2, \qquad w(0,y) = f(0) + g(y) = y^2$$

令$x = y = 0$ 有$f(0) + g(0) = 0$, 所以$w(x,y) = x^2 + y^2$

此定解问题的解是$u(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{12}x^3 y^2$.

1. 偏微分方程的解族中含有任意函数.
2. 一般n阶偏微分方程含有任意函数的解称为方程的通解.
3. 不含有任意函数，任意常数的解称为方程的特解.

§1. 数学物理中的偏微分方程

§1.2 三种典型的偏微分方程

一、 理想弦的横振动方程

二、 热传导方程

三、 扩散方程

四、 稳定问题

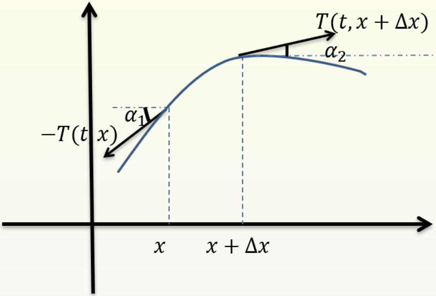
物理问题

有一根完全柔软的细长的均匀弦，绷紧在A, B两点之间，而后以某种方法激发，使弦在同一个平面上作振幅极其微小的横振动.求弦的运动规律.

分析:

1. 所求问题：$u(x,t)$–弦上坐标为x的点在t时刻的位移.
2. 已知条件：
   - 细长均匀：密度$\rho(x)=\rho$, 不计重力.
   - 柔软：只受到切向应力–张力T的作用
   - 振幅微小：u_x是小量，$u_x^2 \approx 0$
   - 外力：垂直于x轴的外力，力的分布密度为$g(t,x)$.
3. 研究方法：利用微元法思想，分析一小段微元的受力情况。

取弦的平衡位置为x轴，端点坐标为$x=0, x=l$.



$u(x,t)$是弦上坐标为x的点在t时刻的横向位移. 在弦上任取长为Δx的一个小段分析受力情况.

1.分析受力情况

x方向: $\begin{cases} -T(t,x)\cos\alpha_1, \\ T(t,x+\Delta x)\cos\alpha_2 \end{cases}$ y方向: $\begin{cases} -T(t,x)\sin\alpha_1, \\ T(t,x+\Delta x)\sin\alpha_2, \\ \text{外力}F_1=\int_x^{x+\Delta x} g(t,x)\mathrm{d}x \end{cases}$

记$T_1(t,x)=T(t,x)\cos\alpha, T_2(t,x)=T(t,x)\sin\alpha$则$\vec{T}=(T_1,T_2)$

建立方程并化简

2. 按Newton运动定律写方程

$$\begin{cases} T_1(t, x+\Delta x) - T_1(t, x) = 0, & (1) \\ T_2(t, x+\Delta x) - T_2(t, x) + F_1 = \rho \Delta x u_{tt}(x, t) & (2) \end{cases}$$

3. 利用已知条件化简方程

振幅极其微小： 考虑细弦的伸长，

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \approx \Delta x$$

说明：弦长增量与Δx近似相等，依据胡克定律张力不随时间t变化.

$$\boxed{\begin{cases} T_1(t,x+\Delta x)-T_1(t,x)=0, & (1) \\ T_2(t,x+\Delta x)-T_2(t,x)+F_1=\rho\Delta x u_{tt}(x,t) & (2) \end{cases}}$$

振幅极其微小：考虑等式（1）$T_1(t,x+\Delta x)=T_1(t,x)$

T_1不随位置x变化，即T_1是常数,记为T。

由于张力沿切线方向，$T_2=T_1\tan\alpha=T_1\frac{\partial u}{\partial x}$

代入等式(2)可化为

$$T(u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t))+\int_x^{x+\Delta x} g(t,x)\mathrm{d}x=\rho\Delta x u_{tt}(x,t).$$

$$\boxed{T(u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t))+\int_x^{x+\Delta x} g(t,x)\mathrm{d}x=\rho\Delta x u_{tt}(x,t).}$$

