ПЕРША ФОРМАЛЬНА СИСТЕМА

Формальне середовище виконання, система вищих мов та базові бібліотеки для програмування, доведення теорем і формальної філософії

Максим Сохацький

Кам'янець-Подільський—Київ
26 травня 2021

Присвячується Маші та Міші

https://formal.uno/

ISBN — 978-617-8027-10-0

Підготовлено до друку в м.Кам'янець-Подільський, 26 травня 2021 року.

Зміст

ВСТУП

Присвячується піонерам
формальної школи філософії

Фреге, Расселу, Вайтхеду,
Геделю, Гільберту, Каррі, Черчу

У вступі розказується про новий формальний підхід до математичної верифікації та спробу автора у цій парадигмі побудувати замкнену уніфіковану систему формальних мов для програмування, математики та філософії. В процесі розробки моделі такої системи автору довелося апробувати частини її імплементації для головних SML-подібних формальних академічних мов, мови Erlang та інших (загалом 7 мов). За 10 років автором було проаналізовані синтаксис та семантика основних мов програмування (більше 50 мов) з різних промислових та академічних доменів, 8 мов з яких були особисто реалізовані автором. В роботі описані 8 мов уніфікованої мовної системи (концептуальна модель) та представлені 2 їх імплементації.

Головним чином, натхнення було почерпнуте з LISP-машин минулого, APL-систем, перших систем доведення теорем таких як AUTOMATH, віртуальних маших паралельної та узгодженої обробки нескінченних процесів, таких як BEAM, та кубічних MLTT-пруверів.

Вступне слово

Якщо говорити про математичну логіку, формальну математику, формальні методи, то основоположниками цих теорій можно вважати Бертрана Рассела та Альфреда Норта Вайтхеда та їх роботу Principia Mathematica[1], де будується формально теорія множин та доводиться твердження 1+1=2. Пізніше методи та предмет лябда-числення був розроблених Хаскелем Каррі та Алонсо Черчем, а теорема Геделя про неповноту до цих знаходить своє

[1] `https://bertrand.groupoid.space` — імплементація метатеорії Principia Mathematica для Menhir та OCaml

відображення в інфініті-топосах та у зліченних всесвітах сучасних пруверів.

Зараз формальні методи верифікації та відповідно теорії на яких вони побудовані є актуальними засобами забезпечення математичної якості та гарантій для розробки не тільки програмного забезпечення, але і математики та навіть формальної філософії.

0.1 Актуальність роботи

Ціна помилок в індустрії надзвичайно велика. Основні відомі приклади в індустрії: 1) Mars Climate Orbiter (1998), помилка[2] невідповідності типів британської метричної системи, коштувала 80 мільйонів фунтів стерлінгів. Невдача стала причиною переходу NASA[3] повністю на метричну систему в 2007 році. 2) Ariane Rocket (1996), причина[4] катастрофи – округлення 64-бітного дійсного числа до 16-бітного. Втрачені кошти на побудову ракети та запуск 500 мільйонів доларів. 3) Помилка в FPU в перших Pentium (1994), збитки на 300 мільйонів доларів. 4) Помилка[5] в SSL (heartbleed), оцінені збитки у розмірі 400 мільйонів доларів. 5) Помилка у логіці бізнес-контрактів EVM (неконтрольована рекурсія), збитки 50 мільйонів, що привело до появи верифікаторів та валідаторів контрактів[6], [7]. Більше того, і найголовніше, помилки у програмному забезпеченні можуть коштувати життя людей.

Таким чином зросла популярність формальних мов з типизацією, які дають певні гарантії на стадії компіляції, витрачаючи при цьому небагато часу на специфікації. Піонер в цьому класі мов — Standard ML та ML-подібні мови.

Пізніше, більш загально, Системи Жирара F та F_ω стали промисловим стандартом де-факто. Усі сучасні мови для популярних віртуальних машин та середовищ виконання намагаються бути близькими до цих типових систем. Для JVM існує мова Scala, але перша формальна мова для JVM був порт Standard ML — MLj[8].

---

[2] Mars Climate Orbiter Mishap Investigation Board Phase I Report November 10, 1999.
https://llis.nasa.gov/llis_lib/pdf/1009464main1_0641-mr.pdf

[3] National Aeronautics and Space Administration, національна адміністрація аеронавтики та космосу США

[4] ARIANE 5 Flight 501 Failure,
http://www-users.math.umn.edu/~arnold/disasters/ariane5rep.html

[5] The Matter of Heartbleed.
http://mdbailey.ece.illinois.edu/publications/imc14-heartbleed.pdf

[6] Vandal: A Scalable Security Analysis Framework for Smart Contracts,
https://arxiv.org/pdf/1809.03981.pdf

[7] Short Paper: Formal Verification of Smart Contracts,
https://www.cs.umd.edu/~aseem/solidetherplas.pdf

[8] **https://www.dcs.ed.ac.uk/home/mlj/**

Для CLR існує мова F#. Мова Haskell поставляється разом з середовищем виконання GHC. Усі ці мови так чи інакше пов'язані з системами Жирара.

0.2 Формалізована постановка задачі

Після 5 років цього дослідження, виконавши у вигляді вправ декілька імплементацій мов, було прийнято рішення формально оформити всю роботу згідно академічних нормативів. Тому в цій секції дається формальна постановка задачі, яка складається з опису об'єкту та предмету дослідження, мети, цілей та завдань. Дається головна мотивація та аналіз результатів.

0.2.1 Мотивація та мета дослідження

Головна мотивація цієї роботи — пошук єдиної мови або мовної системи, що здатна стати єдиною мовою, яка пропонує аналогічний спрощений формальний спосіб програмування та доведення теорем.

Одна з причин низького рівня впровадження у виробництво систем верифікації – це висока складність таких систем. Складні системи верифікуються складно. Ми хочемо запропонувати спрощений підхід до верифікації — оснований на концепції компактних та простих мовних ядер для створення специфікацій, моделей, перевірки моделей, доведення теорем у теорії типів з кванторами.

Метою цього дослідження є побудова єдиної системи, яка поєднує формальне середовище виконання та систему верифікації програмного забезпечення з великим спектром мовних засобів, які допомагають вбудувати в себе максимальну кількість існуючих мов. Це прикладне дослідження, яке є сплавом фундаментальної математики та інженерних систем з формальними методами верицікації.

0.2.2 Цілі та завдання дослідження

Головними цілями цього дослідження є побудова мінімальної системи мовних засобів для побудови ефективного циклу верифікації програмного забезпечення та доведення теорем. Основні компоненти системи, як продукт дослідження: 1) інтерпретатор безтипового лямбда числення; 2) компактне ядро — система з однією аксіомою; 3) мова з індуктивними типами; 4) мова з гомотопічним інтервалом $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$; 5) уніфікована базова бібліотека; 6) бібліотека математичних компонент.

Завданням цього дослідження є імплементація (апробація) специфікації системи мов на різних мовах програмування та ти-

пових системах. Для цього детально проводився аналіз усіх існуючих мов програмування (близько 2000), які детально прокатегоризовані в Енциклопедії Мов Програмування.

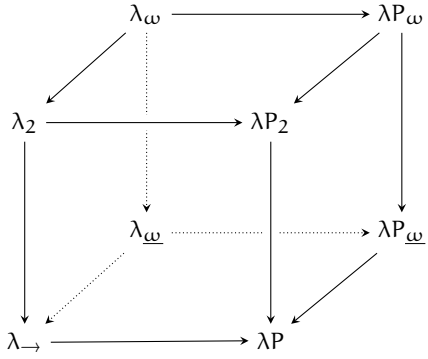
0.2.3 Об'єкт та предмет дослідження

Об'єктом дослідження в широкому сенсі є множина всіх формальних мов, та можливих зв'язків між ними.

Формально, об'єктом дослідження данної роботи є: 1) системи верифікації програмного забезпечення; 2) системи доведення теорем; 3) мови програмування; 4) операційні системи, які виконують обчислення в реальному часі; 3) їх поєднання, побудова формальної системи для уніфікованого середовища, яке поєднує середовище виконання та систему верифікації у єдину систему мов та засобів.

Лямбда куб Барендрехта

Предметом та методом дослідження такої системи мов є теорія типів, як сучасний фундамент математики, який стисло та компактно представляє обчислювальне ядро не тільки теорії множин, але і теорії категорій, алгебраїчної топології та диференціальної геометрії.



Теорія типів вивчає обчислювальні властивості мов та виділилася в окрему науку Пером Мартіном-Льофом як запит на вакантне місце у трикутнику теорій, які відповідають ізоморфізму Каррі-Говарда-Ламбека (Логіки, Мови, Категорії).

0.2.4 Методи дослідження

Існує багадо підходів для формальної специфікації, верифікації та валідації, усі вони даються у розділі 1, де обгрунтувується вибір

методу моделювання з використанням мови з залежними типами (теорії типів Мартіна-Льофа). Для разкриття семантки цього методу використовується категорний метод та категоріальна логіка – теорія топосів. Теорія категорій довела свою корисність не тільки для математики[9], але і для програмного забезпечення[10]

0.2.5 Класифікація мов програмування

Повна класифікація об'єктів дослідження була злоблена в рамках проекту Енциклопедія Мов Програмування, де була зроблена спроба надати формальну БНФ-нотацію для тих мов, для яких це не було ще ніколи не зроблено (наприклад для APL-подібної мови K).

0.3 Наукова новизна

Автор спробував поглянути на проблему розширення, або мовного доповнення топосів та категорій де відбуваються обчислення, з точки зору теорії типів, та їх мовних синтаксисів та категорій. За допомогою спектрального розкладення на елементарні мови, які репрезентують певні типи та описуються сигнатурами ізоморфізмів, будується єдиний погляд на еволюцію мови та її покомпонентний аналіз. Також автор зазирнув у спектр мов, які доречно використовувати та тримати як мови нижнього рівня (системне програмування) для програмування середовища виконання.

Кожен інститут чи компанія інвестує в одну певну мову, для зосередження зусиль на одному проекті. Особливість цієї роботи полягає в побудові уніфікованої системи, яка комплексно підходить до вирішення проблеми розширення мовних ядер, та їх обчислювачів. Ця робота пропонує замкнений фреймворк, який складається з мінімальної системи мов, що покриваються максимальну кількість мовних синтаксисів та семантик.

Крім того, попередні дослідники зосереджувались на побудові системних бібліотек для певного середовиша виконання та асоційованих з ним вищих мов (з відповідними біндінгами). На відміну від фокусних досліджень, ця робота пропонує мультидисциплінарний або мовний підхід, де ми зосереджуємося на побудові моделі, яка буде вбудовуватися з мінімальними зусиллями в основні аглебраїчні мови. У таблиці яка показує можливий ландшафт атаки мовних систем які можна вважати аналогічними підходами до побудови не тільки замкненого життєвого циклу мовного забезпечення, але і системи віртуалізації.

[9] Близько 10 робіт медалістів премії Філдса грунтуються на категорних методах
[10] Категорні бібліотеки таких мов як Haskell, Scala тощо.

Таблиця 0.1 Класифікація мов програмування

Домен	Мови програмування
HW	VHDL, Verilog, Clash, Chisel, SystemC, Lava, BSV
ASM	PDP-11, VAX, S/360, M68K, PowerPC, MIPS, SPARC, Super-H Intel, ARM, RISC-V
ALG	C, BCPL, ALGOL, SNOBOL, Simula, Pascal, Oberon, COBOL, PL/1
ML	SML, Alice ML, OCaml, UrWeb, Flow, F#
PURE	HOPE, Miranda, Clean, Charity, Joy, Mercury, Elm, PureScript
F_ω	Scala, Haskell, 1ML, Plutus
MACR	LISP, Scheme, Clojure, Racket, Dylan, LFE, CL Nemerle, Nim, Haxe, Perl, Elixir
OOI	Simula, Smalltalk, Self, REBOL, Io JS, Lua, Ruby, Python, PHP, TS, Java, Kotlin
CMP	C++, Rust, D, Swift, Fortran
SHELL	PowerShell, TCL, SH, CLIPS, BASIC, FORTH
SVC	IDL, SOAP, ASN.1, GRPC
MARK	TeX, PS, XML, SVG, CSS, ROFF, OWL, SGML, RDF, SysML
LOGIC	AUT-68, ACL2, LEGO, ALF, Prolog CPL, Mizar, Dedukti, HOL, Isabelle, Z
ΠΣ	Coq, F*, Lean, NuPRL, ATS, Epigram, Cayenne, Idris, Dhall, Cedile, Kind
HoTT	Menkar, Cubical, yacctt, redtt, RedPRL, Arend, Agda
CHKR	TLA+, Twelf, Promela, CSPM
PAR	Ling, Pony, Erlang, BPMN, Ada, E, Go, Occam, Oz
ARR	Julia, Wolfram, MATHLAB, Octave, Futhark, APL SQL, cg, Clarion, Clipper, QCL, K, MUMPS, Q, R, S, J, O

Сірим кольором показані фокусні домени дослідження.

Таблиця 0.2 Ландшафт атаки

Термінальна мова/Ефекти	Чиста мова	Система F	Runtime	Віртуалізація
Alonzo	STLC	OCaml	native	Mirage
Henk	PTS	Erlang	BEAM	LING
Per	MLTT	Erlang	BEAM	Mirage
Per	MLTT	OCaml	native	Mirage
Anders	HTS	OCaml	native	Mirage
Henk	PTS	Per	BEAM	LING
Henk	PTS	Per	CPS	L4
Per	MLTT	Per	native	Mirage
Urs	ESHTS	Per	native	Mirage

Сірим кольором показані напрямки метациркулярної атаки.

Інновація роботи полягає в побудові унікальної замкненої системи яка складається з: 1) системного програмного забезпечення – модального середовища виконання разом з інтерпретатором написаним на формальній мові, разом з базовою бібліотекою та архітектурою прикладного програмування N2O.TECH; 2) прикладного програмного забезпечення — системи вищих формальних мов, для яких надано моделі, імплементації та базова бібліотека разом з математичними компонентами.

У цій роботі представлені дві конфіурації мовних систем, та три вектора атаки для їх дослідження. Перша атака — це побудова замкненої системи мов для компіляції в середовище виконання віртуальної машини BEAM що входить до складу Erlang/OTP. Друга атака — це побудова власної віртуальної машини CPS, яка пропонує більш формальну та сучасну модель обчислень. Третя атака — це розробка бібліотеки вищих мов, що могла би компілюватися в BEAM та/або CPS.

0.3.1 Формальне середовище виконання

В рамках розробленого фреймворку будується архітектура системи доведення теорем та обчислювального середовища (яке складається з верифікованого засобами Rust інтерпретатора та операційної системи, подібно до Erlang, але без надлишкових копіювань), яке побудовано за сучасними стандартами: 1) відсутність системи управління пам'яті у реальному часі (тільки на стадії компіляції); 2) автоматична векторизація за допомогою AVX інструкцій (тензорне ядро); 3) дані ніколи не копіюються; 4) в системі немає очікування та даремного витрачання ресурсів; 5) лінийий лямбда-інтерпретатор, програми якого поміщаються в L1 кеш процесора.

Також додається модель базової бібліотеки середовища виконання для мов Erlang та Hamler, яка пройшла апробацію на підприємствах, державних компаніях та державних органах влади.

0.3.2 Модальна гомотопічна система верифікації

Чиста мова з однією аксомою дається як перша мова системи вищих мов після просто-типізованого лямбда-числення. Далі надається мова класу MLTT та базова бібліотека для екстракції у цільові рантайми BEAM та CPS. І уже після цього, надається гомотопічна мова з відрізком де Моргана, яка сумісна з кубічним верифікатором CCHM, в якому аксіома унівалентності Воєводського має конструктивну інтерпретацію, це наша авторська варіація cubicaltt авторства Андерса Мортберга (2017). Також надається спектральна модель категорій цих мов.

Модальні гомотопічні системи типів та системи типів у зв'язаних топосах є сучасним поглядом на конструктивну математику на шляху до формалізації модальностей, потрібних для інфінітезімальних околів та теорем про нескінченно малі величини, що є вимогами диференціальної геометрії та алгебраїчної топології.

0.3.3 Еквіваріантна супер-гомотопічна система

Додавання модальностей як системи операторів до гомотопічної системи дає змогу дуже елегатно доводити теореми вищої геметрії, диференціальної топології, диференціальної гемометрії, супергеметрії. Фінальний аккорд — це побудова формальної M-теорії (спільна робота Урса Шрайбера з Хішамом Саті в Нью-Йоркському Університеті в Абу Дабі). Урс побудував вежу модальностей які хитро вилаштовуються в діагональ спряжень, і чи має ця вежа кінець відкрите питання в новоспеченій модальній гомотопічній теорії.

Фінальна або термінальна гомотопічна система тіпів включає в себе примітивні модальності, модальності для диференціальній топології (ретопологізація та топологізація) — шейп модаліті, флет (бемоль) модаліті, шарп (дієз) модаліті, модальності для диференціальної геометрії (Im та Re модальності), фізичні бозонні та ферміонні модальності. Далі система насичується та стабілізується (відкрите питання). Система типів яка включає усі види існуючих модальностей, що застосовуються у теоретичній фізиці називається еквіваріантною модальною супер-гомотопічною системою (Урс Шрайбер). Цей напрямок роботи є постдисертаційним.

0.4 Практичні результати

В рамках цього дослідження були досягнуті наступні проміжні практичні результати: 1) проаналізовані та класифіковані всі мови програмування, оформлені у вигляді Енциклопедії Мов Програмування[11], що дозволяють виконати проміжні цілі та головне завдання дослідження — створення мінімальної системи мов для побудови уніфікованої системи для програмування та доведення теорем, яка складається з мов середовища виконання та серії вищих мов; 2) розроблений прототип середовища виконання CPS який підтримує імутабельні черги та AMP/SMP планування, містить лінивий інтерпретатор, та підтрмує числення процесів, реалізовано на мові Rust з лінійними типами, для якої існує формальна модель[12] 3) розроблена вища мова програмування Henk

[11] `https://groupoid.github.io/languages`
[12] `https://arxiv.org/pdf/1804.07608.pdf`

з екстрактом в байт-код віртуальної машини BEAM, яка пройла peer review; 4) розроблена базова бібліотека N2O.TECH середовища виконання для віртуальної машини BEAM зі специфікацією в мові Per; 5) розроблена базова бібліотека та бібліотека математичних компонент для вищої модальної гомотопічної мови програмування Anders.

0.4.1 Основні результати

Автор особисто створили моделі та імплементації формального середовища виконання, бібліотеки середовища виконання, декількох верифікаторів та базової бібліотеки як приклади використання та моделювання системи доведення теорем. Автор також розробили курс гомотопічної теорії типів, на якому здійснюється формалізація певних розділів математики (теорія категорій, різні частини алгебраїчної топології та диференціальної геометрії).

Окрім того створений сайт, присвячений документації по базовій бібліотеці середовища виконання [13], та по бібліотеці системи вищих мов для кубічного верифікатора гомотопічної мови програмування [14]. Також частина моделей розроблений автором попала в апстрім кубічного верифікатора, як приклади використання.

0.4.2 Продукт дослідження

Не зважаючи на нетривіальну структуру результатів, головним продуктом цього дослідження слід вважати загальний підхід описаний в цій роботій, який можна звести до наступних рекомендацій: 1) побудувати лінивий інтерпретатор CPS нетипизованого лямбда числення разом з системою процесів та чергами повідомлень на формальній мові; 2) побудувати мову числення конструкцій PTS на формальній мові з екстрактом у лінийвий інтерпретатор; 3) побудувати мову системи F Жирара або STLS для розробки базової бібліотеки для лінивого інтерпретатора; 4) побудувати базову бібліотеку для лінивого інтерпретатора; 5) побудувати індуктивну мову програмування MLTT; 6) побудувати гомотопічну мову програмування HoTT; 7) побудувати базову бібліотеку для гомотопічної мови; 8) побудувати бібліотеку теорем формальної математики.

Цей підхід закріплюється формальною моделлю даною у розділі 2 та далі розвивається у наступних розділах. Таким чином, можна говорити, що продукт цього дослідження — це формальна специ-

[13] `https://n2o.tech/ua`
[14] `https://anders.groupoid.space/lib`

фікація на систему мов та трансформації між ними, яка виявилася цікава не тільки автору дослідження.

0.4.3 Апробація роботи

Апробації: 1) Відбулися виступи на двох міжнародних конференціях: MMCTSE, IAI; 2) Впровадження базової бібліотеки середовища виконання в державних компаніях ПриватБанк, ІНФОТЕХ та органах влади МВС; 3) Впровадження прототипу середовища виконання описаного в роботі, який ліг в основу комерційного продукту.

0.4.4 Аналіз результатів

0.5 Структура роботи та публікації

Якшо коротко суть роботи зводиться до побудови системи, яка складається з: і) середовища виконання; іі) формального інтерпретатора; ііі) системи формальних мов для доведення теорем математики, програмної інженерії та філософії.

Формальна верифікація

У розділі 1 дається огляд існуючих рішень для доведення властивостей систем та моделей, класифікуються мови програмування та системи доведення теорем.

Концептуальна модель

У розділі 2 розглядається математична модель формальної системи, яка умовно розділяється на систему мов для системного програмування (спектр мов середовище виконання) та систему мов для прикладного та програмування вищих логік (спектр вищих мов). Час дослідження цього направлення припав на 2017-2018 роки.

Формальне середовище виконання

У розділі 3 разказується про повний стек формального програмного забезпечення від віртуальної машини, байт-код інтерпретатора, середовища виконання та планування процесів до формальної мови для доведення теорем (або сімейства мов). Час дослідження цього направлення припав на 2016-2017 роки.

У розділі 4 описується базова бібліотека системи середовища виконання, написана на мові нижчого рівня Erlang. Час дослідження цього направлення припав на 2013-2021 роки.

Система верифікації

У розділі 5 подається опис системи вищих формальних мов для доведення теорем до кубічної теорії та гомотопічної системи типів. Час дослідження цього направлення припав на 2021-2023 роки.

У розділі 6 описується базова бібліотека системи формальних мов, індуктивна та гомотопічні системи типів для кубічних тайпчекерів. Час дослідження цього направлення припав на 2018-2021 роки.

Математичні компоненти

У розділі 7 пропонується ряд математичних моделей та теорій з використанням базової бібліотеки розділу 3 та мови гомотопічної системи типів. Час дослідження цього направлення припав на 2018-2021 роки.

Додаткові матеріали

У додатках надаються приклади іншого використання фомальних мов та моделей, зокрема для мінімальної формальної мови, побудованої в рамках дисертації, та мови програмування Coq. А також дається приклад використання гомотопічної мови для формальної філософії.

0.6 Подяка

У вступі хотів би висловити подяку: 1) своїм тибетським гуру без яких ця робота була би неможливою; 2) двом вчителям старших класів: геометру Панькову та алгебраїсту Конету; 3) двом вчителям в університеті: Клименко та Таран; 4) усім контрібюторам N2O.DEV[15] та Groupoid Infinity[16]; 5) батькам; 6) іншим вчителям. 7) усім хоробрим людям з почуттям гідності, справжнім українцям.

[15] `https://n2o.dev`
[16] `https://groupoid.space`

Розділ 1

Формальна верифікація

Присвячується вчителям
нідерландської школи

Ніколасу де Брейну,
Хенку Барендрехту
та Барту Якобсу

Перша глава дає огляд існуючих рішень та вступ до предмету формальної верифікації. Розглядається класифікація систем верифікації, систем доведення теорем, та систем моделювання. Зображається місце дослідження у області та дотичні системи, такі як формалізовані середовища виконання.

Вступне слово

Батьком першої формальної механізованої комп'ютерної системи верифікації теорем у фібраційній моделі став Ніколас де Брейн та співавтори системи AUTOMATH. Пізніше Хенк Барендрехт класифікував усі конфігурації типових систем лямбда числень у лямбда-кубі та довів майже усі його теореми. У цій роботі для вищих формальних мов використовується лише одна, найвища вершина решітки лябда-куба Барендрехта, а для середовища виконання — система Жирара.

1.1 Формальна верифікація та валідація

Для унеможливлення помилок на виробництві застосовуються різні методи формальної верифікації. Формальна верифікація — доказ, або заперечення відповідності системи у відношенні до певної формальної специфікації або характеристики, із використанням формальних методів математики.

Дамо основні визначення згідно з міжнародними нормами (IEEE, ANSI)[1] та у відповідності до вимог Європейського Аеро-

[1] IEEE Std 1012-2016 — V&V Software verification and validation

космічного Агенства[2]. У відповідності до промислового процессу розробки, верифікація та валідація програмного забезпечення є частиною цього процесу. Програмне забезпечення перевіряється на відповідність функціональних властивостей згідно вимог.

Процес валідації включає в себе перегляд (code review), тестування (модульне, інтеграційне, властивостей), перевірка моделей, аудит, увесь комплекс необхідний для доведення, що продукт відповідає вимогам висунутим при розробці. Такі вимоги формуються на початковому етапі, результатом якого є формальна специфікація.

1.2 Формальна специфікація

Для спрощення процесу верифікації та валідації застосовується математична техніка формалізації постановки задачі — формальна специфікація. Формальна специфікація — це математична модель, створена для опису систем, визначення їх основних властивостей, та інструментарій для перевірки властивостй (формальної верифікаціїї) цих систем, побудованих на основі формальної специфікації.

Існують два фундаментальні підходи до формальних специфікацій: 1) Аглебраїчний підхід, де система описується в термінах операцій, та відношень між ними (або аналітичний метод), та 2) Модельно-орієнотований підхід, де модель створена конструктивними побудовами, як то на базі теорії множин, чи інкаше, а системні операції визначаються тим, як вони змінюють стан системи (конструктивний, або синтетичний метод). Також були створені сімейства послідованих та розподілених мов.

1.2.1 Програмне забезпечення

Найбільш стандартизована та прийнята в обсласті формальної верифікації — це нотація Z[3] (Spivey, 1992), приклад модельно-орієнтовоної мови Назавана у честь Ернеста Цермело, роботи якого мали вплив на фундамент математики та аксіоматику теорії множин. Саме теорія множин, та логіка предикатів першого порядку є теорією мови Z. Тут також заслуговують уваги сесійні типи Кохея Хонди[4], які дозволяють формалізувати протоколи на рівні вбудованої теорії типів.

Інша відома мова формальної специфікації як стандарт для моделювання розподілених систем, таких як телефонні мережі та

[2] ESA PSS-05-10 1-1 1995 – Guide to software verification and validation
[3] ISO/IEC 13568:2002 — Z formal specification notation
[4] `http://mrg.doc.ic.ac.uk/kohei/`

протоколи, це LOTOS[5] (Bolognesi, Brinksma, 1987), як приклад алгебраїчного підходу. Ця мова побудована на темпоральних логіках, та поведінках залежниих від спостережень. Інші темпоральні мови специфікацій, які можна відзначити тут — це TLA+[6], CSP (Hoare, 1985), CCS[7] (Milner, 1971), Actor Model, BPMN, etc.

1.2.2 Математичні компоненти

Перші системи комп'ютерної алгебри були розроблені ще під PDP-6 та PDP-10, такі як MATHLAB (MIT), інші ранні системи: MACSYMA (Джоел Мозес), SCRATCHPAD (Ричард Дженкс, IBM), REDUCE (Тони Хирн), SAC-I, пізніше SACLIB (Джорж Коллінз), MUMATH для микропроцессоров (Девід Стоутмаєр) та пізніше DERIVE. Сучасні системи комп'ютерної алгебри: AXIOM послідовних SCRATCHPAD (NAG), MAGMA (Джон Кеннон, Сіднейський університет), MUPAD (Бенно Фуксштейнер, університет міста Падерборн).

1.3 Формальні методи верифікації

1.3.1 Спеціалізовані системи моделювання

Можна виділити три підходи до верифікації. Перший застосовується де вже є певна програма написана на певній мові програмування і потрібно довести ізоморфність цієї програми до доведеної моделі. Ця задача вирішується у побудові теоретичної моделі для певної мови програмування, потім програма на цій мові переводиться у цю теоретичну модель і доводить ізоморфізм цієї програми у побудованій моделі до доведеної моделі. Приклади таких систем та піходів: 1) VST (CompCert, сертифікація C програм); 2) NuPRL (Cornell University, розподілені системи, залежні типи); 3) TLA+ (Microsoft Reseach, Леслі Лампорт); 4) Twelf (для верифікації мов програмування); 5) SystemVerilog (для програмного та апаратного забезпечення).

1.3.2 Мови з залежними типами та індукцією

Другий підхід можна назвати підходом вбудованих мов. Компілятор основої мови перевіряє модель закодовану у ній же. Можливо моделювання логік вищого порядку, лінійних логік, модальних логік, категорний та гомотопічних логік. Процес специфікації та верифікації відбувається в основній мові, а сертифіковані програми автоматично екстрагуються в довільні мови. Приклади таких

[5] ISO 8807:1989 — LOTOS — A formal description technique based on the temporal ordering of observational behaviour

[6] The TLA+ Language and Tools for Hardware and Software Engineers

[7] J.C.M. Baeten. A Brief History of Process Algebra.

систем: 1) Coq побудована на мові OCaml від науково-дослідного інституту Франції INRIA; 2) Agda побудовані на мові Haskell від шведського інституту технологій Чалмерс; 3) Lean побудована на мові C++ від Microsoft Research та Університету Каргені-Мелона; 4) F* – окремий проект Microsoft Research.

1.3.3 Гомотопічні мови

Приклади таких систем: 1) cubicaltt — [8]CCHM імплементація авторства Андерса Мортберга кубічної теорії типів Саймона Губера; 2) yacctt — ще одна декартова кубічна теорія [9]ABCFHL; 3) Agda – cubical — вбудований кубічний тайпчекер в Агду; 4) Lean — Lean також має вбудований кубічний тайпчекер; 5) RedPRL – кубічна імплементація декартової кубічної теорії ABCFHL.

1.3.4 Системи автоматичного доведення теорем

Третій підхід полягає в синтезі конструктивного доведення для формальної специфікації. Це може бути зроблено за допомогою асистентів доведення теорем, таких як HOL/Isabell, Coq, ACL2, або систем розв'язку задач виконуваності формул в теоріях (Satisfiability Modulo Theories, SMT).

Перші спроби пошуку формального фундаменту для теорії обчислень були покладені Алонзо Черчем та Хаскелем Каррі у 30-х роках 20-го століття. Було запропоноване лямбда числення як апарат який може замінити класичну теорію множин та її аксіоматику, пропонуючи при цьому обчислювальну семантику. Пізніше в 1958, ця мова була втілена у вигляді LISP лауреатом премії тюрінга Джоном МакКарті, який працював в Прінстоні. Ця мова була побудована на конструктивних примітивах, які пізніше виявилися компонентами індуктивних конструкцій та були формалізовані за допомогою теорії категорій Вільяма Лавіра. Окрім LISP, нетипізоване лямбда числення маніфестується у такі мови як Erlang, JavaScript, Python. До цих пір нетипізоване лямбла числення є одною з мов у які робиться конвертація доведених программ (екстракція).

Перший математичний прувер AUTOMATH (і його модифікації AUT-68 та AUT-QE), який був написаний для комп'ютерів розроблявся під керівництвом де Брейна, 1967. У цьому прувері був квантор загальності та лямбда функція, таким чином це був перший прувер побудований на засадах ізоморфізма Каррі-Говарда-Ламбека.

[8] Cyril Cohen, Thierry Coquand, Simon Huber, Anders Mörtberg. Cubical Type Theory: a constructive interpretation of the univalence axiom. 2015. **https://5ht.co/cubicaltt.pdf**

[9] Carlo Angiuli, Brunerie, Coquand, Kuen-Bang Hou (Favonia), Robert Harper, Dan Licata. Cartesian Cubical Type Theory. 2017. **https://5ht.co/cctt.pdf**

ML/LCF або метамова і логіка обчислювальних функцій були наступним кроком до осягнення фундаментальної мови простору, тут вперше з'явилися алебраїчні типи даних у вигляді індуктивних типів, поліноміальних функторів або термінованих (well-founded) дерев. Роберт Мілнер, асистований Морісом та Н'юві розробив Метамову (ML), як інструмент для побудови прувера LCF. LCF був основоположником у родині пруверів HOL88, HOL90, HOL98 та останньої версії на даний час HOL/Isabell. Пізніше були побувані категорні моделі Татсоя Хагіно (CPL, Японія) та Робіна Кокета (Charity, Канада).

У 80-90 роках були створені інші системи автоматичного доведення теорем, такі як Mizar (Трибулєк, 1989). PVS (Оур, Рушбі, Шанкар, 1995), ACL2 на базі Common Lisp (Боєр, Кауфман, Мур, 1996), Otter (МакКюн, 1996).

1.4 Формальні мови та середовища виконання

Усі середовища виконання можно умовно розділити на два класи: 1) інтерпретатори нетипізованого або просто типізованого (рідше з більш потужними системами типів), лямбда числення з можливими JIT оптимізаціями; та 2) безпосередня генерація інструкцій процессора і лінкування цієї програми з середовищем виконання що забезпечує планування ресурсів (в цій області переважно використовується System F типізація).

До першого класу можно віндеси такі віртуалні машини та інтерпретатори як Erlang (BEAM), JavaScript (V8), Java (HotSpot), K (Kx), PHP (HHVM), Python (PyPy), LuaJIT та багато інших інтерпретаторів.

До другого класу можна віднести такі мови програмування: ML, OCaml, Rust, Haskell, Pony. Часто використовується LLVM як спосіб генерації програмного коду, однак на момент публікації статті немає промислового верифікованого LLVM генератора. Rust використовує проміжну мову MIR над LLVM рівнем. Побудова верифікованого компілятора для такого класу систем виходить за межі цього дослідження. Нас тут буде цікавити лише вибір найкращого кандидата для середовижа виконання.

