1 积分变换法

1.1 傅里叶变换法

设$f(x)$ 为$(-\infty,+\infty)$ 的逐段连续函数，则傅里叶变换定义为

$$F[f]=F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx.$$

一般来说，我们会要求f 是绝对可积的，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty.$$

如果需要的话，我们一般还会假设$f(\pm\infty)=0,f'(\pm\infty)=0\cdots$，我们默认需要的时候这些条件都是自动成立。（在广义下很多条件都可以无视，所以一般形式演算流程没有错误的话，结果也不会有错误。）在绝对可积性假设下，$F(\lambda)$ 是$(-\infty,+\infty)$ 上的有界连续函数。并且有反演公式

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda.$$

特别地，如果f 还是连续的，则

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda.$$

傅里叶变换有很多和拉普拉斯变换相似的性质。以下列出部分性质。

(1) 线性性质：$F[C_1f+C_2g]=C_1F[f]+C_2F[g]$；

(2) 频移性质：$F[f(x)e^{i\lambda_0x}]=F(\lambda+\lambda_0)$；

$$F[f(x)e^{i\lambda_0x}]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda_0x}e^{i\lambda x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i(\lambda+\lambda_0)x}dx=F(\lambda+\lambda_0).$$

(3) 位移性质：$F[f(x+a)]=F(\lambda)\times e^{-i\lambda a}$；

$$F[f(x+a)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x+a)e^{i\lambda x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda(x-a)}dx=e^{-i\lambda a}F(\lambda).$$

(4) 相似性质：$a>0$, $F[f(ax)]=\frac{1}{a}F(\frac{\lambda}{a})$；

$$F[f(ax)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(ax)e^{i\lambda x}dx=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda\frac{x}{a}}dx=\frac{1}{a}F(\frac{\lambda}{a}).$$

(5) 微分性质：$F[f^{(n)}(x)]=(-i\lambda)^nF(\lambda)$；

仅需说明$n=1$ 的情形即可：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)e^{i\lambda x}dx=f(x)e^{i\lambda x}|_{-\infty}^{\infty}-i\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx=-i\lambda F(\lambda).$$

(6) 卷积性质：$F[f*g]=F[f]\times F[g]$。这里的卷积定义为

$$f*g=\int_{-\infty}^{\infty}f(s)g(x-s)ds.$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(s)g(x-s)ds\right)e^{i\lambda x}dx&=\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(x-s)e^{i\lambda x}dxds\right)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(s)F[g]e^{i\lambda s}ds=F[f]F[g].\end{aligned}$$

常用的是它的反变换，

$$F^{-1}[fg]=F^{-1}[f]*F^{-1}[g].$$

一些经典的傅里叶变换与反变换：设$a>0$，则：

$$F[e^{-ax^2}]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}e^{i\lambda x}dx=e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\sqrt{a}x-\frac{\lambda}{2\sqrt{a}}i)^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}.$$

反之

$$F^{-1}[e^{-a\lambda^2}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a\lambda^2}e^{-i\lambda x}dx=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

高维傅里叶变换：设$f(x,y,z)$ 为$\mathbb{R}^3$ 上的逐段连续函数，满足

$$\int\int\int|f|dxdydz<\infty.$$

则有傅里叶变换

$$F(\lambda,\mu,\nu)=\int\int\int f(x,y,z)e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)}dxdydz.$$

傅里叶反变换为

$$f(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\int F(\lambda,\mu,\nu)e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)}d\lambda d\mu d\nu.$$

有类似的微分性质：

$$F[\frac{\partial f}{\partial x}]=-i\lambda F[f],F[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}]=-\lambda^2F[f].$$

特别地：

$$F[\Delta_3 f]=-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)F[f].$$

例子1. 用傅里叶变换求解热传导方程的初始问题。

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx},-\infty<x<+\infty,t>0\\u(0,x)=\varphi(x)\end{cases}$$

解. 设

$$\bar{u}(t,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t,x)e^{i\lambda x}dx.$$

则

$$\bar{u}_t=-\lambda^2a^2\bar{u}.$$

$$\bar{u}(0,\lambda) = F[\varphi].$$

得

$$\bar{u}(t,x) = C(\lambda)e^{-\lambda^2 a^2 t}.$$

由初始条件

$$C(\lambda) = F[\varphi].$$

所以

$$\bar{u} = F[\varphi]e^{-\lambda^2 a^2 t}.$$

所以

$$u(t,x) = F^{-1}[F[\varphi]] * F^{-1}[e^{-\lambda^2 a^2 t}] = \varphi * \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\right) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-s)e^{-\frac{s^2}{4a^2 t}}ds.$$