两边同时除以Δx, 再令$\Delta x\to 0$, 方程可化为

$$Tu_{xx}(x,t)+g(x,t)=\rho u_{tt}(x,t)$$

令$a^2=T/\rho$, $f(x,t)=g(x,t)/\rho$,

$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t)$$

这一方程称为**波动方程**

建立方程的步骤：

$\boxed{\text{建立坐标系，确定未知函数}} \Rightarrow \boxed{\text{物理定律翻译成数学语言}}$

$\Rightarrow \boxed{\text{利用已知条件，理想化假设，物理规律等化简}}$

$\Rightarrow \boxed{\text{得到偏微分方程}}$

弹性膜的微小振动满足的方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(t,x,y) = a^2 \Delta_2 u + f(t,x,y)$$

三维弹性介质的振动满足的方程是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(t,x,y,z) = a^2 \Delta_3 u + f(t,x,y,z)$$

弹性细弦在粘稠介质中振动

$$u_{tt}(x,t) + c u_t = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t)$$

§1.2　三种典型的偏微分方程

一、　理想弦的横振动方程

二、　**热传导方程**

三、　扩散方程

四、　稳定问题

热传导方程–复习相关物理知识

1. 比热：单位质量的物体温度升高一度所需热量. $C = \dfrac{Q}{mT}$
2. 热流密度：单位时间流过单位面积的热量.$q = \dfrac{Q}{tS}$
3. 热源强度：单位时间，单位体积放出的热量.$F = \dfrac{Q}{tV}$
4. Fourier定律：热流密度与温度的下降率成正比.$q = -k\dfrac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}$, k是导热率.

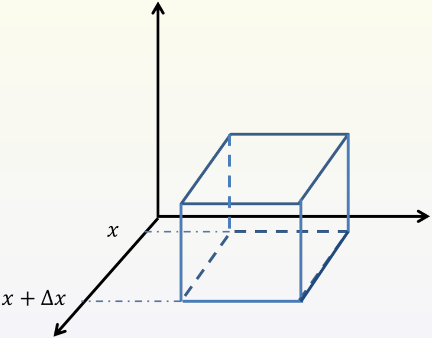
热传导物理问题

设有一块连续均匀介质，如果物体内各点温度不全相同，则在物体内有热量传播. 取定一定坐标系，考虑介质内空间坐标为(x, y, z)的一点在t时刻的温度$u(x, y, z; t)$.

分析：

1. **所求问题**：$u(x, y, z; t)$–物体内部各点的温度.
2. **已知条件**：
   比热C, 导热率k, 密度ρ是已知常数.
3. **研究方法**：利用微元法思想，分析一小块介质的温度变化。

单位时间内通过垂直x方向的单位面积的热量q与温度的空间变化率成正比 $q=-k\dfrac{\partial u}{\partial x}$, q称为热流密度，k称为导热率.



在介质内部任取出一个平行六面体，六个面都和坐标面平行.
根据**能量守恒定律**，净流入六面体的热量应该等于介质在此时间内温度升高所需要的热量。

1. Δt时刻内，从前后两个面流入多面体的热量

$$\begin{aligned}\Delta Q_{x1} - \Delta Q_{x2} &= -k\left(u_x(x,y,z) - u_x(x+\Delta x,y,z)\right)\Delta y\Delta z\Delta t \\ &= k u_{xx}(\xi,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t\end{aligned}$$

2. Δt时刻内，从左右两个面流入多面体的热量

$$\begin{aligned}\Delta Q_{y1} - \Delta Q_{y2} &= -k\left(u_y(x,y,z) - u_y(x,y+\Delta y,z)\right)\Delta z\Delta x\Delta t \\ &= k u_{yy}(x,\eta,z)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t\end{aligned}$$

3. Δt时刻内，从上下两个面流入多面体的热量

$$\begin{aligned}\Delta Q_{z1} - \Delta Q_{z2} &= -k\left(u_z(x,y,z) - u_z(x,y,z+\Delta z)\right)\Delta x\Delta y\Delta t \\ &= k u_{zz}(x,y,\zeta)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t\end{aligned}$$