Нійбільш цікаві цільові платформи для виконання программ які побудовані на основі формальних доведень для нас є OCaml (тому, що це основна мова естракту для промислової системи доведення теорем Coq), Rust (тому, що рантайм може бути написаний без використання сміттєзбірника), Erlang (тому, що підтримує неблоковану семантику пі-калкулуса) та Pony (тому, що семантика його пі-калкулуса побудована на імутабельних чергах та CAS-курсорах). У цій роботі ми зосередимося на дослідженні тьох підходів та побудові наступних прототипів.

1.4.1 Формальні інтерпретатори та ОС

Перший прототип, рантайм CPS – лінивий векторизований інтерпретатор (підтримка SSE/AVX інструкцій) та система управління ресурсами з планувальником лінивих програм та системою черг і CAS курсорсів у якості моделі пі-калкулуса. Розглядається також використання ядра L4 на мові C, верифікованого за допомогою HOL/Isabell, у якості базової операційної системи.

Формальний ввід-вивід

Другий прототип побудований на базі coq.io, що дозволяє використовувати бібліотеки OCaml для промислового програмування в Coq. У цій роботі ми формально показали і продемонстрували коіндуктивний шел та вічно працюючу тотальну програму на Coq. Ця робота проводилася в рамках дослідження системи ефектів для результуючої мови програмування.

1.4.2 Чисті системи типів

Третій прототип – побудова тайпчекера та ектрактора у мову Erlang та CPS. Ця робота представлена у вигляді PTS тайпчекера Henk, який вистує у ролі проміжної мови для повної нормалізації лямбда термів. В роботі використане нерекурсивне кодування індуктивних типів та продемонстрована теж бескінечна тотальна программа у якості способу лінкування з підсистемою вводу-виводу віртуальної машини Erlang. В доповнення до існуючих імплементацій CoC на Haskell (Morte).

1.4.3 Гомотопічні системи типів

Четвертий прототип — імплементація першого кубічного верифікатора на мові Erlang в доповнення до існуючих CCHM (Erlang, Haskell), ABCFHL (Haskell,OCaml).

1.4.4 Мультимодальні мови

1.5 Висновки

Як результат цього розділу, було досліджено: i) усі системи доведення теорем; ii) формальні мови програмування; iii) системи верифікації; iv) формальні середовища виконання, та встановлено, що усі такі системи є носіями мовних елементів які згідно теорії типів Мартіна-Льофа можна кластеризувати по наступним мовам, кожна з яких репрезентує правила типу: i) O_{λ} — нетипизоване λ-числення Чорча; ii) O_{π} — числення процесів, CCS, CSP або π-числення Мілнера; iii) O_{μ} — тензорне числення та векторизація (MatLab, Julia, kx, J); iv) O_{Π} — числення конструкцій (функціональна повнота); v) O_{Σ} — числення контекстів (контекстуальна повнота); vi) $\mathrm{O}_{=}$ — теорія типів Мартіна-Льофа (логіка); vii) O_{W} — числення індуктивних конструкцій (матіндукція); viii) O_{I} — гомотопічна система типів (формальна математика).

Розділ 2

Концептуальна модель формальної системи мов

Присвячується автору
унівалентних основ
математики

Володимиру Воєводському

Другий розділ описує розвиток концептуальної моделі системи доведення теорем як сукупності: 1) категорій, які розкривають семантику конкретної теорії типів (мови програмування) як синтаксису, або є її метатеорією. 2) теорії для маніпуляції мовними синтаксисами та программами (мовні категорії). Ця концептуальна модель є сокупністю категорій, що пропонує фреймворк або стандарт на розробку та формалізацію формальних мов. Усі мови програмування та їх моделі представлені за допомогою цього фреймворка, пропонують сучасну математичну метатеоретичну основу для мов програмування (імплементації конкретних теорій типів).

В наступних розділах 3 та 5 присвячених теоріям типів для програмування та доведення теорем буде йтися виключно про теоретико-типові моделі, тобто мови програмування побудовані на конкретних синтаксисах які представлені індуктивними типами. Цей розділ буде включати набір моделей, які використовуються для дослідження категорної семантики типових систем. Теоретичні засади цього фібраційного категорного фундаменту були закладені Александром Гротендіком в 1971 році.

Вступне слово

Категорні засади залежної теорії були побудовані Робертом Сілі. [?]. Семантика залежної теорії поліморного лямбла числення вищих порядків вивчається локальними декартово замкненими ка-

тегоріями (ДЗК) — категоріями з кінечними лімітами, де слайс-категорії по будь-якому об'єкту є декартово-замкненими.

Перші спрови побудови повної формальної категорної семантики теорії типів були дані Томасом Страйхером в 1991 році [?]. Пітер Диб'єр запропонував категорну модель з сімействами (Categories with Families, CwF) в 1995 році [?], а також Мартін Хофман показав, що ці категорії ізоморфні категоріям з атрибутами (Categoties with Attributes, CwA) в 1997 році [?]. Стів Еводі в 2016 запропонував трохи модифіковану категорну досніпову модель теорії типів, яку назвав природньою моделлю теорії типів [?].

Головною проблемою представлення категорної семантики теорії типів, крім доведення коректності та повноти, є теорема про ініціальність, яка говорить, що ініціальними об'єктами в категорії моделей системи типів повинна бути модель термів. Таким чином, теорії типів пакуються в категорних моделі, які містять усі необхідні теореми пов'язані з когерентністю (яка була вирішена в категоріях розширень [?]) усіх композицій, рівняннями та властивостями нормалізації та обчислень, канонічного представлення, тощо. Повна формальна ініціальна модель MLTT була представлена на Agda лише в 2020 році за допомогою алгебраїчної теорії категорій [1].

Генеалогічна лінія передачі 2-категорного моделювання бере початок з шостої глави SGA-1 лекцій Александра Гротендіка 1971 [?]. В 1984 році Сілі [?] опублікував роботу по локальним ДЗК, однак в такій моделі кожна стрілка є типом, що недостатньо деталізує модель. Інший підхід запропонований Джоном Картмелом [?] полягав в створенні контекстуальних категорій, що дозволяв більш простіше і безпосередніше виражати природу залежних термів. Ці дві моделі були уніфіковані Томасом Ерхардом в 1988 році [?] більш абстрактною моделлю, яка була глибшою і тим ближчою до оригіналу (SGA-1), в цій моделі були представлені категорії розширень. Категорії розширень Гротендіка також можна знайти в роботах Барта Якобса [?] [?].

Модельні категорії Деніела Квіллена [?] пропонують ще вищий спосіб представлення, де розкривається глибинна структура просторів за допомогою слабких систем факторизації. Для сучасних математичних мов програмування (кубічна теорія типів) побудовані модельні категорії Квіллена, однак кон'юнктура ініціальності залишається відкритою проблемою (станом на 2020 рік).

Подальші дослідження Террі Кокана категорних моделей теорії типів виходять на давню мрію Гротендіка про стекову модель,

[1] `https://github.com/guillaumebrunerie/initiality` – доведення кон'юнктури ініціальності MLTT

де замість досніпа зі значенням в категорії множин, береться функтор зі значеннями в категорії вищих групоїдів [?].

Кон'юнктура ініціальності

Кон'юнктура ініціальної в теорії типів стверджує, що модель термів (всі терми і всі типи) певної системи типів повинна бути ініціальним об'єктом в категорії моделей цієї системи типів. Ініціальність валідує формальний перехід від теорії категорії до системи типів, таким чином, що синтаксичні пруфтерми системи типів в точності відповідають теоремам в категорії, які інтерпретують ці системи типів.

Вперше ініціальність для чистих систем (Pure Type Systems), які складаються з одного П-типу, була дана Томасом Страйхером. З тих пір Ініціальний для більш складних типових систем, як то Martin-Löf Type Theory (MLTT), вважалася досягнута, вважаючи механічне продовження техніки категорного формалізації для інших типів (Π, Σ, $=$, $+$, $\bot$, $\top$, $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_i$, El). Хоча багато дослідників, починаючи з Володимира Воєводського і його серії статей присвячених важливості механістичної формалізації кон'юнктури ініціальної в 2015-2017 рр, займалися дослідженнями ініціальності, але лише в 2020 році Гійом Брунері та Пітер Люмсдейн спільно з Менно де Боєр і Андерсом Мёртбергом представили формальну модель ініціальної MLTT на Agda.

2.0.1 Відповідність між категорними моделями

Таблиця 2.1 Категорні моделі теорій типів

Категорна модель	Позначення
Локальні декартово-замкнені категорії Сілі	LCCC
Обширні категорії Гротендіка	CompCat
Природні моделі Еводі	NatMod
Категорії з сімействами Диб'єра	CwF
Категорії з атрибутами	CwA
D-Категорії Картмела	DCat
Контекстуальні системи Воєводського	C-Systems

2.1 Концепти та Категорії

Концепти Фреге були першою спробою фібраційної формалізації основи для математичних тверджень, яка складається з розшарування (за допомогою якого моделюється квантор узагальнення) та тотального простору (за допомогою якого моделюється квантор існування).

Визначення 1. (Концепт, Готлоб Фреге). Концепт — це предикат над об'єктом, або іншими словами залежний Π-тип з теорії типів Мартіна-Льофа. Об'єкт $\mathrm{x} : \mathrm{o}$ належить до концепту, тільки якщо сам концепт, параметризований цим об'єктом, населений $\mathrm{p}(\mathrm{o}) : \mathcal{U}$, де $\mathrm{p} : \mathbf{concept}(\mathrm{o})$.

Визначення 2. (Система). Визначимо систему як сукупність об'єктів $\mathrm{Ob} : \mathcal{U}$ та зв'язків між ними $\mathrm{Hom} : \mathrm{Ob} \to \mathrm{Ob} \to \mathcal{U}$ які називаються морфізмами.

Визначення 3. (Докатегорія). Категорія – це система яка має дві операції: 1) для кожного об'єкта системи існує одиничний морфізм $\mathbf{id}$; 2) для кожних двох морфізмів системи існує операція їх композиції $\circ$, які повинні мати три властивості: 1) ліва композиція з одниничними морфізмами; 2) права композиція з одиничними морфізмами; 3) асоціативність композиції. Якщо дві операції мають тільки третю властивість асоціативність то кажуть про напівкатегорії.

Визначення 4. (Категорія). Категорія це докатегорія, така що для довільного $\mathrm{A} : \mathrm{Ob}(\mathrm{c})$ тип $\mathbf{isContr}(\Sigma(\mathrm{B} : \mathrm{Ob}(\mathrm{C})), \mathrm{A} = \mathrm{B})$ населений.

Визначення 5. (Мала категорія). Якщо морфізми категорії утворюють множину то така категорія називається малою.

Визначення 6. (Концептуальна модель). Концептуальна модель визначається як категорія, об'єкти якої індексовані певною множиною, або залежні від параметра.

2.2 Категорні моделі мов

Для того аби показати сучасну досліпову категорну модель теорії типів, дамо которкий опис теорії які лягли в основу категорного моделювання теорії типів.

2.2.1 Обширні категорії Гротендіка

Визначення 7. (Вертикальний морфізм). Нехай $p : E \to B$ — функтор. Морфізм $f : Y \to X$ називається вертикальним, якщо $p(f)$ є одиничним морфізмом в B: $p(f) = id_B$.

Визначення 8. (Декартовий морфізм). Нехай $p : E \to B$ — функтор, морфізм $f : Y \to X$ категорії E називається дакартовим над $t = p(f)$ якщо для кожного морфізма $u : Z \to Y$ такого що $p(f) = p(u)$ існує унікальна вертикальна стрілка $a : Z \to Y$ така що $f \circ a = u$.

Визначення 9. (Гіпердекартовий морфізм, Бенабу). Нехай $p : E \to B$ — функтор, морфізм $f : Y \to X$ категорії E називається гіпердакартовим над $t = p(f)$ якщо для кожного морфізма $u : K \to J$ категорії B та кожного морфізма $v : Z \to X$ категорії E, таких, що $p(v) = t \circ u$ існує унікальний морфізм $w : Z \to Y$ категорії E, такий, що $v = f \circ w$ та $p(w) = u$.

Визначення 10. (Категорія стрілок). Категорія стрілок $B^{\to}$ категорії B є категорією, у якої об'єкти це стрілки категорії $a : Ob^{\to}_B = Hom_B(x, y)$, а морфізми — пари стрілок $Hom^{\to}_B = [f : Hom_B, g : Hom_B]$ з категорії B, які комутують:

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & f(x) \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f(a)} \\ y & \xrightarrow{g} & f(y) \end{array}$$

Визначення 11. (Розшаруванням Гротендіка). Функтор $p : E \to B$ називається розшарованою категорією над B (або розшаруванням Гротендіка), якщо для кожного морфізма $u : J \to I$ в категорії B та об'єкта $X \in p(I)$ в категорії B, існує декартовий морфізм $f : Y \to X$ над u який називається декартовим підйомом X над u.

Визначення 12. (Розщеплене розшарування). Розшарування Гротендіка називається розщепленим або функторіальним досніпом, якщо p^{-1} може бути продовжений до функтора $B^{op} \to Cat$ в точній індексованій категорії. Категорія, об'єкти якої є розщеплені розшарування позначається як функторіальний досніп $Psh(B) = [B^{op}, Cat]$.

Визначення 13. (Розшарований функтор). Нехай $p : X \to B$ та $q : Y \to B$ — розшарування Гротендіка зі спільною базою B, Функтор $F : X \to Y$ називається декартовим (або розшарованим функтором), якщо: 1) $q \circ F = P$; 2) для кожного декартового морфізма x з X відносно p, $F(x)$ — декартовий морфізм відносно q.

Визначення 14. (Розшароване природнє перетворення). Нехай $p : E \to B$ та $q : D \to A$ це два розшарування Гротендіка зі спільною базою B, тоді категорія $\mathbf{Fib}_B(p, q)$ (підкатегорія $\mathbf{Cat}/B$) визначається так, що об'єкти це розшаровані функтори $p \to q$, а морфізми це пари функторів $(H : E \to D, K : B \to A)$ такі, що для довільного декартового морфізма f відносно p слідує, що $H(f)$ декартовий відносно q.

Визначення 15. (Обширна категорія). Функтор $p : E \to B^{\to}$ називається обширною категорією, якщо: 1) $\mathbf{cod} \circ p : E \to B$ є декартовим функтором; 2) для кожного декартового функтора $f \in E$ значення функтора p в точці f є пулбеком в B.

Визначення 16. (Конструкція Гротендіка). Ізоморфізм між 2-категоріями $\mathbf{Psh}(B)$ та $\mathbf{Fib}(B)$ називається конструкцією Гротендіка.

$$\int : \mathbf{Psh}(B) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Fib}(B)$$

2.2.2 Локальні декартово-замкнені категорії Сілі

Локальні декартово-замкнені категорії (ДЗК) та їх зв'язок з теорією типів були представлені Сілі [?]. Внутрішньою мовою локальних ДЗК є мова програмування з залежними типами Π та Σ, що становить основу сучасних фібраційних пруверів. Доведення, що декартово замкнена категорія містить STLC надано в розділі 7 математичних компонент в рамках топосо-теоретичної моделі конструктивної теорії множин.

2.2.3 Категорії з сімействами Диб'єра

Узагальнена алгебраїчна теорія Пітера Диб'єра [?] [?] [?].

Визначення 17. (Категорія з сімействами). Категорія $\mathbf{C}$, об'єкти якої $\mathbf{Ob_C}$ це простори залежних функцій $\Pi(A, B)$, а морфізми $\mathbf{Hom_C}(\Pi(A, B), \Pi(A', B')$ пари функцій $[f : A \to A', g(x : A) : B(x) \to B'(f(x))$.

Визначення 18. (Категорія контекстів). Категорія, об'єкти якої є усі можливі контексти, а морфізми усі можливі підстановки.

```
def CwF : U := Σ (C: precategory) (T: catfunctor C Fam)
    (context: isContext C) (terminal: isTerminal C), isComprehension C T
```

2.2.4 Природні моделі Еводі

Сучасна категорна досніпова модель теорії типів, яка була представлена Стівом Еводі та активно розроблюється в університеті Карнегі-Мелона.

Визначення 19. (Досніп). Досніп на категорії $\mathbf{C}$ визначається як функтор $\mathrm{F} : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \boldsymbol{Set}$ з оберненої до $\mathbf{C}$ категорії в категорію множин $\boldsymbol{Set}$.

Визначення 20. (Природна модель). Природна модель складається з: 1) категорії $\mathbf{C}$; 2) виділеного термінального об'єкту $\mathrm{t} \in \mathbf{C}$; 3) досніпів $\mathrm{Ty}, \mathrm{Tm} : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \boldsymbol{Set}$; 4) природнього перетворення $\mathrm{p} : \mathrm{Tm} \to \mathrm{Ty}$.

```
def naturalModel : U := Σ (C  : precategory) (_  : isCategory C)
    (t : terminal C) (Tm : carrier C) (Ty : carrier C)
    (p : hom C VT V), Π (f : homTo C V), hasPullback C (Tm, f, Ty, p)
```

Володимир Воєводський запропонував свою категорну модель, яку назвав $\mathbf{C}$—системами. В бібліотеці математичних компнент розділу 7 представлене доведення ізоморфізму $\mathbf{C}$—систем Воєводського природним моделям Еводі.

Визначення 21. (Репрезентативні природні перетворення). Для двох досніпів $\mathrm{P}, \mathrm{Q} : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ та природнього перетворення $\alpha : \mathrm{Q} \to \mathrm{P}$, α називається репрезентативним якщо для всіх $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ та $\mathrm{x} : \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ існує $\mathrm{p_x} : \mathrm{D} \to \mathbf{C}$ та $\mathrm{y} : \mathrm{Q}(\mathrm{D})$, такий що цей квадрат комутує:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{y}(\mathrm{D}) & \xrightarrow{\mathrm{y}} & \mathrm{Q} \\ {\scriptstyle \mathrm{y}\mathrm{p_x}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ \mathrm{y}(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\mathrm{x}} & \mathrm{P} \end{array}$$

Визначення 22. (Послабляючий морфізм). Складається з: 1) функтора природніх моделей $\mathrm{F} : \mathbf{C} \to \mathrm{D}$, 2) природне перетворення $\phi_{\mathrm{Ty}} : \mathrm{F_!Ty_C} \to \mathrm{Ty_D}$, 3) природне перетворення $\phi_{\mathrm{Tm}} : \mathrm{F_!Tm_C} \to \mathrm{Tm_D}$, такими що наступа діаграма комутує:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{F_!Tm}(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\phi_{\mathrm{Tm}}} & \mathrm{Tm}(\mathrm{D}) \\ {\scriptstyle \mathrm{F_!p}(\mathbf{C})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{p}(\mathrm{D})} \\ \mathrm{F_!Ty}(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\phi_{\mathrm{Ty}}} & \mathrm{Ty}(\mathrm{D}) \end{array}$$

.

Тут $\mathrm{F_!} : \mathrm{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} \to \mathrm{Set}^{\mathrm{D}^{\mathrm{op}}}$ є лівим розширенням Кана.

2.2.5 Модельні категорії Квіллена

Дисертація Деніела Квіллена була присвячена диференціальним рівнянням, але відразу після цього він перевівся в MIT і почав працювати в алгебраїчній топології, під впливом Дена Кана. Через три роки він видає Шпрінгеровскі лекції з математики "Гомотопічна алгебра яка назавжди транформувала алегбраїчну топологію від вивчення топологічних просторів з точністю до гомотопий до загального інструменту, що застосовується в інших областях математики.

Модельні категорії вперше були успішно застосовані Воєводським для доказу кон'юнктури Мілнора (для 2) і потім мотивной кон'юнктури Блоха-Като (для n). Для доказу для 2 була побудована зручна стаблільная гомотопічні категорія узагальнених схем. Інфініті категорії Джояля, досить добре досліджені Лур'є є прямим узагальненням модельних категорій.

Цікавою властивістю модельних категорій є те, що дуальні до них категорії перевертають розшарування і корозшарування, таким природнім чином реалізують дуальність Екмана-Хілтона. Розшарування і корозшарування пов'язані, тому взаємовизначені. Корозшарування є морфізмами, що мають властивість лівого гомотопічні підйому по відношенню до ациклічним розшарування і розшарування є морфізмами, що мають властивість правого гомотопічні підйому по відношенню до ациклічних корозрашувань.

2.3 Спектральна категорія формальних мов

Категорії, об'єкти яких є мови програмування, або точніше їх синтаксиси (ініціальні об'єкти), а морфізми — транформаціями цих синтаксичних дерев (верифікаторами, компіляторами, екстраторами) є об'єктом дослідження концептуальної ситсеми мов.

В той час, як категорні моделі теорії типів працюють з контекстуальними категоріями та двома досніпами $\mathfrak{Tm}$ та $\mathfrak{Ty}$ які моделюють типи та терми в категорії множин, мовні категорії призначені для моделювання різних теорій типів та різних відповідних досніпів, а також перетворень між ними.

Визначення 23. (Синтаксичне дерево). Синтаксичне дерево — це індуктивний тип або дерево Бома, контруктори якого відповідають одному з 4 типів правил в теорії типів, як правило використовуються три правила: правило формації, інтро-правила та елімінатор.

Визначення 24. (Вище синтаксичне дерево). Синтаксичне дерево в яке додано β та η правила називається вищим синтаксичним деревом.

Визначення 25. (Мова програмування). Мова програмування або мовна категорія — це категорія, об'єкти якої — це maybe-типи сум синтаксичних дерев мов програмування, а морфізми — це стрілки (які містять правила виводу, типизації, нормалізації, екстакції тощо). Приклади синтаксичних дерев: O_{Π}, O_{Σ}, $\mathrm{O}_{=}$. Приклади мовних категорій: $\mathrm{O}_{\mathrm{PTS}}$ (Henk), $\mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-80}}$ (Per), $\mathrm{O}_{\mathrm{HTS}}$ (Anders).

Визначення 26. (Модель). Модель визначимо як систему формальних мов (об'єкти) разом з їх програмами, та мовними перетвореннями (звязки) між ними для яких працює правило асоціативності композиції та правила лівої і правої композиції з одиничними стрілками. Іншими словами будемо розуміти тут категорну модель.

Визначення 27. (Послідовність синтаксичних дерев). Кожна послідовність синтаксичних дерев

$$\mathrm{O}_{\Pi} \to \mathrm{O}_{\Sigma} \to \mathrm{O}_{=} \to \mathrm{O}_{W} \to \mathrm{O}_{\mathrm{I}}. \tag{2.1}$$

генерує відповідну послідовність мов програмування

$$\begin{aligned} \mathrm{O}_{\mathrm{PTS}}(\mathrm{O}_{\Pi}) \to \mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-72}}(\mathrm{O}_{\Pi}, \mathrm{O}_{\Sigma}) \to \mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-73}}(.., \mathrm{O}_{\Sigma}, \mathrm{O}_{=}) \to \\ \to \mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-80}}(..., \mathrm{O}_{=}, \mathrm{O}_{W}) \to \mathrm{O}_{\mathrm{HTS}}(..., \mathrm{O}_{W}, \mathrm{O}_{\mathrm{I}}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

наступним чином. Кожна мова програмування залежить від синтаксису який її визначає та всіх попредніх синтаксисів мов програмування з послідовності. Перша мова програмування містить тільки перший синтаксис. Розкриті сигнатури мають вигляд:

$$\mathrm{O}_{\mathrm{PTS}} : \mathrm{O}_{\Pi} \to \mathrm{U},$$
$$\mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-72}} : \mathrm{O}_{\Pi} \to \mathrm{O}_{\Sigma} \to \mathrm{U},$$
$$\mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-73}} : \mathrm{O}_{\Pi} \to \mathrm{O}_{\Sigma} \to \mathrm{O}_{=} \to \mathrm{U},$$
$$\mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-80}} : \mathrm{O}_{\Pi} \to \mathrm{O}_{\Sigma} \to \mathrm{O}_{=} \to \mathrm{O}_{W} \to \mathrm{U},$$
$$\mathrm{O}_{\mathrm{HTS}} : \mathrm{O}_{\Pi} \to \mathrm{O}_{\Sigma} \to \mathrm{O}_{=} \to \mathrm{O}_{W} \to \mathrm{O}_{\mathrm{I}} \to \mathrm{U}.$$

Таким чином кожна наступна мова програмування містить усі попередні мови програмування, визначені послідовністю синтаксичних дерев,

Визначення 28. (Створення мовної категорії). Мови можна додавати, наприклад $\mathrm{O}_{\mathrm{HTS}} = \mathrm{O}_{\Pi\Sigma=W\mathrm{I}}$, для побудови якої необхідно об'єднати у індуктивному типі мови усі індуктивні типи її підмов. Таким чином функтор діє на декартовому добутку синтаксичних дерев мовних категорій та має значення в категорій мовних категорій. Приклад найпотужнішої гомотопічної мови:

$$\mathrm{O}_{\mathrm{HTS}} = \mathrm{O}_{\Pi\Sigma=W\mathrm{I}} : \mathrm{O}_{\Pi} \to \mathrm{O}_{\Sigma} \to \mathrm{O}_{=} \to \mathrm{O}_{W} \to \mathrm{O}_{\mathrm{I}} \to \mathrm{U}. \tag{2.3}$$

Кожне синтаксичне дерево, як правило, містить конструктори та елімінатори певного одиничного типу. Але починаючи з $\mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-80}}$ складність типів, які додаються до ядра значно зростає. Таким чином мовні категорії конструюються гранулярно з точністю до включення певного типу в ядро верифікатора.

Визначення 29. (Типи синтаксичних дерев). У розділі 1 були проаналізовані усі мови програмування та середовища виконання, а також спеціалізовані мови моделювання. В результаті чого було встановлено чітки індивідуальні мовні синтаксиси. Кожен синтаксис складається з множини синтаксичних одиниць цієї мови (конструктори індуктивного типу), які відповідають правилам теорії типів Мартіна-Льофа (формації, інтро-правило, елімінатор, β-, та η-правила). Якщо додати β-, та η-правила як рівності у визначення синтаксису, то для представлення потрібні вищі індуктивні типи. Таким чином кожному синтаксичному дереву відповідає певний тип в теорії типів Мартіна-Льофа.

Визначення 30. (Спектральна категорія мов). Так, виділяється наступна послідовність мов, та функторів між ними, де кожна мова-кодомен є складнішою та біль потужною за мову-домен. Система мов є категорією мовних категорій або категорією мов програмування.

$$\mathrm{O}_{\infty} : \mathrm{O}_{\mathrm{CPS}} \to \mathrm{O}_{\mathrm{PTS}} \to \mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-80}} \to \mathrm{O}_{\mathrm{HTS}} \to \ldots \tag{2.4}$$

Визначення 31. (Коконтекстуальна категорія мов). Якщо не виділяти певну послідовність мовного ускладнення та розглядати усі суми усієї певної множини мовних синтаксисів, то ми отримємо коконтекстуальну категорію, де об'єкти — це усі можливі мовні

Таблиця 2.2 Аналіз формальних суб-мов як примітивів ядра

Мова	Застосування
O_λ	Нетипизоване λ-числення Чорча (інтерпретація)
O_π	Числення процесів, CCS, CSP або π-числення Мілнера
O_μ	Тензорне числення (векторизація)
O_Π	Числення конструкцій PTS (функціональна повнота)
O_Σ	Числення контекстів MLTT-72 (контекстуальна повнота)
$O_=$	Теорія типів Мартіна-Льофа MLTT-73 (логіка)
O_W	Числення (ко-)індуктивних конструкцій W та M дерев MLTT-80 (матіндукція)
O_I	Гомотопічна система типів CCHM (формальна математика)
$O_\triangleright$	Кубічна система с обмежувальною рекурсією (теореми про $\pi-$)
$O_/$	Система фактор-типів (Lean)
O_H	Мова з оператором Адамара (квантова фізика)
$O_\dashv$	Модальна HoTT (фізика)

Сірим кольором показаний спектр мовних примітивів ядра концептуальної моделі.

категорії побудовані за допомогою усіх перестановок суми мовних синтаксисів, а морфізми це функтори перетворення однієї мовної категорії в іншу мовну категорію. Приклади: $O_{I*} \to O_{\Pi=}$, $O_\Pi \to O_{\Pi\Sigma}$, $O_\Pi \to O_{\Pi\Sigma}$, $O_{\Pi*} \to O_\Pi$.

2.4 Структурне представлення моделі

Виходячи з визначення моделі, вони можуть мати різний набір об'єктів в системі мов програмування. Покажемо приклади екземплярів які можно породити в рамках цієї моделі.

2.4.1 Мінімальна система

Приклад мінімальної системи, яка містить лише одну мову для доведення теорем та одну мову для виконання програм.

$$\mathrm{PTS}_{\mathrm{CPS}} = \begin{cases} \mathrm{Ob} : \{\mathrm{O}_{\mathrm{CPS}}, \mathrm{O}_{\mathrm{PTS}}\} \\ \mathrm{Hom} : \{1, 2 : \mathbb{1} \to \mathrm{O}_{\mathrm{PTS}}, 3 : \mathrm{O}_{\mathrm{PTS}} \to \mathrm{O}_{\mathrm{CPS}}\} \end{cases} \tag{2.5}$$

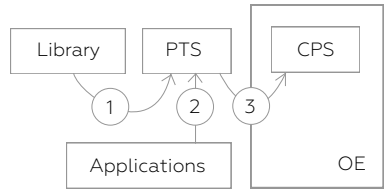


Рис. 2.1 Мінімальна система з чистої мови та інтерпретатора

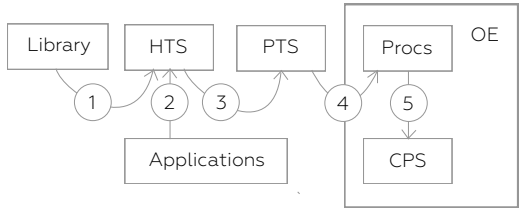
Стрілки 1 та 2 визначають модель та базову бібліотеку, а стрілка 3 означає екстракт доведення (якщо таке є) в інтерпретатор. Можна використати графічну мову мереж Петрі для зображення екземпляра моделі системи мов.

2.4.2 Максимальна система

Інший приклад системи — це максимальна система, яка містить усі формальні мови програмування та формальне середовище виконання (порядок синтаксичних дерев як параметрів при конструюванні мовної категорії може змінюватися, тут генеалогія HTS не ведеться від MLTT, яке є розгалуженням).

$$\mathtt{Total} = \begin{cases} \mathtt{Ob} : \{\mathrm{O}_{\mathrm{CPS}}, \mathrm{O}_{\mathrm{PTS}}, \mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-73}}, \mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-80}}, \mathrm{O}_{\mathrm{HTS}}\} \\ \mathtt{Hom} : \begin{cases} 1, 2 : \mathbb{1} \to \mathrm{O}_{\mathrm{HTS}}, 3 : \mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-73}} \to \mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-80}} \\ 4 : \mathrm{O}_{\mathrm{HTS}} \to \mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-80}}, 5 : \mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-80}} \to \mathrm{O}_{\mathrm{PTS}}, 6 : \mathrm{O}_{\mathrm{PTS}} \to \mathrm{O}_{\mathrm{CPS}} \end{cases} \end{cases} \tag{2.6}$$

За допомогою мереж Петрі це можна відобразити наступним чином:



Кубічна та чиста системи типів та середовище виконання Рис. 2.2

2.4.3 Категорія середовища виконання CPS

Визначення 32. (Категорія середовища виконнання $\mathrm{O}_{\mathrm{CPS}}$).

$$\mathrm{O}_{\mathrm{CPS}} = \begin{cases} \mathrm{Ob} : \{\ \mathit{maybe}\ \mathrm{CPS}\ \} \\ \mathrm{Hom} : \{\ \mathit{eval} : \mathrm{Ob} \to \mathrm{Ob}\ \} \end{cases}$$

Синтаксис середовища виконання може містити наступні синтаксиси: O_λ, O_π, O_μ.

Визначення 33. (Синтаксис мовної категорії $\mathrm{O}_{\mathrm{CPS}}$).

```
data CPS = lambda (_: church CPS)
         | process (_: milner CPS)
         | tensor (_: futhark CPS)
```

Формальне середовище виконання складається з інтерпретатора (нетитизованого λ-числення) та числення акторів (процесів, черг, таймерів). Інтерпретатор та операційна система включені в систему доведення теорем для уніфікації всіх сигнатур системи та формалізації самого інтерпретатора як системи виконання. Слід зазначити, що не завжди є змога зробити екстракт в $\mathrm{O}_{\mathrm{CPS}}$, тому об'єкти мовних категорій є maybe-типами.

$$\mathrm{O}_{\mathrm{CPS}} : \mathrm{O}_\lambda \to \mathrm{O}_\pi \to \mathrm{O}_\mu \to \mathrm{U}$$

Далі буде йтися тільки про формальні інтерпретатори, так як вони є найбільш компакними формами мов для верифікації (в порівнянні з моделями System F). Таким чином будемо розглядати формальне середовище виконання, як сукупність інтерпретатора та операційної системи.

Визначення 34. (Синтаксичне дерево O_λ). Інтерпретатор визначається своїм трьома конструкторами: номер змінної (індекс де Брейна), лямбда функція та її апплікація:

```
data church = var (x: nat)
            | lam (l: nat) (d: cps)
            | app (f a: cps)
```

Мовою інтерпретаторів є нетипизоване лямбда числення, однак в залежності від складності інтерпретатора це дерево може виглядати по-різному.

В цьому розділі ми побудуємо надшвидку імплементацію інтерпретатора, яка цілком, разом зі своїми програмами, розміщується в кеш-памяті першого рівня процесору, та здатна до AVX векторизацій засобами мови Rust. Як промислова опція, підтримується також екстракт в байт-код інтерпретатора BEAM віртуальної машини Erlang.