稍微变换一下：

例子2. 用傅里叶变换求解热传导方程的初始问题。

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(0,x) = e^{-x^2} \end{cases}$$

解. 设

$$\bar{u}(t,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)e^{i\lambda x}dx.$$

则

$$\bar{u}_t = -\lambda^2\bar{u} + \bar{u}.$$

$$\bar{u}(0,\lambda) = F[e^{-x^2}].$$

得

$$\bar{u}(t,\lambda) = C(\lambda)e^{-(\lambda^2-1)t}.$$

由初始条件

$$C(\lambda) = F[e^{-x^2}].$$

所以

$$\bar{u} = F[e^{-x^2}]e^{-(\lambda^2-1)t}.$$

所以

$$u(t,x) = F^{-1}[F[\varphi]] * F^{-1}[e^{-(\lambda^2-1)t}] = e^{-x^2} * \left(\frac{e^t}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = \frac{e^t}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-s)^2}e^{-\frac{s^2}{4t}}ds.$$

最后结果

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{t-\frac{1}{1+4t}x^2}.$$

例子3. 解定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

解. 设

$$\bar{u}(t,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t,x)e^{i\lambda x}dx.$$

则

$$\bar{u}_{tt}+a^2\lambda^4\bar{u}=0.$$

$$\bar{u}(0,\lambda)=F[\varphi],$$

$$\bar{u}_t(0,\lambda)=0.$$

得

$$\bar{u}(t,x)=C_1(\lambda)\cos(a\lambda^2t)+C_2(\lambda)\sin(a\lambda^2t).$$

由初始条件

$$\begin{cases} C_1(\lambda)=F[\varphi] \\ C_2(\lambda)=0. \end{cases}$$

所以

$$\bar{u}=F[\varphi]\cos(a\lambda^2t).$$

所以

$$u(t,x)=F^{-1}[F[\varphi]]*F^{-1}[\cos(a\lambda^2t)].$$

需要计算$F^{-1}[\cos(a\lambda^2t)]$, 即求

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ia\lambda^2t-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}e^{-i\frac{x^2}{4at}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iat(\lambda-\frac{x}{2at})^2}d\lambda=\frac{1}{2\pi}e^{-i\frac{x^2}{4at}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iat\lambda^2}d\lambda.$$

要计算$\int_{-\infty}^{\infty}e^{iat\lambda^2}d\lambda$. 即

$$2\int_0^{\infty}e^{iat\lambda^2}d\lambda=2e^{\frac{\pi}{4}i}\int_0^{\infty}e^{-at\mu^2}d\mu=\sqrt{\frac{\pi}{at}}e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

所以

$$F^{-1}[\cos(a\lambda^2t)]=Re\frac{1}{2\pi}e^{-i\frac{x^2}{4at}}\times\sqrt{\frac{\pi}{at}}e^{\frac{\pi}{4}i}=\frac{\cos(\frac{x^2}{4at})+\sin(\frac{x^2}{4at})}{2\sqrt{2\pi at}}.$$

所以由傅里叶变换的卷积性质，得

$$u(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-s)\frac{\cos(\frac{s^2}{4at})+\sin(\frac{s^2}{4at})}{2\sqrt{2\pi at}}ds.$$

正弦变换与余弦变换：当我们只有半弦得时候，我们可以用正弦变换或者余弦变换。设f为$[0,\infty)$ 上的绝对可积函数，正余弦变换分别定义为：

$$f_s(\lambda)=\int_0^{\infty}f(x)\sin(\lambda x)dx;$$

$$f_c(\lambda)=\int_0^{\infty}f(x)\cos(\lambda x)dx.$$

f_s 为奇函数，f_c 为偶函数。相应的正余弦反变换分别定义为：

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_s(x)\sin(\lambda x)d\lambda;$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_c(x)\cos(\lambda x)d\lambda.$$

正余弦变换可以看做傅里叶变换的某种变形，实际上我们将f 偶展开，设

$$g(x)=\begin{cases} f(x), x\geq 0\\ f(-x), x<0.\end{cases}$$

则

$$F[g]=\int_{-\infty}^\infty g(x)e^{i\lambda x}dx=2\int_0^\infty f(x)\cos(\lambda x)dx=2f_c(\lambda).$$