如果六面体内没有其他热量来源或消耗，则根据能量守恒定律，**净流入的热量应该等于介质在此时间内温度升高所需要的热量**

$$
\begin{aligned}
&C\rho u_t \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \\
=&k\left(u_{xx}(\xi, y, z)+u_{yy}(x, \eta, z)+u_{zz}(x, y, \zeta)\right)\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t
\end{aligned}
$$

两边除以$\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$, 再令$\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0,\ \Delta z \to 0.$

可得各向同性均匀介质内热传导方程

$$\boxed{u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=a^2\Delta_3 u, \qquad \text{其中} a=\sqrt{\frac{k}{C\rho}}}$$

各向同性均匀介质内热传导方程：有热源情形

如果在介质内有热量产生(例如，有化学反应发生，或通有电流，$\cdots$)，单位时间内单位体积介质中产生的热量为$g(x,y,z;t)$，则有

$$\begin{aligned} & C\rho u_t \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \\ =& k\left(u_{xx}(\xi,y,z)+u_{yy}(x,\eta,z)+u_{zz}(x,y,\zeta)\right)\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \\ & +g(x,y,z;t)\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$u_t = a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+\frac{1}{C\rho}g(x,y,z;t) \triangleq a^2\Delta_3 u + f(x,y,z;t)$$

§1.2 三种典型的偏微分方程

一、 理想弦的横振动方程

二、 热传导方程

三、 扩散方程

四、 稳定问题

- 物质浓度的不均匀，通过分子的运动也会发生物质的交换，这在宏观上就表现为分子的扩散。
- 扩散过程遵循质量守恒定律，且分子由高浓度部分向低浓度部分流动
- 单位时间内通过某一曲面单位面积得物质与曲面两侧浓度差成比例
- 扩散过程与热传导过程遵循相似的物理规律，扩散方程和热传导方程有相同的形式.

扩散方程： $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z; t)$

§1.2 三种典型的偏微分方程

一、 理想弦的横振动方程

二、 热传导方程

三、 扩散方程

四、 **稳定问题**

稳定的温度分布

在一定条件下，物体的温度达到稳定、不随时间变化时，物体的温度满足**Poisson方程**

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=\Delta u=-\frac{f(x,y,z)}{a^2}$$

如果没有热源，即$f(x,y,z)=0$, 温度满足**Laplace方程**

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=\Delta u=0.$$

静电场的电势

设在充满了介电常数为ε的介质的区域中，有体电荷密度为$\rho(x,y,z)$的电荷，求静电场的电势$U(x,y,z)$.

物理知识：

- 静电场的电场强度为有势场$\Rightarrow \nabla U = -\vec{E}$.
- 通过一封闭曲面S的电通量，等于该曲面内所有电荷的代数和.

$$\oiint_{S} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon}\iiint_{V} \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

静电场的电势

由Gauss公式 $$\oiint\limits_S \overrightarrow{E}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iiint\limits_V \nabla\cdot\overrightarrow{E}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

及曲面的任意性，可得

$$\nabla\cdot\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

静电场电势所满足的偏微分方程是Poisson 方程

$$\nabla\cdot\overrightarrow{E} = -\nabla\cdot\nabla U = \frac{\rho}{\varepsilon}\text{或}\Delta U = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

当$\rho = 0$时，电势满足Laplace 方程 $\Delta U = 0.$

总结

方程名称		物理过程	方程类型
波动方程	$u_{tt}=a^2\Delta u+f$	波动过程	双曲型方程
热传导方程	$u_t=a^2\Delta u+f$	扩散过程	抛物型方程
Poisson方程 Laplace方程	$\Delta u=f$ $\Delta u=0$	稳定过程	椭圆型方程

这三类方程的求解方法，是本课程的中心任务。

§1. 数学物理中的偏微分方程

描述物理过程的偏微分方程称为泛定方程.

泛定方程的解中含有任意函数，需要定解条件来得到确定的解

从物理角度看，具体的物理过程需要特别的附加条件.

定解条件类型

初始条件， 边界条件， 其它条件.

