Flots et réseaux de transport

1. Réseau et flot

Un **réseau de transport** est un graphe orienté, connexe sans boucle comportant deux sommets particuliers : un sommet appelé **source s** et un sommet appelé **puits p** :

Chaque arc du réseau est valué par une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^+$, cette fonction est appelée **capacité** c(.).
On note un tel graphe : G=(X,U,s,p,c).

Un **flot** sur un graphe est une application $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant la **loi de conservation** suivante :

$$\forall x \in X-\{s,p\},\ \sum_{y\in\Gamma_x} \varphi((x,y)) = \sum_{z\in\Gamma_x^-} \varphi((z,x))$$

On appelle **flux** d'un arc u la quantité φ (u).
On définit la **valeur du flot**, notée v(φ), comme étant le flot total quittant le sommet s.

A cause de cette conservation du flot, il n'y a pas de perte dans le réseau (tout ce qui entre en un sommet ressort). Ainsi, le flot total v sortant de s et entrant dans le réseau arrive en p avec la même valeur v :

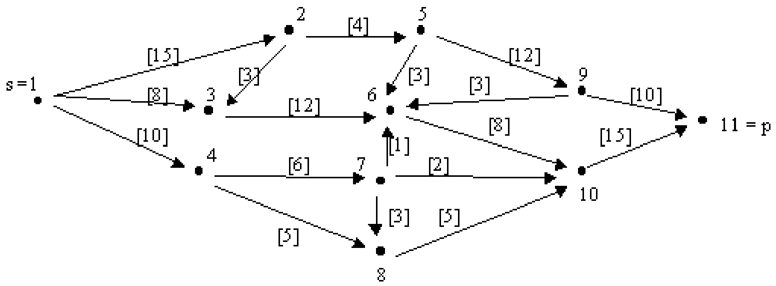
$$\sum_{y\in\Gamma_s} \varphi((s,y)) = \sum_{z\in\Gamma_p^-} \varphi((z,p)) = v$$

Un **flot compatible avec le réseau** est un flot φ vérifiant :

$$\forall u \in U,\ 0 \le \varphi(u) \le c(u)$$

On appelle **capacité résiduelle c_r(u),** la différence entre la capacité et le flux, i.e. $c_r(u) = c(u) - \varphi(u)$

1). Construire un flot compatible sur le réseau ci-dessous (les capacités sont indiquées entre crochets) :



Un **flot maximum** est un flot compatible de valeur v maximum.

Un **flot complet** est un flot compatible pour lequel tout chemin allant de s à p possède au moins un arc saturé :

$$\forall \mu \text{ chemin de s à p},\ \exists u \in \mu \text{ tel que } \varphi(u)=c(u)$$

2). Trouver un exemple montrant qu'un flot complet n'est pas nécessairement maximum.

2. Recherche d'un flot maximum

Problématique : Etant donné un réseau de transport, déterminer un flot compatible de valeur maximum.

L'algorithme de Ford-Fulkerson détermine le flot maximum dans un réseau de transport. Le principe est le suivant : partant d'un flot compatible, on cherche s'il existe une **chaîne améliorante** (voir ci-dessous) pour ce flot de s à p. S'il n'en existe pas, le flot est maximum; sinon, on augmente la valeur v du flot en modifiant le flux des arcs de la chaîne considérée.

Définition.

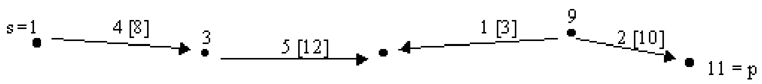
Soit $C=(x_0=s,x_1,x_2,\ldots,x_t=p)$ une chaine de s a p. On définit v_i par :

$$v_i = \begin{cases} c_r(x_{i-1},x_i) \text{ si } (x_{i-1},x_i)\in U \\ \varphi(x_{i-1},x_i) \text{ si } (x_i,x_{i-1})\in U \end{cases}$$

La valeur d'une chaine notée v(C) est définie par le minimum des valeurs v_i, i.e. $v(C)=\min_{i=1,\ldots,t} v_i$

Une **chaîne améliorante** C est une chaîne de s à p telle que v(C)>0 : il est possible d'augmenter le flux des arcs *à l'endroit* dans la chaîne d'une quantité de v(C) et de diminuer le flux des arcs *à l'envers* d'une quantité de v(C).