反之，对于$x\geq 0$，有

$$f(x)=g(x)=F^{-1}[F[g]]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty 2f_c(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_c(\lambda)\cos(\lambda x)d\lambda.$$

同样对于正弦变换，我们可以做奇展开，设

$$h(x)=\begin{cases} f(x), x\geq 0\\ -f(-x), x<0.\end{cases}$$

则

$$F[h]=\int_{-\infty}^\infty h(x)e^{i\lambda x}dx=2i\int_0^\infty f(x)\sin(\lambda x)dx=2if_s(\lambda).$$

反之，对于$x\geq 0$，有

$$f(x)=h(x)=F^{-1}[F[h]]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty 2if_s(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_s(\lambda)\sin(\lambda x)d\lambda.$$

正余弦变换有如下微分性质

$$(f')_s=-\lambda f_c;$$

$$(f')_c=\lambda f_s-f(0).$$

实际上

$$(f')_s=\int_0^\infty f'(x)\sin(\lambda x)dx=f(x)\sin(\lambda x)|_0^\infty-\lambda\int_0^\infty f(x)\cos(\lambda x)dx=-\lambda f_c.$$

$$(f')_c=\int_0^\infty f'(x)\cos(\lambda x)dx=f(x)\cos(\lambda x)|_0^\infty+\lambda\int_0^\infty f(x)\sin(\lambda x)dx=\lambda f_s-f(0).$$

所以

$$(f'')_s=-\lambda(f')_c=-\lambda^2 f_s+\lambda f(0),$$

$$(f'')_c=\lambda(f')_s-f'(0)=-\lambda^2 f_c-f'(0).$$

特别地，如果$f(0)=0$，则$(f')_c=\lambda f_s$,$(f'')_s=-\lambda(f')_c=-\lambda^2 f_s$。如果$f'(0)=0$,则$(f'')_c=-\lambda^2 f_c$。

例子4. 用余弦变换解定解问题：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, x > 0, t > 0 \\ u(0, x) = 0, u_x(t, 0) = Q, \\ u(t, +\infty) = u_x(t, +\infty) = 0 \end{cases}$$

解. 设

$$\bar{u}(t, \lambda) = \int_0^\infty u(t, x) \cos(\lambda x) dx.$$

则

$$(u_{xx})_c = \lambda (u_x)_s - u_x(t, 0) = -\lambda^2 \bar{u} - Q.$$

即

$$\bar{u}_t = -\lambda^2 a^2 \bar{u} - a^2 Q.$$

先找一个特解$v(t, \lambda) = -\frac{Q}{\lambda^2}$.再令$w(t, \lambda) = \bar{u} - v$。得到

$$w_t = -\lambda^2 a^2 w.$$

得到通解$w(t, \lambda) = C(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t}$，所以

$$\bar{u} = C(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t} - \frac{Q}{\lambda^2}.$$

令$t = 0$ 得到

$$C(\lambda) = \frac{Q}{\lambda^2}.$$

所以

$$\bar{u} = \frac{Q}{\lambda^2} e^{-\lambda^2 a^2 t} - \frac{Q}{\lambda^2} = -a^2 Q \int_0^t e^{-\lambda^2 a^2 \tau} d\tau.$$

用反余弦变换

$$\begin{aligned} u = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(-a^2 Q \int_0^t e^{-\lambda^2 a^2 \tau} d\tau \right) \cos(\lambda x) d\lambda &= -\frac{2a^2 Q}{\pi} \int_0^t \int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 \tau} \cos(\lambda x) d\lambda d\tau \\ &= -\frac{2a^2 Q}{\pi} \int_0^t \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 \tau}} d\tau \\ &= -\frac{aQ}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 \tau}} d\tau. \end{aligned}$$

做变量替换$y = \sqrt{\frac{x^2}{4a^2 \tau}}$，则$\tau = \frac{x^2}{4a^2 y^2}$。带入得

$$u = -\frac{xQ}{\sqrt{\pi}} \int_{+\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} \frac{1}{y^2} e^{-y^2} dy.$$

1.2 拉普拉斯变换法

拉普拉斯变换：设$f(t)$ 为定义再$[0,\infty)$ 上的分段连续函数，f 的拉普拉斯变换定义为

$$L[f]=\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt.$$

$L[f](p)$ 一般是定义在$Rep>c$ 上。f 也可以看作是$(-\infty,+\infty)$ 上得函数，其在$(-\infty,0)$ 上得取值为零。设$p=\sigma+i\lambda$，则拉普拉斯变换和傅里叶变换有如下关系

$$L[f]=L(\sigma+i\lambda)=F[f(t)e^{-\sigma t}].$$

所以

$$f(t)e^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}L(\sigma+i\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda.$$