初始条件：

- 初始条件应该完全描写初始时刻($t=0$时)介质内部及边界上任意一点的状况.
- 方程中含有关于t的n阶偏导数，则需要给出n个初始条件.

初始条件

均匀细弦的横振动问题，是应该给出初始时刻的位移和速度

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad u_x(x,0)=\psi(x).$$

三维波动问题的初值问题是提法是

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,z;t) \\ u(x,y,z;0)=\varphi(x,y,z), \\ u_t(x,y,z;0)=\psi(x,y,z) \end{cases}$$

热传导方程，由于方程中只出现未知函数$u(x,y,z;t)$对t的一阶偏导数，所以只需给出初始时刻的温度

$$\begin{cases} u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,z;t) \\ u(x,y,z;0)=\varphi(x,y,z) \end{cases}$$

边界条件

边界条件的形式比较多样化，要由具体问题中描述的具体状况决定.

总的原则是：边界条件应该完全描写边界上各点在任一时刻($t \geqslant 0$) 的状况.

常用边界条件

$$\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)\Big|_{\partial V}=f(x,y,z;t)$$

1. $\alpha\neq 0,\beta=0,$ 第一类边界条件（Dirichlet条件）
2. $\alpha=0,\beta\neq 0,$ 第二类边界条件（Neumann条件）
3. $\alpha\beta\neq 0,$ 第三类边界条件（Robin条件）

如果$f(x,y,z;t)=0$，称为齐次边界条件。

$f(x,y,z;t)\neq 0$, 称为非齐次边界条件。

其他类型定解条件

1、衔接条件： 若所研究的问题由不同部分组成，相接处有衔接条件

2、自然边界条件： 物理问题的有限性、单值性、周期性所决定的条件

边界条件举例：

Example 5

对应方程$u_{tt}=a^2u_{xx}$，$c\leqslant x\leqslant d$的常见边界条件.

(1) 已知边界运动状态.

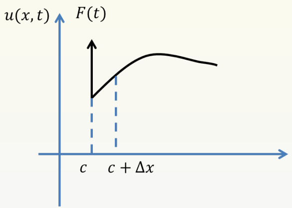
$$u\Big|_{x=c}=\varphi(t),\qquad u\Big|_{x=d}=\psi(t).$$

特别：弦两端固定 $\quad u\Big|_{x=c}=u\Big|_{x=d}=0.$

直接给出未知函数在边界的取值–第一类边界条件

边界条件举例:

(2) 已知边界受力情况.



取微元$[c, c+\Delta x]$,分析受力情况:

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(t)+T_2(t,c+\Delta x)+g(t,x)\Delta x$$

T_2是弦的张力在u方向上的分量，T_1是x方向上分量. $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$.

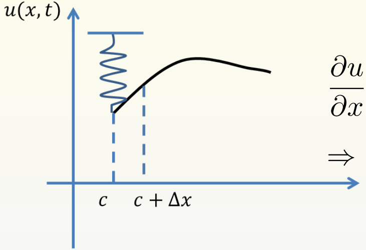
$$T_1\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=c} + F(t) = 0$$

第二类边界条件: $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=c} = -\dfrac{F(t)}{T_1}$.

一端自由: 边界满足 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=c} = 0$

边界条件举例：

(3) 边界受弹簧拉力及外力$F(t)$，k为弹性系数.



$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=c} = -\frac{F(t) - ku\big|_{x=c}}{T_1}$$

$$\Rightarrow \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{k}{T_1}u\right)\right|_{x=c} = -\frac{F(t)}{T_1}$$

第三类边界条件：给出函数和偏导数的线性组合在边界的值.

边界条件可统一写成：

$$\left.\left[\alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right]\right|_{\text{边界}} = \varphi(t)$$

边界条件举例

Example 6

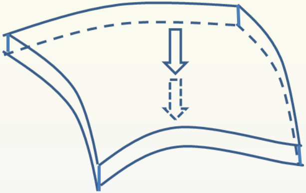
对应方程$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$, $(x, y, z) \in V$的边界条件.