Exemple :



La valeur de cette chaine est 1. Elle est donc améliorante. On peut retrancher 1 sur le 3ème arc et ajouter 1 sur les trois autres tout en respectant les capacités des arcs ainsi que la loi de conservation (rien ne change pour les autres arcs du réseau). La valeur v(φ) est donc augmentée d'une unité.

Proposition.

Soit φ un flot compatible définit sur un réseau. φ est un flot de valeur maximum s'il n'existe pas de chaîne améliorante de s à p.

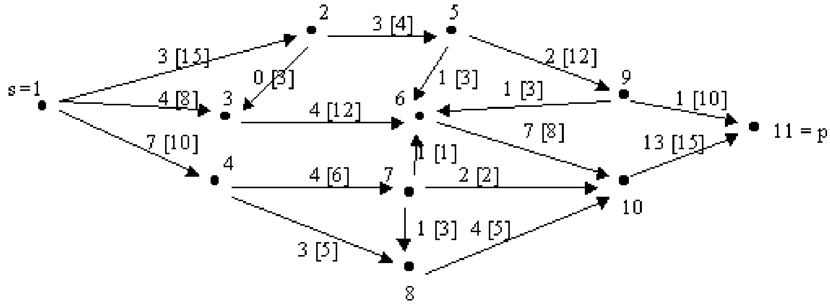
L'algorithme de Ford-Fulkerson est divisé en deux phases : une phase à exhiber une chaîne améliorante s'il en existe une en utilisant par exemple un graphe d'écart). La seconde phase exploite cette chaîne améliorante pour améliorer le flot.

Algorithme de Ford-Fulkerson :

> ***Initialisation :*** *On part d'un flot compatible arbitraire (de valeur aussi élevé que possible, e.g. un flot complet)*
>
> **Tant qu**'*il existe une chaine ameliorante C*
> *Améliorer le flot de v(C)*

Déroulons ce processus sur le réseau de la question 1).

a. Trouver un flot compatible qui vérifie la loi de conservation (le flot tel que ∀u∈U φ(u)=0 entraîne une résolution trop longue). Il peut le trouver par tâtonnement e.g.,



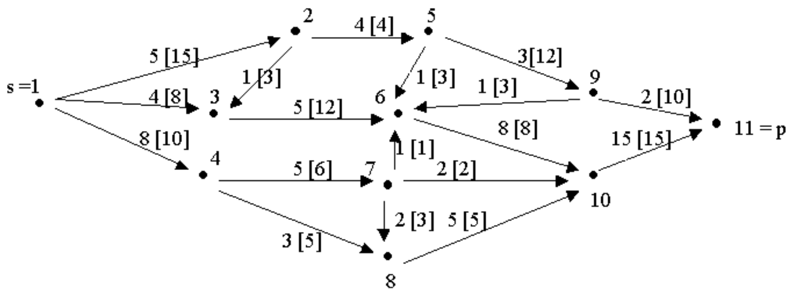
b. Recherche d'un flot complet :

Chemin	1	→	2	→	5	→	9	→	11	
Capacité		15		4		12		10		
Flot		3		3		2		1		
Différence		12		1		10		9	⇒	min = 1.
									⇒	On augmente le chemin de 1.

Chemin	1	→	2	→	3	→	6	→	10	→	11	
Capacité		15		3		12		8		15		
Flot		4		0		4		7		13		
Différence		11		3		8		1		2	⇒	min = 1.
											⇒	On augmente le chemin de 1.

Chemin	1	→	4	→	7	→	8	→	10	→	11	
Capacité		10		6		3		5		15		
Flot		7		4		1		4		14		
Différence		3		2		2		1		1	⇒	min = 1.
											⇒	On augmente le chemin de 1.

On obtient ainsi :



Tous les chemins de s à p sont saturés. La valeur de ce flot complet est de 17. On va pouvoir l'améliorer en utilisant l'algorithme de Ford Fulkerson.