Визначення 35. (Синтаксичне дерево O_π). Правило формації, конструктора та елімінатора визначається синтаксичним деревом O_*:

```
data milner (lang: U)
   = process (protocol: lang)
   | spawn (cursors: lang) (core: nat) (program: lang)
   | snd (cursor: lang) (data: lang)
   | rcv (cursor: lang)
   | pub (size: nat)
   | sub (cursor: lang)
```

Визначення 36. (Синтаксичне дерево O_μ).

```
data futhark (lang: U)
   = iota (cursor: lang)
   | map (cursor: lang)
   | fold (size: nat)
   | scan (cursor: lang)
   | for (cursor: lang)
   | while (cursor: lang)
   | concat (cursor: lang)
   | zip (cursor: lang)
   | transpose (cursor: lang)
```

2.5 Вищі формальні мови програмування

Тут йдеться про мови програмування придатні для доведення теорем, та їх таксономію від найелементарніших (чистої системи з одним типом Π) до найпотужніших гомотопічних систем. Одна така гомотопічна система є кінцевим завданням цього розділу — побудова моделі гомотопічного верифікатора. В процесі його побудови в цьому розділі ми розглянемо під мікроскопом складові частини його нижчих мовних рівнів.

Застосуємо категорну семантику для мов програмування і будемо розглядати мови програмування як моноїдальні мовні категорі, об'єкти яких є просторами усіх програм цих мов програмування, а морфізми — правила верифікації та компіляції цих мов. Морфізми між мовними категоріями в категорї мов програмування — це функтори підвищення та пониження складності мови, подібно до того як діють морфізми в контекстуальних категоріях. Морфізм деконструює або конструює за допомогою Either-типу або Σ-типу індуктивний тип мови програмування.

Мови розкладаються у спектральну (індексовану натуральними числами $\mathbb{N} \to \mathcal{U}$) послідовність мов, кожен елемент якої є мовою програмування, яка не містить синтаксичне дерево вищої мови програмування.

2.5.1 Чиста система типів PTS

Чиста ситема або числення конструкцій або система з одим типом або система з однією аксіомою, продовжує традиції елементарних пруверів в стилі першого AUTOMATH та сучасних Henk, Morte, Cedile, Om.

Визначення 37. (Мовна категорія чистої мови $\mathrm{O}_{\mathrm{PTS}}$).

$$\mathrm{O}_{\mathrm{PTS}} = \begin{cases} \mathrm{Ob} : \{\, \mathrm{X} : \mathit{maybe}\ \mathrm{PTS}, \mathit{target} : \mathit{maybe}\ \mathrm{CPS} \,\} \\ \mathrm{Hom} : \begin{cases} \mathit{type}, \mathit{norm} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}, \mathit{extract} : \mathrm{X} \to \mathit{target} \\ \mathit{certify} : \mathrm{X} \to \mathit{target} = \mathit{type} \circ \mathit{norm} \circ \mathit{extract} \end{cases} \end{cases} \tag{2.7}$$

Визначення 38. (Синтаксис мовної категорії $\mathrm{O}_{\mathrm{PTS}}$). Чиста мова $\mathrm{O}_{\mathrm{PTS}}$ містить лише синтаксис одного типу, Π-типу. Така теорія називається теорією з одним типом, або з однією аксіомою.

```
data PTS = forall (_: Forall PTS)
```

Вона описана в літературі як Calculus of Construction (Кокан), Pure Type System (Барендрехт, Меєр, Гонзалез, Стемп, Фу).

Визначення 39. (Синтаксичне дерево O_{Π}).

```
data Forall (lang: U)
   = fibrant (n: nat)
   | variable (x: name) (l: nat)
   | pi (x: name) (l: nat) (f: lang)
   | lambda  (x: name) (l: nat) (f: lang)
   | application (f a: lang)
```

2.5.2 Теорія типів Мартіна-Льофа MLTT-73

Мова теорії типів є сучасною основою всіх пруверів з залежними типами, такими, наприклад, як NuPRL та Agda. Багато так званих $\Pi\Sigma$ пруверів імплементують $\mathrm{MLTT}-73$ серед таких як: $\Pi\Sigma^2$, $\Pi\forall^3$.

Визначення 40. (Мовна категорія $\mathrm{O}_{\mathrm{MLTT}-73}$).

$$\mathrm{O}_{\mathrm{MLTT}-73} = \begin{cases} \mathrm{Ob} : \{\ \mathit{maybe}\ \mathrm{MLTT}-73\ \} \\ \mathrm{Hom} : \begin{cases} \mathit{type}, \mathit{norm} : \mathrm{Ob} \to \mathrm{Ob} \\ \mathit{certify} : \mathrm{Ob} \to \mathrm{Ob} = \mathit{type} \circ \mathit{norm} \end{cases} \end{cases} \tag{2.8}$$

Визначення 41. (Синтаксис мовної категорії $\mathrm{O}_{\mathrm{MLTT}-73}$). Мова $\mathrm{O}_{\mathrm{MLTT}-73}$ включає в себе синтаксиси трьох типів теорії Мартіна-Льофа: O_{Π}, O_{Σ}, $\mathrm{O}_{=}$.

```
data MLTT
   = forall (_: Forall MLTT)
   | sigma (_: Sigma MLTT)
   | id (_: Id MLTT)
```

Визначення 42. (Синтаксичне дерево O_{Σ}). Також можна до чистої системи додати Σ-тип, піднявши типову систему до мови $\mathrm{O}_{\mathrm{MLTT}-72}$ або $\mathrm{O}_{\Pi\Sigma}$:

```
data Sigma (lang: U)
   = sigma (n: name) (a b: lang)
   | pair (a b: lang)
   | fst (p: lang)
   | snd (p: lang)
```

Визначення 43. (Синтаксичне дерево $\mathrm{O}_{=}$). Додавши тип рівності можно підняти систему ще на одну сходинку, до $\mathrm{O}_{\mathrm{MLTT}-73}$ або $\mathrm{O}_{\Pi\Sigma=}$:

```
data Id (lang: U)
   = identity (t a b: lang)
   | id_intro (a b: lang)
   | id_elim (a b c d e: lang)
   | id_compute (a b c d e: lang)
```

$\mathrm{O}_{=}$ не містить η-правила.

[2] https://github.com/zlizta/pisigma-0-2-2
[3] https://github.com/sweirich/pi-forall

2.5.3 Система індуктивних типів MLTT-80

MLTT-80 покладена в основу CCHM верифікатора.

Визначення 44. (Мовна категорія $\mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-80}}$).

$$\mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-80}} = \begin{cases} \mathrm{Ob} : \{ \mathrm{X} : \mathit{maybe}\ \mathrm{PM}, \mathit{target} : \mathit{maybe}\ \mathrm{CPS} \} \\ \mathrm{Hom} : \begin{cases} \mathit{type}, \mathit{norm}, \mathit{induction} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}, \mathit{extract} : \mathrm{X} \to \mathit{target} \\ \mathit{certify} : \mathrm{X} \to \mathit{target} \\ \mathit{cerfity} = \mathit{type} \circ \mathit{norm} \circ \mathit{induction} \circ \mathit{extract} \end{cases} \end{cases} \tag{2.9}$$

Мова індуктивних типів дозволяє безпосередньо кодувати індуктивні типи, не використовуючи схеми кодування Бома, містить усі попередні мовні синтаксиси: $\mathrm{O}_{=}$, O_{Σ}, O_{Π} та синтаксиси O_{0}, O_{1}, O_{2}, O_{W}.

Визначення 45. (Синтаксичне дерево мовної категорії $\mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-80}}$).

```
data MLTT-80
  = forall (_: Forall MLTT-80)
  | sigma (_: Sigma MLTT-80)
  | id (_: Id MLTT-80)
  | 0 (_: Empty MLTT-80)
  | 1 (_: Unit MLTT-80)
  | 2 (_: Bool MLTT-80)
  | W (_: W MLTT-80)
```

2.5.4 Система індуктивних типів Paulin-Mohring

Визначення 46. (Мовна категорія O_{PM}).

$$\mathrm{O}_{\mathrm{PM}} = \begin{cases} \mathrm{Ob} : \{ \mathrm{X} : \mathit{maybe}\ \mathrm{PM}, \mathit{target} : \mathit{maybe}\ \mathrm{CPS} \} \\ \mathrm{Hom} : \begin{cases} \mathit{type}, \mathit{norm}, \mathit{induction} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}, \mathit{extract} : \mathrm{X} \to \mathit{target} \\ \mathit{certify} : \mathrm{X} \to \mathit{target} \\ \mathit{cerfity} = \mathit{type} \circ \mathit{norm} \circ \mathit{induction} \circ \mathit{extract} \end{cases} \end{cases} \tag{2.10}$$

Мова індуктивних типів дозволяє безпосередньо кодувати індуктивні типи, не використовуючи схеми кодування Бома, містить усі попередні мовні синтаксиси: $\mathrm{O}_{=}$, O_{Σ}, O_{Π}.

Визначення 47. (Синтаксичне дерево мовної категорії O_{PM}).

Головним чином, система загальних індуктивних схем предбачає три основних компоненти: 1) верифікатор строго позитивних схем; 2) верифікатор завершуваності рекурсивної перевірки рекурсивних схем; 3) верифікатор взаємної рекурсії.

```
data PM = forall (_: Forall PM)
   | sigma (_: Sigma PM)
   | id (_: Id PM)
   | inductive (_: InductiveSchemes PM)
```

Мова містить наступні допоміжні визначення: і) телескопу, який містить послідовність елементів мови; іі) розгалуження, як конструкцій case оператора; ііі) імен конструкторів індуктивного типу.

```
data tele (A: U) = emp | tel (n: name) (b: A) (t: tele A)
data branch (A: U) = br (n: name) (args: list name) (term: A)
data label (A: U) = lab (n: name) (t: tele A)
   | com (n: name) (t: tele A) (dim: list name)
         (s: list (prod (prod name bool) A))
```

Визначення 48. (Синтаксичне дерево O_{*}). Правило формації, конструктора та елімінатора визначається синтаксичним деревом O_{*}:

```
data InductiveSchemes (lang: U)
   = data (n: name) (t: tele lang) (labels: list (label lang))
   | case (n: name) (t: lang) (branches: list (branch lang))
   | constructor (n: name) (args: list lang)
```

2.5.5 Гомотопічна система типів HTS

Головним чином, гомотопічна система складається з наступних частин: 1) два всесвіти fibrant та pretype; 2) MLTT-73; 3) CCHM розширення.

Визначення 49. (Мовна категорія $\mathrm{O}_{\mathrm{HTS}}$).

$$\mathrm{O}_{\mathrm{HTS}} = \begin{cases} \mathrm{Ob} : \{\ maybe\ \mathrm{HTS}\ \} \\ \mathrm{Hom} : \begin{cases} type, norm : \mathrm{Ob} \to \mathrm{Ob} \\ certify : \mathrm{Ob} \to \mathrm{Ob} = type \circ norm \end{cases} \end{cases}$$

Визначення 50. (Синтаксис мовної категорії $\mathrm{O}_{\mathrm{HTS}}$). Синтаксис гомотопічної мовної категорії містить усі попередні мовні синтаксиси: O_{I}, $\mathrm{O}_{\mathcal{W}}$, $\mathrm{O}_{=}$, O_{Σ}, O_{Π}:

```
data HTS = forall (_: Forall HTS)
         | sigma (_: Sigma HTS)
         | id (_: Id HTS)
         | homotopy (_: Homotopy HTS)
```

Гомотопічна типа наслідує $\mathrm{O}_{\mathrm{MLTT-80}}$ але модифіковану з Path-типом в індуктивних визначеннях, структурою композиції, анонсує Path-тип (формація, конструктор, та елімінатор) як лямбда функцію на відрізку, а також склейку типів у всесвіті та склейку змінних з відповідними елімінаторами.

Визначення 51. (Синтаксичне дерево O_{I}).

```
data Homotopy (lang: U)
   = pretype (n: nat)
   | path (A x y: lang)
   | path_lambda (name: name) (a: lang)
   | path_app (f a: lang)
   | interval | zero | one
   | meet (a b: lang) | join (a b: lang) | neg (e: lang)
   | transp (a b c: lang) | hcomp (a b: lang)
   | glue (a b c: lang) | Glue (a b: lang) | unglue (a b: lang)
```

Таким чином, $\mathrm{O}_{\mathrm{HTS}}$ містить два Id-типа, один унаслідований від $\mathrm{O}_{=}$ (з модифікованою обчислювальною семантикою), а інший Interval який міститься в синтаксичному дереві O_{I}.

2.6 Висновки

Таким чином ми здійснили спектралізацію або іншими словами розклали усі існуючі немодальні формальні системи типів у спектральну категорію.

Розділ 3

Система мов середовища виконання

Присвячується автору Erlang

Джо Армстронгу

Третій розділ описує розвиток концептуальної моделі системи доведення теорем як сукупності формальних середовищ виконання, кожне наступе з яких, складніше за попереднє, має свою операційну семантику, та наслідує усі властивості попередніх операційних середовищ послідовності.

Вступне слово

3.1 Інтерпретатор як основна лямбда-система

Мінімальна мова системи $\mathrm{O}_{\mathrm{CPS}}$ визначається простим синтаксичним деревом:

```
data cps = var (x: nat)
         | lam (l: nat) (d: cps)
         | app (f a: cps)
```

Однак, на практиці, застосовують більш складні описи синтаксичних дерев, зокрема для лінивих обчислень, та розширення синтаксичного дерева спеціальними командами пов'язаними з середовищем виконання. Програми таких інтерпретаторів відповідно виконуються у певній пам'яті, яка використовується як контекст виконання. Кожна така програма крутиться як одиниця виконання на певному ядрі процесора. Ситема процесів, де кожен процес є CPS-програмою яку виконує інтерпретатор на певному ядрі.

Мотивація для побудови такого інтерпретатору, який повністю розміщується разом зі программою в L1 стеку (який лімітований 64КБ) базується на успіху таких віртуальних машин як LuaJIT, V8,

Таблиця 3.1 Заміри на інтерпретаторах ландшафту атаки

Мова	Fac(5) в нс
Rust	0
Java	3
PyPy	8
CPS	291
Python	537
K	756/635
Erlang	10699/1806/436/9
LuaJIT	33856

Таблиця 3.2 Заміри на інтерпретаторах ландшафту атаки

Мова	Akk(3,4) в мкс
CPS	635
Rust	8,968

HotSpot, а також векторних мов програмування типу K та J. Якби ми могли побудувати дійсно швидкий інтерпретатор який би виконував програми цілком в L1 кеші, байткод та стріми якого були би вирівняні по словам архітектури, а для векторних обчислень застосовувалися би AVX інструкції, які, як відомо перемагають по ціні-якості GPU обчислення. Таким чином, такий інтерпретатор міг би, навіть без спеціалізованої JIT компіляції, скласти конкуренцію сучасним промисловим інтерпретаторам, таким як Erlang, Python, K, LuaJIT.

Для дослідження цієї гіпотези мною було побудовано есперементальний інтерпретатор без байт-коду, але з вирівняним по словам архітерктури стріму команд, які є безпосередньою машинною презентацією конструкторів індуктивних типів (enum) мови Rust. Наступні результати були отримані після неотпимізованої версії інтерпретатора при обчисленні факторіала (5) та функції Акермана у точці (3,4).

Ключовим викликом тут стали лінійні типи мови Rust, які не дозволяють звертатися до ссилок, які вже були оброблені, а це впливає на всю архітектуру тензорного преставлення змінних в мові інтерпретатор $_{\mathrm{CPS}}$, яка наслідує певним чином мову K.

3.1.1 Векторизація засобами мови Rust

```
objdump ./target/release/o -d | grep mulpd
   223f1: c5 f5 59 0c d3    vmulpd (%rbx,%rdx,8),%ymm1,%ymm1
   223f6: c5 dd 59 64 d3 20 vmulpd 0x20(%rbx,%rdx,8),%ymm4,%ymm4
   22416: c5 f5 59 4c d3 40 vmulpd 0x40(%rbx,%rdx,8),%ymm1,%ymm1
   2241c: c5 dd 59 64 d3 60 vmulpd 0x60(%rbx,%rdx,8),%ymm4,%ymm4
   2264d: c5 f5 59 0c d3    vmulpd (%rbx,%rdx,8),%ymm1,%ymm1
```

```
22652: c5 e5 59 5c d3 20 vmulpd 0x20(%rbx,%rdx,8),%ymm3,%ymm3
```

3.1.2 Байт-код інтерпретатора

Синтаксичне дерево, або неформалізований бай-код віртуальної машини або інтерпретатора $\mathrm{O}_{\mathrm{CPS}}$ розкладається на два дерева, одне дерево для управляючих команд інтерпретатора: Defer, Continuation, Start (початок програми), Return (завершення програми).

```
data Lazy = Defer (otree: NodeId) (a: AST) (cont: Cont)
          | Continuation (otree: NodeId) (a: AST) (cont: Cont)
          | Return (a: AST)
          | Start
```

Операції віртуальної машини: умовний оператор, оператор присвоєння, лямбда функція та аплікація, є відображеннями на конструктори синтаксичного дерева.

```
data Cont = Expressions (a: AST) (v: Option (Iter AST)) (c: Cont)
          | Assign (ast: AST) (cont: Cont)
          | Cond (c,d: AST) (cont: Cont)
          | Func (a,b,c: AST) (cont: Cont)
          | List (acc: Vec AST) (vec: Iter AST) (i: Nat) (c: Cont)
          | Call (a: AST) (i: Nat) (cont: Cont)
          | Return
          | Intercore (m: Message) (cont: Cont)
          | Yield (cont: Cont)
```

3.1.3 Синтаксис

Синтаксис мови $\mathrm{O}_{\mathrm{CPS}}$ підтримує тензори, та звичайне лямбда числення з значеннями у тензорах машинних типів даних: i32, i64.

```
E: V | A | C
NC: ";" = [] | ";" m:NL = m
FC: ";" = [] | ";" m:FL = m
EC: ";" = [] | ";" m:EL = m
NL: NAME | o:NAME m:NC = Cons o m
FL: E | o:E | m:FC = Cons o m
EL: E | EC  | o:E m:EC = Cons o m
C: N | c:N a:C = Call c a
N: NAME | S | HEX | L | F
L: "(" ")" = [] | "([" c:NL "]" m:FL ")" = Table c m
               | "(" l:EL ")" = List l
F: "{" "}" = Lambda [] [] []
           | "{[" c:NL "]" m:EL "}" = Lambda [] c m
           | "{" m:EL "}" = Lambda [] [] m
```

Після парсера, синтаксичне дерево розкладається по наступним складовим: AST для тензорів (визначення вищого рівня); Value для машинних слів; Scalar для конструкцій мови (куди входить зокрема списки та словники, умовний оператор, присвоєння, визначення функції та її аплікація, UTF-8 літерал, та оператор

передачі управління в поток планувальника який закріплений за певним ядром CPU).

```
data AST     = Atom (a: Scalar)
             | Vector (a: Vec AST)

data Value   = Nil
             | SymbolInt (a: u16)
             | SequenceInt (a: u16)
             | Number (a: i64)
             | Float (a: f64)
             | VecNumber (Vec i64)
             | VecFloat (Vec f64)

data Scalar  = Nil
             | Any
             | List (a: AST)
             | Dict (a: AST)
             | Call (a b: AST)
             | Assign (a b: AST)
             | Cond (a b c: AST)
             | Lambda (otree: Option NodeId) (a b: AST)
             | Yield (c: Context)
             | Value (v: Value)
             | Name (s: String)
```

Кожна секція цієї глави буде присвячена цим мовним компонентам системи доведення теорем. В кінці розділу дається повна система, яка включає в себе усі мови та усі мовні перетворення.

3.2 Система числення процесів SMP async

3.2.1 Операційна система

Перелічимо основні властивості операційної системи (прототип якої опублікований на Github[1]).

3.2.2 Властивості

Автобалансована низьколатентна, неблокована, без копіювання, система черг з CAS-мультикурсорами, з пріоритетами задач та масштабованими таймерами.

3.2.2.1 Асиметрична багапроцесорність

Ядро системи використовує асиметричну багапроцесорність (АП) для планування машинного часу. Так у системі для консольного вводу-виводу та вебсокет моніторингу використовується окремий ректор (закріплений за ядром процессора), аби планування не впливало на програми на інших процесорах.

[1] `https://github.com/voxoz/kernel`

Це означає статичне закріплення певного атомарного процесу обчислення за певним реактором, та навіть можливо дати гарантію, що цей процес не перерветься при наступному кванті планування ніяким іншим процесом на цьому ядрі (ситуація єдиного процесу на реактор ядра процесору). Ядро системи постачається разом з конфігураційною мовою для закріплення задач за реакторами:

```
reactor[aux;0;mod[console;network]];
reactor[timercore;1;mod[timer]];
reactor[core1;2;mod[task]];
reactor[core2;3;mod[task]];
```

3.2.2.2 Низьколатентність

Усі реактори повинні намагатися обмежити IP-лічильник команд діапазоном розміром з L1/L2 кеш об'єм процесора, для унеможливлення колізій між ядрами на міжядерній шині можлива конфігурація, де реактори виконують код, області пам'яті якого не перетинаються, та обмежені об'ємом L1 кеш пам'яті що при наявній AVX векторизації дать змогу повністю використовувати ресурси процесору наповну.

3.2.2.3 Мультикурсори

Серцем низьколатентної системи транспорту є система наперед виділений кільцевих буферів (які називаються секторами глобального кільця). У цій системі кілець діє система курсорі для запису та читання, ці курсори можуть мати різний напрямок руху. Для забезпечення імутабельності (нерухомості даних) та відсут-

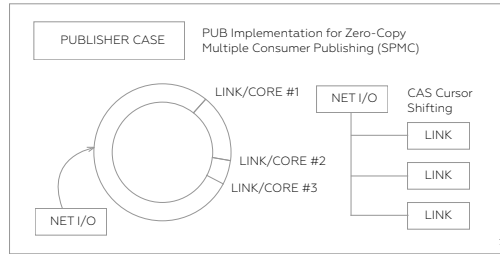
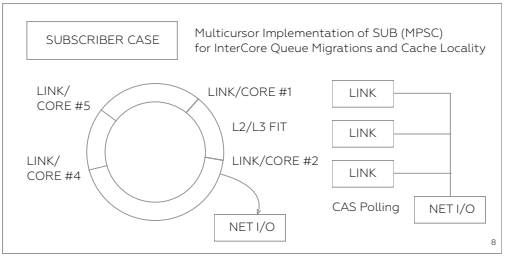


Рис. 3.1 Кільцева статична черга з CAS-курсором для публікації

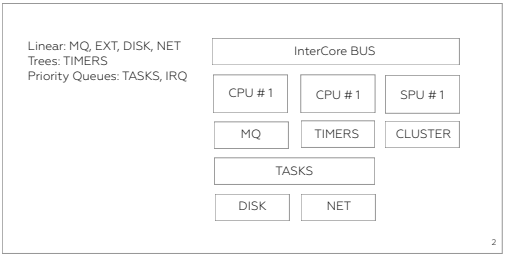
ності копіювання в подальшій роботі, дані залишаються в черзі, а рухаються та передаються лише курсори на типизовані послідовності даних.



Кільцева статична черга з CAS-курсором для згортки Рис. 3.2

3.2.2.4 Реактори

Кожен процесор має три типи реакторів які можуть бути на ньому запущені: i) Task-реактор; ii) Timer-реактор; iii) IO-цикли. Для Task-реактора існують черги пріорітетів, а для Timer-реактора — дерева інтервалів. Загальний спосіб комунікації для задач вигля-



Система процесорних ядер та реакторів Рис

дає як публікація у чергу (рух курсора запису) та підписка на черги і згортання (руху курсора читання). Кожна черга має як курсори для публікації так і курсори для читання. Можливо також використання міжреакторної шини InterCore та посилання службового повідомлення по цій шині на інший реактор. Так, наприклад, працюють таймери та старти процесів, які передають сигнал в реактор для перепланування. Можна створювати нові повідомлення шини InterCore і систему фільтрів для згортання черги реактора для більш гнучкої обробки сигналів реального часу.

Task-реактор

Task-реактор або реактор задач виконує Rust задачі або програми інтерпретатора, які можуть бути двох видів: кінечні (які повертають результат виконання), або нескінченні (процеси).

Приклад бескінечної задачі — 0-процес, який запускається при старті системи. Цей процес завжди доступний по WebSocket каналу та з консолі терміналу.

IO-реактор

Мережевий сервер або IO-реактор може обслуговувати багато мережевих з'єднань та підтримує Windows, Linux, Mac смаки.

Timer-реактор

Різні типи сутностей планування (такі як Task, IO, Timer) мають різні дисципліни селекторів повідомлень для черг (послідовно, через само-балансуючі дерева, BTree дерева тощо).

3.2.2.5 Міжреакторний транспорт InterCore

Шина InterCore конструюється певним числом SPMC черг, виділених для певного ядра. Шина сама має топологію зірки між ядрами, та черга MPSC організована як функція над множиною паблішерів. Кожне ядро має рівно одного паблішера. Функція обробки шини протоколу InterCore називається poll_bus та є членом планувальника. Ви можете думати про InterCore як телепорт між процесорами, так як pull_bus викликається після кожної операції Yield в планувальник, і, таким чином, якщо певному ядру опублікували в його чергу повідомлення, то після наступного Yield на цьому ядрі буде виконана функція обробки цього повідомлення.

```
pub [ capacity ]
```

Створює новий CAS курсор для паблішінга, тобто для запису. Повертає глобальних машинний ідентифікатор, має єдиний параметр, розмір черги. Приклад: p: pub[16].

```
sub [ publisher ]
```

Створює новий CAS курсор для читання певної черги, певного врайтера. Повертає глобальний машинний ідентифікатор для читання. Приклад: s: sub[p].

```
spawn [ core ; program ; cursors ]
```

Створює нову програму задачу CPS-інтепреторатора для певного ядра. Задача може бути або програмою на мові Rust або будь якою програмою через FFI. Також при створенні задачі задається список курсорів, які ексклюзивно належатимуть до цієї задачі. Параметри функції: ядро, текст програми або назва FFI функції,спсисок курсорів. Приклад: spawn[0;"etc/proc0";(0;1)].

```
snd [ writer ; data ]
```

Посилає певні дані в певний курсор для запису. Повертає Nil якшо всьо OK. Приклад: snd[p;42].

```
rcv [ reader ]
```

Повертає прочитані дані з певного курсору. Якшо даних немає, то передає управління в планувальних за допомогою Yield. Приклад: rcv[s].

3.2.3 Структури ядра

Ядро є ситемою акторів з двома основними типами акторів: чергами, які представляють кільцеві буфери та відрізки памяті; та задачами, які резпрезентують байт-код програм та їх інтерпретацію на процесорі. Черги бувають двох видів: для публікації, які місять курсори для запису; та для читання, які містять курсори для читання. Задачі можна імплементувати як Rust програми, або як $\mathrm{O}_{\mathrm{CPS}}$ програми.

3.2.3.1 Черга для публікації

```
pub struct Publisher<T> {
    ring: Arc<RingBuffer<T>>,
    next: Cell<Sequence>,
    cursors: UncheckedUnsafeArc<Vec<Cursor>>,
}
```

3.2.3.2 Черга для читання

```
pub struct Subscriber<T> {
    ring: Arc<RingBuffer<T>>,
    token: usize,
    next: Cell<Sequence>,
    cursors: UncheckedUnsafeArc<Vec<Cursor>>,
}
```

Існує дві спеціальні задачі: InterCore задача, написана на Rust, яка запускається на всіх ядрах при запуску системи, а також CPS-інтерпретор головного термінала системи, який запускається на BSP ядрі, поближче до Console та WebSocket IO селекторів. В процесі життя різні CPS та Rust задачі можуть бути запущені в такій системі, поєднуючи гнучкість програм інтерпретатора, та низькорівневих програм, написаних на мові Rust.

Окрім черг та задач, в системі присутні також таймери та інші IO задачі, такі як сервери мережі або сервери доступу до файлів. Також існують структури які репрезентують ядра та містять планувальники. Уся віртуальна машина є сукупністю таких структур-ядер.

3.2.3.3 Канал

Канал складається з одного курсору для запису та багатьох курсорів для читання. Канал предствляє собою компонент зірки шини InterCore.

```
pub struct Channel {
    publisher: Publisher<Message>,
    subscribers: Vec<Subscriber<Message>>,
}
```

3.2.3.4 Черги ядра

Память репрезентує усі наявні черги для публікації та читання на ядрі. Ця інформація передається клонованою кожній задачі планувальника на цьому ядрі.

```
pub struct Memory<'a> {
    publishers: Vec<Publisher<Value<'a>>,
    subscribers: Vec<Subscriber<Value<'a>>>,
}
```

3.2.3.5 Планувальник

Планувальник репрезентує ядра процесара, які розрізняються як BSP-ядра (або 0-ядра, bootstrap) та AP ядра (інші ядра > 0, application). BSP ядро тримає на собі Console та WebSocket IO селектори. Це означає, що BSP ядро дає свій час на обробку зовнішньої інформації, у той час як AP процесори не обтяжені таким навантаженням (io черга в таких планувальниках пуста). Існує InterCore повідомлення яке додає або видаляє довільні IO селектори в планувальних для довільних конфігурацій.

```
pub struct Scheduler<'a> {
    pub tasks: Vec<T3<Job<'a>>>,
    pub bus: Channel,
    pub queues: Memory<'a>,
    pub io: IO,
}
```

3.2.4 Протокол InterCore

Протокол шини InterCore.

```
pub enum Message {
    Pub(Pub),
    Sub(Sub),
    Print(String),
    Spawn(Spawn),
    AckSub(AckSub),
    AckPub(AckPub),
    AckSpawn(AckSpawn),
    Exec(usize, String),
```

```
    Select(String, u16),
    QoS(u8, u8, u8),
    Halt,
    Nop,
}
```

3.3 Система числення тензорів AVX

3.4 Висновки

Як апогей, система HTS є фінальною категорією, куди сходяться всі стрілки категорії мов. Кожна мова та її категорія мають певний набір стрілок ендоморфізмів, які обчислюють, верифікують, нормалізують, оптимізують програми своїх мов. Стрілки виду $e_i : O_{n+1} \to O_n$ є екстракторами, які понижають систему типів, при чому $O_{CPS} = O_0$.

Базова бібліотека мови Ерланг у яку проводиться основний естракт, поставляється з дистрибутивом Erlang/OTP. Базова бібліотека O_{PTS} наведена в репозиторії Github[2]. Гомотопічна базова бібліотека відповідає термінальній мові O_{CCHM}, та теж відкрита на Github[3]. Останні два розділи присвячені математичному моделюванню математики на цій мові.

[2] https://github.com/groupoid/om
[3] https://github.com/groupoid/cubical

Розділ 4

Бібліотека середовища виконання

Присвячується автору
формальної системи F

Жану-Іву Жирару

Після побудови в розділі 3 формального середовища виконання, яке складається з операційної системи у якій виконуються CPS-інтерпретатори з формальною системою вводу-виводу IO, можна зразу переходити до базової бібліотеки середовища виконання.

Даний розділ формалізує інтерфейс прикладного програмування та систему бібліотек часу виконання для забезпечення потреб побудови гетерогенних систем та сервісів.

Вступне слово

Так чи інакше для дослідження будь-якої базової бібліотеки середовища виконання доведеться зустрітися з теорією яка стоїть за System F. Навіть базова бібліотека фундаментальної вищої мови PTS в сутності потребує для свого кодування лише системи Ф, так як є безпосереднім портом з мови Haskell. Тому доречно використовувати у якості проміжної типової системи систему Ф Жирара як цільову систему для екстрактів з вищих мов, таких як HTS (якщо такі екстракти існують для окремих програм).

4.1 Загальні принципи

N2O.SPACE — це формальна філософія та інженерна вправа водночас. Вона обмежує автора бути ефективним та точним не втрачаючи при цьому повноти та функціональності. Це накшталт внутрішньої дисципліні при проектуванні програмного забезпечення.

Ця філософія багато років застосовується на практиці для побудови систем SYNRC, та визначає стандартний мінімальний набір для демонстрації однієї з сучасних моделей реактивного веб-програмування, яка включає: веб-сокет веб-фреймвок з бінарною серілізацією, пушами та контролем DOM елементів зі сторони сервера. N2O.SPACE вчить будувати прості та надійні системи на будь-якій мові програмування.

4.2 Формальна специфікація

Формальне середовище виконання визначає структуру операційних середовищ (runtimes) як операційну систему лямбда-інтерпретаторів які працюють на паралельному обчислювальному середовищі (ядрах процесорів). Кожне з ядер процесорів виконує в нескінченному циклі команди лямбда-інтерпретаторів, переключаючи через певний проміжок часу на потік команд іншого інтерпретатора. Таке визначення дає змогу вбудувати цю структуру у віртуальну машину Erlang: 1) Головний процес додатку; 2) Супервізор додатку; 3) Проміжні супервізори; 4) Кінцеві пул процесорів повідомлень.

Тут визначена специфікація програмного забезпечення усіх рівнів прикладної моделі для підприємств на функціональних мовах програмування. Ця специфікація визначає правила побудови WebSocket сервера, бінарного серіалізатора та веб-фреймворку визначеному формальними протоколами. Промислові версії також підтримують систему управління бізнес-процесами та ефективне сховище з глобальним простором ключів.

Серверні та клієнтські мови

Мови програмування розділені на чотири рівня як для клієнтської (мобільної та веб розробки) так і для серверної розробки (бекенд системи). Нульовий рівень — тотальні формальні алгебраїчні мови програмування, що забезбечують повноту, функціональність та доведення властивостей прогрм згідно сучасних уявлень про математичне моделювання та системи залежних типів побудованих на розшаруваннях. Перший рівень — формальні функціональні мови програмування, як правило System F, System F які успішно використовуються в промисловості та забезпечують достатньо формальний запис який піддається масштабуванню у великих командах завдяки потужному ядру компіляторів. Другий рівень — неформальні (без формальної операційної чи денотаційної семантики) чи формальних верифікаторів, які проте успішно використовуються в промисловості, можуть бути як з розвиненими системами типів з узагальненими шаблонами та типами сумами, так і однотипними мовами програмування з динамічною

типізацією. Третій рівень — мови які погано піддаються масштабуванню у промисловому виробництві (на основі спостережень за власним досвідом).