(1)已知介质边界上的温度.

$$u(x, y, z; t)\big|_{\partial V} = \varphi(x, y, z; t) \text{——} \boxed{\text{第一类边界条件}}$$

(2)单位时间内、通过单位面积的边界面流入的热量已知.

在边界截取一小薄层介质，柱体的两底面积相等，厚度趋于0.



- 当介质的厚度趋于0时，通过侧面流入的热量应该趋于0 (因为侧面积趋于0)
- 边界上沿外法向有热流密度$q(t;x,y,z)$时，根据热学定律，表面温度变化与热量成比例

第二类边界条件: $$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial V} = -\frac{q(t;x,y,z)}{k}$$

特例：边界绝热 $$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial V} = 0.$$

(3)介质通过边界按Newton冷却定律散热, h热交换系数.

$$-k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial V} = h(u|_{\partial V} - u_0), \qquad \text{其中}u_0\text{是外界温度.}$$

整理得

第三类边界条件: $$\left(hu + k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)\Big|_{\partial V} = hu_0$$

Example 7

设有一根长为l的均匀细杆，侧表面与周围介质(温度恒为T_0)没有热交换，内部有热量密度为$g(t,x)$的热源。已知杆的初始温度为$\varphi(x)$，右端绝热，左端与介质有热交换，求杆内温度$u(x,t)$满足的定解问题.

Example 8

长为l的均匀细弦左端固定在$x=0$,右端自由，将右端提高至高度c,松开后使其做振幅微小的横振动，求弦上各点位移$u(x,t)$ 所满足的定解问题.

二、定解问题和适定性

三类定解问题

1.初值问题：

只有初始条件而
无边界条件的定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R} \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

2. 边值问题：

只有边界条件而
无初始条件的定解问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u\big|_{S} = f(M) \end{cases}$$

3. 混合问题：

既有边界条件
又有初始条件的定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ 0 < x < l, t > 0 \\ u_x\big|_{x=0} = 0, \ u_x\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

定解问题的适定性

适定性： 定解问题的解存在,唯一, 稳定.

总的原则是：

(1) 初始条件应该完全描写初始时刻($t=0$时)介质内部及边界上任意一点的状况.

- 方程中含有关于t的n阶偏导数，则需要给出n个初始条件.

(2) 边界条件应该完全描写边界上各点在任一时刻($t \geqslant 0$) 的状况.

- 同一边界上不能加上矛盾的多种边界条件，每一部分边界都要有边界情况的描述.

§1. 数学物理中的偏微分方程

Example4 求解偏微分方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

解： 令$\xi = x + at, \eta = x - at$, 代入方程得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

此方程的通解是 $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$
原方程的通解是$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$,

$f(x), g(x)$有二阶连续导数.

无界弦的自由振动

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

方程的通解是$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$, $f(x), g(x)$有二阶连续导数.

物理解释:

- 通解由两个波组成;
- $f(x+at)$表示沿x轴向左传播的波，$t=0$时，波形为$f(x)$然后以速度a向左传播，波形不变;
- $g(x-at)$表示沿x轴向右传播的波，$t=0$时，波形为$g(x)$然后以速度a向右传播，波形不变;
- 单独的$f(x+at), g(x-at)$都是方程的解，各自独立传播互不干扰.

无界弦的自由振动初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (-\infty < x < +\infty,\ t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

解： 方程通解是$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$, 代入初值条件

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) + g(x) = \varphi(x) & (1) \\ u_t(x,0) = af'(x) - ag'(x) = \psi(x) & (2) \end{cases}$$

对（2）积分得$af(x) - ag(x) = \int_0^x \psi(s)\mathrm{d}s + C \qquad (3)$

初值问题的解是

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\mathrm{d}s.$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s.$$

解的物理解释:

1. 第一项表示由初位移$\varphi(x)$激发的行波，分成相等的两部分，独立地向左右传播，速度为a;
2. 第二项表示由初速度$\psi(x)$激发的行波, 在t时刻对称地扩展到$[x-at,x+at]$范围，传播速度也是a.
3. d'Alembert 公式表示左右行波的叠加，方法称为行波法.

