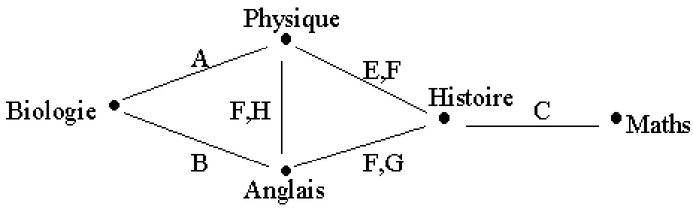
Coloration d'un graphe

Lors d'examens de rattrapage, 8 étudiants (A, B, C, D, E, F, G et H) doivent repasser différentes épreuves se déroulant chacune sur une demi-journée. La répartition des épreuves par étudiant est la suivante :

- Biologie : A et B,
- Mathématiques : C et D,
- Histoire : C, E, F et G,
- Physique : A, E, F et H,
- Anglais : B, F, G et H.

Comment organiser cette session d'examens pour qu'elle soit la plus courte possible ?

On peut représenter ce problème sous forme d'un graphe dont les sommets sont les disciplines et dont les arêtes relient les sommets ayant des étudiants en commun (examens ne pouvant pas se dérouler en même temps) :



Ce problème se résout à l'aide de la coloration des sommets du graphe.

1. Coloration des sommets

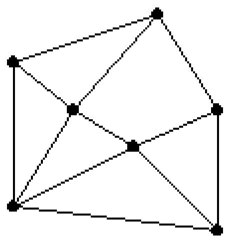
Soit G=(X,U) un graphe simple, orienté ou non, sans sommet isolé.

On appelle **stable** une partie S de X constituée de sommets deux à deux non adjacents.
Dans l'exemple précédent de la répartition des examens, {Bio, His}, {Ang, Mat}, {Phy, Mat} et {Bio, Mat} sont des stables. Dans un graphe sans boucle, les singletons étant considérés comme des stables.

Un **stable maximum** est un stable de cardinal maximum. Dans l'exemple précédent, il est impossible de trouver un stable de cardinal strictement supérieur à 2, donc les 4 stables cités ci-dessus sont maximum.

On appelle **coloration des sommets** de G, toute application de l'ensemble des sommets X dans un ensemble C, appelé ensemble des **couleurs**, telle que deux sommets adjacents soient toujours de couleurs différentes.

1). Colorier le graphe suivant de façon à respecter le fait que deux sommets adjacents soient toujours de couleurs différentes :



Propriété :
Une coloration des sommets d'un graphe G n'est autre qu'une partition de l'ensemble des sommets en stables.

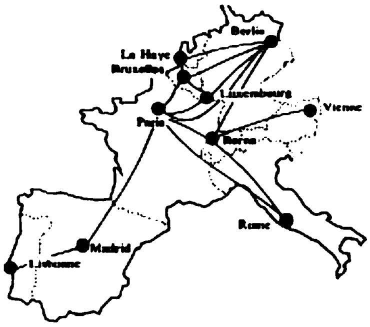
Le **nombre chromatique** de G est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour une coloration des sommets. On le note χ**(G)**.

Le problème qui consiste à trouver une coloration des sommets avec $\chi(G)$ couleurs est un problème de la classe des problèmes NP.

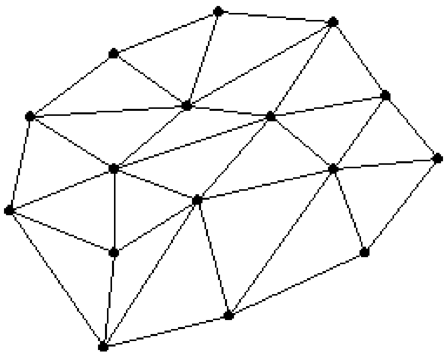
<u>Théorème</u> :
Soit G un graphe sans boucle. Si le maximum des degrés de G est k alors $\chi(G) \leq k+1$.

<u>Exemple</u> :
Reprenons l'exemple ci-dessus de la session d'examen : le but est de mettre en parallèle un maximum d'épreuves de façon à réduire au mieux la période des examens. Pour cela, il suffit de colorier chacun des sommets du graphe en utilisant une même couleur pour les sessions en parallèle et des couleurs différentes pour deux sommets voisins (sessions forcement disjointes); et ce, en utilisant le moins de couleurs possible.
Le nombre chromatique de G correspond au nombre de demi-journées d'examens nécessaires.