拉普拉斯变换得反演公式为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}L(\sigma+i\lambda)e^{\sigma+i\lambda t}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty}L(p)e^{pt}dp$$

特别地，如果$\lim_{p\to\infty}L(p)=0$，则有

$$f(t)=\sum Res(L(p)e^{pt},p_i).$$

其中p_i 为左半平面$Rep<c$ 的所有奇点。

和傅里叶变换一样，拉普拉斯变换也有类似性质，包括

(1) 线性性质：$L[C_1f+C_2g]=C_1L[f]+C_2L[g]$；

(2) 频移性质：$L[f(t)e^{\lambda t}]=L(p-\lambda)$；

$$L[f(t)e^{\lambda_0 t}]=\int_0^{\infty}f(t)e^{-(p-\lambda_0)t}dt=L(p-\lambda_0).$$

(3) 延迟性质：$\tau>0$，$L[f(t-\tau)h(t-\tau)]=L(p)\times e^{-p\tau}$，其中$h(t)=1,t\geq 0;h(t)=0,t<0$；

$$L[f(t-\tau)]=\int_0^{\infty}f(t-\tau)e^{-pt}dt=e^{-p\tau}\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt=e^{-p\tau}L(p).$$

(4) 相似性质：$a>0,\ L[f(at)]=\frac{1}{a}L(\frac{p}{a})$；

$$L[f(at)]=\int_0^{\infty}f(at)e^{-pt}dt=\frac{1}{a}\int_0^{\infty}f(t)e^{-p\frac{t}{a}}dt=\frac{1}{a}L(\frac{p}{a}).$$

(5) 微分性质：$L[f^{(n)}(t)]=p^nL(p)-p^{n-1}f(0+)-p^{n-2}f'(0+)-\cdots$.

仅需说明$n=1$ 的情形即可：

$$\int_0^{\infty}f'(t)e^{-pt}dt=f(t)e^{-pt}|_0^{\infty}+p\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-pt}dt=pL[f]-f(0+).$$

(6) 像函数微分：$L[f(t)]^{(n)} = L[(-t)^n f]$.

$$L[f(t)]^{(n)} = \int_0^\infty f(t)\frac{\partial^n e^{-pt})}{\partial p^n}dt = L[(-t)^n f].$$

(7) 本函数积分：$L[\int_0^t f(s)ds] = \frac{L[f]}{p}$.

(8) 卷积性质：$L[f*g] = L[f]\times L[g]$。这里的卷积定义为

$$f*g = \int_0^t f(s)g(t-s)ds.$$

常用的是它的反变换，

$$L^{-1}[fg] = L^{-1}[f]*L^{-1}[g].$$

我们可以计算一些简单的拉普拉斯变换。

$$L[e^{\lambda t}] = \frac{1}{p-\lambda};$$

$$L[\frac{t^n}{n!}] = \frac{1}{p^{n+1}};$$

$$L[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2};$$

$$L[\cos(\omega t)] = \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

例子5. 解混合问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + f(t), x>0, t>0 \\ u(0,x) = 0, u_t(0,x) = 0, \\ u(t,0) = 0, u(t,+\infty) \text{ 有界}. \end{cases}$$

解. 做拉普拉斯变换，设

$$U(p,x) = \int_0^\infty u(t,x)e^{-pt}dt.$$

由微分关系

$$p^2U(p,x) = a^2U_{xx}(p,x) + L[f(t)].$$

有特解$V(p,x) = \frac{L[f(t)]}{p^2}$。设$W(p,x) = U(p,x) - V(p,x)$，得到

$$p^2W(p,x) = a^2W_{xx}(p,x).$$

所以

$$W(p,x) = C_1(p)e^{\frac{px}{a}} + C_2(p)e^{-\frac{px}{a}}.$$

所以

$$U(p,x) = \frac{L[f(t)]}{p^2} + C_1(p)e^{\frac{px}{a}} + C_2(p)e^{-\frac{px}{a}}$$