Example 9 (求解Cauchy问题)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = \sin x, & u_t(x,0) = x^2 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sin x \cos at + \frac{t}{3}(3x^2 + a^2t^2)$$

Example 10 (求解定解问题)

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + \cos x, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0, & u_t(x,0) = 4x \end{cases}$$

$$u(x,y) = \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos x \cos 2t + 4xt$$

Example 11

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (-\infty < x < +\infty,\ t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

若$\varphi(x), \psi(x)$均是奇函数，则$u(x,t)$关于x是奇函数，$u(0,t) = 0$.

Example 12

求解半无界弦自由振动定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (0 < x < +\infty, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$$

思考：边界条件是$u_x(0,t) = 0$的半无界波动问题该如何求解？

§1. 数学物理中的偏微分方程

一、叠加原理

在物理学中研究问题时，常将几种不同原因综合所产生的效果，用这些不同原因单独产生的效果的累加来代替，这就是叠加原理。

在数学上，偏微分运算具有线性性质，叠加原理对应于线性方程或线性定解条件.

例如

$$\boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)} \Longleftrightarrow \boxed{\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] u = f(x,t)}$$

记$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$，方程改写为 $Lu = f(x,t)$，

L是一个线性微分算子。

Definition 13

L是微分算子，若对满足可微性的函数u, v及常数c_1, c_2满足$L(c_1 u + c_2 v) = c_1 Lu + c_2 Lv$，则称$L$是线性微分算子.

(1) 若u_1, u_2都是线性齐次微分方程$L[u] = 0$的解，c_1, c_2是任意常数，则$c_1 u_1 + c_2 u_2$也是方程的解.

$$L[c_1 u_1 + c_2 u_2] = c_1 L[u_1] + c_2 L[u_2] = 0$$

(2) 若u_1, u_2都是线性非齐次微分方程$L[u] = f(x)$的解, 则$u_1 - u_2$满足相应的齐次方程.

$$L[u_1 - u_2] = L[u_1] - L[u_2] = 0$$

非齐次方程的通解=非齐次方程的任一特解+齐次方程的通解

Theorem 14

设u_i满足线性微分方程（或线性定解条件）

$$Lu_i = f_i,\ (i = 1, 2, \cdots, n),$$

则$u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$满足线性微分方程（或线性定解条件）

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i.$$

Theorem 15

设u_i满足线性微分方程（或线性定解条件）

$$Lu_i = f_i,\ (i = 1, 2, \cdots,)$$

又设级数$u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$收敛，并且满足算子$L$中出现的偏导数与求和交换次序的条件（相应偏导数连续且级数一致收敛），则u满足线性微分方程（或线性定解条件）

$$Lu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i.$$

Theorem 16

设$u(M,M_0)$满足线性微分方程（或线性定解条件）

$$Lu(M,M_0)=f(M,M_0),\ (M_0\in V)$$

M表示自变量组，M_0是参数组，
又设积分$u(M)=\int_V u(M,M_0)\mathrm{d}M_0$收敛，并且满足算子$L$中出现的偏导数与积分交换次序的条件，
则$u(M)$满足线性微分方程（或线性定解条件）

$$Lu=\int_V f(M,M_0)\mathrm{d}M_0.$$

§1.5 叠加原理和齐次化原理

无界弦的受迫振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

分析：

$$\boxed{(I)\ v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t)}$$

$$\boxed{(II)\ \begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} \\ w(x,0) = \varphi(x) - v(x,0),\ w_t(x,0) = \psi(x) - v_t(x,0) \end{cases}}$$

$v(x,t), w(x,t)$分别是问题$(I), (II)$的解，则$v+w$满足的方程和定解条件. 特解$v(x,t)$不易求出，需要考虑通用的方法.