2). Combien de couleurs faut-il, au maximum, pour colorier une carte géographique ? :



3). Essayer de colorier les sommets du graphe ci-dessous avec le moins de couleurs possibles :



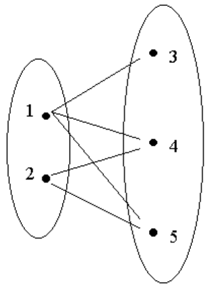
Montrer qu'il n'est pas possible de trouver une coloration avec moins de 3 couleurs ?
Que faut-il conclure pour $\chi(G)$?

<u>Remarque</u> :
Réaliser le coloriage des sommets d'un graphe avec le moins de couleurs possibles, revient à partitionner l'ensemble des sommets du graphe en stables de taille maximum.

4). Proposer une modélisation par les graphes du problème du positionnement des 8 reines sur un échiquier et énoncer le problème à résoudre en terme de graphe.

2. Graphe biparti

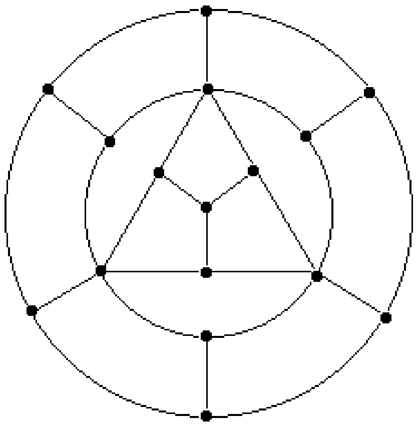
G=(X,U) est un graphe **biparti** si on peut diviser les sommets en deux sous-ensembles X_1 et X_2 tels qu'il n'existe aucun arc entre les sommets de X_1 et aucun arc entre les sommets de X_2. On le note G=(X_1, X_2,U).



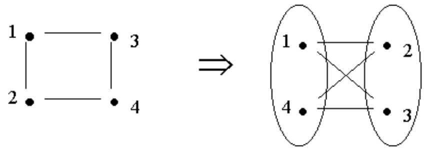
On utilise ces graphe pour modéliser des problèmes d'affectation.

Théorème: G est biparti $\Leftrightarrow$ $\chi(G) = 2$

5). Montrer que ce graphe est biparti :



Théorème: G est biparti $\Leftrightarrow$ G ne contient pas de cycle de longueur impaire



6). Démontrer ce dernier théorème.

3. Coloration des arêtes

On appelle **couplage** une partie C de U constituée d'arêtes deux à deux non adjacents. Dans l'exemple des épreuves, l'ensemble {(B,P), (A,H)} est un couplage.

Un **couplage maximum** est un couplage de cardinal maximum.

On appelle **coloration des arêtes** de G, toute application de l'ensemble des arêtes U dans un ensemble C, appelé ensemble des **couleurs**, telle que deux arêtes adjacentes soient toujours de couleurs différentes.

Propriété :
Une coloration des arêtes d'un graphe G n'est autre qu'une partition de l'ensemble des arêtes en couplages.

L'**indice chromatique** de G est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour une coloration des arêtes. On le note $\boldsymbol{\chi'(G)}$.

7). Montrer que le problème de coloration des arêtes est un cas particulier du problème de coloration des sommets.

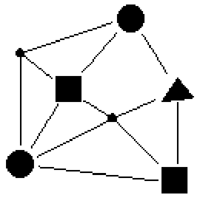
Théorème de Vizing :
Soit G un graphe simple. Si k est le maximum des degrés des sommets de G alors $\chi'(G) \leq k+1$.

8). Si k est le degré maximum des sommets de G, donner une borne inférieure pour $\chi'(G)$.

9). Essayer de colorier les arêtes du graphe de la question 3). avec le moins de couleurs possibles.