Ensuite on cherche des chaines améliorantes (en construisant des graphes d'écart par exemple). On trouve une première chaine améliorante $C_{A1} = s \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow p$ permettant d'augmenter le flot de 1, puis $C_{A2} = s \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow p$ permettant aussi d'augmenter le flot de 1.
Il n'existe plus de chaine améliorante et on obtient donc un flot maximal de valeur 19

3. Théorème de la coupe minimale

Une coupe (E,T) d'un réseau de transport est une partition de X dans E et T=X-E.
Si φ est un flot alors le flot net à travers la coupe (E,T) est défini comme la somme des flux des arcs traversants la coupe (le flux est compté négativement si l'arc traverse la coupe de « T vers E ». On peut montrer que pour toute coupe, flot net est égale à v(φ).
La capacité de la coupe (E,T), notée c(E,T), est définie comme la somme des capacités des arcs « traversant la coupe de E vers T ».

Lemme. Pour toute coupe (E,T), $v(\varphi) \leq c(E,T)$.

<u>Preuve :</u> laissée en exercice.

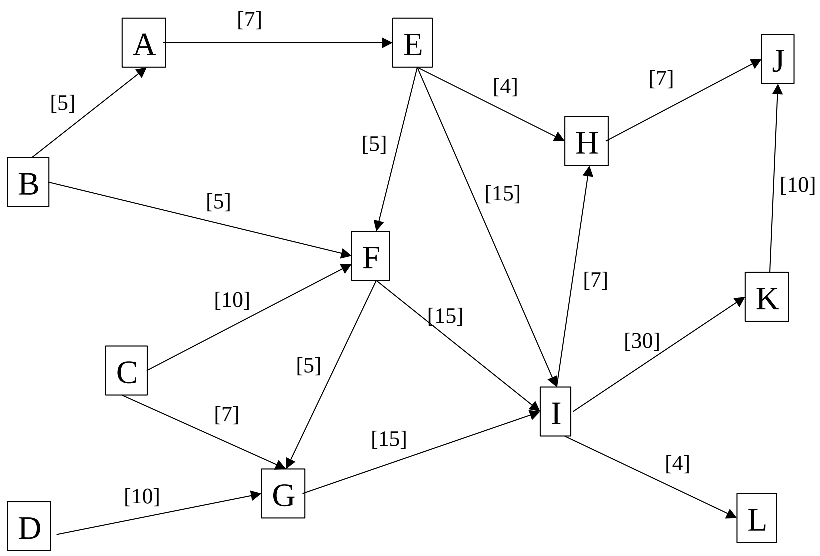
Il s'agit maintenant de démontrer le résultat principal de cette section qui prouve la validité de l'algorithme de Ford-Fulkerson.

Théorème de la coupe minimale. Soit φ un flot. Les 3 assertions suivantes sont équivalentes :

1 - φ est maximal
2 – Il n'existe pas de chaine améliorante
3 – Il existe un coupe de valeur v(φ).

TD - Flots et réseaux de transport

Trois villes J, K, L sont alimentées en eau grâce à quatre réserves A, B, C, D (nappes souterraines, châteaux d'eau, usines de traitement …). Les réserves journalières disponibles sont de 15 milliers de m^3 pour A, 10 pour B, de 15 pour C et de 15 pour D. Le réseau de distribution, comprenant aussi bien des aqueducs romains que des canalisation s récentes, peut être schématisé par les graphe ci-dessous (les débits maximaux sont indiqués sur chaque arc en milliers de m^3/jour).



Ces trois villes en pleine évolution désirent améliorer leur réseau d'alimentation afin de satisfaire des besoins futurs plus importants. Une étude a été faite et a permis de déterminer les demandes journalières maximales probables, à savoir pour la ville J : 15 milliers de m^3, pour la ville K : 20 et 15 pour la ville L.

1 – Déterminer la valeur du flot maximal pouvant passer dans le réseau actuel et donner la coupe minimale correspondante.

2 – La valeur de ce flot est jugée nettement insuffisante, aussi le conseil intercommunal décide-t-il de refaire les canalisations (A,E) et (I,L). Déterminer les capacités à prévoir pour ces deux canalisations et la valeur du nouveau flot optimal.

3 – Devant l'importance des travaux, le conseil intercommunal décide de ne pas refaire les deux canalisations en même temps. Dans quel ordre doit-on entreprendre leur réfection de façon à augmenter, après chaque tranche de travaux, la valeur du flot optimal passant dans le réseaux ?

4 – Quelles sont, après chaque tranche de travaux, les valeurs des flots optimaux ?