Таблиця 4.1Перелік кваліфікаційних рівніх верифікації

Сторона/Рівень	Приклади мов
клієнт/3	JavaScript, Lua
клієнт/2	Swift, Kotlin, TypeScript
клієнт/1	UrWeb, OCaml, PureScript
клієнт/0	Kind, PTS
сервер/3	PHP, Python, Perl, Ruby
сервер/2	Erlang, Elixir
сервер/1	SML, Scala, Haskell, F#, Rust, Hamler
сервер/0	Coq, Agda, Lean, MLTT/HTS

Обрані мови реалізації

Тут перелічені мови, на яких реалізовано та апробовано N2O.SPACE.

Standard ML[1]. В академічних цілях Марат Хафізов створив за специфікаєю N2O/NITRO порт на мови Standard ML (SML/NJ та MLton). Ця робота представлена Github організацією O1 в структурі N2O.

Haskell[2]. Перший експеримент з формалілазції N2O в систему F була робота Андрія Мельникова. Пізніше, більш повну версію з NITRO протокол запропонував Марат Хафізов, ця версія представлена на Github як організація O3.

F#[3]. Також у якості вправи Siegmentation Fault зробив порт NITRO на мову F# разом з ETF кодуванням. Ці напрацювання представлені в Github організації O61.

Lean[4]. У якості більшо формальної платформи з залежними типами, мова Lean 4 від Леонардо де Мура з Microsoft. Siegmentation Fault автор порта, який представлений Github організацією O89 та сайтом lean4.dev.

Erlang[5]. Основна промислова платформа, яка в повній мірі реалізує специфікацію N2O.SPACE.

Elixir[6]. Адаптація N2O.SPACE для мови Elixir. Основна імплементація не змінена, постійно підтримується публікація пакетів на HEX.PM.

[1] `https://github.com/o1`
[2] `https://github.com/o3`
[3] `https://ws.erp.uno`
[4] `https://github.com/o89`
[5] `https://github.com/synrc`
[6] `https://github.com/synrc`

Hamler. Нова формальна платоформа на базі PureScript для віртуальної машини Erlang. В подальшому цей розділ буде присвячений імплементації та специфікації на мові Hamler (варіація PureScript з бекендом в Erlang Core).

Таблиця 4.2 Перелік мов для яких існує версія базової бібліотеки

Мова/Платформа	Набір реалізованих компонент
Erlang/OTP	N2O, BPE, KVS, NITRO, MAD, FORM
Elixir/OTP	N2O, BPE, KVS, NITRO, FORM
Hamler/OTP	RT, BASE, N2O, BPE, KVS, NITRO
Standard ML	N2O, NITRO, ETF
Haskell	N2O, NITRO, ETF
F#	N2O, NITRO, ETF
Lean 4	N2O, NITRO, MAD, ETF

Авторськими вважаються імплементації на мовах Erlang (Elixir) та Hamler (PureScript). Інші представлені імплементації вважаються сертифікаваними формальними референсними моделями.

Протягом 8 років автор практикувався аби адаптувати бібліотеку середовища виконання до основних формальних або напівформальних мов System F, які принаймі написані на мовах які теж є мовами System F (SML, F#, Haskell). Сторонніми дослідниками була навіть зроблена адаптація для Lean 4[7]. В процесі цьої багаторічної вправи стало зрозумілим, що досягти на виробництві тієї якості, яка досягається в середовищі виконання Erlang/OTP майже неможливо. Тому модель базової бібліотеки, спочатку адаптувалася з оригінальної мови Erlang (2013) для мови Elixir (2018), і потім для мови Hamler (2021), що є варіацією PureScript (System F_ω). Всього існує 7 моделей для 7 мов програмування базової бібліотеки представленої в цій роботі.

4.3 Пакети формального середовища

Тут представлена модель бібліотеки формального середовища виконання, яке складається з JIT-інтерпретатора, потужної SMP-системе акторів з неблокуючими курсорами черг повідомлень для системи процесів 1:1 (процес-черга, кожен процес має свою чергу). Така спрощена модель дещо відрізняється від моделі CSP, CCS та класичного числення процесів (Pi Calculus) проте протягом цих 8 років на практиці стало зрозумілим, що модель Erlang/OTP більш гнучка до масштабування та стійка до помилок.

Іншими словами модель в System F базової бібліотеки середовища виконання формально визначає цей прошарок уніфіко-

[7] `https://lean4.dev`

ваного мовного середовища. А модель процесів хоча формально не відображає семантику коіндукції (стерта інформація), проте досі синтаксис мовного середовища представленого в розділі 2 є сумісним з моделлю Erlang/OTP яка є основною платформою, що підтримується у виробництві.

4.3.1 Структури даних BASE

Структури даних представлені додатком BASE. Основні модулі додатку: List, Array, Atomics, Binary, Bool, Char, Counters, DateTime, Digraph, Enum, Eq, Float, Int, Map, Maybe, Ord, OrdDict, OrdSet, Pid, Queue, Read, Record, Regex, Set, Time, Tuple.

Сигнатури додатка BASE максимально сумісні з базовою бібліотекою Hamler.

4.3.2 Сервіси середовища виконання RT

Сервіси середовища виконання представлені додатком RT, іменні простори якого дещо відрізняються від відповідних сигнатур базової бібліотеки мови Hamler.

4.3.2.1 Database

Модулі простору Database: Mnesia, ETS.

```
axiom all : IO (List TableId)
axiom browse : IO String
axiom delete : Π (k: U), TableId -> k -> IO Unit
axiom first : Π (t: TableId) (k: U), IO (Maybe k)
axiom last : Π (k: U), TableId -> IO (Maybe k)
axiom foldl : Π (v acc: U), (v -> acc -> acc) -> acc -> TableId -> IO acc
axiom foldr : Π (v acc: U), (v -> acc -> acc) -> acc -> TableId -> IO acc
axiom insert : Π (v: U), TableId -> v -> IO Boolean
axiom lookup : Π (k v: U), TableId -> k -> IO (List v)
axiom member : Π (k: U), TableId -> k -> IO Boolean
axiom new : Atom -> TableOptions -> IO TableId
axiom next : Π (k: U), TableId -> k -> IO (Maybe k)
axiom prev : Π (k: U), TableId -> k -> IO (Maybe k)
axiom rename : TableId -> Atom -> IO Atom
axiom take : Π (k v: U), TableId -> k -> IO (List v)
axiom match : Π (a v: U), TableId -> a -> IO (List v)
axiom slot : Π (v: U), TableId -> Integer -> IO (Maybe (List v))
```

4.3.2.2 Filesystem

Модулі простору Filesystem: Dir, File, FilePath, IO, Active.

4.3.2.3 OS

Модулі простору OS: Env, Init, Shell.

4.3.2.4 Process

Модулі простору Process: Application, Supervisor, Dict, GenServer, Spawn, Process, Timer.

4.3.2.5 Network

Модулі простору Network: TCP, UDP, TLS, Inet, WebSocket.

4.3.3 Прикладні протоколи N2O

Сервіси веб-сокет сервера, представлені додатком N2O: N2O, PI, Proto, Ring, MQTT, WS, TCP, Heart, Syn, FTP, NITRO, ETF, GCM, Session, Cache.

Модуль N2O пропонує ряд сервісів зручних та вивірених в промисловій роботі для побудови сервісних протоколів що вбудовуються в цикли сучасних TCP, QUIC, UDP, MQTT, WebSocket серверів, та в процесі своєї роботи можуть стартувати додаткові процеси для обробки інформації під супервізією середовища виконання.

```
axiom pickle : Binary -> Binary
axiom depickle : Binary -> Binary
axiom encode : Π (k: U), k -> Binary
axiom decode : Π (k: U), Binary -> IO k
axiom reg: Π (k: U), k -> IO k
axiom unreg : Π (k: U), k -> IO k
axiom send : Π (k v z: U), k -> v -> IO z
axiom getSession : Π (k v: U), k -> IO v
axiom putSession : Π (k v: U), k -> v -> IO v
axiom getCache : Π (k v: U), Atom -> k -> IO v
axiom putCache : Π (k v: U), Atom -> k -> v -> IO v
```

Тут залишено лише саме необхідне, але не настільки тривіальне аби бути іграшковим. Всі функції всії сервісів можуть підмінятися в ході виконання. В сутності тут зібрані сервіси: 1) бінарної серіалізації Erlang Term Format (ETF), функції encode/decode; 2) функції симетричного шифрування AES-GCM/128 pickle/depickle; 3) функції Pub/Sub внутрішнього Erlang реєстра (syn/gproc/global, тощо); 4) функції роботи з персональними сесіями, які захищені зашифрованими токенами; 5) функції роботи з глобльним кеш-сервісом для бізнес-об'єктів.

Модуль N2O.PI абстрагує користувача від надмірного фольклору Supervisor та пропонує простіший протокол запуску асинхронних процесів.

```
data PI  = PI String Atom Atom Atom Integer RestartType
data Sup = Ok Pid String | Error String

axiom start : PI -> IO Sup
```

4.3.4 Сховище даних KVS

Сервіси сховища даних представлені додатком KVS: KVS, Stream, ST, Rocks, Mnesia, FS.

```
axiom get : Π (f k v: U), f -> k -> IO (Maybe v)
axiom put : Π (r: U), r -> IO StoreResult
axiom delete : Π (f k: U), f -> k -> StoreResult
axiom index : Π (f p v r: U), f -> Atom -> v -> List r


data Reader = Reader Integer Binary ETF String Integer
data Writer = Writer Integer Binary ETF String Integer
data StoreResult = Ok Integer String Binary
                 | Error Integer String Binary

axiom next : Reader -> IO Reader
axiom prev : Reader -> IO Reader
axiom take : Reader -> IO Reader
axiom drop : Reader -> IO Reader
axiom save : Reader -> IO Reader
axiom append : Π (f r: U), f -> r -> IO StoreResult
axiom remove : Π (f r: U), f -> r -> IO StoreResult
```

4.3.5 Бізнес-процеси BPE

Сервіси системи управління бізнес-процесами представлені додатком BPE: BPE, Event, Action, Process, Hist, Flow.

```
axiom start : Proc -> IO Sup
axiom stop : String -> IO Sup
axiom next : ProcId -> IO ProcRes
axiom load : ProcId -> IO ProcRes
axiom proc : ProcId -> IO ProcRes
axiom assign : ProcId -> IO ProcRes
axiom persist : ProcId -> Proc -> IO ProcRes
axiom amend : Π (k: U), ProcId -> k -> IO ProcRes
axiom discard : Π (k: U), ProcId -> k -> IO ProcRes
axiom modify : Π (k: U), ProcId -> k -> Atom -> IO ProcRes
axiom event : ProcId -> String -> IO ProcRes
axiom head : ProcId -> IO Hist
axiom hist : ProcId -> IO (List Hist)
axiom step : ProcId -> Atom -> IO (List Hist)
axiom docs : ProcId -> IO (List Tuple)
axiom events : ProcId -> IO (List Tuple)
axiom tasks : ProcId -> IO (List Tuple)
axiom doc : Tuple -> ProcId -> IO (List Tuple)

data ProcId = String
data Proc = Proc ProcId String
data ProcRes = Ok Integer String Binary
             | Error Integer String Binary
```

4.3.6 Контрольні елементи протоколу NITRO

Сервіси веб-фреймворка, представлені додатком NITRO: NITRO, Combo, Edit, Form, Input, Table, Actions, Render.

```
axiom q : Π (k: U), Atom -> k
axiom qc : Π (k: U), Atom -> k
axiom jse : Maybe Binary -> Binary
axiom hte : Maybe Binary -> Binary
axiom wire (actions: List Action) : IO (List Action)
axiom render (content: Either Action Element) : Binary
axiom insert_top (dom: Atom) (content: List Element) : IO (List Action)
axiom insert_bottom (dom: Atom) (content: List Element) : IO (List Action)
axiom update (dom: Atom) (content: List Element) : IO (List Action)
axiom clear (dom: Atom) : IO Unit
axiom remove (dom: Atom) : IO Unit
```

NITRO – це Nitrogen-подібний веб фреймворк для Erlang/OTP. Він може бути використаний не лише у веб-додатках, а ще і в консольних програмах, у яких потрібно зробити рендеринг HTML5.

Nitrogen Elements – це трансформатор шаблонів HTML для мови Erlang, у якому всі HTML теги рендеряться з Erlang рекордів.

Працюючи з N2O вам взагалі не потрібно користуватись HTML. Натомість ви визначаєте вашу сторінку у вигляді Erlang рекордів, відповідно сторінка генерується з перевіркою типів, під час компіляції. Це класичний підхід CGI для компільованих сторінок, який надає всі переваги перевірки помилок під час компіляції, та визначає DSL для клієнт- та серверного рендерингу.

Nitrogen Elements, за своєю природою, є примітивними UI елементами управління, які можуть бути використані для побудови Nitrogen сторінок з внутрішнім DSL Erlang-а. Вони компілюються в HTML та JavaScript. Поведінка всіх елементів контролюється на стороні сервера, а весь зв'язок між веб-переглядачем та сервером здійснюється за допомогою WebSocket каналів. Отже, вам не потрібно використовувати POST запити чи HTML форми. Тобто:

```
#textbox { id=userName, body= <<"Anonymous">> },
#panel { id=chatHistory, class=chat_history }
```

згенерує наступний html:

```
<input value="Anonymous" id="userName" type="text"/>
<div id="chatHistory" class="chat_history"></div>
```

А

```
nitro:update(loginButton,
    #button{id = loginButton,
        body = "Login",
        postback = login,
        source = [user, pass]});
```

згенетурє наступне:

```
qi('loginButton').outerHTML='<button id=\"loginButton\"
  type=\"button\">Login</button>'; { var x=qi('loginButton');
  x && x.addEventListener('click',function (event){
    event.preventDefault(); { if (validateSources(['user','pass'])) {
    ws.send(enc(tuple(atom('pickle'),bin('loginButton'),
      bin('b840bca20b3295619d1157105e355880f850bf0223f2f081549dc
      8934ecbcd3653f617bd96cc9b36b2e7a19d2d47fb8f9fbe32d3c768866
      cb9d6d85700416edf47b9b90742b0632c750a4240a62dfc56789e0f5d8
      590f9afdfb31f35fbab1563ec54fcb17a8e3bad463218d6402f1304'),
      [tuple(tuple(string('loginButton'),bin('detail')),[]),
      tuple(atom('user'),querySource('user')),
      tuple(atom('pass'),querySource('pass'))])));  }
  else console.log('Validation Error'); }});};
```

Для подальної інформації дивіться актуальную документацію[8]

4.4 Висновки

Кожна мова, на якій реалізовано N2O.SPACE, має вбудовувати свою філософію максимально природно та компактно. Якщо потрібен якийсь шар між базовою бібліотекою мови, його можна надати, але, якщо можливо, його слід зменшити до нуля. У деяких випадках деякі частини базової бібліотеки можна замінити кращою альтернативою. N2O має надати клієнтську бібліотеку-компаньйон, зазвичай реалізовану на іншому наборі мов клієнта: JavaScript, Swift, Kotlin. Якщо ви все зробили правильно, значення N2O не повинно перевищувати 500 LOC на будь-якій мові.

[8] https://n2o.dev/ua/deps/nitro/index.html

Розділ 5

Система вищих мов

Присвячується автору MLTT

Перу Мартіну-Льофу

Четвертий розділ описує розвиток концептуальної моделі системи доведення теорем як сукупності: послідовності формальних мов програмування, кожна наступна з яких, складніша за попередню, має свою операційну семантику, та наслідує усі властивості попередніх мов послідовності.

Вступне слово

Батьком всіх сучасних теорій типів, зокрема HoTT, в яких працюють сучасні формальні математики можна вважати Пера Мартіна-Льофа. В його теорії мова ділиться на типи, кожен з яких визначається 4 правилами: конструктори та деконструктори, та рівняння які визначають як відбуваються обчислення та гарантують унікальність. Таке кодування природнім чином відповідає кодуванню ізоморфізмів та відображає глибинну категорну семантику типових систем. Ця робота цілком відповідає моделі типів Мартіна-Льофа та показує те тільки конфігурацію конкретного спектра мов, але і визначає модель для опису цього спектру.

5.1 Чиста система типів PTS

IEEE[1] стандарт та регуляторні документи ESA[2] визначають інтрументи та підходи до виробничого процесу верифікації та валідації. Найбільш розвинені та потужні засоби вимагають застосування математичних мов та нотацій. Ера верифікованої математики була започаткована верифікатором AUTOMATH [?] (де Брейн) розробленого під керівництвом де Брейна, а також розвиток теорії типів Мартіна-Льофа [?]. Сьогодні ми маємо Lean, Coq, F*,

[1] IEEE Std 1012-2016 — V&V Software verification and validation

[2] ESA PSS-05-10 1-1 1995 – Guide to software verification and validation

Agda мови які використовують числення конструкцій, Calculus of Constructions [?] (CoC) та числення індуктивних типів (Calculus of Inductive Constructions [?] (CiC). Пізніше учень де Брейна, Хенк Барендрехт класифікував послаблені чисті системи типів по трьом осям та візуазізував це за допомогою лямбда-куба [?]. Чисті мови програмування вже були імплементовані раніше (Morte[3] Габріеля Гонзалеза, Henk [?] Еріка Мейера). Чисті системи типів це системи з однм Π-типом (або ще і Σ як в ECC [?], Ope), з можливими розширеннями, такими як PTS$^\infty$ зі зліченою кількістю всесвітів [?] (Сохацький), Cedile з self-типами [?] [?] (Стамп, Фу), система з K-правилами [?] (Барте).

Головна мотивація чистих систем – це простота аналізу ядра верифікатора, можливість застосування сильної нормалізації та довірена зовнішня верифікація та сертифікація завдяки простоті верифікатора (type checker), це означає, що алгоритм верифікації повинен бути настільки простим, аби можна було просто імплементувати його на будь-якій мові програмування. Приклади застовування тут можуть бути: 1) формальна мова блокчейн контрактів (Pluto [4]); 2) сертифіковані обчислення для інтерпретаторів; 3) платіжні системи.

5.1.1 Генерація сертифікованих програм

Згідно ізоморфізму Каррі-Говарда-Ламбека або інтерпретації Брауера-Гейтінга-Колмогорова існує взаємноознозначна відповідність між доведеннями теорем (або пруфтермами) та лямбда функціями в теорії типів Мартіна-Льофа [?]. Так як специфікація та доведення її відоповідності для певної програми відбувається за допомогою мови з залежними типами, ми можемо екстрагувати цільову імплементацію (зі стертою інформацією про типи) сертифікованої программи в довільну мову програмування. У якості такої цільової мови підходять майже усі інтерпретатор безтипового лямбда числення, такі як JavaScript, Erlang, PyPy, LuaJIT, K.

Більш розвинені практики та підходи до кодогенерації та екстрагуванню сертифікованих програм полягає у генерації C++ чи Rust програм, або програм для нижчих систем лямюда-кубу, таких як System F або System F_ω. У цій роботі представлений екстракт в мову Erlang у якості цільового інтерпретатору.

PTS синтаксиси. Мінімальне ядро з однією аксіомою сприймає декілька лямбда ситаксисів. Перший синтаксис сумісний з системою програмування $\mathbf{morte}$[5], та походить від неї. Інший синтаксис

[3] Gabriel Gonzalez. Haskell Morte Library **https://github.com/Gabriel439/Haskell-Morte-Library**

[4] Rebecca Valentine. Formal Specification of the Plutus Core Language. 2017. **https://iohk.io/research/papers/#JT5XKNBP**

[5] http://github.com/Gabriel439/Haskell-Morte-Library

сумісний з синтаксисом $\mathfrak{cubical}$[6]. Планувалося також підтримати синтаксис $\mathfrak{caramel}$[7].

(5.1)
$$\begin{cases} \mathfrak{Sorts} = \mathfrak{U}.\{\mathfrak{i}\},\ \mathfrak{i} : \mathfrak{Nat} \\ \mathfrak{Axioms} = \mathfrak{U}.\{\mathfrak{i}\} : \mathfrak{U}.\{\mathfrak{inc}\ \mathfrak{i}\} \\ \mathfrak{Rules} = \mathfrak{U}.\{\mathfrak{i}\} \rightsquigarrow \mathfrak{U}.\{\mathfrak{j}\} : \mathfrak{U}.\{\mathfrak{max}\ \mathfrak{i}\ \mathfrak{j}\} \end{cases}$$

Мова програмування Ом – це мова з залежними типами, яка є розширенням числення конструкцій (Calculus of Constructions, CoC) Тері Кокана. Саме з числення конструкцій починається сучасна обчислювальна математика. В додаток до CoC, наша мова Ом має предикативну ієрархію індексованих всесвітів. В цій мові немає аксіоми рекурсії для безпосереднього визначення рекурсивних типів. Однак в цій мові вцілому, рекурсивні дерева та корекурсія може бути визначена, або як кажуть, закодована. Така система аксіом називається системою з однією аксіомою (або чистою системою), тому що в ній існує тільки Пі-тип, а для кожного типу в теорії типів Мартіна Льофа існує п'ять конструкцій: формація, інтро, елімінатор, бета та ета правила.

Усі терми підчиняються системі аксіом Axioms всередині послідовності всесвітів Sorts та складність залежного терму відповідає максимальній складності домена та кодомена (правила Rules). Таким чином визначається простір всесвітів, та його конфігурація може бути записана згідно нотації Барендрехта для систем з чистими типами:

Проміжна мова чистої системи типів Ом базується на мові Henk [?], вперше описаній Еріком Мейером та Саймоном Пейтоном Джонсом в 1997 році. Пізніше Габріель Гонзалез імплементував на мові Haskell верифікатор з посиланням на Henk, та використував кодування Бома для нерекурсивного кодування рекурсивних індуктивних типів. Ця мова базується лише на Π-типі, λ-функції, її елімінатора аплікації, β-редукції та η-експансії. Дизайн мови Ом нагадує дизайн мов Henk та Morte. Ця мова призначена бути максимально простою (повна імплементація займає 300 рядків), формально верифікованою, здатною продукувати сертифіковані програми та розповсюджувати їх за межі комп'ютера по мережах та недовірених каналах зв'язку, та компілювати (верифікувати та екстрагувати) на цільових платформах за допомогою тієї ж мови Ом, можливо імплементовоної на іншій мові програмування та вбудованої в основну систему.

[6] http://github.com/mortberg/cubicaltt
[7] https://github.com/MaiaVictor/caramel

Таблиця 5.1 Перелік мов, інтерпретаторів та платформ для цільової компіляції

Ціль	Джерело	Система типів	Застосування
CPS	Per	π+λ+μ calculi	середовище виконання
BEAM	Hamler	System F	системна бібліотека N2O.TECH
BEAM	PTS	CoC$^\infty$	фундаментальна мова
BEAM	HTS	HoTT	гомотопічна система
JavaScript	PureScript	System F	дитячі розваги
JVM	Java	F-sub^8	реліктова історія
JVM	Scala	System F$_\omega$	маргінальна промисловість
CLR	F#	System F$_\omega$	маргінальна промисловість
GHC	Haskell	System F$_\omega$	avoid success at all costs
GHC	Morte	CoC	фундаментальна мова Кокана
JavaScript	Kind	Self-Types + IntNet	сучасна фундаментальна мова
GHC,OCaml	Coq	CiC	промисловий прувер

5.1.2 Синтаксис

Синтаксис PTS сумісний з численням конструкцій (CoC) Тері Кокана, та такими мовами як Morte та Henk. Однак в системі PTS присутній індекс для всесвітів який представлений натуральними числами. Тут наведений синтаксис у BNF нотації

```
I := #list #nat
U := * + * . #nat
O := U + I + ( O ) + O O + O → O
   + λ ( I : O ) → O
   + ∀ ( I : O ) → O
```

Тут + — сумма виразів, '.' — конкатенація терміналів без пробілу, := — оператор визначення BNF-правила, #empty, #nat, #list — вбудовані типи BNF-нотації — синтаксичні елементи BNF нотації, а *,:, →, (,), λ, ∀ – термінали або синтаксичні елементи мови програмування. Еквівалентне визначення як ініціальний об'єкт категорій $\mathbf{O}_{\mathrm{PTS}}$ або $\mathbf{O}_{\Pi}$ який може вмістити цей синтаксис містить всі правила виводу внутрішньої мови категорії.

```
data pts (lang: U)
   = star             (n: nat)
   | var    (x: name) (l: nat)
   | pi     (x: name) (l: nat) (d c: lang)
   | remote (n: name) (n: nat)
   | lambda (x: name) (l: nat) (d c: lang)
   | app                       (f a: lang)
```

Всесвіти

Мова PTS$^\infty$ – це лямбда числення з залежними типами вищого порядку, розширення числення конструкцій Кокана, або системи P_ω Барендрехта, з предикативною (імпредикативною) ієрархією індексованих всесвітів. Це розширення мотивоване консистентністю [?] в залежній теорії типів та неможливістю кодування парадоксів Жирара-Хуркенса-Рассела[9]. Також для забезпечення консистентності в мові PTS відсутня аксіома `Fixpoint`, хоча за допомогою рекурсивного трактування конструктора `remote`, така можливість зберігається.

$$\mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_1 : \mathcal{U}_2 : \mathcal{U}_3 : \ldots$$

Де $\mathcal{U}_0$ — імпредикативний всесвіт, $\mathcal{U}_1$ — перший предикативний всесвіт, $\mathcal{U}_2$ — другий предикативний всесвіт, $\mathcal{U}_3$ — третій предикативний всесвіт і т.д.

(S)
$$\frac{o : Nat}{\mathcal{U}_o}$$

Предикативні всесвіти

Всі терми підпорядковуються системі аксіом A для послідовності всесвітів S. Складність R залежності термів дорівнює максимальній складної термів з яких складаєтсья формула (або вираз мови). Система всесвітів описується згідно SAR-нотації Барендрехта. Зауважте, що предикативні всесвіти несумісні в Бом кодуванням, але ви можете переключати предикативність.

(A_1)
$$\frac{i : Nat, j : Nat, i < j}{\mathcal{U}_i : \mathcal{U}_j}$$

(R_1)
$$\frac{i : Nat, j : Nat}{\mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_j : \mathcal{U}_{max(i,j)}}$$

Імпредикативні всесвіти

Стягуваний імпредикативний простір внизу ієрархії є єдиним можливим розширенням предикативної ієрархії для того аби вона залишалась консистентною. Однак в чистій системі типів PTS підтримується ієрархія бескінечних імпредикативних всесвітів.

(A_2)
$$\frac{i : Nat}{\mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{i+1}}$$

(R_2)
$$\frac{i : Nat, \quad j : Nat}{\mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_j : \mathcal{U}_j}$$

[9] Так званий парадокс голяра який виникає в системах $\mathcal{U} : \mathcal{U}$

Контексти

Контексти моделюються словником з іменами змінних в верифікаторі. Він може бути типизований як `list Sigma`. Правило елімінації тут не дається, після використання функції верифікації, словник вивільняється з пам'яті.

$$\frac{}{\Gamma : \mathrm{Ctx}} \qquad \text{(Ctx-formation)}$$

$$\frac{\Gamma : \mathrm{Ctx}}{\varnothing : \Gamma} \qquad (\text{Ctx-intro}_1)$$

$$\frac{A : \mathcal{U}_i, \quad x : A, \quad \Gamma : \mathrm{Ctx}}{(x : A) \vdash \Gamma : \mathrm{Ctx}} \qquad (\text{Ctx-intro}_2)$$

5.1.3 Операційна семантика

Операційна семантика — це правила обчислення, або β-,η-правила фьюжену інтро-правила та елімінаторів. для визначення яких необхідно визначити: 1) інтро-правила, їх тип (правило формації), та класс (тип правила формації); 2) правило елімінації та залежної елімінації (індукції). Таким чином будемо вважати, що операційна семантика системи типів $\mathrm{O}_{\mathrm{PTS}}$ буде складатися з 5 правил: формації, інтро-правило, залежний елімінатор (індукція), β-редукція або правило обчислення, η-експансія або правило унікальності.

$$\frac{A : \mathcal{U}_i \ , \ x : A \vdash B : \mathcal{U}_j}{\Pi\,(x : A) \to B : \mathcal{U}_{p(i,j)}} \qquad (\Pi\text{-formation})$$

$$\frac{x : A \vdash b : B}{\lambda\,(x : A) \to b : \Pi\,(x : A) \to B} \qquad (\lambda\text{-intro})$$

$$\frac{f : (\Pi\,(x : A) \to B) \quad a : A}{f\ a : B\ [a/x]} \qquad (\mathrm{App}\text{-elimination})$$

$$\frac{x : A \vdash b : B \quad a : A}{(\lambda\,(x : A) \to b)\ a = b\ [a/x] : B\ [a/x]} \qquad (\beta\text{-computation})$$

$$\frac{\pi_1 : A \quad u : A \vdash \pi_2 : B}{[\pi_1 / u]\ \pi_2 : B} \qquad (\text{subst})$$

Перелік теорем (специфікації) для чистої системи типів можуть бути прямо вбудовані в теорію типів, таким чином ми отримуємо логічний фреймворк для перевірки імплементації залежної теорії.

```
PTS (A: U): U
  = (Pi_Former: (A -> U) -> U)
  * (Pi_Intro: (B: A -> U) -> ((a: A) -> B a) -> (Pi A B))
  * (Pi_Elim: (B: A -> U) (a: A) -> (Pi A B) -> B a)
  * (Pi_Comp1: (B: A -> U) (a : A) (f: Pi A B) ->
    Equ (B a) (Pi_Elim B a (Pi_Intro B f)) (f a))
```

```
* ((B: A -> U) (a: A) (f: Pi A B) ->
  Equ (Pi A B) f (\(x:A) -> f x))
```

Доведення цих теорем дано в модулі базової бібліотеки розділу 3. Також можна повитися на інші доведення [?]. Рівняння обсислювальної семантики (бета та ета правила) визначаються за допомогою Path-типів, які визначаються $\mathrm{O}_{=}$ або O_{I} мовним синтаксисом.

Ці рівняння обчислювальної семантики представлені тут як Path-тип в вищій мові. В чисту систему типів PTS (з бескінечною кількістю всесвітів) для завантаження файлів з локального довіреного сховища додається remote конструктор в синтаксичне дерево. Рекурсія по цьому конструктору заборонена.

Індекси де Брейна діють локально в межах одного імені. При додаванні існуючого імені в контекст збільшується індекс цього імені. Таким чином PTS верифікатор чистої системи типів відрізняється від канонічного приклада алгоритма верифікації CoC [?]. Він включає наступні функції мовної категорії: підстановка, зсув імені, нормалізація термів, рівність за визначенням та верифікація.

Перевірка типів

Для перевірки типів застосовується наступний алгоритм верифікації, який є основаю усіх залежних систем. В чистих системах потрібно бути обережним з `remote` конструктором. Він використовуються для завантаження типів з локального довіреного сховища. При дозволі рекурсії по `remote` конструктору можливо реалізувати self-типи [?] [?].

```
type (:star,N)     D → (:star,N+1)
     (:var,N,I)    D → :true = proplists:is_defined N B, om:keyget N D I
     (:remote,N)   D → om:cache (type N D)
     (:pi,N,0,I,O) D → (:star,h(star(type I D)),star(type O [(N,norm I)|D]))
     (:fn,N,0,I,O) D → let star (type I D), NI = norm I
                       in (:pi,N,0,NI,type(O,[(N,NI)|D]))
     (:app,F,A)    D → let T = type(F,D),
                           (:pi,N,0,I,O) = T, :true = eq I (type A D)
                       in norm (subst O N A)
```

Індекси де Брейна

Зсув переіменовує змінну N в контексті P, тобто додає одиницю для лічильника цієї змінної.

```
sh (:star,X)     N P → (:star,X)
   (:var,N,I)    N P → (:var,N,I+1) when I >= P
                     → (:var,N,I)
   (:remote,X)   N P → (:remote,X)
   (:pi,N,0,I,O) N P → (:pi,N,0,sh I N P,sh O N P+1)
```

```
    (:fn,N,0,I,O) N P → (:fn,N,0,sh I N P,sh O N P+1)
    (:app,L,R)    N P → (:app,L,R)
```

Підстановка, нормалізація, рівність

Підстановка заміняє змінну у виразі на певний терм.

```
 sub (:star,X)     N V L → (:star,X)
     (:var,N,L)    N V L → V
     (:var,N,I)    N V L → (:var,N,I-1) when I > L
     (:remote,X)   N V L → (:remote,X)
     (:pi,N,0,I,O) N V L → (:pi,N,0,sub I N V L,sub O N (sh V N 0) L+1)
     (:pi,F,X,I,O) N V L → (:pi,F,X,sub I N V L,sub O N (sh V F 0) L)
     (:fn,N,0,I,O) N V L → (:fn,N,0,sub I N V L,sub O N (sh V N 0) L+1)
     (:fn,F,X,I,O) N V L → (:fn,F,X,sub I N V L,sub O N (sh V F 0) L)
     (:app,F,A)    N V L → (:app,   sub F N V L,sub A N V L)
```

Нормалізація виконує підстановку при аплікаціях до функцій (бета-редукція) за допомогою рекурсивного спуску по конструкторам синтаксичного дерева.

```
norm (:star,X)     → (:star,X)
     (:var,X)      → (:var,X)
     (:remote,N)   → cache (norm N [])
     (:pi,N,0,I,O) → (:pi,N,0,norm I,norm O)
     (:fn,N,0,I,O) → (:fn,N,0,norm I,norm O)
     (:app,F,A)    → case norm F of
                         (:fn,N,0,I,O) → norm (subst O N A)
                                    NF → (:app,NF,norm A) end
```

Рівність за визначенням перевіряє рівність Erlang термів.

```
  eq (:star,N)        (:star,N)        → true
     (:var,N,I)       (:var,(N,I))     → true
     (:remote,N)      (:remote,N)      → true
     (:pi,N1,0,I1,O1) (:pi,N2,0,I2,O2) →
          let :true = eq I1 I2
           in eq O1 (subst (shift O2 N1 0) N2 (:var,N1,0) 0)
     (:fn,N1,0,I1,O1) (:fn,N2,0,I2,O2) →
          let :true = eq I1 I2
           in eq O1 (subst (shift O2 N1 0) N2 (:var,N1,0) 0)
     (:app,F1,A1)       (:app,F2,A2)   → let :true = eq F1 F2 in eq A1 A2
     (A,B)                             → (:error,(:eq,A,B))
```

5.1.4 Використання мови

Тут буде показано використання мови PTS.

```
> ./om help me
[{a,[expr],"to parse. Returns {_,_} or {error,_}."},
 {type,[term],"typechecks and returns type."},
 {erase,[term],"to untyped term. Returns {_,_}."},
 {norm,[term],"normalize term. Returns term's normal form."},
 {file,[name],"load file as binary."},
 {str,[binary],"lexical tokenizer."},
 {parse,[tokens],"parse given tokens into {_,_} term."},
```

```
 {fst,[{x,y}],"returns first element of a pair."},
 {snd,[{x,y}],"returns second element of a pair."},
 {debug,[bool],"enable/disable debug output."},
 {mode,[name],"select metaverse folder."},
 {modes,[],"list all metaverses."}]

> ./om print fst erase norm a "#List/Cons"
   \ Head
-> \ Tail
-> \ Cons
-> \ Nil
-> Cons Head (Tail Cons Nil)
ok
```

Обмеження

Обмеження: 1) неможливість визначити рекурсію та індукцію без fixpoint аксіоми; 2) кодування Бома повинно бути позитивно-рекурсивним; 3) неможливість побудови великого елімінатора, вивести тип з даних; 4) неефективність сім'ї лямбда кодувань вцілому (Парігот, Скотт, Бом).