因为$u(t,+\infty)$ 有界, 所以$U(p,+\infty)$ 也有界。所以

$$U(p,x) = \frac{L[f(t)]}{p^2} + C_2(p)e^{-\frac{px}{a}}.$$

令$x=0$，得$C_2(p)=-\frac{L[f(t)]}{p^2}$。所以

$$U(p,x)=\frac{L[f(t)]}{p^2}-\frac{L[f(t)]}{p^2}e^{-\frac{px}{a}}.$$

做拉普拉斯逆变换：

$$L^{-1}[\frac{L[f(t)]}{p^2}]=L^{-1}[L[f(t)]]*L^{-1}[\frac{1}{p^2}]=\int_0^t f(t-s)sds.$$

由延迟定理

$$L^{-1}[\frac{L[f(t)]}{p^2}e^{-\frac{px}{a}}]=\int_0^{t-\frac{x}{a}} f(t-\frac{x}{a}-s)sds\times h(t-t-\frac{x}{a}).$$

整理得：

$$u(t,x)=\begin{cases}\int_0^t f(t-s)sds, t<\frac{x}{a}\\ \int_0^t f(t-s)sdst-\int_0^{t-\frac{x}{a}} f(t-\frac{x}{a}-s)sds, t\geq\frac{x}{a}.\end{cases}$$

例子6. 一条半无限长的杆，无热源，温度有界，端点的温度变化已知，杆的初始温度为零，求杆的温度变化。

解. 首先写出定解问题：

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}, x>0, t>0\\ u(t,0)=f(t)\\ u(0,x)=0, u(t,+\infty)\ \text{有界}.\end{cases}$$

做拉普拉斯变换，设

$$U(p,x)=\int_0^\infty u(t,x)e^{-pt}dt.$$

由微分关系

$$pU(p,x)=a^2U_{xx}(p,x).$$

所以

$$U(p,x)=C_1(p)e^{\frac{\sqrt{p}x}{a}}+C_2(p)e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}.$$

因为$u(t,+\infty)$ 有界, 所以$U(p,+\infty)$ 也有界。所以

$$U(p,x)=C_2(p)e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}.$$

令$x=0$，得$C_2(p)=L[f]$。所以

$$U(p,x)=L[f]e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}.$$

做拉普拉斯逆变换：

$$u(t,x)=f*L^{-1}[e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a}}]=f*\left(\frac{x}{2a\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{x^2}{4at}}\right)=\int_0^t f(t-\tau)\frac{x}{2a\sqrt{\pi\tau^3}}e^{-\frac{x^2}{4a\tau}}d\tau.$$

例子7. 解以下定解问题：

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, 0<x<l, t>0\\ u(t,0)=0, u_x(t,l)=A\sin(\omega t),\\ u(0,x)=0, u_t(0,x)=0.\end{cases}$$

这里$\omega\neq\frac{2k-1}{2l}a\pi$,$(k=1,2,3,\cdots)$.

解. 做拉普拉斯变换

$$U(p,x)=\int_0^\infty u(t,x)e^{-pt}dt.$$

以及边界条件

$$U(p,0)=0,U(p,l)=L[A\sin(\omega t)].$$

则

$$p^2U=a^2U_{xx}.$$

解得

$$U(p,x)=C_1(p)e^{\frac{p}{a}x}+C_2(p)e^{-\frac{p}{a}x}.$$

代入边界条件，有

$$\begin{cases} C_1(p)+C_2(p)=0, \\ C_1(p)e^{\frac{p}{a}l}-C_2(p)e^{-\frac{p}{a}l}=\frac{a}{p}L[A\sin(\omega t)]. \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} C_1(p)=\frac{e^{\frac{p}{a}l}}{e^{\frac{2p}{a}l}+1}\frac{a}{p}L[A\sin(\omega t)], \\ C_2(p)=-\frac{e^{\frac{p}{a}l}}{e^{\frac{2p}{a}l}+1}\frac{a}{p}L[A\sin(\omega t)]. \end{cases}$$

所以

$$U(p,x)=\frac{e^{\frac{p}{a}l}}{e^{\frac{2p}{a}l}+1}\frac{a}{p}L[A\sin(\omega t)]\left(e^{\frac{px}{a}}-e^{-\frac{p}{a}x}\right)=\frac{Aa\omega sh(\frac{p}{a}x)}{p(p^2+\omega^2)ch(\frac{pl}{a})}.$$

它的奇点为

$$0,\pm\omega i,\pm\frac{2k+1}{2l}a\pi i,k=0,1,\cdots.$$

其中0 为可去奇点。所以

$$u(t,x)=\sum_{p_i}Res(\frac{Aa\omega sh(\frac{p}{a}x)}{p(p^2+\omega^2)ch(\frac{pl}{a})},p_i)=\text{略}.$$