二、齐次化原理

纯受迫振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

的解为$u(x,t) = \displaystyle\int_0^t w(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$, 其中$w(x,t;\tau)$满足的方程是

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, & (-\infty < x < +\infty, t > \tau) \\ w\big|_{t=\tau} = 0,\ w_t\big|_{t=\tau} = f(x,\tau) \end{cases}$$

证明： $u\big|_{t=0} = \int_0^0 w(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau = 0$

$$u_t\big|_{t=0} = \left[w(x,t;t) + \textstyle\int_0^t w_t(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau\right]\Big|_{t=0} = 0$$

$$u_{tt} = w_t(x,t;\tau)\big|_{t=\tau} + \int_0^t w_{tt}(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau = f(x,t) + a^2 u_{xx}$$

下面求解$w(x,t;\tau)$.

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, & (-\infty < x < +\infty, t > \tau) \\ w\big|_{t=\tau} = 0,\ w_t\big|_{t=\tau} = f(x,\tau) \end{cases}$$

作变量代换$T = t - \tau$, 则方程化为

$$\begin{cases} w_{TT} = a^2 w_{xx}, & (-\infty < x < +\infty, T > 0) \\ w\big|_{T=0} = 0,\ w_T\big|_{T=0} = f(x,\tau) \end{cases}$$

由达朗贝尔公式，此方程的解是

$$w(x,T) = \frac{1}{2a}\int_{x-aT}^{x+aT} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi$$

$$w(x,t;\tau) = \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi$$

无界弦的受迫振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

$$(I)\ \begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ v(x,0) = \varphi(x),\ v_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

$$(II)\ \begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} + f(x,t), & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ w(x,0) = 0,\ w_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

利用叠加原理及达朗贝尔公式，可得初值问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &+ \frac{1}{2a}\int_0^t \left(\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

$$\boxed{(II)\ \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = 0 \end{cases}}$$

目标： 将非齐次方程问题转化为齐次方程问题。

分析$f(x,t)$的作用情况：

$f(x,t)$是作用在弦上单位质量的外力，
$u(x,t)$是在此外力连续作用下的位移。

对$[0,t]$中任取一小段时刻$[\tau, \tau+\Delta\tau]$分析

$$\begin{array}{ll} f(x,t) = & \sum f(x,\tau), 0<\tau<t \\ \downarrow & \downarrow \\ u(x,t) = & \lim\limits_{\Delta\tau\to 0} \sum\limits_{\tau} w(x,t;\tau) \end{array}$$

$f(x,t)$在$[\tau,\tau+\Delta\tau]$时间微元内引起的振动$w(x,t;\tau)$满足

$$\begin{cases} w_{tt}=a^2 w_{xx}, & t>\tau, -\infty<x<+\infty \\ w\Big|_{t=\tau}=0,\ w_t\Big|_{t=\tau}=f(x,\tau)\Delta\tau \end{cases}$$

设$w(x,t;\tau)=v(x,t,\tau)\Delta\tau$

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2 v_{xx}, & t>\tau, -\infty<x<+\infty \\ v\Big|_{t=\tau}=0,\ v_t\Big|_{t=\tau}=f(x,\tau) \end{cases}$$

此方程的解为$v(x,t)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi.$

(II)的解为$u(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t\left(\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\tau$

定理：齐次化原理1

设L是线性微分算子，$w(t,\mathbf{M};\tau)$满足齐次方程的Cauchy问题

$$\begin{cases} w_{tt} = Lw, & t > \tau, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^3 \\ w\Big|_{t=\tau} = 0,\ w_t\Big|_{t=\tau} = f(\mathbf{M},\tau) \end{cases}$$

则非齐次方程的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_{tt} = Lu + f(\mathbf{M},t), & t > 0, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^3 \\ u\Big|_{t=0} = 0,\ u_t\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解为 $u = \displaystyle\int_0^t w(t,\mathbf{M};\tau)\mathrm{d}\tau.$

证明： $u\big|_{t=0} = \int_0^0 w(t, \mathbf{M}; \tau)\mathrm{d}\tau = 0$

$$u_t = w(t, M; t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}\mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}\mathrm{d}\tau, \quad u_t\big|_{t=0}$$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \frac{\partial w}{\partial t}(t, M; t) + \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\mathrm{d}\tau + f(M, t) = \int_0^t Lw(t, M; \tau)\mathrm{d}\tau + f(t, M) \\ &= L\int_0^t w(t, M; \tau)\mathrm{d}\tau + f(t, M) = Lu + f(t, M) \end{aligned}$$