Екстракти

Мова PTS_∞ передбачає автоматичну генерацію сертифікованих програм в цільові платформи. Сертифікая полягаю у візуальному доведенню одніє стрілки ізоморфізма λ-функції в залежній теорії типів та λ-фунції в нетипизованому лямбда численні.

```
ext (:var,X,N,F)      → (:var,X)
    (:app,A,B,N,F)    → (:call,N,ext(F,A,N),[ext(F,B,N)])
    (:fn,S,_,I,O,N,F) → (:fun,N,(:clauses,[{:clause,N,
                                [(:var,N,S)],[],[ext(F,O,N)]}]))
                  _ → []
```

Так працює функція екстракту в Erlang з системи типів PTS^∞. Erlang-версія Ом повинна бути зручна для використання для віртуальних машин LING та BEAM. Оскільки цей екстракт генерує AST дерево Erlang (подібно до Elixir), результуючий код подається повністю на весь стек оптимізаційного компілятора Erlang. включаючи Erlang Core, тому весь модуль екстракта займає 30 рядків.

5.1.4.1 Інтерпретатори

З практичної точки зору мова Ом є способом використання залежних типів та специфікації, побудовані за їх допомоги на мові Erlang. Завдяки глибокій інтеграції з Erlang вдалося мімізувати імплементацію системи до 300 рядків. Екстракт в інтерпретатор $\mathrm{O}_{\mathrm{PTS}}$ (чи інші) є альтернативною опцією для Ом. Також, мова Ом може бути легко портована на інші мови.

5.1.4.2 LLVM

Більш складна опція генерації сертифікованих програм — це генерація машинного коду, з використанням або без використання допоміжних проміжних мов таких як LLVM та MIR. Тому що для цього потрібно верифікувати модель асемблера та процесора а також його оптимізатора, так як зі складністю синтаксичного дерева росте складність та велична терму-доведення будь-яких властивостей.

5.1.4.3 FPGA

Інша, не менш складна, або ще більш складна опція є безпосередня генерація VHDL моделей (наприклад, clash).

5.2 Система індуктивних схем Paulin-Mohring

Індуктивні синтаксиси та кодування можуть підтримуватися за допомогою системи модулів. Кожна система модулів може самостійно (у вигляді ефектів), або за допомогою лямбда кодувань попередньої мови PTS рівня, зберігати та оперувати індуктивними типами даних.

5.2.1 Синтаксис

```
def := data id tele = sum + id tele : exp = exp +
       id tele : exp where def
exp := cotele*exp + cotele → exp + exp → exp + (exp) + app + id +
       (exp,exp) + \ cotele → exp + split cobrs + exp .1 + exp .2

  0 := #empty          imp    := [ import id ]
brs := 0 + cobrs       tele   := 0 + cotele
app := exp exp         cotele := ( exp : exp ) tele
 id := [ #nat ]        sum    := 0 + id tele + id tele | sum
ids := [ id ]          br     := ids → exp
cod := def dec         mod    := module id where imp def
dec := 0 + codec       cobrs  := | br brs
```

Індуктивні синтаксиси будуються на телескопах Диб'єра, конструкторах сум, та їх елімінаторах.

```
data tele   (A: U) = emp | tel (n: name) (b: A) (t: tele A)
data branch (A: U) =        br (n: name) (args: list name) (term: A)
data label  (A: U) =       lab (n: name) (t: tele A)
                         | com (n: name) (t: tele A) (dim: list name)
                               (s: list (prod (prod name bool) A))


data ind (lang: U)
   = datum  (n: name) (t: tele lang) (labels:   list (label lang))
   | case   (n: name) (t: lang)      (branches: list (branch lang))
   | ctor   (n: name)                (args:     list lang)
```

5.2.2 Поліноміальні функтори

Існує два види формальної рекурсії: 1) перша з найменшою нерухомою точкою (як $F_A(X) = 1 + A \times X$ або $F_A(X) = A + X \times X$), іншими словами рекурсія з базою (термінується 1 або A). Списки та дерева є прикладами таких рекурсивних структур з nil та leaf термінальними конструкторами (або рекурсивні суми). 2) друга з найбільшою нерухомою точкою, або рекурсія без бази (як $F_A(X) = A \times X$) — така рекурсія не термінована на рівні типів, та моделює нетерміновані послідовності, процеси тощо (або рекурсивні добутки). Кодування найменшою нерухомою точкою ще називається кодуванням добре-визначиними деревами або кодування поліноміальними функторами.

Натуральні числа: $\mu\, X \to 1 + X$
Списки елементів A: $\mu\, X \to 1 + A \times X$
Лямбда числення: $\mu\, X \to 1 + X \times X + X$
Потоки: $\nu\, X \to A \times X$
Потенційно нескінченний список елементів A: $\nu\, X \to 1 + A \times X$
Кінцеве дерево: $\mu\, X \to \mu\, Y \to 1 + X \times Y = \mu\, X = \mathrm{List}\ X$

Для цих кодувань існує аналог кодування Чорча, який розповсюджує кодування чистими функціями з нетипизованого лямбда числення до Π-типу. Таке кодування називається кодуванням Бома-Беррардуччі, а просто кодування Бома. Воно дозволяє кодувати індуктивні типи даних Π-типами чистими функціями. Проте як було показано Жеверсом [?] неможливо побудувати принцип індукції в чистих системх без використання в явному чи прихованому вигляді `Fixpoint` аксіоми. Також неможливо побудувати J елімінатор Id типу закодованого в Бом кодуванні, а також елімінатори гомотопічних примітивів, наприклад елімінатори гомотопічного візрізка як **`funExt`**, **`homotopy`**.

5.2.3 Кодування Бома

Тип даних List над даним типом A, може бути представлений як ініціальні алгебра $(\mu L_A, \mathtt{in})$ функтору $L_A(X) = 1 + (A \times X)$. Позначається $\mu L_A = \mathrm{List}(A)$. Функції-конструктори $\mathtt{nil} : 1 \to \mathrm{List}(A)$ та $\mathtt{cons} : A \times \mathrm{List}(A) \to \mathrm{List}(A)$ визначені як $\mathtt{nil} = \mathtt{in} \circ \mathtt{inl}$ та $\mathtt{cons} = \mathtt{in} \circ \mathtt{inr}$, таким чином $\mathtt{in} = [\mathtt{nil}, \mathtt{cons}]$. Для кожних двох функцій $c : 1 \to C$ та $h : A \times C \to C$, катаморфізм $f = (\!|[c, h]|\!) : \mathrm{List}(A) \to C$ є унікальним розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} f \circ \mathtt{nil} = c \\ f \circ \mathtt{cons} = h \circ (\mathrm{id} \times f) \end{cases}$$

де $f = \mathtt{foldr}(c, h)$. Маючи це, ініціальна алгебра представлена функтором $\mu(1 + A \times X)$ та сумою морфізмів $[1 \to \mathrm{List}(A), A \times \mathrm{List}(A) \to \mathrm{List}(A)]$ як катаморфізму. Використовуючи це кодування, List-тип в базовій бібліотеці мови $\mathrm{O_{PTS}}$ буде мати наступну форму:

$$\begin{cases} \mathtt{foldr} = (\!|[f \circ \mathtt{nil}, h]|\!), f \circ \mathtt{cons} = h \circ (\mathrm{id} \times f) \\ \mathtt{len} = (\!|[\mathtt{zero}, \lambda\ a\ n \to \mathtt{succ}\ n]|\!) \\ (++) = \lambda\ xs\ ys \to (\!|[\lambda(x) \to ys, \mathtt{cons}]|\!)(xs) \\ \mathtt{map} = \lambda\ f \to (\!|[\mathtt{nil}, \mathtt{cons} \circ (f \times \mathrm{id})]|\!) \end{cases}$$

```
data list (A: U) = cons (x: A) (cs: list A) | nil
```

$$\begin{cases} \mathrm{list} = \lambda\ \mathrm{ctor} \to \lambda\ \mathrm{cons} \to \lambda\ \mathrm{nil} \to \mathrm{ctor} \\ \mathrm{cons} = \lambda\ \mathrm{x}\ \to \lambda\ \mathrm{xs} \to \lambda\ \mathrm{list} \to \lambda\ \mathrm{cons} \to\ \lambda\ \mathrm{nil} \to \mathrm{cons}\ \mathrm{x}\ (\mathrm{xs}\ \mathrm{list}\ \mathrm{cons}\ \mathrm{nil}) \\ \mathrm{nil} = \lambda\ \mathrm{list} \to \lambda\ \mathrm{cons} \to \lambda\ \mathrm{nil} \to \mathrm{nil} \end{cases}$$

```
module list where
    map (A B: U) (f: A -> B) : list A -> list B
    length (A: U): list A -> nat
    append (A: U): list A -> list A -> list A
    foldl (A B: U) (f: B -> A -> B) (Z: B): list A -> B
    filter (A: U) (p: A -> bool) : list A -> list A
```

$$\begin{cases} \mathrm{len} = \mathrm{foldr}\ (\lambda\ \mathrm{x}\ \mathrm{n} \to \mathrm{succ}\ \mathrm{n})\ 0 \\ (++) = \lambda\ \mathrm{ys} \to \mathrm{foldr}\ \mathrm{cons}\ \mathrm{ys} \\ \mathrm{map} = \lambda\ \mathrm{f} \to \mathrm{foldr}\ (\lambda \mathrm{x}\ \mathrm{xs} \to \mathrm{cons}\ (\mathrm{f}\ \mathrm{x})\ \mathrm{xs})\ \mathrm{nil} \\ \mathrm{filter} = \lambda\ \mathrm{p} \to \mathrm{foldr}\ (\lambda \mathrm{x}\ \mathrm{xs} \to \mathrm{if}\ \mathrm{p}\ \mathrm{x}\ \mathrm{then}\ \mathrm{cons}\ \mathrm{x}\ \mathrm{xs}\ \mathrm{else}\ \mathrm{xs})\ \mathrm{nil} \\ \mathrm{foldl} = \lambda\ \mathrm{f}\ \nu\ \mathrm{xs} = \mathrm{foldr}\ (\lambda\ \mathrm{xg} \to\ (\lambda \to \mathrm{g}\ (\mathrm{f}\ \mathrm{a}\ \mathrm{x})))\ \mathrm{id}\ \mathrm{xs}\ \nu \end{cases}$$

5.2.4 Операційна семантика

Традиційно індуктивні типи входять в операційну семантику систем побудованих та основі MLTT-80 (таких як кубічні системи, або система HTS). Оригінально Мартін-Льоф виразив індуктивні дерева через W-типи, для яких також потрібно 0-тип, 1-тип, та 2-тип. Така система є менш потужною ніж система типів Полін-Морін, оскільки не дозволяє виразити загальні схеми індукції та взаємну рекурсію. Хоча з іншого боку не потребує термінейшин чекера, стріктлі позітів чекера, та взаємної рекурсивності, що дозволяє доводити семантику такого мовного ядра значно простіше.

(W-formation)
$$\frac{A : \mathrm{Type} \quad x : A \quad B(x) : \mathrm{Type}}{W(x : A) \to B(x) : \mathrm{Type}}$$

(W-intro)
$$\frac{a : A \quad t : B(a) \to W}{\sup(a, t) : W}$$

(W-elim)
$$\frac{\begin{array}{l} w : W \vdash C(w) : \mathrm{Type} \\ x : A,\ u : B(x) \to W, \\ v : \Pi(y : B(x)) \to C(u(y)) \vdash c(x, u, v) : C(\sup(x, u)) \end{array}}{w : W \vdash \mathrm{wrec}(w, c) : C(w)}$$

(W-β)
$$\frac{\begin{array}{l} w : W \vdash C(w) : \mathrm{Type} \\ x : A,\ u : B(x) \to W \\ v : \Pi(y : B(x)) \to C(u(y)) \vdash c(x, u, v) : C(\sup(x, u)) \end{array}}{\begin{array}{l} x : A,\ u : B(x) \to W \vdash \mathrm{wrec}(\sup(x, u), c) \\ \quad = c(x, u, \lambda(y : B(x)), \mathrm{wrec}(u(y), c)) : C(\sup(x, u)) \end{array}}$$

5.3 Гомотопічна система типів HTS

Гомотопічна система типів, принаймі без вищих індуктивних типів, які є функтором на інших мовних категорій, формально моделюється досніповою (предпучковою) семантикою на категорії де Моргана $\mathbf{I} : \square_{\mathbf{n}}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set}$. Так як тут теж є своя аплікація та лямбда, то можна сказати, що це ще одна лямбда система, але для безпосередньох маніпуляції багатовимірними кубами, використовуючи при цьому логіку де Моргана.

5.3.1 Синтаксис

Тут подано повний синтаксис разом з вищими індуктивними типами.

```
   sys := [ sides ]          side := (id=0)⟶exp+(id=1)⟶exp
  form := form\/f1+f1+f2    sides := #empty+cos+side
   cos := side,side+side,cos  mod := module id where imps dec
    f1 := f1/\f2               f2 := -f2+id+0+1
   imp := import id                 brs := #empty+cobrs
   app := exp exp             tel := #empty+cotel
  imps := #list imp         cotel := (exp:exp) tel
    id := #list #nat          dec := #empty+codec
    u2 := glue+unglue+Glue                  u1 := fill+comp
   ids := #list id             br := ids⟶exp+ids@ids⟶exp
 codec := def dec
 cobrs := | br brs
   sum := #empty+id tel+id tel|sum+id tel<ids>sys
   def := data id tel=sum+id tel:exp=exp+id tel:exp where def
   exp := cotel*exp+cotel⟶exp+exp⟶exp+(exp)+id
          (exp,exp)+\cotele⟶exp+split cobrs+exp.1+exp.2+
          ⟨ids⟩exp+exp@form+app+u2 exp exp sys+u1 exp sys
```

Тут термінали := (визначенния), + (сума типів), #empty (пустий тип), #nat (тип натуральних чисел), #list (тип списків) — є частинами BNF мови. Термінали |, :, *, ⟨, ⟩, (,), =, \, /, -, ⟶, 0, 1, @, [,], **module**, **import**, **data**, **split**, **where**, **comp**, **fill**, **Glue**, **glue**, **unglue**, **.1**, **.2**, а також термінал , є терміналами мови верифікатора гомотопічної системи типів. Ця мова включає в себе: індуктивні типи, вищі індуктивні типи, оператори склеювання для всесвітів та типів з відповідними елімінаторами. Усі ці концепції, та їх моделі більш формально та детально описані у наступному розділі 3.

Система не повинна бути обмежена мовами та синтаксисами, ми покажемо як приклад, підтримку гомотопічної мови з інтервалом [0,1] сумісної з $\mathbf{cubical}$ та з пітримкою індуктивних синтаксисів та кодувань попереднього рівня.

```
data hts (lang: U)
   = pre (n: nat)
   | path (A x y: lang)
   | plam (name: name) (a: lang)
   | papp (f a: lang)
   | interval
   | zero
   | one
   | meet (a b: lang)
   | join (a b: lang)
   | neg (e: lang)
   | comp (a b: lang)
   | fill (a b c: lang)
   | glue (a b c: lang)
   | glue-1 (a b: lang)
   | unglue-1 (a b: lang)
```

5.4 Висновки

Як апогей, система HTS є фінальною категорією, куди сходяться всі стрілки категорії мов. Кожна мова та її категорія мають певний набір стрілок ендоморфізмів, які обчислюють, верифікують, нормалізують, оптимізують програми своїх мов. Стрілки виду $\mathbf{e_i} : \mathbf{O_{n+1}} \to \mathbf{O_n}$ є екстракторами, які понижають систему типів, при чому $\mathbf{O_{CPS}} = \mathbf{O_0}$.

Базова бібліотека мови Ерланг у яку проводиться основний естракт, поставляється з дистрибутивом Erlang/OTP. Базова бібліотека $\mathbf{O_{PTS}}$ наведена в репозиторії Github[10]. Гомотопічна базова бібліотека відповідає термінальній мові $\mathbf{O_{CCHM}}$, та теж відкрита на Github[11]. Останні два розділи присвячені математичному моделюванню математики на цій мові.

[10] `https://github.com/groupoid/henk`
[11] `https://github.com/groupoid/anders`

Розділ 6

Бібліотека вищих мов

Присвячується вчителям американської школи формальної філософії та авторам HoTT

В третьому розділі дається опис гомотопічної мови програмування, реалізація якої вперше була представлена CCHM в 2017 році, та для якої написана гомотопічна базова бібліотека представлена у цьому та наступному розділах.

Вступне слово

6.1 Інтерналізація теорії типів

Кожна мовна імплементація повинна бути протестована. Один з можливих сценаріїв тестування типових верифікаторів це пряме вбудовування в модель теорії типів виконуючого верифікатора. Так як всі типи в теорії формулюються за допомогою п'яти правил: формації, інтро, елімінації, обчисленя, рівності), ми зконструювали номінальні типи-синоніми для виконуючого верифікатора та довели, що це є реалізацією MLTT. Це може розглядатися як універсальний тест для імплементації типового верифікатора, позаяк компенсаця інтро правила та правила елімінатора пов'язані в правилі обчислення та рівності (бета та ета редукціях). Таким чином, доводжуючи реалізацію MLTT, ми доводимо властивості самого виконуючого верифікатора. MLTT-73 розкладається у спектр Π, Σ, та = типів. У цьому розділі ми побудуємо мінімальну кубічну систему необхідну для вбудовування MLTT-73 у саму себе.

Більш формально, кубічне MLTT вбудовування конструктивно виражає J елімінатор типу-рівності та його рівняння — правило обчислення, що було неможливо до кубічної інтерпретації. Також

Таблиця 6.1 Interpretations correspond to mathematical theories

Теорія типів	Logic	Category Theory	Homotopy Theory
A type	class	object	space
isProp A	proposition	(-1)-truncated object	space
a:A program	proof	generalized element	point
$B(x)$	predicate	indexed object	fibration
$b(x) : B(x)$	conditional proof	indexed elements	section
$\emptyset$	$\bot$ false	terminal object	empty space
$\mathbf{1}$	$\top$ true	initial object	singleton
$A + B$	$A \vee B$ disjunction	coproduct	coproduct space
$A \times B$	$A \wedge B$ conjunction	product	product space
$A \to B$	$A \Rightarrow B$	internal hom	function space
$\sum x : A, B(x)$	$\exists_{x:A} B(x)$	dependent sum	total space
$\prod x : A, B(x)$	$\forall_{x:A} B(x)$	dependent product	space of sections
$\mathbf{Path}_A$	equivalence $=_A$	path space object	path space A^I
quotient	equivalence class	quotient	quotient
W-type	induction	colimit	complex
type of types	universe	object classifier	universe
quantum circuit	proof net	string diagram	

цей розділ відкриває серію параграфів присвячених формалізації основ математики у кубічній теорії типів, MLTT моделюванню та кубічнії верифікації. Так як не всі можуть бути знайомі з теорією типів, цей розділ також містить їх інтерпретації з точки зору різних розділів математики.

Додамо, що це тільки вхід в техніку прямого вбудовування і після MLTT моделювання, ми можем піднятися вище — до вбудовування в систему індуктивних типів, і далі, до вбудовування CW-комплексів як зклейок вищих індуктивних типів.

6.1.0.1 Теорія типів

Any new type in MLTT presented with set of 5 rules: i) formation rules, the signature of type; ii) the set of constructors which produce the elements of formation rule signature; iii) the dependent eliminator or induction principle for this type; iv) the beta-equality or computational rule; v) the eta-equality or uniquness principle. Π, Σ, and Path types will be given shortly. This interpretation or rather way of modeling is MLTT specific.

The most interesting are Id types. Id types were added in [1]1984 while original MLTT was introduced in [2]1972. Predicative Universe Hierarchy was added in [3]1975. While original MLTT contains Id

[1] P. Martin-Löf, G. Sambin. Intuitionistic type theory. 1984.
[2] P. Martin-Löf, G. Sambin. The Theory of Types. 1972.
[3] P. Martin-Löf. An intuitionistic theory of types: predicative part. 1975.

types that preserve uniquness of identity proofs (UIP) or eta-rule of Id type, HoTT refutes UIP (eta rule desn't hold) and introduces univalent heterogeneous Path equality ($^4\infty$-Groupoid interpretation). Path types are essential to prove computation and uniquness rules for all types (needed for building signature and terms), so we will be able to prove all the MLTT rules as a whole.

6.1.0.2 Інтерпретації

In contexts you can bind to variables (through de Brujin indexes or string names): i) indexed universes; ii) built-in types; iii) user constructed types, and ask questions about type derivability, type checking and code extraction. This system defines the core type checker within its language.

By using this languages it is possible to encode different interpretations of type theory itself and its syntax by construction. Usually the issues will refer to following interpretations: i) type-theoretical; ii) categorical; iii) set-theoretical; iv) homotopical; v) fibrational or geometrical.

Логічна або теоретико-типова інтерпретація

According to type theoretical interpretation for any type should be provided 5 formal inference rules: i) formation; ii) introduction; iii) dependent elimination principle; iv) beta rule or computational rule; v) eta rule or uniqueness rule. The last one could be exceptional for Path types. The formal representation of all rules of MLTT are given according to type-theoretical interpretation as a final result in this Issue I. It was proven that classical Logic could be embedded into intuitionistic propositional logic (IPL) which is directly embedded into MLTT.

Logical and type-theoretical interpretations could be distincted. Also set-theoretical interpretation is not presented in Table 1.

Категоріальна або топосо-теоритична інтерпретація

Categorical interpretation is a modeling through categories and functors. First category is defined as objects, morphisms and their properties, then we define functors, etc. In particular, as an example, according to categorical interpretation Π and Σ types of MLTT are presented as adjoint functors, and forms itself a locally closed cartesian category, which will be given a intermediate result in Issue VII: Topos Theory. In some sense we include here topos-theoretical interpretations, with presheaf model of type theory as example (in this case fibrations are constructes as functors, categorically).

[4] M. Hofmann, T. Streicher. The groupoid interpretation of type theory. 1996.

Теоретико-типова інтерпертація

Set-theoretical interpretations could replace first-order logic, but could not allow higher equalities, as long as inductive types to be embedded directly. Set is modelled in type theory according to homotopical interpretation as n-type.

Гомотопічна інтерпретація

In classical MLTT uniquness rule of Id type do holds strictly. In Homotopical interpretation of MLTT we need to allow a path space as Path type where uniqueness rule doesn't hold. Groupoid interpretation of Path equality that doesn't hold UIP generally was given in 1996 by Martin Hofmann and Thomas Streicher.

When objects are defined as fibrations, or dependent products, or indexed-objects this leds to fibrational semantics and geometric sheaf interpretation. Several definition of fiber bundles and trivial fiber bindle as direct isomorphisms of Π types is given here as theorem. As fibrations study in homotopical interpretation, geometric interpretation could be treated as homotopical.

6.1.1 Типи Π, Σ, Path

6.1.1.1 Π-тип

Π is a dependent product type, the generalization of functions. As a function it can serve the wide range of mathematical constructions as its domain and codomain, which are in general: objects, types, or spaces; and could have as its instance: sets, functions, polynomial functors, infinitesimals, ∞-groupoids, topological ∞-groupoid, CW-complexes, categories, languages, etc.

At this light there could be many interpretation of Π types from different areas of mathematics. We give here three: i) logical interpretation of Π as ∀ quantifier from higher order logic that forms a ground of type theory; ii) geomeric intepretation of Π as fiber bundle; iii) categorical interpretation of functions as functors.

Теоретико-типова інтерпретація

As a logical system dependent type theory could correspond to higher order logic. However here only type-theoretical model is given completely.

Визначення 52. (Π-Formation).

$$(x : A) \to B(x) =_{\mathtt{def}} \prod_{x:A} B(x) : \mathcal{U}.$$

```
Pi (A: U) (B: A -> U): U = (x: A) -> B x
```

Визначення 53. (Π-Introduction).

$$\backslash(x : A) \to b(x) =_{def} \prod_{A:U} \prod_{B:A\to U} \prod_{b:\prod_{a:A} B(a)} \lambda x.b(x) : \prod_{y:A} B(y).$$

```
lambda (A B: U) (b: B): A -> B = \(x: A) -> b
lam (A: U) (B: A -> U) (b: (a: A) -> B a): Pi A B = \(x: A) -> b x
```

Визначення 54. (Π-Elimination).

$$f\ a =_{def} \prod_{A:U} \prod_{B:A\to U} \prod_{a:A} \prod_{f:\prod_{x:A} B(a)} f(a) : B(a).$$

```
apply (A B: U) (f: A -> B) (a: A) : B = f a
app (A: U) (B: A -> U) (a: A) (f: Pi A B): B a = f a
```

Теорема 1. (Π-Computation).

$$f(a) =_{B(a)} (\lambda(x : A) \to f(a))(a).$$

```
Beta (A:U) (B:A->U) (a: A) (f: Pi A B)
   : Path (B a) (app A B a (lam A B f)) (f a)
```

Теорема 2. (Π-Uniqueness).

$$f =_{(x:A)\to B(a)} (\lambda(y : A) \to f(y)).$$

```
Eta (A:U) (B:A->U) (a:A) (f: Pi A B)
   : Path (Pi A B) f (\(x:A) -> f x)
```

Категоріальна інтерпретація

The adjoints Π and Σ is not the only adjoints could be presented in type system. Axiomatic cohesions could contain a set of adjoint pairs as a core type checker operations.

Визначення 55. (Dependent Product). The dependent product along morphism $g : B \to A$ in category C is the right adjoint $\Pi_g : C_{/B} \to C_{/A}$ of the base change functor.

Визначення 56. (Space of Sections). Let $\mathbf{H}$ be a $(\infty, 1)$-topos, and let $E \to B : \mathbf{H}_{/B}$ a bundle in $\mathbf{H}$, object in the slice topos. Then the space of sections $\Gamma_\Sigma(E)$ of this bundle is the Dependent Product:

$$\Gamma_\Sigma(E) = \Pi_\Sigma(E) \in \mathbf{H}.$$

Теорема 3. (HomSet). If codomain is set then space of sections is a set.

```
setFun (A B : U) (_: isSet B) : isSet (A -> B)
```

Теорема 4. (Contractability). If domain and codomain is contractible then the space of sections is contractible.

```
piIsContr (A: U) (B: A -> U) (u: isContr A)
          (q: (x: A) -> isContr (B x)) : isContr (Pi A B)
```

Визначення 57. (Section). A section of morphism $f : A \to B$ in some category is the morphism $g : B \to A$ such that $f \circ g : B \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B$ equals the identity morphism on B.

Гомотопічна інтерпретація

Geometrically, Π type is a space of sections, while the dependent codomain is a space of fibrations. Lambda functions are sections or points in these spaces, while the function result is a fibration. Π type also represents the cartesian family of sets, generalizing the cartesian product of sets.

Визначення 58. (Fiber). The fiber of the map $p : E \to B$ in a point $y : B$ is all points $x : E$ such that $p(x) = y$.

Визначення 59. (Fiber Bundle). The fiber bundle $F \to E \xrightarrow{p} B$ on a total space E with fiber layer F and base B is a structure (F, E, p, B) where $p : E \to B$ is a surjective map with following property: for any point $y : B$ exists a neighborhood U_b for which a homeomorphism $f : p^{-1}(U_b) \to U_b \times F$ making the following diagram commute.

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_b) & \xrightarrow{f} & U_b \times F \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p} & \swarrow{\scriptstyle pr_1} & \\ U_b & & \end{array}$$

Визначення 60. (Cartesian Product of Family over B). Is a set F of sections of the bundle with elimination map $app : F \times B \to E$ such that

$$F \times B \xrightarrow{app} E \xrightarrow{pr_1} B \tag{6.1}$$

pr_1 is a product projection, so pr_1, app are morphisms of slice category $Set_{/B}$. The universal mapping property of F: for all A and morphism $A \times B \to E$ in $Set_{/B}$ exists unique map $A \to F$ such that everything commute. So a category with all dependent products is necessarily a category with all pullbacks.

Визначення 61. (Trivial Fiber Bundle). When total space E is cartesian product $\Sigma(B, F)$ and $p = pr_1$ then such bundle is called trivial $(F, \Sigma(B, F), pr_1, B)$.

Теорема 5. (Functions Preserve Paths). For a function $f : (x : A) \to B(x)$ there is an $ap_f : x =_A y \to f(x) =_{B(x)} f(y)$. This is called application of f to path or congruence property (for non-dependent case — $cong$ function). This property behaves functoriality as if paths are groupoid morphisms and types are objects.

Теорема 6. (Trivial Fiber equals Family of Sets). Inverse image (fiber) of fiber bundle $(F, B * F, pr_1, B)$ in point $y : B$ equals $F(y)$.

```
FiberPi (B: U) (F: B -> U) (y: B)
      : Path U (fiber (Sigma B F) B (pi1 B F) y) (F y)
```

Теорема 7. (Homotopy Equivalence). If fiber space is set for all base, and there are two functions $f, g : (x : A) \to B(x)$ and two homotopies between them, then these homotopies are equal.

```
setPi (A: U) (B: A -> U) (h: (x: A) -> isSet (B x)) (f g: Pi A B)
      (p q: Path (Pi A B) f g) : Path (Path (Pi A B) f g) p q
```

Note that we will not be able to prove this theorem until Issue III: Homotopy Type Theory because bi-invertible iso type will be announced there.

6.1.1.2 Σ-тип

Σ is a dependent sum type, the generalization of products. Σ type is a total space of fibration. Element of total space is formed as a pair of basepoint and fibration.

6.1.1.3 Теоретико-типов інтерпретація

Визначення 62. (Σ-Formation).

```
Sigma (A : U) (B : A -> U) : U = (x : A) * B x
```

Визначення 63. (Σ-Introduction).

```
dpair (A: U) (B: A -> U) (a: A) (b: B a) : Sigma A B = (a,b)
```

Визначення 64. (Σ-Elimination).

```
pr1 (A: U) (B: A -> U)
    (x: Sigma A B): A = x.1

pr2 (A: U) (B: A -> U)
    (x: Sigma A B): B (pr1 A B x) = x.2

sigInd (A: U) (B: A -> U) (C: Sigma A B -> U)
       (g: (a: A) (b: B a) -> C (a, b))
       (p: Sigma A B) : C p = g p.1 p.2
```

Теорема 8. (Σ-Computation).

```
Beta1 (A: U) (B: A -> U)
      (a:A) (b: B a)
    : Equ A a (pr1 A B (a,b))

Beta2 (A: U) (B: A -> U)
      (a: A) (b: B a)
    : Equ (B a) b (pr2 A B (a,b))
```

Теорема 9. (Σ-Uniqueness).

```
Eta2 (A: U) (B: A -> U) (p: Sigma A B)
   : Equ (Sigma A B) p (pr1 A B p,pr2 A B p)
```

6.1.1.4 Категоріальна інтерпретація

Визначення 65. (Dependent Sum). The dependent sum along the morphism $f : A \to B$ in category C is the left adjoint $\Sigma_f : C_{/A} \to C_{/B}$ of the base change functor.

6.1.1.5 Теоретико-множинна інтерпретація

Теорема 10. (Axiom of Choice). If for all $x : A$ there is $y : B$ such that $R(x, y)$, then there is a function $f : A \to B$ such that for all $x : A$ there is a witness of $R(x, f(x))$.

```
ac (A B: U) (R: A -> B -> U)
 : (p: (x:A) -> (y:B)*(R x y)) -> (f:A->B) * ((x:A)->R(x)(f x))
```

Теорема 11. (Total). If fiber over base implies another fiber over the same base then we can construct total space of section over that base with another fiber.

```
total (A:U) (B C: A -> U)
      (f: (x:A) -> B x -> C x) (w: Sigma A B)
    : Sigma A C = (w.1,f (w.1) (w.2))
```

Теорема 12. (Σ-Contractability). If the fiber is set then the Σ is set.

```
setSig (A:U) (B: A -> U) (sA: isSet A)
       (sB : (x:A) -> isSet (B x)) : isSet (Sigma A B)
```

Теорема 13. (Path Between Sigmas). Path between two sigmas $t, u : \Sigma(A, B)$ could be decomposed to sigma of two paths $p : t_1 =_A u_1)$ and $(t_2 =_{B(p@i)} u_2)$.

```
pathSig (A:U) (B : A -> U) (t u : Sigma A B)
      : Path U (Path (Sigma A B) t u)
               ((p: Path A t.1 u.1) * PathP (<i>B(p@i)) t.2 u.2)
```

6.1.1.6 Path-тип

The Path identity type defines a Path space with elements and values. Elements of that space are functions from interval $[0, 1]$ to a values of that path space. This ctt file reflects [5]CCHM cubicaltt model with connections. For [6]ABCFHL yacctt model with variables please refer to ytt file. You may also want to read [7]BCH, [8]AFH. There is a [9]PO paper about CCHM axiomatic in a topos.