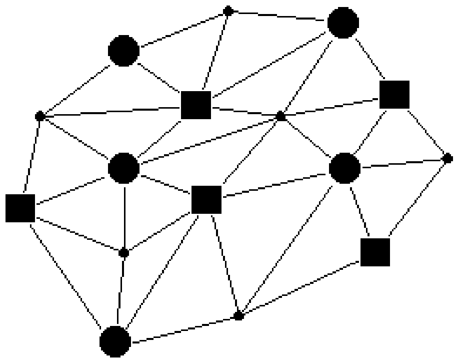
Corrigé - Coloration d'un graphe

1). Ce graphe est 4-coloriable :

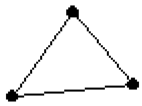


2). Ce problème à été résolu en 1976 par Appel et Haken : il faut 4 couleurs.

3). Dans ce graphe, le plus degré le plus élevé est 6, donc $\chi(G) \leq 7$:



On peut colorier ce graphe avec seulement 3 couleurs.
Il n'est pas possible de trouver une coloration avec seulement 2 couleurs car il y a au moins une (il y en a beaucoup) configuration en triangle :



qui impose la présence d'au moins trois couleurs.
Donc : $\chi(G)=3$.

4). Le problème des 8 reines revient à chercher un stable maximum (de taille 8) dans un graphe.
Cette recherche est un problème de la classe NP.
Voici un algorithme possible, avec k la taille du stable recherché et S l'ensemble stable des k sommets trouvés (s'il n'y a pas de stable S=∅) :

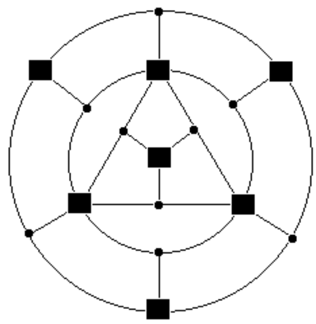
Stable(G=(X,U),k,S) ;
{
    S = ∅ ;
    pour toutes combinaisons S de k éléments parmi n **faire**   *n!/(k!(n-k)!) ensembles possibles*
    {   **si** S est un stable **alors** FIN ;
    }
}

Voici une solution du problème des 8 reines :

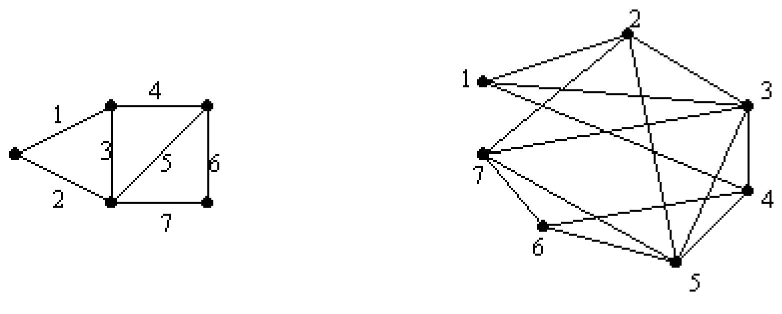
	Θ						
				Θ			
						Θ	
Θ							
		Θ					
							Θ
					Θ		
			Θ				

5). Démonstration :
⇒ Si un graphe contient un cycle de longueur impaire, ce cycle ne peut pas être colorié en 2 couleurs. Le graphe n'est donc pas biparti.
⇐ Si un graphe ne contient pas de cycle de longueur impaire, alors il n'est formé que de cycles de longueur paire et de chemins élémentaires. Un chemin élémentaire se colorie en 2 couleurs, comme un cycle de longueur paire. Donc, c'est un graphe biparti.

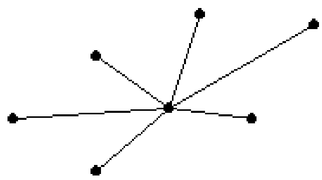
6). $\chi(G)=2$:



7). Rechercher $\chi'(G)$ dans le graphe G revient à chercher $\chi(L(G))$ dans le graphe L(G) construit à partir de G en transformant les arêtes en sommets :



8). Ici, le degré maximum est 6 :



On s'aperçoit qu'il faut donc au moins 6 couleurs pour cette partie du graphe.
Donc : $\chi'(G) \geq 6$.

9). Dans ce graphe, le plus degré le plus élevé est 6, donc $\chi'(G) \leq 7$.
D'après la question précédente, $\chi'(G) = 6$ ou $\chi'(G) = 7$.
En fait, **$\chi'(G) = 6$**.