定理：齐次化原理2

设L是线性微分算子，$w(t,\mathbf{M};\tau)$满足齐次方程的Cauchy问题

$$\begin{cases} w_t = Lw, & t > \tau, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^3 \\ w\Big|_{t=\tau} = f(\mathbf{M},\tau) \end{cases}$$

则非齐次方程的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_t = Lu + f(\mathbf{M},t), & t > 0, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^3 \\ u\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解为 $u = \int_0^t w(t,\mathbf{M};\tau)\mathrm{d}\tau.$

证明： $u\big|_{t=0} = \int_0^0 w(t, \mathbf{M}; \tau)\mathrm{d}\tau = 0$

$$
\begin{aligned}
u_t &= w(t, M; t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(t, M; \tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(t, M; \tau)\mathrm{d}\tau + f(M, t) = \int_0^t Lw(t, M; \tau)\mathrm{d}\tau + f(t, M) \\
&= L\int_0^t w(t, M; \tau)\mathrm{d}\tau + f(t, M) = Lu + f(t, M)
\end{aligned}
$$

例1

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + x + at, \quad (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

解： 设$w(t,x;\tau)$满足$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, \quad (t > \tau, -\infty < x < +\infty) \\ w(\tau,x;\tau) = 0,\ w_t(\tau,x;\tau) = x + a\tau \end{cases}$

作变量代换$T = t-\tau$，$\begin{cases} w_{TT} = a^2 w_{xx}, \quad (T > 0, -\infty < x < +\infty) \\ w\big|_{T=0} = 0,\ w_T\big|_{T=0} = x + a\tau \end{cases}$

利用达朗贝尔公式得

$$w(x,T) = \frac{1}{2a}\int_{x-aT}^{x+aT} \xi + a\tau \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2a}(2axT + 2a^2\tau T)$$

原方程的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t 2ax(t-\tau) + 2a^2\tau(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{6}at^3$$

例2

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = -1, \quad (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = x \end{cases}$$

解： 根据叠加原理问题可转化为

$$(I) \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0, \quad (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ v(x,0) = \sin x,\ v_t(x,0) = x \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = -1, \quad (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ w(x,0) = 0,\ w_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

问题(I)的解是

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \xi \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t)) + xt \end{aligned}$$

问题(II)的解是

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= \int_0^t \frac{1}{2}\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} -1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t -2(t-\tau)\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{2}t^2
\end{aligned}
$$

原问题的解为

$$
u(x,y) = \frac{1}{2}(\sin(x+t)+\sin(x-t)) + xt - \frac{1}{2}t^2
$$

例3

求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(t,x) \quad (t>0, x\in\mathbb{R}, a>0\text{常数}) \\ u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

解： 由叠加原理$u = u_1 + u_2$, u_1, u_2分别满足

$$(I) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + a\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad (t>0, x\in\mathbb{R}, a>0\text{常数}) \\ u_1(t,x)\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + a\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = f(t,x) \quad (t>0, x\in\mathbb{R}, a>0\text{常数}) \\ u_2(t,x)\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解(I),做变量代换$\xi = x - at, \eta = t$, 方程化为$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0$

积分可得: $u_1 = g(\xi) = g(x - at)$, $g(x)$是任意连续可导函数.

代入初值条件得: $\quad u_1 = \varphi(x - at)$.

解(II),由冲量原理, $\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + a\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (t > \tau, x \in \mathbb{R}, a > 0\text{常数}) \\ w(t,x)\big|_{t=\tau} = f(\tau, x) \end{cases}$

解为$w(t,x;\tau) = f(\tau, x - a(t-\tau))$

所以$u_2 = \int_0^t f(\tau, x - a(t-\tau))\mathrm{d}\tau$.

原问题的解是$u(t,x) = \varphi(x - at) + \int_0^t f(\tau, x - a(t-\tau))\mathrm{d}\tau$.