6.1.1.7 Кубічна інтерпретація

Визначення 66. (Path Formation).

```
Hetero (A B: U) (a: A) (b: B) (P: Path U A B) : U = PathP P a b
Path (A: U) (a b: A) : U = PathP (<i> A) a b
```

Визначення 67. (Path Reflexivity). Returns an element of reflexivity path space for a given value of the type. The inhabitant of that path space is the lambda on the homotopy interval $[0, 1]$ that returns a constant value a. Written in syntax as `<i>a` which equals to $\lambda\,(i : I) \to a$.

```
refl (A: U) (a: A) : Path A a a
```

Визначення 68. (Path Application). You can apply face to path.

```
app1 (A: U) (a b: A) (p: Path A a b): A = p @ 0
app2 (A: U) (a b: A) (p: Path A a b): A = p @ 1
```

Визначення 69. (Path Composition). Composition operation allows to build a new path by given to paths in a connected point.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\text{comp}} & c \\ {\scriptstyle \lambda(i:I)\to a}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle q} \\ a & \xrightarrow{p@i} & b \end{array}$$

```
composition (A: U) (a b c: A) (p: Path A a b) (q: Path A b c)
          : Path A a c = comp (<i>Path A a (q@i)) p []
```

[5]Cyril Cohen, Thierry Coquand, Simon Huber, Anders Mörtberg. Cubical Type Theory: a constructive interpretation of the univalence axiom. 2015. **https://5ht.co/cubicaltt.pdf**

[6]Carlo Angiuli, Brunerie, Coquand, Kuen-Bang Hou (Favonia), Robert Harper, Dan Licata. Cartesian Cubical Type Theory. 2017. **https://5ht.co/cctt.pdf**

[7]Marc Bezem, Thierry Coquand, Simon Huber. A model of type theory in cubical sets. 2014. **http://www.cse.chalmers.se/~coquand/mod1.pdf**

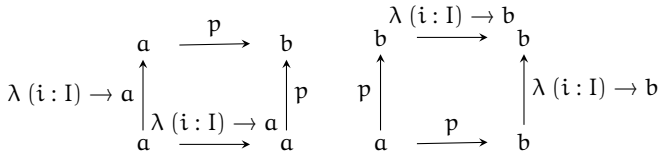
[8]Carlo Angiuli, Kuen-Bang Hou (Favonia), Robert Harper. Cartesian Cubical Computational Type Theory: Constructive Reasoning with Paths and Equalities. 2018. **https://www.cs.cmu.edu/~cangiuli/papers/ccctt.pdf**

[9]Andrew Pitts, Ian Orton. Axioms for Modelling Cubical Type Theory in a Topos. 2016. **https://arxiv.org/pdf/1712.04864.pdf**

Теорема 14. (Path Inversion).

```
inv (A: U) (a b: A) (p: Path A a b): Path A b a = <i> p @ -i
```

Визначення 70. (Connections). Connections allows you to build square with given only one element of path: i) $\lambda\ (i, j\ :\ I) \rightarrow p\ @\ min(i, j)$; ii) $\lambda\ (i, j : I) \rightarrow p\ @\ max(i, j)$.




```
connection1 (A: U) (a b: A) (p: Path A a b)
          : PathP (<x> Path A (p@x) b) p (<i>b)
          = <y x> p @ (x \/ y)

connection2 (A: U) (a b: A) (p: Path A a b)
          : PathP (<x> Path A a (p@x)) (<i>a) p
          = <x y> p @ (x /\ y)
```

Теорема 15. (Congruence). Is a map between values of one type to path space of another type by an encode function between types. Implemented as lambda defined on $[0, 1]$ that returns application of encode function to path application of the given path to lamda argument |λ (i:I) → f (p @ i)| for both cases.

```
ap  (A B: U) (f: A -> B)
    (a b: A) (p: Path A a b)
  : Path B (f a) (f b)

apd (A: U) (a x:A) (B: A -> U) (f: A -> B a)
    (b: B a) (p: Path A a x)
  : Path (B a) (f a) (f x)
```

Теорема 16. (Transport). Transports a value of the domain type to the value of the codomain type by a given path element of the path space between domain and codomain types. Defined as path composition with |[]| of a over a path p — |comp p a []|.

```
trans (A B: U) (p: Path U A B) (a: A) : B
```

6.1.1.8 Теоретико-типова інтерпретація

Визначення 71. (Singleton).

```
singl (A: U) (a: A): U = (x: A) * Path A a x
```

Теорема 17. (Singleton Instance).

```
eta (A: U) (a: A): singl A a = (a,refl A a)
```

Теорема 18. (Singleton Contractability).

```
contr (A: U) (a b: A) (p: Path A a b)
  : Path (singl A a) (eta A a) (b,p)
  = <i> (p @ i,<j> p @ i/\j)
```

Теорема 19. (Path Elimination, Diagonal).

```
D (A: U) : U = (x y: A) -> Path A x y -> U
J (A: U) (x y: A) (C: D A)
  (d: C x x (refl A x))
  (p: Path A x y) : C x y p
= subst (singl A x) T (eta A x) (y, p) (contr A x y p) d where
  T (z: singl A x) : U = C x (z.1) (z.2)
```

Теорема 20. (Path Elimination, Paulin-Mohring). J is formulated in a form of Paulin-Mohring and implemented using two facts that singleton are contractible and dependent function transport.

```
J (A: U) (a b: A)
  (P: singl A a -> U)
  (u: P (a,refl A a))
  (p: Path A a b) : P (b,p)
```

Теорема 21. (Path Elimination, HoTT). J from HoTT book.

```
J (A: U) (a b: A)
  (C: (x: A) -> Path A a x -> U)
  (d: C a (refl A a))
  (p: Path A a b) : C b p
```

Теорема 22. (Path Computation).

```
trans_comp (A: U) (a: A)
  : Path A a (trans A A (<_> A) a)
  = fill (<i> A) a []
subst_comp (A: U) (P: A -> U) (a: A) (e: P a)
  : Path (P a) e (subst A P a a (refl A a) e)
  = trans_comp (P a) e
J_comp (A: U) (a: A) (C: (x: A) -> Path A a x -> U) (d: C a (refl A a))
  : Path (C a (refl A a)) d (J A a C d a (refl A a))
  = subst_comp (singl A a) T (eta A a) d where T (z: singl A a)
  : U = C a (z.1) (z.2)
```

Note that Path type has no Eta rule due to groupoid interpretation.

6.1.1.9 Групоїдна інтерпретація

The groupoid interpretation of type theory is well known article by Martin Hoffman and Thomas Streicher, more specific interpretation of identity type as infinity groupoid. The groupoid interpretation of Path equality will be given along with category theory library in Issue VII: Category Theory.

6.1.2 Всесвіти

This introduction is a bit wild strives to be simple yet precise. As we defined a language BNF we could define a language AST by using inductive types which is yet to be defined in Issue II: Inductive Types and Models. This SAR notation is due Barendregt.

Визначення 72. (Terms). Point in initial object of language AST inductive definition is called a term. If type theory or language is defined as an inductive type (AST) then the term is defined as its instance.

Визначення 73. (Sorts). N-indexed set of universes $\mathcal{U}_{n\in\mathbb{N}}$. Could have any number of elements which defines different type systems. All built-in types as long as user defined types are landed usually by default in $\mathcal{U}_0$ universe. Sorts represented in type checker as a separate constructor.

Визначення 74. (Axioms). The inclusion rules $\mathcal{U}_i : \mathcal{U}_j, i, j \in \mathbb{N}$, that define which universe is element of another given universe. You may attach any rules that joins i, j in some way. Axioms with sorts define universe hierarchy.

Визначення 75. (Rules). The set of landings $\mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_j : \mathcal{U}_{\lambda(i,j),i,j\in\mathbb{N}}$, where $\lambda : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. These rules define term dependence or how we land (in which universe) formation rules in definitions.

Визначення 76. (Predicative hierarchy). If λ in Rules is an uncurried function $\mathbf{max} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ then such universe hierarchy is called predicative.

Визначення 77. (Impredicative hierarchy). If λ in Rules is a second projection of a tuple $\mathbf{snd} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ then such universe hierarchy is called impredicative.

Визначення 78. (Definitional Equality). For any $\mathcal{U}_i, i \in \mathbb{N}$ there is defined an equality between its members and between its instances. For all x,y ∈ A, there is defined a x=y. Definitional equality compares normalized term instances.

Визначення 79. (SAR). The universum space is configured with a triple of: i) sorts, a set of universes $\mathcal{U}_{n\in\mathbb{N}}$ indexed over set N; ii) axioms, a set of inclusions $\mathcal{U}_i : \mathcal{U}_j, i, j \in \mathbb{N}$; iii) rules of term dependence universe landing, a set of landings $\mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_j : \mathcal{U}_{\lambda(i,j),i,j\in\mathbb{N}}$, where λ could be function $\mathbf{max}$ (predicative) or $\mathbf{snd}$ (impredicative).

Приклад 1. (CoC). SAR = $\{\{\star, \square\}, \{\star : \square\}, \{i \to j : j; i, j \in \{\star, \square\}\}$. Terms live in universe $\star$, and types live in universe $\square$. In CoC $\lambda = \mathbf{snd}$.

Приклад 2. ($\mathbf{PTS}^\infty$). SAR = $\{\mathcal{U}_{i\in\mathbf{N}}, \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{j;i<j;i,j\in\mathbf{N}}, \mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_j : \mathcal{U}_{\lambda(i,j);i,j\in\mathbf{N}}\}$. Where $\mathcal{U}_i$ is a universe of i-level or i-category in categorical interpretation. The working prototype of $\mathbf{PTS}^\infty$ is given in Addendum I: Pure Type System for Erlang[10].

6.1.3 Контексти

Speaking of type checker execution, we introduce context or dictionary with types and terms, from which we can derive typed variables. This chain could be implemented as nested sigma types (due to R.A.G.Seely) or list types (due to Voevodsky). Categorically dependent type theory is built upon categories of contexts.

Визначення 80. (Empty Context).

$$\gamma_0 : \Gamma =_{\mathbf{def}} \star.$$

Визначення 81. (Context Comprehension).

$$\Gamma ; A =_{\mathbf{def}} \sum_{\gamma:\Gamma} A(\gamma).$$

Визначення 82. (Context Derivability).

$$\Gamma \vdash A =_{\mathbf{def}} \prod_{\gamma:\Gamma} A(\gamma).$$

[10] M.Sokhatsky,P.Maslianko. The Systems Engineering of Consistent Pure Language with Effect Type System for Certified Applications and Higher Languages. AIP Conference Proceedings. 2018. doi:10.1063/1.5045439

6.1.4 Інтерналізація

Here is given formal model of type-theoretical interpretation of Martin-Löf Type Theory. It combines 4 Path rules (no eta), 5 Π rules, and 6 Σ rules (two elims). The proof is provided by direct embedding (internalizing) the model intro the model of type checker which is even more powerful.

Визначення 83. (MLTT). The MLTT as a Type is defined by taking all rules for Π, Σ and Path types into one Σ telescope or context.

```
def MLTT (A: U) : U := Σ
    (Π-form  : Π (B: A → U), U)
    (Π-ctor₁ : Π (B: A → U), Pi A B → Pi A B)
    (Π-elim₁ : Π (B: A → U), Pi A B → Pi A B)
    (Π-comp₁ : Π (B: A → U) (a: A) (f: Pi A B),
               Equ (B a) (Π-elim₁ B (Π-ctor₁ B f) a) (f a))
    (Π-comp₂ : Π (B: A → U) (a:  A) (f: Pi A B),
               Equ (Pi A B) f (λ (x : A), f x))
    (Σ-form  : Π (B: A → U), U)
    (Σ-ctor₁ : Π (B: A → U) (a : A) (b : B a), Sigma A B)
    (Σ-elim₁ : Π (B: A → U) (p : Sigma A B), A)
    (Σ-elim₂ : Π (B: A → U) (p : Sigma A B), B (pr₁ A B p))
    (Σ-comp₁ : Π (B: A → U) (a : A) (b: B a),
               Equ A a (Σ-elim₁ B (Σ-ctor₁ B a b)))
    (Σ-comp₂ : Π (B: A → U) (a : A) (b: B a),
               Equ (B a) b (Σ-elim₂ B (a, b)))
    (Σ-comp₃ : Π (B: A → U) (p : Sigma A B),
               Equ (Sigma A B) p (pr₁ A B p, pr₂ A B p))
    (=-form  : Π (a: A), A → U)
    (=-ctor₁ : Π (a: A), Equ A a a)
    (=-elim₁ : Π (a: A) (C: D A) (d: C a a (=-ctor₁ a))
                 (y: A) (p: Equ A a y), C a y p)
    (=-comp₁ : Π (a: A) (C: D A) (d: C a a (=-ctor₁ a)),
               Equ (C a a (=-ctor₁ a)) d (=-elim₁ a C d a (=-ctor₁ a))), U
```

Теорема 23. (Model Check). There is an instance of MLTT.

```
theorem instance (A : U) : MLTT A :=
    (Pi A, lambda A, app A, comp₁ A, comp₂ A,
     Sigma A, pair A, pr₁ A, pr₂ A, comp₃ A, comp₄ A, comp₅ A,
     Equ A, refl A, J A, comp₆ A, A)
```

Перевірка в кубічній теорії

The result of the work is a `mltt.ctt` file which can be runned using `cubicaltt`. Note that computation rules take a seconds to type check.

```
$ rlwrap ./anders.native check ./experiments/mltt.anders
File loaded.
> :n instance
TYPE: Π (A : U), Σ (Π-form : Π (B : (A → U)), U), Σ (Π-ctor₁ : Π (B : (A → U))
      , (Π (x : A), (B x) → Π (x : A), (B x))), Σ (Π-elim₁ : Π (B : (A → U)),
      (Π (x : A), (B x) → Π (x : A), (B x))), Σ (Π-comp₁ : Π (B : (A → U)), Π
      (a : A), Π (f : Π (x : A), (B x)), Π (P : ((B a) → U)), ((P (((Π-elim₁ B
      ) ((Π-ctor₁ B) f)) a)) → (P (f a)))), Σ (Π-comp₂ : Π (B : (A → U)), Π (a
       : A), Π (f : Π (x : A), (B x)), Π (P : (Π (x : A), (B x) → U)), ((P f)
      → (P λ (x : A), (f x)))), Σ (Σ-form : Π (B : (A → U)), U), Σ (Σ-ctor₁ :
      Π (B : (A → U)), Π (a : A), Π (b : (B a)), Σ (x : A), (B x)), Σ (Σ-elim₁
       : Π (B : (A → U)), Π (p : Σ (x : A), (B x)), A), Σ (Σ-elim₂ : Π (B : (A
       → U)), Π (p : Σ (x : A), (B x)), (B p.1)), Σ (Σ-comp₁ : Π (B : (A → U))
      , Π (a : A), Π (b : (B a)), Π (P : (A → U)), ((P a) → (P ((Σ-elim₁ B) ((
      (Σ-ctor₁ B) a) b))))), Σ (Σ-comp₂ : Π (B : (A → U)), Π (a : A), Π (b : (
      B a)), Π (P : ((B a) → U)), ((P b) → (P ((Σ-elim₂ B) (a, b))))), Σ (Σ-
      comp₃ : Π (B : (A → U)), Π (p : Σ (x : A), (B x)), Π (P : (Σ (x : A), (B
       x) → U)), ((P p) → (P (p.1, p.2)))), Σ (=-form : Π (a : A), (A → U)), Σ
      (=-ctor₁ : Π (a : A), Π (P : (A → U)), ((P a) → (P a))), Σ (=-elim₁ : Π
      (a : A), Π (C : Π (x : A), Π (y : A), (Π (P : (A → U)), ((P x) → (P y))
      → U)), Π (d : (((C a) a) (=-ctor₁ a))), Π (y : A), Π (p : Π (P : (A → U)
      ), ((P a) → (P y))), (((C a) y) p)), Σ (=-comp₁ : Π (a : A), Π (C : Π (x
       : A), Π (y : A), (Π (P : (A → U)), ((P x) → (P y)) → U)), Π (d : (((C a)
       a) (=-ctor₁ a))), Π (P : ((((C a) a) (=-ctor₁ a)) → U)), ((P d) → (P ((
      (((=-elim₁ a) C) d) a) (=-ctor₁ a))))), U
NORMEVAL: λ (A : U), (λ (B : (A → U)), Π (x : A), (B x), (λ (B : (A → U)), λ
      (b : Π (x : A), (B x)), λ (x : A), (b x), (λ (B : (A → U)), λ (f : Π (x
      : A), (B x)), λ (a : A), (f a), (λ (B : (A → U)), λ (a : A), λ (f : Π (x
       : A), (B x)), λ (P : ((B a) → U)), λ (u : (P (f a))), u, (λ (B : (A → U
      )), λ (a : A), λ (f : Π (x : A), (B x)), λ (P : (Π (x : A), (B x) → U)),
       λ (u : (P f)), u, (λ (B : (A → U)), Σ (x : A), (B x), (λ (B : (A → U)),
       λ (a : A), λ (b : (B a)), (a, b), (λ (B : (A → U)), λ (x : Σ (x : A), (
      B x)), x.1, (λ (B : (A → U)), λ (x : Σ (x : A), (B x)), x.2, (λ (B : (A
      → U)), λ (a : A), λ (b : (B a)), λ (P : (A → U)), λ (u : (P a)), u, (λ
      (B : (A → U)), λ (a : A), λ (b : (B a)), λ (P : ((B a) → U)), λ (u : (P
      b)), u, (λ (B : (A → U)), λ (p : Σ (x : A), (B x)), λ (P : (Σ (x : A), (
      B x) → U)), λ (u : (P p)), u, (λ (x : A), λ (y : A), Π (P : (A → U)), ((
      P x) → (P y)), (λ (x : A), λ (P : (A → U)), λ (u : (P x)), u, ((J A), ((
      comp₆ A), A)))))))))))))))
```

6.2 Індуктивні типи

6.2.1 Empty, Unit

empty type lacks both introduction rules and eliminators. However, it has recursor and induction.

```
data empty =
emptyRec (C: U): empty -> C = split {}
emptyInd (C: empty -> U): (z: empty) -> C z = split {}
```

```
data unit = star
unitRec (C: U) (x: C): unit -> C = split tt -> x
unitInd (C: unit -> U) (x: C tt): (z: unit) -> C z = split tt -> x
```

6.2.2 Bool, Maybe, Either, Tuple

Визначення 84. (Bool). bool is a run-time version of the boolean logic you may use in your general purpose applications. bool is isomorphic to 1+1: either unit unit.

```
data bool = false | true
b1: U = bool -> bool
b2: U = bool -> bool -> bool
negation: b1 = split { false -> true; true -> false }
or: b2 = split { false -> idfun bool; true -> lambda bool bool true }
and: b2 = split { false -> lambda bool bool false; true -> idfun boo }
boolEq: b2 = lamb bool (bool -> bool) negation
boolRec (C: U) (f t: C): bool -> C = split { false -> f ; true -> t }
boolInd (C: bool -> U) (f: A false) (t: A true): (n:bool) -> A n
  = split { false -> f ; true -> t }
```

Визначення 85. (Maybe). Maybe has representing functor $M_A(X) = 1 + A$. It is used for wrapping values with optional nothing constructor. In ML-family languages this type is called Option (Miranda, ML). There is an isomorphims between (fix maybe) and nat.

```
data maybe (A: U) = nothing | just (x: A)
maybeRec (A P: U) (n: P) (j: A -> P): maybe A -> P
       = split { nothing -> n; just a -> j a }

maybeInd (A: U) (P: maybe A -> U) (n: P nothing)
         (j: (a: A) -> P (just a)): (a: maybe A) -> P a
       = split { nothing -> n ; just x -> j x }
```

either is a representation for sum types or disjunction.

```
data either (A B: U) = left (x: A) | right (y: B)
eitherRec (A B C: U) (b: A -> C) (c: B -> C): either A B -> C
        = split { inl x -> b(x) ; inr y -> c(y) }

eitherInd (A B: U) (C: either A B -> U)
          (x: (a: A) -> C (inl a))
          (y: (b: B) -> C (inr b))
        : (x: either A B) -> C x
        = split { inl i -> x i ; inr j -> y j }
```

tuple is a representation for non-dependent product types or conjunction.

```
data tuple (A B: U) = pair (x: A) (y: B)
prod (A B: U) (x: A) (y: B): (_: A) * B = (x,y)
tupleRec  (A B C: U) (c: (x:A) (y:B) -> C): (x: tuple A B) -> C
        = split pair a b -> c a b
tupleInd  (A B: U) (C: tuple A B -> U)
          (c: (x:A)(y:B) -> C (pair x y))
```

```
        : (x: tuple A B) -> C x
        = split pair a b -> c a b
```

6.2.3 Nat, List, Stream

Pointed Unary System is a category nat with the terminal object and a carrier nat having morphism [zero: 1nat → nat, succ: nat → nat]. The initial object of nat is called Natural Number Object and models Peano axiom set.

```
data nat = zero | succ (n: nat)
natEq: nat -> nat -> bool
natCase (C:U) (a b: C): nat -> C
natRec  (C:U) (z: C) (s: nat->C->C) : (n:nat) -> C

natElim (C:nat->U) (z: C zero)
        (s: (n:nat)->C(succ n)): (n:nat) -> C(n)
natInd  (C:nat->U) (z: C zero)
        (s: (n:nat)->C(n)->C(succ n)): (n:nat) -> C(n)
```

Визначення 86. (List). The data type of list L over a given set A can be represented as the initial algebra $(\mu \mathrm{L}_A, \mathrm{in})$ of the functor $\mathrm{L}_A(X) = 1 + (AX)$. Denote $\mu \mathrm{L}_A = \mathrm{List}(A)$. The constructor functions $\mathrm{nil} : 1 \to \mathrm{List}(A)$ and $\mathrm{cons} : A \times \mathrm{List}(A) \to \mathrm{List}(A)$ are defined by $\mathrm{nil} = \mathrm{in} \circ \mathrm{inl}$ and $\mathrm{cons} = \mathrm{in} \circ \mathrm{inr}$, so $\mathrm{in} = [\mathrm{nil}, \mathrm{cons}]$.

```
data list (A: U) = nil | cons (x:A) (xs: list A)
listCase (A C:U) (a b: C): list A -> C
listRec (A C:U) (z: C) (s: A->list A->C->C): (n:list A) -> C
listElim (A: U) (C:list A->U) (z: C nil)
   (s: (x:A)(xs:list A)->C(cons x xs)): (n:list A) -> C(n)
listInd (A: U) (C:list A->U) (z: C nil)
   (s: (x:A)(xs:list A)->C(xs)->C(cons x xs)): (n:list A) -> C(n)

null (A:U): list A -> bool
head (A:U): list A -> maybe A
tail (A:U): list A -> maybe (list A)
nth (A:U): nat -> list A -> maybeA
append (A: U): list A -> list A -> list A
reverse (A: U): list A -> list A
map (A B: U): (A -> B) -> list A -> list B
zip (AB: U): list A -> list B -> list (tuple A B)
foldr (AB: U): (A -> B -> B) -> B -> list A -> B
foldl (AB: U): (B -> A -> B) -> B -> list A -> B
switch (A: U): (Unit -> list A) -> bool -> list A
filter (A: U): (A -> bool) -> list A -> list A
length (A: U): list A -> nat
listEq (A: eq): list A.1 -> list A.1 -> bool
```

stream is a record form of the list's cons constructor. It models the infinity list that has no terminal element.

```
data stream (A: U) = cons (x: A) (xs: stream A)
```

6.2.4 Fin, Vector, Seq

fin is the inductive defintion of set with finite elements.

```
data fin (n: nat)
   = fzero | fsucc (_: fin (pred n))

fz (n: nat): fin (succ n)          = fzero
fs (n: nat): fin n -> fin (succ n) = \(x: fin n) -> fsucc x
```

vector is the inductive defintion of limited length list.

```
data vector (A: U) (n: nat)
   = nil | cons (_: A) (_: vector A (pred n))
```

seq — abstract compositional sequences.

```
data seq (A: U) (B: A -> A -> U) (X Y: A)
   = seqNil (_: A)
   | seqCons (X Y Z: A) (_: B X Y) (_: Seq A B Y Z)
```

6.2.5 Імпредикативне кодування

You know Church encoding which also has its dependent alanolgue in CoC, however in Coq it is imposible to detive Inductive Principle as type system lacks fixpoint and functional extensionality. The example of working compiler of PTS languages are Om and Morte. Assume we have Church encoded NAT:

```
nat = (X:U) -> (X -> X) -> X -> X
```

where first parameter $(X -> X)$ is a succ, the second parameter X is zero, and the result of encoding is landed in X. Even if we encode the parameter

```
list (A: U) = (X:U) -> X -> (A -> X) -> X
```

and paremeter A let's say live in 42 universe and X live in 2 universe, then by the signature of encoding the term will be landed in X, thus 2 universe. In other words such dependency is called impredicative displaying that landed term is not a predicate over parameters. This means that Church encoding is incompatible with predicative type checkers with predicative of predicative-cumulative hierarchies.

In HoTT n-types is encoded as n-groupoids, thus we need to add a predicate in which n-type we would like to land the encoding:

```
NAT (A: U) = (X:U) -> isSet X -> X -> (A -> X) -> X
```

Here we added isSet predicate. With this motto we can implement propositional truncation by landing term in isProp or even HIT by langing in isGroupoid:

```
TRUN (A:U) type = (X: U) -> isProp X -> (A -> X) -> X
S1 = (X:U) -> isGroupoid X -> ((x:X) -> Path X x x) -> X
MONOPLE (A:U) = (X:U) -> isSet X -> (A -> X) -> X
NAT = (X:U) -> isSet X -> X -> (A -> X) -> X
```

The main publication on this topic could be found at [?] and [?]. Here we have the implementation of Unit impredicative encoding in HoTT.

```
upPath     (X Y:U)(f:X->Y)(a:X->X): X -> Y = o X X Y f a
downPath   (X Y:U)(f:X->Y)(b:Y->Y): X -> Y = o X Y Y b f
naturality (X Y:U)(f:X->Y)(a:X->X)(b:Y->Y): U
  = Path (X->Y)(upPath X Y f a)(downPath X Y f b)

unitEnc': U = (X: U) -> isSet X -> X -> X
isUnitEnc (one: unitEnc'): U
  = (X Y:U)(x:isSet X)(y:isSet Y)(f:X->Y) ->
    naturality X Y f (one X x)(one Y y)

unitEnc: U = (x: unitEnc') * isUnitEnc x
unitEncStar: unitEnc = (\(X:U)(_:isSet X) ->
  idfun X,\(X Y: U)(_:isSet X)(_:isSet Y)->refl(X->Y))
unitEncRec  (C: U) (s: isSet C) (c: C): unitEnc -> C
  = \(z: unitEnc) -> z.1 C s c
unitEncBeta (C: U) (s: isSet C) (c: C)
  : Path C (unitEncRec C s c unitEncStar) c = refl C c
unitEncEta (z: unitEnc): Path unitEnc unitEncStar z = undefined
unitEncInd (P: unitEnc -> U) (a: unitEnc): P unitEncStar -> P a
  = subst unitEnc P unitEncStar a (unitEncEta a)
unitEncCondition (n: unitEnc'): isProp (isUnitEnc n)
  =  \(f g: isUnitEnc n) ->
     <h> \(x y: U) -> \(X: isSet x) -> \(Y: isSet y)
  -> \(F: x -> y) -> <i> \(R: x) -> Y (F (n x X R)) (n y Y (F R))
       (<j> f x y X Y F @ j R) (<j> g x y X Y F @ j R) @ h @ i
```

6.3 Гомотопічна теорія типів

Homotypy Type Theory takes its origins in 1996 from groupoid interpretation by Hofmann and Streicher's, and later (in 10 years) was formalized by Awodey, Warren and Voevodsky. Voevodsky constrtucted Kan simplicial sets interpretation of type theory and discovered the property of this model, that was named univalence. This property allows to identify isomorphic structures in terms of type theory.

Homotopy type theory to classical homotopy theory is like Euclidian syntethic geometry (points, lines, axioms and deduction rules) to analytical geometry with cartesian coordinates on $\mathbb{R}^n$ (geometric and algebraic) [11]

In the same way as inductive types extends MLTT for inductive programming, the higher inductive types (HIT) extend homotopy type theory for geometry programming. You can directly encode CW-complexes by using HIT. The definition of HIT syntax will be given in the next Issue IV: Higher Inductive Types.

[11] We will denote geometric, type theoretical and homotopy constants bold font R while analitical will be denoted with double lined letters $\mathbb{R}$.

6.3.1 Гомотопії

The first higher equality we meet in homotopy theory is a notion of homotopy, where we compare two functions or two path spaces (which is sort of dependent families). The homotopy interval $\mathrm{I} = [0, 1]$ is the perfect foundation for definition of homotopy.

Визначення 87. (Interval). Compact interval.

```
data I = i0
       | i1
       | seg <i> [(i=0) -> i0,
                  (i=1) -> i1]
```

You can think of I as isomorphism of equality type, disregarding carriers on the edges. By mapping $\mathfrak{i}0, \mathfrak{i}1 : \mathrm{I}$ to $x, y : A$ one can obtain identity or equality type from classic type theory.

Визначення 88. (Interval Split). The convertion function from I to a type of comparison is a direct eliminator of interval. The interval is also known as one of primitive higher inductive types which will be given in the next Issue IV: Higher Inductive Types.

```
pathToHtpy (A: U) (x y: A) (p: Path A x y): I -> A
  = split { i0 -> x; i1 -> y; seg @ i -> p @ i }
```

Визначення 89. (Homotopy). The homotopy between two function $f, g : X \to Y$ is a continuous map of cylinder $H : X \times I \to Y$ such that

$$\begin{cases} H(x, 0) = f(x), \\ H(x, 1) = g(x). \end{cases}$$

```
homotopy (X Y: U) (f g: X -> Y)
         (p: (x: X) -> Path Y (f x) (g x))
         (x: X): I -> Y = pathToHtpy Y (f x) (g x) (p x)
```

6.3.2 Групоїдна інтерпретація

The first text about groupoid interpretation of type theory can be found in Francois Lamarche: A proposal about Foundations[12]. Then Martin Hofmann and Thomas Streicher wrote the initial document on groupoid interpretation of type theory[13].

There is a deep connection between higher-dimentinal groupoids in category theory and spaces in homotopy theory, equipped with some topology. The category or groupoid could be built where the objects are particular spaces or types, and morphisms are

[12] http://www.cse.chalmers.se/~coquand/Proposal.pdf

[13] Martin Hofmann and Thomas Streicher. The Groupoid Interpretation of Type Theory. 1996.

Equality	Homotopy	∞-Groupoid
reflexivity	constant path	identity morphism
symmetry	inversion of path	inverse morphism
transitivity	concatenation of paths	composition of mopphisms

path types between these types, composition operation is a path concatenation. We can write this groupoid here recalling that it should be category with inverted morphisms.

```
cat: U = (A: U) * (A -> A -> U)
groupoid: U = (X: cat) * isCatGroupoid X
PathCat (X: U): cat = (X,\(x y:X)->Path X x y)


isCatGroupoid (C: cat): U
  = (id: (x: C.1) -> C.2 x x)
  * (c: (x y z:C.1) -> C.2 x y -> C.2 y z -> C.2 x z)
  * (inv: (x y: C.1) -> C.2 x y -> C.2 y x)
  * (inv_left:  (x y: C.1) (p: C.2 x y) ->
    Path (C.2 x x) (c x y x p (inv x y p)) (id x))
  * (inv_right: (x y: C.1) (p: C.2 x y) ->
    Path (C.2 y y) (c y x y (inv x y p) p) (id y))
  * (left: (x y: C.1) (f: C.2 x y) ->
    Path (C.2 x y) (c x x y (id x) f) f)
  * (right: (x y: C.1) (f: C.2 x y) ->
    Path (C.2 x y) (c x y y f (id y)) f)
  * ((x y z w:C.1)(f:C.2 x y)(g:C.2 y z)(h:C.2 z w)->
    Path (C.2 x w) (c x z w (c x y z f g) h)
                   (c x y w f (c y z w g h)))


PathGrpd (X: U)
  : groupoid
  = ((Ob,Hom),id,c,sym X,compPathInv X,compInvPath X,L,R,Q) where
    Ob: U = X
    Hom (A B: Ob): U = Path X A B
    id (A: Ob): Path X A A = refl X A
    c (A B C: Ob) (f: Hom A B) (g: Hom B C): Hom A C
      = comp (<i> Path X A (g@i)) f []
```

From here should be clear what it meant to be groupoid interpretation of path type in type theory. In the same way we can construct categories of $\prod$ and $\sum$ types. In Issue VIII: Topos Theory such categories will be given.

6.3.3 Функціональна екстенсіональність

Визначення 90. (funExt-Formation)

```
funext_form (A B: U) (f g: A -> B): U
  = Path (A -> B) f g
```

Визначення 91. (funExt-Introduction)

```
funext (A B: U) (f g: A -> B) (p: (x:A) -> Path B (f x) (g x))
  : funext_form A B f g
  = <i> \(a: A) -> p a @ i
```

Визначення 92. (funExt-Elimination)

```
happly (A B: U) (f g: A -> B) (p: funext_form A B f g) (x: A)
  : Path B (f x) (g x)
  = cong (A -> B) B (\(h: A -> B) -> apply A B h x) f g p
```

Визначення 93. (funExt-Computation)

```
funext_Beta (A B: U) (f g: A -> B) (p: (x:A) -> Path B (f x) (g x))
  : (x:A) -> Path B (f x) (g x)
  = \(x:A) -> happly A B f g (funext A B f g p) x
```

Визначення 94. (funExt-Uniqueness)

```
funext_Eta (A B: U) (f g: A -> B) (p: Path (A -> B) f g)
  : Path (Path (A -> B) f g) (funext A B f g (happly A B f g p)) p
  = refl (Path (A -> B) f g) p
```

6.3.4 Пулбеки

Визначення 95. (Пулбек).

```
pullback (A B C:U) (f: A -> C) (g: B -> C): U
  = (a: A)
  * (b: B)
  * Path C (f a) (g b)

pb1 (A B C: U) (f: A -> C) (g: B -> C)
  : pullback A B C f g -> A
  = \(x: pullback A B C f g) -> x.1

pb2 (A B C: U) (f: A -> C) (g: B -> C)
  : pullback A B C f g -> B
  = \(x: pullback A B C f g) -> x.2.1

pb3 (A B C: U) (f: A -> C) (g: B -> C)
  : (x: pullback A B C f g) -> Path C (f x.1) (g x.2.1)
  = \(x: pullback A B C f g) -> x.2.2
```

Визначення 96. (Ядро).

```
kernel  (A B: U) (f: A -> B): U
  = pullback A A B f f
```

Визначення 97. (Гомотопічне розшарування).

```
hofiber (A B: U) (f: A -> B) (y: B): U
  = pullback A unit B f (\(x: unit) -> y)
```

Визначення 98. (Пулбек Квадрат).

```
pullbackSq (Z A B C: U) (f: A -> C) (g: B -> C) (z1: Z -> A) (z2: Z -> B): U
         = (h: (z:Z) -> Path C ((o Z A C f z1) z) (((o Z B C g z2)) z))
         * isEquiv Z (pullback A B C f g) (induced Z A B C f g z1 z2 h)
```

Теорема 24. (Існування пулбеку).

```
completePullback (A B C: U) (f: A -> C) (g: B -> C)
    : pullbackSq (pullback A B C f g) A B C f g (pb1 A B C f g) (pb2 A B C f g
     )
```

6.3.5 Пушаути та фібрації

Визначення 99. (Pushout). One of the notable examples is pushout as it's used to define the cell attachment formally, as others cofibrant objects.

```
data pushout (A B C: U) (f: C -> A) (g: C -> B)
   = po1 (_: A)
   | po2 (_: B)
   | po3 (c: C) <i> [ (i = 0) -> po1 (f c) ,
                      (i = 1) -> po2 (g c) ]
```

Визначення 100. (Fibration-1) Dependent fiber bundle derived from Path contractability.

```
isFBundle1 (B: U) (p: B -> U) (F: U): U
  = (_: (b: B) -> isContr (Path U (p b) F))
  * ((x: Sigma B p) -> B)
```

Визначення 101. (Fibration-2). Dependent fiber bundle derived from surjective function.

```
isFBundle2 (B: U) (p: B -> U) (F: U): U
  = (V: U)
  * (v: surjective V B)
  * ((x: V) -> Path U (p (v.1 x)) F)
```

Визначення 102. (Fibration-3). Non-dependent fiber bundle derived from fiber truncation.

```
im1 (A B: U) (f: A -> B): U = (b: B) * pTrunc ((a:A) * Path B (f a) b)
BAut (F: U): U = im1 unit U (\(x: unit) -> F)
unitIm1 (A B: U) (f: A -> B): im1 A B f -> B = \(x: im1 A B f) -> x.1
unitBAut (F: U): BAut F -> U = unitIm1 unit U (\(x: unit) -> F)

isFBundle3 (E B: U) (p: E -> B) (F: U): U
  = (X: B -> BAut F)
  * (classify B (BAut F) (\(b: B) -> fiber E B p b) (unitBAut F) X) where
  classify (A' A: U) (E': A' -> U) (E: A -> U) (f: A' -> A): U
    = (x: A') -> Path U (E'(x)) (E(f(x)))
```

Визначення 103. (Fibration-4). Non-dependen fiber bundle derived as pullback square.

```
isFBundle4 (E B: U) (p: E -> B) (F: U): U
  = (V: U)
  * (v: surjective V B)
  * (v': prod V F -> E)
  * pullbackSq (prod V F) E V B p v.1 v' (\(x: prod V F) -> x.1)
```

6.3.6 Еквівалентність, Ізоморфізм, Унівалентність

Визначення 104. (Equivalence).

```
fiber (A B: U) (f: A -> B) (y: B): U = (x: A) * Path B y (f x)
isSingleton (X:U): U = (c:X) * ((x:X) -> Path X c x)
isEquiv (A B: U) (f: A -> B): U = (y: B) -> isContr (fiber A B f y)
equiv (A B: U): U = (f: A -> B) * isEquiv A B f
```

Визначення 105. (Surjective).

```
isSurjective (A B: U) (f: A -> B): U
  = (b: B) * pTrunc (fiber A B f b)

surjective (A B: U): U
  = (f: A -> B)
  * isSurjective A B f
```

Визначення 106. (Injective).

```
isInjective' (A B: U) (f: A -> B): U
  = (b: B) -> isProp (fiber A B f b)

injective (A B: U): U
  = (f: A -> B)
  * isInjective A B f
```

Визначення 107. (Embedding).

```
isEmbedding (A B: U) (f: A -> B) : U
  = (x y: A) -> isEquiv (Path A x y) (Path B (f x) (f y)) (cong A B f x y)

embedding (A B: U): U
  = (f: A -> B)
  * isEmbedding A B f
```

Визначення 108. (Half-adjoint Equivalence).

```
isHae (A B: U) (f: A -> B): U
  = (g: B -> A)
  * (eta_: Path (id A) (o A B A g f) (idfun A))
  * (eps_: Path (id B) (o B A B f g) (idfun B))
  * ((x: A) -> Path B (f ((eta_ @ 0) x)) ((eps_ @ 0) (f x)))

hae (A B: U): U
  = (f: A -> B)
  * isHae A B f
```

Ізоморфізм.

Визначення 109. (iso-Formation)

```
iso_Form (A B: U): U = isIso A B -> Path U A B
```

Визначення 110. (iso-Introduction)

```
iso_Intro (A B: U): iso_Form A B
```

Визначення 111. (iso-Elimination)

```
iso_Elim (A B: U): Path U A B -> isIso A B
```

Визначення 112. (iso-Computation)

```
iso_Comp (A B : U) (p : Path U A B)
  : Path (Path U A B) (iso_Intro A B (iso_Elim A B p)) p
```

Визначення 113. (iso-Uniqueness)

```
iso_Uniq (A B : U) (p: isIso A B)
  : Path (isIso A B) (iso_Elim A B (iso_Intro A B p)) p
```

Унівалентність.

Визначення 114. (uni-Formation)

```
univ_Formation (A B: U): U = equiv A B -> Path U A B
```

Визначення 115. (uni-Introduction)

```
equivToPath (A B: U): univ_Formation A B
  = \(p: equiv A B) -> <i> Glue B [(i=0) -> (A,p),
    (i=1) -> (B, subst U (equiv B) B B (<_>B) (idEquiv B)) ]
```

Визначення 116. (uni-Elimination)

```
pathToEquiv (A B: U) (p: Path U A B) : equiv A B
  = subst U (equiv A) A B p (idEquiv A)
```

Визначення 117. (uni-Computation)

```
eqToEq (A B : U) (p : Path U A B)
  : Path (Path U A B) (equivToPath A B (pathToEquiv A B p)) p
  = <j i> let Ai: U = p@i in Glue B
    [ (i=0) -> (A,pathToEquiv A B p),
      (i=1) -> (B,pathToEquiv B B (<k> B)),
      (j=1) -> (p@i,pathToEquiv Ai B (<k> p @ (i \/ k))) ]
```

Визначення 118. (uni-Uniqueness)

```
transPathFun (A B : U) (w: equiv A B)
  : Path (A -> B) w.1 (pathToEquiv A B (equivToPath A B w)).1
```

6.4 Вищі індуктивні типи

CW-complexes are fundamental objects in homotopy type theory and even included inside cubical type checker in a form of higher (co)-inductive types (HITs). Just like regular (co)-inductive types could be described as recur- sive terminating (well-founded) or non-terminating trees, higher inductive types could be described as CW-complexes. Defining HIT means to define some CW- complex directly using cubical homogeneous composition structure as an element of initial algebra inside cubical model.

6.4.1 Інтервал

Визначення 119. (Interval). Compact interval.

```
data I = i0
       | i1
       | seg <i> [(i=0) -> i0,
                  (i=1) -> i1]
```

You can think of $\mathbf{I}$ as isomorphism of equality type, disregarding carriers on the edges. By mapping $\mathfrak{i}0, \mathfrak{i}1 : \mathbf{I}$ to $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} : A$ one can obtain identity or equality type from classic type theory.

6.4.2 n-Сфера

Визначення 120. (Shperes and Disks). Here are some example of using dimensions to construct spherical shapes.

```
data S1
   = base
   | loop <i> [ (i = 0) -> base,
                (i = 1) -> base ]


data S2
   = point
   | surf <i j> [ (i = 0) -> point, (i = 1) -> point,
                  (j = 0) -> point, (j = 1) -> point ]
                  (j = 0) -> point, (j = 1) -> point ]
```

6.4.3 Суспензія та цикли

Визначення 121. (Suspension).

```
data susp (A: U)
  = north
  | south
  | merid (a: A) <i> [ (i = 0) -> north ,
                       (i = 1) -> south ]
```

6.4.4 Транкейшин та факторизація

Визначення 122. (Truncation).

```
data pTrunc (A: U) -- (-1)-trunc, mere proposition truncation
  = pinc (a: A)
  | pline (x y: pTrunc A) <i>
        [ (i = 0) -> x,
          (i = 1) -> y ]


data sTrunc (A: U) -- (0)-trunc, set truncation
  = sinc (a: A)
  | sline (a b: sTrunc A)
          (p q: Path (sTrunc A) a b) &lt;i j&gt;
        [ (i = 0) -> p @ j,
          (i = 1) -> q @ j,
          (j = 0) -> a,
          (j = 1) -> b ]


data gTrunc (A: U) -- (1)-trunc, groupoid truncation
  = ginc   (a: A)
  | gline  (a b: gTrunc A)
           (p q: Path (gTrunc A) a b)
           (r s: Path (Path (gTrunc A) a b) p q) &lt;i j k&gt;
         [ (i = 0) -> r @ j @ k,
           (i = 1) -> s @ j @ k,
           (j = 0) -> p @ k,
           (j = 1) -> q @ k,
           (k = 0) -> a,
           (k = 1) -> b ]
```

Факторизація.

Визначення 123. (Quotient).

```
data quot (A: U) (R: A -> A -> U)
  = inj (a: A)
  | quoteq (a b: A) (r: R a b) &lt;i&gt;
         [ (i = 0) -> inj a,
           (i = 1) -> inj b ]


data setquot (A: U) (R: A -> A -> U)
  = quotient (a: A)
  | identification (a b: A) (r: R a b) &lt;i&gt;
                 [ (i = 0) -> quotient a,
                   (i = 1) -> quotient b ]
  | setTruncation  (a b: setquot A R)
                   (p q: Path (setquot A R) a b) &lt;i j&gt;
                 [ (i = 0) -> p @ j,
                   (i = 1) -> q @ j,
                   (j = 0) -> a,
                   (j = 1) -> b ]
```

6.5 Модальності

6.5.1 Процеси

Process Calculus defines formal business process engine that could be mapped onto Synrc/BPE Erlang/OTP application or OCaml Lwt library with Coq.io front-end. Here we will describe an Erlang approach for modeling processes. We will describe process calculus as a formal model of two types: 1) the general abstract MLTT interface of process modality that can be used as a formal binding to low-level programming or as a top-level interface; 2) the low-level formal model of Erlang/OTP generic server.

Визначення 124. (Storage). The secure storage based on verified cryptography. NOTE: For simplicity let it be a compatible list.

```
storage: U -> U = list
```

Визначення 125. (Process). The type formation rule of the process is a Σ telescope that contains: i) protocol type; ii) state type; iii) in-memory current state of process in the form of cartesian product of protocol and state which is called signature of the process; iv) monoidal action on signature; v) persistent storage for process trace.

```
process : U
  = (protocol state: U)
  * (current: prod protocol state)
  * (act: id (prod protocol state))
  * (storage (prod protocol state))
```

Визначення 126. (Spawn). The sole introduction rule, process constructor is a tuple with filled process type information. Spawn is a modal arrow representing the fact that process instance is created at some scheduler of CPU core.

```
spawn (protocol state: U) (init: prod protocol state)
      (action: id (prod protocol state)) : process
    = (protocol,state,init,action,nil)
```

Визначення 127. (Accessors). Process type defines following accessors (projections, this eliminators) to its structure: i) protocol type; ii) state type; iii) signature of the process; iv) current state of the process; v) action projection; vi) trace projection.

```
protocol  (p: process): U = p.1
state     (p: process): U = p.2.1
signature (p: process): U = prod p.1 p.2.1
current   (p: process):          signature p  = p.2.2.1
action    (p: process):      id (signature p) = p.2.2.2.1
trace     (p: process): storage (signature p) = p.2.2.2.2
```

NOTE: there are two kinds of approaches to process design: 1) Semigroup: $P \times S \to S$; and 2) Monoidal: $P \times S \to P \times S$, where P is protocol and S is state of the process.

Визначення 128. (Receive). The modal arrow that represents sleep of the process until protocol message arrived.

```
receive (p: process) : protocol p = axiom
```

Визначення 129. (Send). The response free function that represents sending a message to a particular process in the run-time. The Send nature is async and invisible but is a part of process modality as it's effectfull.

```
send (p: process) (message: protocol p) : unit = axiom
```

Визначення 130. (Execute). The Execute function is an eliminator of process stream performing addition of a single entry to the secured storage of the process. Execute is a transactional or synchronized version of asynchronous Send.

```
execute (p: process) (message: protocol p) : process
  = let step: signature p = (action p) (message, (current p).2)
    in (protocol p, state p, step, action p, cons step (trace p))
```

1) Run-time formal model of Erlang/OTP compatible generic server with extraction to Erlang. This is an example of low-level process modality usage. The run-time formal model can be seen here[14].

2) Formal model of Business Process Engine application that runs on top of Erlang/OTP extracted model. The Synrc/BPE model can be seen here[15].

3) Formal model of Synrc/N2O application and n2o_async[16] in particular.

6.6 Висновки

[14] https://n2o.space/articles/streams.htm
[15] https://n2o.space/articles/bpe.htm
[16] https://mqtt.n2o.space/man/n2o_async.htm

Розділ 7

Математичні компоненти

Присвячується вчителям
французької школи

Александру Гротендіку
та групі Бурбакі

Четвертий розділ надає приклади математичного моделювання та складних теорем теорії категорій, теорій топосів, теорії гомотопій, тощо.

Вступне слово

7.1 Теорія категорій

7.1.1 Категорія

Визначення 131. (Category Signature). The signature of category is a $\Sigma_{A:U} A \to A \to U$ where U could be any universe. The $\mathbf{pr}_1$ projection is called Ob and $\mathbf{pr}_2$ projection is called $\mathrm{Hom}(a, b)$, where $a, b : \mathrm{Ob}$.

```
cat: U = (A: U) * (A -> A -> U)
```

Precategory C defined as set of $\mathrm{Hom}_C(a, b)$ where $a, b : \mathrm{Ob}_C$ are objects defined by its id arrows $\mathrm{Hom}_C(x, x)$. Properfies of left and right units included with composition c and its associativity.

Визначення 132. (Precategory). More formal, precategory C consists of the following. (i) A type Ob_C, whose elements are called objects; (ii) for each $a, b : \mathrm{Ob}_C$, a set $\mathrm{Hom}_C(a, b)$, whose elements are called arrows or morphisms. (iii) For each $a : \mathrm{Ob}_C$, a morphism $1_a : \mathrm{Hom}_C(a, a)$, called the identity morphism. (iv) For each $a, b, c : \mathrm{Ob}_C$, a function $\mathrm{Hom}_C(b, c) \to \mathrm{Hom}_C(a, b) \to \mathrm{Hom}_C(a, c)$ called composition, and denoted $g \circ f$. (v) For each $a, b : \mathrm{Ob}_C$ and $f : \mathrm{Hom}_C(a, b)$, $f = 1_b \circ f$ and $f = f \circ 1_a$. (vi) For each $a, b, c, d : A$ and $f : \mathrm{Hom}_C(a, b)$, $g : \mathrm{Hom}_C(b, c)$, $h : \mathrm{Hom}_C(c, d)$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Визначення 133. (Small Category). If for all $a, b : Ob$ the $Hom_C(a, b)$ forms a Set, then such category is called small category.

```
isPrecategory (C: cat): U
  = (id: (x: C.1) -> C.2 x x)
  * (c: (x y z: C.1) -> C.2 x y -> C.2 y z -> C.2 x z)
  * (homSet: (x y: C.1) -> isSet (C.2 x y))
  * (left: (x y: C.1) -> (f: C.2 x y)
  -> Path (C.2 x y) (c x x y (id x) f) f)
  * (right: (x y: C.1) -> (f: C.2 x y)
  -> Path (C.2 x y) (c x y y f (id y)) f)
  * ( (x y z w: C.1) (f: C.2 x y) (g: C.2 y z)
    (h: C.2 z w) -> Path (C.2 x w)
    (c x z w (c x y z f g) h) (c x y w f (c y z w g h)))
```

precategory: U = (C: cat) * isPrecategory C

Accessors of the precategory structure. For Ob is carrier and for Hom is hom.

```
carrier (C: precategory): U = C.1.1
hom     (C: precategory) (a b: carrier C): U = C.1.2 a b
path    (C: precategory) (x: carrier C): hom C x x = C.2.1 x
compose (C: precategory) (x y z: carrier C)
        (f: hom C x y) (g: hom C y z): hom C x z = C.2.2.1 x y z f g
```

7.1.2 (Ко)термінал

Визначення 134. (Initial Object). Is such object Ob_C, that $\Pi_{x,y:Ob_C} isContr(Hom_C(x, y))$.

Визначення 135. (Terminal Object). Is such object Ob_C, that $\Pi_{x,y:Ob_C} isContr(Hom_C(y, x))$.

```
isInitial (C: precategory) (x: carrier C): U
  = (y: carrier C) -> isContr (hom C x y)
isTerminal (C: precategory) (y: carrier C): U
  = (x: carrier C) -> isContr (hom C x y)
initial (C: precategory): U
  = (x: carrier C) * isInitial  C x
terminal(C: precategory): U
  = (y: carrier C) * isTerminal C y
```

7.1.3 Функтор

Визначення 136. (Category Functor). Let A and B be precategories. A functor $F : A \to B$ consists of: (i) A function $F_{Ob} : Ob_h A \to Ob_B$; (ii) for each $a, b : Ob_A$, a function $F_{Hom} : Hom_A(a, b) \to Hom_B(F_{Ob}(a), F_{Ob}(b))$; (iii) for each $a : Ob_A$, $F_{Ob}(1_a) = 1_{F_{Ob}}(a)$; (iv) for $a, b, c : Ob_A$ and $f : Hom_A(a, b)$ and $g : Hom_A(b, c)$, $F(g \circ f) = F_{Hom}(g) \circ F_{Hom}(f)$.

```
catfunctor (A B: precategory): U
  = (ob: carrier A -> carrier B)
  * (mor: (x y: carrier A) -> hom A x y -> hom B (ob x) (ob y))
  * (id: (x: carrier A) -> Path (hom B (ob x) (ob x))
    (mor x x (path A x)) (path B (ob x)))
  * ((x y z: carrier A) -> (f: hom A x y) -> (g: hom A y z) ->
     Path (hom B (ob x) (ob z)) (mor x z (compose A x y z f g))
      (compose B (ob x) (ob y) (ob z) (mor x y f) (mor y z g)))
```

7.1.4 Натуральні перетворення

Визначення 137. (Natural Transformation). For functors $F, G : C \to D$, a nagtural transformation $\gamma : F \to G$ consists of: (i) for each $x : C$, a morphism $\gamma_a : \mathrm{Hom}_D(F(x), G(x))$; (ii) for each $x, y : C$ and $f : \mathrm{Hom}_C(x, y)$, $G(f) \circ \gamma_x = \gamma_y \circ F(g)$.

```
isNaturalTrans (C D: precategory)
               (F G: catfunctor C D)
               (eta: (x: carrier C) -> hom D (F.1 x) (G.1 x)): U
  = (x y: carrier C) (h: hom C x y) ->
     Path (hom D (F.1 x) (G.1 y))
     (compose D (F.1 x) (F.1 y) (G.1 y) (F.2.1 x y h) (eta y))
     (compose D (F.1 x) (G.1 x) (G.1 y) (eta x) (G.2.1 x y h))

ntrans (C D: precategory) (F G: catfunctor C D): U
  = (eta: (x: carrier C) -> hom D (F.1 x) (G.1 x))
  * (isNaturalTrans C D F G eta)
```

7.1.5 Розширення Кана

Визначення 138. (Kan Extension).

```
extension (C C' D: precategory)
    (K: catfunctor C C') (G: catfunctor C D) : U
  = (F: catfunctor C' D)
  * (ntrans C D (compFunctor C C' D K F) G)
```

7.1.6 Ізоморфізм категорій

Визначення 139. (Category Isomorphism). A morphism $f : \mathrm{Hom}_A(a, b)$ is an iso if there is a morphism $g : \mathrm{Hom}_A(b, a)$ such that $1_a =_\eta g \circ f$ and $f \circ g =_\epsilon 1_b = g$. "f is iso"is a mere proposition. If A is a precategory and $a, b : A$, then $a = b \to \mathrm{iso}_A(a, b)$ (idtoiso).

```
iso (C: precategory) (A B: carrier C): U
  = (f: hom C A B)
  * (g: hom C B A)
  * (eta: Path (hom C A A) (compose C A B A f g) (path C A))
  * (Path (hom C B B) (compose C B A B g f) (path C B))
```

7.1.7 Резк-поповнення

Визначення 140. (Category). A category is a precategory such that for all $a : \mathrm{Ob}_C$, the $\Pi_{A:\mathrm{Ob}_C} \mathrm{isContr} \Sigma_{B:\mathrm{Ob}_C} \mathrm{iso}_C(A, B)$.

```
isCategory (C: precategory): U
  = (A: carrier C) -> isContr ((B: carrier C) * iso C A B)
    category: U = (C: precategory) * isCategory C
```

7.1.8 Конструкції

7.1.8.1 (Ко)продукти категорій

Визначення 141. (Category Product).

```
Product    (X Y: precategory) : precategory
Coproduct  (X Y: precategory) : precategory
```

7.1.8.2 Обернена категорія

Визначення 142. (Opposite Category). The opposite category to category C is a category C^{op} with same structure, except all arrows are inverted.

```
opCat (P: precategory): precategory
```

7.1.8.3 (Ко)слайс категорія

Визначення 143. (Slice Category).

Визначення 144. (Coslice Category).

```
sliceCat (C D: precategory)
    (a: carrier (opCat C))
    (F: catfunctor D (opCat C))
  : precategory
  = cosliceCat (opCat C) D a F

cosliceCat (C D: precategory)
  (a: carrier C)
  (F: catfunctor D C) : precategory
```

7.1.8.4 Універсальна властивість

Визначення 145. (Universal Mapping Property).

```
initArr (C D: precategory)
  (a: carrier C)
  (F: catfunctor D C): U = initial (cosliceCat C D a F)

termArr (C D: precategory)
  (a: carrier (opCat C))
  (F: catfunctor D (opCat C)): U = terminal (sliceCat C D a F)
```

7.1.8.5 Одинична категорія

Визначення 146. (Unit Category). In unit category both $\mathbf{Ob} = \top$ and $\mathbf{Hom} = \top$.

```
unitCat: precategory
```

7.1.9 Приклади

7.1.9.1 Категорія множин

Визначення 147. (Category of Sets).

```
Set: precategory = ((Ob,Hom),id,c,HomSet,L,R,Q) where
  Ob: U = SET
  Hom (A B: Ob): U = A.1 -> B.1
  id (A: Ob): Hom A A = idfun A.1
  c (A B C: Ob) (f: Hom A B) (g: Hom B C): Hom A C
   = o A.1 B.1 C.1 g f
  HomSet (A B: Ob): isSet (Hom A B) = setFun A.1 B.1 B.2
  L (A B: Ob) (f: Hom A B): Path (Hom A B) (c A A B (id A) f) f
   = refl (Hom A B) f
  R (A B: Ob) (f: Hom A B): Path (Hom A B) (c A B B f (id B)) f
   = refl (Hom A B) f
  Q (A B C D: Ob) (f: Hom A B) (g: Hom B C) (h: Hom C D)
   : Path (Hom A D) (c A C D (c A B C f g) h) (c A B D f (c B C D g h))
   = refl (Hom A D) (c A B D f (c B C D g h))
```

7.1.9.2 Категорія функцій

Визначення 148. (Category of Functions over Sets).

```
Functions (X Y: U) (Z: isSet Y): precategory
   = ((Ob,Hom),id,c,HomSet,L,R,Q) where
  Ob: U = X -> Y
  Hom (A B: Ob): U = id (X -> Y)
  id (A: Ob): Hom A A = idfun (X -> Y)
  c (A B C: Ob) (f: Hom A B) (g: Hom B C): Hom A C = idfun (X -> Y)
  HomSet (A B: Ob): isSet (Hom A B) = setFun Ob Ob (setFun X Y Z)
  L (A B: Ob) (f: Hom A B): Path (Hom A B) (c A A B (id A) f) f = axiom
  R (A B: Ob) (f: Hom A B): Path (Hom A B) (c A B B f (id B)) f = axiom
  Q (A B C D: Ob) (f: Hom A B) (g: Hom B C) (h: Hom C D)
   : Path (Hom A D) (c A C D (c A B C f g) h)
                    (c A B D f (c B C D g h)) = axiom
```

7.1.9.3 Категорія категорій

Визначення 149. (Category of Categories).

```
Cat: precategory = ((Ob,Hom),id,c,HomSet,L,R,Q) where
  Ob: U = precategory
  Hom (A B: Ob): U = catfunctor A B
  id (A: Ob): catfunctor A A = idFunctor A
  c (A B C: Ob) (f: Hom A B) (g: Hom B C): Hom A C
   = compFunctor A B C f g
```

```
  HomSet (A B: Ob): isSet (Hom A B) = axiom
  L (A B: Ob) (f: Hom A B): Path (Hom A B) (c A A B (id A) f) f = axiom
  R (A B: Ob) (f: Hom A B): Path (Hom A B) (c A B B f (id B)) f = axiom
  Q (A B C D: Ob) (f: Hom A B) (g: Hom B C) (h: Hom C D)
   : Path (Hom A D) (c A C D (c A B C f g) h)
                    (c A B D f (c B C D g h)) = axiom
```

7.1.9.4 Категорія функторів

Визначення 150. (Category of Functors).

```
Func (X Y: precategory): precategory
   = ((Ob,Hom),id,c,HomSet,L,R,Q) where
  Ob: U = catfunctor X Y
  Hom (A B: Ob): U = ntrans X Y A B
  id (A: Ob): ntrans X Y A A = axiom
  c (A B C: Ob) (f: Hom A B) (g: Hom B C): Hom A C = axiom
  HomSet (A B: Ob): isSet (Hom A B) = axiom
  L (A B: Ob) (f: Hom A B): Path (Hom A B) (c A A B (id A) f) f = axiom
  R (A B: Ob) (f: Hom A B): Path (Hom A B) (c A B B f (id B)) f = axiom
  Q (A B C D: Ob) (f: Hom A B) (g: Hom B C) (h: Hom C D)
   : Path (Hom A D) (c A C D (c A B C f g) h)
                    (c A B D f (c B C D g h)) = axiom
```

7.1.10 k-морфізми

Визначення 151. (k-Morphism). The k-morphism is defined as morphism between $(k-1)$-morphism. The base of induction, the 0-morphism is defined as object of 1-category, which is precategory.

```
equiv: U
functor (C D: cat): U
ntrans (C D: cat) (F G: functor C D): U
modification (C D: cat) (F G: functor C D) (I J: ntrans C D F G): U
```

І так далі.

7.1.11 2-категорія

Визначення 152. (2-Category).

```
Cat2 : U
  = (Ob: U)
  * (Hom:  (A B: Ob) -> U)
  * (Hom2: (A B: Ob) -> (C F: Hom A B) -> U)
  * (id:     (A: Ob) -> Hom A A)
  * (id2:    (A: Ob) -> (B: Hom A A) -> Hom2 A A B B)
  * (c:  (A B C: Ob) (f: Hom A B) (g: Hom B C) -> Hom A C)
  * (c2:   (A B: Ob) (X Y Z: Hom A B)
    (f: Hom2 A B X Y) (g: Hom2 A B Y Z) -> Hom2 A B X Z)
```

7.1.12 Аддитивна категорія

7.1.13 Група Гротендіка

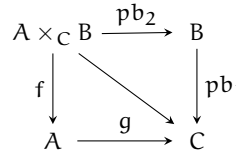
7.1.14 Категорія Гротендіка

7.2 Теорія топосів

One can admit two topos theory lineages. One lineage takes its roots from published by Jean Leray in 1945 initial work on sheaves and spectral sequences. Later this lineage was developed by Henri Paul Cartan, André Weil. The peak of lineage was settled with works by Jean-Pierre Serre, Alexander Grothendieck, and Roger Godement.

Second remarkable lineage take its root from William Lawvere and Myles Tierney. The main contribution is the reformulation of Grothendieck topology by using subobject classifier.

Визначення 153. (Categorical Pullback). The pullback of the cospan $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ is a object $A \times_C B$ with morphisms $pb_1 : \times_C \to A$, $pb_2 : \times_C \to B$, such that diagram commutes:



Pullback $(\times_C, pb_1, pb_2)$ must be universal, means for any (D, q_1, q_2) for which diagram also commutes there must exists a unique $u : D \to \times_C$, such that $pb_1 \circ u = q_1$ and $pb_2 \circ q_2$.

```
homTo  (C: precategory) (X: carrier C): U
  = (Y: carrier C) * hom C Y X
cospan (C: precategory): U
  = (X: carrier C) * (_: homTo C X) * homTo C X
cospanCone (C: precategory) (D: cospan C): U
  = (W: carrier C) * hasCospanCone C D W
cospanConeHom (C: precategory) (D: cospan C)
    (E1 E2: cospanCone C D) : U
  = (h: hom C E1.1 E2.1) * isCospanConeHom C D E1 E2 h
isPullback (C: precategory) (D: cospan C) (E: cospanCone C D) : U
  = (h: cospanCone C D) -> isContr (cospanConeHom C D h E)
hasPullback (C: precategory) (D: cospan C) : U
  = (E: cospanCone C D) * isPullback C D E
```

Визначення 154. (Category Functor). Let A and B be precategories. A functor $F : A \to B$ consists of: (i) A function $F_{Ob} : Ob_h A \to Ob_B$; (ii) for each $a, b : Ob_A$, a function $F_{Hom} : Hom_A(a, b) \to Hom_B(F_{Ob}(a), F_{Ob}(b))$; (iii) for each $a : Ob_A$, $F_{Ob}(1_a) = 1_{F_{Ob}}(a)$; (iv)

for $a, b, c : \mathrm{Ob}_A$ and $f : \mathrm{Hom}_A(a, b)$ and $g : \mathrm{Hom}_A(b, c)$, $F(g \circ f) = F_{\mathrm{Hom}}(g) \circ F_{\mathrm{Hom}}(f)$.

```
catfunctor (A B: precategory): U
  = (ob: carrier A -> carrier B)
  * (mor: (x y:carrier A)->hom A x y->hom B(ob x)(ob y))
  * (id: (x: carrier A) -> Path (hom B (ob x) (ob x))
    (mor x x (path A x)) (path B (ob x)))
  * ((x y z: carrier A) -> (f: hom A x y) -> (g: hom A y z) ->
    Path (hom B (ob x) (ob z)) (mor x z (compose A x y z f g))
         (compose B (ob x) (ob y) (ob z) (mor x y f) (mor y z g)))
```

Визначення 155. (Terminal Object). Is such object Ob_C, that

$$\prod_{x,y:\mathrm{Ob}_C} \mathrm{isContr}(\mathrm{Hom}_C(y, x)).$$

```
isTerminal (C: precategory) (y: carrier C): U
  = (x: carrier C) -> isContr (hom C x y)
terminal (C: precategory): U
  = (y: carrier C) * isTerminal C y
```

7.2.1 Теорія множин

Here is given the ∞-groupoid model of sets.

Визначення 156. (Mere proposition, PROP). A type P is a mere proposition if for all $x, y : P$ we have $x = y$:

$$\mathrm{isProp}(P) = \prod_{x,y:P} (x = y).$$

Визначення 157. (0-type). A type A is a 0-type is for all $x, y : A$ and $p, q : x =_A y$ we have $p = q$.

Визначення 158. (1-type). A type A is a 1-type if for all $x, y : A$ and $p, q : x =_A y$ and $r, s : p =_{=_A} q$, we have $r = s$.

Визначення 159. (A set of elements, SET). A type A is a SET if for all $x, y : A$ and $p, q : x = y$, we have $p = q$:

$$\mathrm{isSet}(A) = \prod_{x,y:A} \prod_{p,q:x=y} (p = q).$$

Визначення 160. `data N = Z  | S (n: N)`

```
n_grpd (A: U) (n: N): U = (a b: A) -> rec A a b n where
  rec (A: U) (a b: A) : (k: N) -> U
    = split { Z -> Path A a b ; S n -> n_grpd (Path A a b) n }

isContr (A: U): U = (x: A) * ((y: A) -> Path A x y)
isProp  (A: U): U = n_grpd A Z
isSet   (A: U): U = n_grpd A (S Z)
PROP   : U = (X:U) * isProp X
SET    : U = (X:U) * isSet X
```

Визначення 161. (Π-Contractability). If fiber is set thene path space between any sections is contractible.

```
setPi (A: U) (B: A -> U) (h: (x: A) -> isSet (B x)) (f g: Pi A B)
      (p q: Path (Pi A B) f g)
    : Path (Path (Pi A B) f g) p q
```

Визначення 162. (Σ-Contractability). If fiber is set then Σ is set.

```
setSig (A:U) (B: A -> U) (base: isSet A)
       (fiber: (x:A) -> isSet (B x)) : isSet (Sigma A B)
```

Визначення 163. (Unit type, $\mathbf{1}$). The unit $\mathbf{1}$ is a type with one element.

```
data unit = tt
unitRec (C: U) (x: C): unit -> C = split tt -> x
unitInd (C: unit -> U) (x: C tt): (z:unit) -> C z
  = split tt -> x
```

Теорема 25. (Category of Sets, $\mathbf{Set}$). Sets forms a Category. All compositional theorems proved by using reflection rule of internal language. The proof that Hom forms a set is taken through Π-contractability.

```
Set: precategory = ((Ob,Hom),id,c,HomSet,L,R,Q) where
  Ob: U = SET
  Hom (A B: Ob): U = A.1 -> B.1
  id (A: Ob): Hom A A = idfun A.1
  c (A B C: Ob) (f: Hom A B) (g: Hom B C): Hom A C
    = o A.1 B.1 C.1 g f
  HomSet (A B: Ob): isSet (Hom A B) = setFun A.1 B.1 B.2
  L (A B:Ob) (f:Hom A B): Path (Hom A B)(c A A B (id A)f)f
    = refl (Hom A B) f
  R (A B:Ob) (f:Hom A B): Path (Hom A B)(c A B B f(id B))f
    = refl (Hom A B) f
  Q (A B C D: Ob) (f:Hom A B) (g:Hom B C) (h:Hom C D)
    : Path (Hom A D) (c A C D (c A B C f g) h)
                     (c A B D f (c B C D g h))
    = refl (Hom A D) (c A B D f (c B C D g h))
```

Topos theory extends category theory with notion of topological structure but reformulated in a categorical way as a category of sheaves on a site or as one that has cartesian closure and subobject classifier. We give here two definitions.

7.2.2 Топологічна структура

Визначення 164. (Topology). The topological structure on $\mathcal{A}$ (or topology) is a subset $S \in \mathcal{A}$ with following properties: i) any finite union of subsets of S is belong to S; ii) any finite intersection of subsets of S is belong to S. Subets of S are called open sets of family S.

```
Structure topology (A : Type) := {
          open :> (A -> Prop) -> Prop;
          empty_open: open (empty _);
          full_open:  open (full _);
          inter_open: forall u,
                      open u -> forall v, open v
                             -> open (inter A u v) ;
          union_open: forall s, (subset _ s open)
                             -> open (union A s) }.
```

For fully functional general topology theorems and Zorn lemma you can refer to the Coq library [1]topology by Daniel Schepler.

7.2.3 Топос Гротендіка

Grothendieck Topology is a calculus of coverings which generalizes the algebra of open covers of a topological space, and can exist on much more general categories. There are three variants of Grothendieck topology definition: i) sieves; ii) coverage; iii) covering families. A category have one of these three is called a Grothendieck site.

Examples: Zariski, flat, étale, Nisnevich topologies.

A sheaf is a presheaf (functor from opposite category to category of sets) which satisties patching conditions arising from Grothendieck topology, and applying the associated sheaf functor to preashef forces compliance with these conditions.

The notion of Grothendieck topos is a geometric flavour of topos theory, where topos is defined as category of sheaves on a Grothendieck site with geometric moriphisms as adjoint pairs of functors between topoi, that satisfy exactness properties. [?]

As this flavour of topos theory uses category of sets as a prerequisite, the formal construction of set topos is cricual in doing sheaf topos theory.

Визначення 165. (Sieves). Sieves are a family of subfunctors

$$R \subset \mathrm{Hom}_C(\_, U), U \in C,$$

such that following axioms hold: i) (base change) If $R \subset \mathrm{Hom}_C(\_, U)$ is covering and $\phi : V \to U$ is a morphism of C, then the subfuntor

$$\phi^{-1}(R) = \{\gamma : W \to V \| \phi \cdot \gamma \in R\}$$

is covering for V; ii) (local character) Suppose that $R, R' \subset \mathrm{Hom}_C(\_, U)$ are subfunctors and R is covering. If $\phi^{-1}(R')$ is covering for all $\phi : V \to U$ in R, then R' is covering; iii) $\mathrm{Hom}_C(\_, U)$ is covering for all $U \in C$.

[1]https://github.com/verimath/topology

Визначення 166. (Coverage). A coverage is a function assigning to each Ob_C the family of morphisms $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I}$ called covering families, such that for any $g : V \to U$ exist a covering family $\{h : V_j \to V\}_{j\in J}$ such that each composite $h_j \circ g$ factors some f_i:

$$\begin{array}{ccc} V_j & \xrightarrow{k} & U_i \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle f_i} \\ V & \xrightarrow{g} & U \end{array}$$

```
Co (C: precategory) (cod: carrier C) : U
  = (dom: carrier C)
  * (hom C dom cod)

Delta (C: precategory) (d: carrier C) : U
  = (index: U)
  * (index -> Co C d)

Coverage (C: precategory): U
  = (cod: carrier C)
  * (fam: Delta C cod)
  * (coverings: carrier C -> Delta C cod -> U)
  * (coverings cod fam)
```

Визначення 167. (Grothendieck Topology). Suppose category C has all pullbacks. Since C is small, a pretopology on C consists of families of sets of morphisms

$$\{\phi_\alpha : U_\alpha \to U\}, U \in C,$$

called covering families, such that following axioms hold: i) suppose that $\phi_\alpha : U_\alpha \to U$ is a covering family and that $\psi : V \to U$ is a morphism of C. Then the collection $V \times_U U_\alpha \to V$ is a cvering family for V. ii) If $\{\phi_\alpha : U_\alpha \to U\}$ is covering, and $\{\gamma_{\alpha,\beta} : W_{\alpha,\beta} \to U_\alpha\}$ is covering for all α, then the family of composites

$$W_{\alpha,\beta} \xrightarrow{\gamma_{\alpha,\beta}} U_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} U$$

is covering; iii) The family $\{1 : U \to U\}$ is covering for all $U \in C$.

Визначення 168. (Site). Site is a category having either a coverage, grothendieck topology, or sieves.

```
site (C: precategory): U
  = (C: precategory) * Coverage C
```

Визначення 169. (Presheaf). Presheaf of a category C is a functor from opposite category to category of sets: $C^{op} \to \mathbf{Set}$.

```
presheaf (C: precategory): U
  = catfunctor (opCat C) Set
```

Визначення 170. (Presheaf Category, PSh). Presheaf category PSh for a site C is category were objects are presheaves and morphisms are natural transformations of presheaf functors.

Визначення 171. (Sheaf). Sheaf is a presheaf on a site. In other words a presheaf $F : C^{op} \to \boldsymbol{Set}$ such that the cannonical map of inverse limit

$$F(U) \to \varprojlim_{V \to U \in R} F(V)$$

is an isomorphism for each covering sieve $R \subset \mathrm{Hom}_C(\_, U)$. Equivalently, all induced functions

$$\mathrm{Hom}_C(\mathrm{Hom}_C(\_, U), F) \to \mathrm{Hom}_C(R, F)$$

should be bejections.

```
sheaf (C: precategory): U
  = (S: site C)
  * presheaf S.1
```

Визначення 172. (Sheaf Category, Sh). Sheaf category Sh is a category where objects are sheaves and morphisms are natural transformation of sheves. Sheaf category is a full subcategory of category of presheaves PSh.

Визначення 173. (Grothendieck Topos). Topos is the category of sheaves $\mathrm{Sh}(C, J)$ on a site C with topology J.

Теорема 26. (Giraud). A category C is a Grothiendieck topos iff it has following properties: i) has all finite limits; ii) has small disjoint coproducts stable under pullbacks; iii) any epimorphism is coequalizer; iv) any equivalence relation $R \to E$ is a kernel pair and has a quotient; v) any coequalizer $R \to E \to Q$ is stably exact; vi) there is a set of objects that generates C.

Визначення 174. (Geometric Morphism). Suppose that C and D are Grothendieck sites. A geometric morphism

$$f : \mathbf{Sh}(C) \to \mathbf{Sh}(D)$$

consist of functors $f_* : \mathbf{Sh}(C) \to \mathbf{Sh}(D)$ and $f^* : \mathbf{Sh}(D) \to \mathbf{Sh}(C)$ such that f^* is left adjoint to f_* and f^* preserves finite limits. The left adjoint f^* is called the inverse image functor, while f_* is called the direct image. The inverse image functor f^* is left and right exact in the sense that it preserves all finite colimits and limits, respectively.

Визначення 175. (Cohesive Topos). A topos E is a cohesive topos over a base topos S, if there is a geometric morphism $(p^*, p_*) : E \to S$, such that: i) exists adjunction $p^! \vdash p_*$ and $p^! \dashv p_*$; ii) p^* and $p^!$ are full faithful; iii) $p_!$ preserves finite products. This quadruple defines adjoint triple:

$$\int \dashv \flat \dashv \sharp$$

7.2.4 Елементарний топос

Giraud theorem was a synonymical topos definition involved only topos properties but not a site properties. That was step forward on predicative definition. The other step was made by Lawvere and Tierney, by removing explicit dependance on categorical model of set theory (as category of set is used in definition of presheaf). This information was hidden into subobject classifier which was well defined through categorical pullback and property of being cartesian closed (having lambda calculus as internal language).

Elementary topos doesn't involve 2-categorical modeling, so we can construct set topos without using functors and natural transformations (what we need in geometrical topos theory flavour). This flavour of topos theory more suited for logic needs rather that geometry, as its set properties are hidden under the predicative predicative pullback definition of subobject classifier rather that functorial notation of presheaf functor. So we can simplify proofs at the homotopy levels, not to lift everything to 2-categorical model.

Визначення 176. (Monomorphism). An morphism $f : Y \to Z$ is a monic or mono if for any object X and every pair of parralel morphisms $g_1, g_2 : X \to Y$ the

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \to g_1 = g_2.$$

More abstractly, f is mono if for any X the $\mathrm{Hom}(X, \_)$ takes it to an injective function between hom sets $\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$.

```
mono (P: precategory) (Y Z: carrier P) (f: hom P Y Z): U
   = (X: carrier P) (g1 g2: hom P X Y)
  -> Path (hom P X Z) (compose P X Y Z g1 f)
                      (compose P X Y Z g2 f)
  -> Path (hom P X Y) g1 g2
```

Визначення 177. (Subobject Classifier [?]). In category C with finite limits, a subobject classifier is a monomorphism $\mathrm{true} : 1 \to \Omega$ out of terminal object 1, such that for any mono $U \to X$ there is a unique morphism $\chi_U : X \to \Omega$ and pullback diagram:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{k} & 1 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle true} \\ X\Omega & \xrightarrow{\chi u} & \Omega \end{array}$$

```
subobjectClassifier (C: precategory): U
  = (omega: carrier C)
  * (end: terminal C)
  * (trueHom: hom C end.1 omega)
  * (chi: (V X: carrier C) (j: hom C V X) -> hom C X omega)
  * (square: (V X: carrier C) (j: hom C V X) -> mono C V X j
    -> hasPullback C (omega,(end.1,trueHom),(X,chi V X j)))
  * ((V X: carrier C) (j: hom C V X) (k: hom C X omega)
    -> mono C V X j
    -> hasPullback C (omega,(end.1,trueHom),(X,k))
    -> Path (hom C X omega) (chi V X j) k)
```

Теорема 27. (Category of Sets has Subobject Classifier).

Визначення 178. (Cartesian Closed Categories). The category $\mathbf{C}$ is called cartesian closed if exists all: i) terminals; ii) products; iii) exponentials. Note that this definition lacks beta and eta rules which could be found in embedding $\mathbf{MLTT}$.

```
isCCC (C: precategory): U
  = (Exp:   (A B: carrier C) -> carrier C)
  * (Prod:  (A B: carrier C) -> carrier C)
  * (Apply: (A B: carrier C) -> hom C (Prod (Exp A B) A) B)
  * (P1:    (A B: carrier C) -> hom C (Prod A B) A)
  * (P2:    (A B: carrier C) -> hom C (Prod A B) B)
  * (Term:  terminal C)
  * unit
```

Теорема 28. (Category of Sets is cartesian closed). As you can see from exp and pro we internalize Π and Σ types as $\mathbf{SET}$ instances, the $\mathbf{isSet}$ predicates are provided with contractability. Exitense of terminals is proved by $\mathbf{propPi}$. The same technique you can find in $\mathbf{MLTT}$ embedding.

```
cartesianClosure : isCCC Set
  = (expo,prod,appli,proj1,proj2,term,tt) where
    exp (A B: SET): SET = (A.1   -> B.1, setFun A.1 B.1 B.2)
    pro (A B: SET): SET = (prod A.1 B.1, setSig A.1 (\(_ : A.1)
                          -> B.1) A.2 (\(_ : A.1) -> B.2))
    expo:  (A B: SET) -> SET = \(A B: SET) -> exp A B
    prod:  (A B: SET) -> SET = \(A B: SET) -> pro A B
    appli: (A B: SET) -> hom Set (pro (exp A B) A) B
        = \(A B: SET) -> \(x:(pro(exp A B)A).1)-> x.1 x.2
    proj1: (A B: SET) -> hom Set (pro A B) A
        = \(A B: SET) (x: (pro A B).1) -> x.1
    proj2: (A B: SET) -> hom Set (pro A B) B
        = \(A B: SET) (x: (pro A B).1) -> x.2
    unitContr (x: SET) (f: x.1 -> unit) : isContr (x.1 -> unit)
      = (f, \(z: x.1 -> unit) -> propPi x.1 (\(_:x.1)->unit)
           (\(x:x.1) -> propUnit) f z)
    term: terminal Set = ((unit,setUnit),
           \(x: SET) -> unitContr x (\(z: x.1) -> tt))
```

Note that rules of cartesian closure forms a type theoretical langage called lambda calculus.

Визначення 179. (Elementary Topos). Topos is a precategory which is cartesian closed and has subobject classifier.

```
Topos (cat: precategory) : U
  = (cartesianClosure: isCCC cat)
  * subobjectClassifier cat
```

Теорема 29. (Topos Definitions). Any Grothendieck topos is an elementary topos too. The proof is sligthly based on results of Giraud theorem.

Теорема 30. (Category of Sets forms a Topos). There is a cartesian closure and subobject classifier for a categoty of sets.

```
internal : Topos Set
         = (cartesianClosure,hasSubobject)
```

Теорема 31. (Freyd). Main theorem of topos theory [?]. For any topos $\mathbf{C}$ and any $\mathfrak{b} : \mathrm{Ob}_{\mathbf{C}}$ relative category $\mathbf{C} \downarrow \mathfrak{b}$ is also a topos. And for any arrow $f : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ inverse image functor $f^* : \mathbf{C} \downarrow \mathfrak{b} \to \mathfrak{c} \downarrow \mathfrak{a}$ has left adjoint $\sum_f$ and right adjoin $\prod_f$.

7.2.5 Висновки

We gave here constructive definition of topology as finite unions and intersections of open subsets. Then make this definition categorically compatible by introducing Grothendieck topology in three different forms: sieves, coverage, and covering families. Then we defined an elementary topos and introduce category of sets, and proved that Set is cartesian closed, has object classifier and thus a topos.

This intro could be considered as a formal introduction to topos theory (at least of the level of first chapter) and you may evolve this library to your needs or ask to help porting or developing your application of topos theory to a particular formal construction.

7.3 Алгебраїчна топологія

7.3.1 Теорія груп

7.3.2 Простори

7.3.2.1 Сімпліціальні

7.3.2.2 CW-комплекси

The definition of homotopy groups, a special role is played by the inclusions $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$. We study spaces obtained iterated attachments of D^n along S^{n-1}.

Визначення 180. (Attachment). Attaching n-cell to a space X along a map $f : S^{n-1} \to X$ means taking a pushout figure.

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{k} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{g} & \cup_f D^n \end{array}$$

where the notation $X \cup_f D^n$ means result depends on homotopy class of f.

Визначення 181. (CW-Complex). Inductively. The only CW-complex of dimention -1 is $\varnothing$. A CW-complex of dimension $\leqslant n$ on X is a space X obtained by attaching a collection of n-cells to a CW-complex of dimension $n-1$.

A CW-complex is a space X which is the $\mathbf{colimit}(X_i)$ of a sequence $X_{-1} = \varnothing \hookrightarrow X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow ...X$ of CW-complexes X_i of dimension $\leqslant n$, with X_{i+1} obtained from X_i by i-cell attachments. Thus if X is a CW-complex, it comes with a filtration

$$\varnothing \hookrightarrow X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow ...X$$

where X_i is a CW-complex of dimension $\leqslant i$ called the i-skeleton, and hence the filtration is called the skeletal filtration.

7.3.3 Теорія гомотопій

7.3.3.1 Простори петель

Визначення 182. (Pointed Space). A pointed type (A, a) is a type $A : U$ together with a point $a : A$, called its basepoint.

```
pointed: U = (A: U) * A
point (A: pointed): A.1 = A.2
space (A: pointed): U = A.1
```

Визначення 183. (Loop Space).

$$\Omega(A, a) =_{def} ((a =_A a), refl_A(a)).$$

```
omega1 (A: pointed) : pointed
  = (Path (space A) (point A) (point A), refl A.1 (point A))
```

Визначення 184. (n-Loop Space).

$$\begin{cases} \Omega^0(A, a) =_{def} (A, a) \\ \Omega^{n+1}(A, a) =_{def} \Omega^n(\Omega(A, a)) \end{cases}$$

```
omega : nat -> pointed -> pointed = split
  zero -> idfun pointed
  succ n -> \(A: pointed) -> omega n (omega1 A)
```

7.3.3.2 Обчислення гомотопічних груп

Визначення 185. (n-th Homotopy Group of m-Sphere).

$$\pi_n S^m = \|\Omega^n(S^m)\|_0.$$

```
piS (n: nat): (m: nat) -> U = split
   zero   -> sTrunc (space (omega n (bool,false)))
   succ x -> sTrunc (space (omega n (Sn (succ x),north)))
```

Теорема 32. $(\Omega(S^1) = \mathbb{Z})$.

```
data S1 = base
        | loop <i> [ (i=0) -> base ,
                     (i=1) -> base ]

loopS1 : U = Path S1 base base

encode (x:S1) (p:Path S1 base x)
  : helix x
  = subst S1 helix base x p zeroZ

decode : (x:S1) -> helix x -> Path S1 base x = split
  base -> loopIt
  loop @ i -> rem @ i where
    p : Path U (Z -> loopS1) (Z -> loopS1)
      = <j> helix (loop1@j) -> Path S1 base (loop1@j)
    rem : PathP p loopIt loopIt
      = corFib1 S1 helix (\(x:S1)->Path S1 base x) base
        loopIt loopIt loop1 (\(n:Z) ->
        comp (<i> Path loopS1 (oneTurn (loopIt n))
             (loopIt (testIsoPath Z Z sucZ predZ
                      sucpredZ predsucZ n @ i)))
             (<i>(lem1It n)@-i) [])

loopS1eqZ : Path U Z loopS1
  = isoPath Z loopS1 (decode base) (encode base)
    sectionZ retractZ
```

7.3.3.3 Розшарування Хопфа

This article defines the Hopf Fibration (HF), the concept of splitting the S^3 sphere onto the twisted cartesian product of spheres S^1 and S^2. Basic HF applications are: 1) HF is a Fiber Bundle structure of Dirac Monopole; 2) HF is a map from the S^3 in H to the Bloch sphere; 3) If HF is a vector field in R^3 then there exists a solution to compressible non-viscous Navier-Stokes equations. It was figured out that there are only 4 dimensions of fibers with Hopf invariant 1, namely S^0, S^1, S^3, S^7.

This article consists of two parts: 1) geometric visualization of projection of S^3 to S^2 (frontend); 2) formal topological version of HF in cubical type theory (backend). Consider this a basic intro and a summary of results or companion guide to the chapter 8.5 from HoTT.

Геометрична інтерпретація

Let's imagine S^3 as smooth differentiable manifold and build a projection onto the display as if demoscene is still alive.

Визначення 186. (Sphere S^3). Like a little baby in $\mathbb{R}^4$:

$$S^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 : \sum_{i=0}^{3} x_i^2 = 1\};$$

after math classes in quaternions $\mathbb{H}$:

$$S^3 = \{x \in \mathbb{H} : \|x\| = 1\}.$$

Визначення 187. (Locus). The S^3 is realized as a disjoint union of circular fibers in Hopf coordinates $(\eta, \theta_1, \theta_2)$:

$$\begin{cases} x_0 = \cos(\theta_1)\sin(\eta), \\ x_1 = \sin(\theta_1)\sin(\eta), \\ x_2 = \cos(\theta_2)\cos(\eta), \\ x_3 = \sin(\theta_2)\cos(\eta). \end{cases}$$

Where $\eta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ and $\theta_{1,2} \in [0, 2\pi]$.

Визначення 188. (Mapping on S^2). A mapping of the Locus to the S^2 has points on the circles parametrized by θ_2:

$$\begin{cases} x = \sin(2\eta)\cos(\theta_1), \\ y = \sin(2\eta)\sin(\theta_1), \\ z = \cos(2\eta). \end{cases}$$

```
var fiber = new THREE.Curve(),
    color = sphericalCoords.color;

fiber.getPoint = function(t) {
    var eta = sphericalCoords.eta,
        phi = sphericalCoords.phi,
        theta = 2 * Math.PI * t;
    var x1 = Math.cos(phi+theta) * Math.sin(eta/2),
        x2 = Math.sin(phi+theta) * Math.sin(eta/2),
        x3 = Math.cos(phi-theta) * Math.cos(eta/2),
        x4 = Math.sin(phi-theta) * Math.cos(eta/2);
    var m = mag([x1,x2,x3]),
        r = Math.sqrt((1-x4)/(1+x4));
        return new THREE.Vector3(r*x1/m,r*x2/m, r*x3/m);
    };
```

Гомотопічна інтерпретація

Can we reason about spheres without a metric? Yes! But can we do this in a constructive way? Also yes.

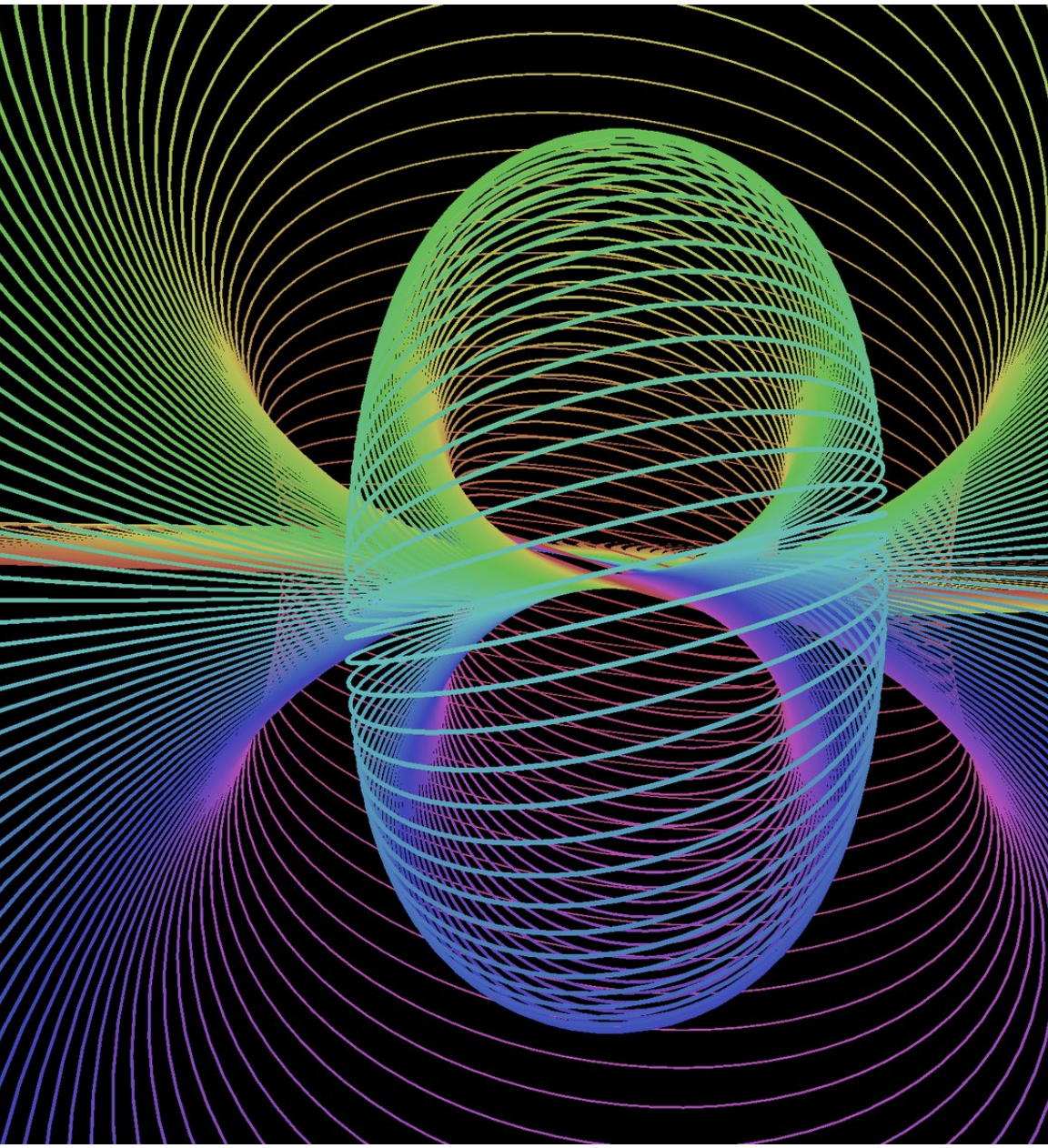


Рис. 7.1 Розшарування Хопфа

7.3.3.4 Розшарування Хопфа

Приклад 3. (S^3 Hopf Fiber). Вперше розшарування Хопфа трьовимірної сфери було формалізовано Джильямом Брунері. Тут дається його модифікована версія.

```
rot: (x : S1) -> Path S1 x x = split
    base -> loop1
    loop @ i -> constSquare S1 base loop1 @ i

mu : S1 -> equiv S1 S1 = split
    base -> idEquiv S1
    loop @ i -> equivPath S1 S1 (idEquiv S1)
                (idEquiv S1) (<j> \(x : S1) -> rot x @ j) @ i

H : S2 -> U = split
    north -> S1
    south -> S1
    merid x @ i -> ua S1 S1 (mu x) @ i

total : U = (c : S2) * H c
```

Визначення 189. (H-space). H-space over a carrier A is a tuple

$$H_A = \begin{cases} A : U \\ e : A \\ \mu : A \to A \to A \\ \beta : (a : A) \to \Sigma(\mu(e, a) = a)(\mu(a, e) = a) \end{cases}$$

.

Теорема 33. (Hopf Fibrations). There are fiber bundles: (S^0, S^1, p, S^1), (S^1, S^3, p, S^2), (S^3, S^7, p, S^4), (S^7, S^{15}, p, S^8).

Визначення 190. (Hopf Invariant). Let $\phi : S^{2n-1} \to S^n$ a continuous map. Then homotopy pushout (cofiber) of ϕ is $\mathbf{cofib}(\phi) = S^n \bigcup_\phi \mathbb{D}^{2n}$ has ordinary cohomology

$$H^k(\mathbf{cofib}(\phi), \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ for } k = n, 2n \\ \\ 0 \textit{ otherwise} \end{cases}$$

Hence for α, β generators of the cohomology groups in degree n and $2n$, respectively, there exists an integer $h(\phi)$ that expresses the cup product square of α as a multiple of β — $\alpha \sqcup \alpha = h(\phi) \cdot \beta$. This integer $h(\phi)$ is called Hopf invariant of ϕ.

Теорема 34. (Adams, Atiyah). Hopf Fibrations are only maps that have Hopf invariant 1.

Розділ 8

Додаткові матеріали

Присвячується майстрам
тибетського буддизму

Атіша, Нагарджуна, Лонгченпа

У додатках ми використаємо три різних мови, та покаже два застосування формальних мов: 1) формальна філософія (на мові $\mathrm{O}_{\mathrm{HTS}}$; 2) формальний ввід-вивід для системної інженерії (на двох промислових мовах Erlang та OCaml).

Вступне слово

8.1 Формалізація мадх'яміки

Зараз я дам вам відчути смак формальної філософії по-справжньому! А то вам може здатися, що це канал з формальної математики, а не формальної філософії. Я ж вважаю, що якщо формальна філософія не спирається на формальну математику, то гріш ціна такій формальній філософії.

```
module buddhism where
import path
```

Сьогодні ми будемо формалізувати поняття недвоїстості в буддизмі, яке пов'язане одразу з багатьма концепціями на рівнях Сутри, Тантри та Дзогчена: поняттям взаємозалежного виникнення та поняттям порожнечі всіх феноменів (Сутра Праджняпараміти). Класичний приклад із розчленовуванням тіла ставить питання, коли тіло перестає бути людиною-істотою, якщо від нього почати відрубувати шматки м'яса (ми буддисти любимо і лілеєм такі уявні образи-експерименти) або іншими словами, щоб відрізнити тіло від не-тіла, нам потрібен двомісний предикат (родина типів), функція, яка може ідентифікувати конректні два еклемпляри тіла. Практично йдеться про ідентифікацію двох об'єктів, тобто про звичайний тип-рівность Мартіна-Льофа.

За фреймворк візьмемо концепти Готтлоба Фреге, згідно з визначенням, концепт - це предикат над об'єктом або, іншими словами, Пі-тип Мартіна-Льофа, індексований тип, сім'я типів, тривіальне розшарування тощо. Де об'єкт x з o належить концепту, якщо сам концепт, параметризований цим об'єктом, населений p(o) : U (де p : concept o).

```
concept (o: U): U
  = o -> U
```

Концепт p повинен надавати приклад чи контрприклад розрізнення, тобто щоб визначити тіло це чи не тіло ще, поки ми його розчленовуємо, нам потрібно як мінімум два шматки: тіло і не тіло як приклади ідентифікації. Таким чином, недвоїстість може бути представлена як рівність між усіма розшаруваннями (предекатами над об'єктами).

```
nondual (o: U) (p: concept o): U
  = (x y: o) -> Path U (p x) (p y)
```

Отже, недвоїстість усуває різницю між прикладами і контрприкладами на примордіальному рівні мандали MLTT, тобто ідентифікує всі концепти. Сама ж ідентифікація класів об'єктів, які належать різним концептам — це умова, що стискає всі об'єкти в точку, або стягуваний простір, вершина конуса мандали MLTT, або, іншими словами, порожнеча всіх феноменів виражена як тип логічної одиниці, який містить лише один елемент.

```
allpaths (o: U): U
  = (x y: o) -> Path o x y
```

Формулювання буддійської теореми недвоїстості, яка поширюється всі типи учнів (тупих, середніх і тямущих), може звучати так: недвоїстість концепту є спосіб ідентифікації його об'єктів. Сформулюємо цю саму теорему в інший бік: спосіб ідентифікації об'єктів задає предикат неподвоїстості концептів. Туди - ((p: concept o) -> nondual o p) -> allpaths o, Сюди - allpaths o -> ((p: concept o) -> nondual o p). І доведемо її! Як видно з сигнатур нам лише треба побудувати функцію транспорту між двома просторами шляхів: (p x) $=_{\mathcal{U}}(py)x =_o y.(coerce)(cong)$.

```
encode (o:U): ((p: concept o) -> nondual o p) -> allpaths o
  = \(nd: (p: concept o) -> nondual o p) (a b: o)
  -> coerce(Path o a a)(Path o a b)(nd(\(z:o)->Path o a z)a b)(refl o a)


decode (o:U): allpaths o -> ((p: concept o) -> nondual o p)
  = \(all: allpaths o)(p: concept o)(x y: o) -> cong o U p x y (all x y)
```

Як бачите, теоремка про порожнечу всіх феноменів вийшла на кілька рядків, які демонструють: 1) основи формальної філософії та швидке занурення в область математичної філософії; 2) гарний

приклад до першого розділу HoTT на простір шляхів та модуль path. Джерело модеолі — дисертація Фавонії[1].

[1] `https://favonia.org/files/thesis.pdf` — Kuen-Bang Hou (Favonia), 2017, Higher-Dimensional Types in the Mechanization of Homotopy Theory

8.2 Формалізація вводу-виводу для Coq/OCaml

```
CoInductive Co (E : Effect.t) : Type -> Type :=
    | Bind : forall (A B : Type), Co E A -> (A -> Co E B) -> Co E B
    | Split : forall (A : Type), Co E A -> Co E A -> Co E A
    | Join : forall (A B : Type), Co E A -> Co E B -> Co E (A * B).
    | Ret : forall (A : Type) (x : A), Co E A
    | Call : forall (command : Effect.command E),
                   Co E (Effect.answer E command)

Definition run (argv : list LString.t): Co effect unit :=
    ido! log (LString.s "What is your name?") in
    ilet! name := read_line in
    match name with
      | None => ret tt
      | Some name => log (LString.s "Hello " ++ name ++ LString.s "!")
    end.

Parameter infinity : nat.
Definition eval {A} (x : Co effect A) : Lwt.t A := eval_aux infinity x.

Fixpoint eval_aux {A} (s: nat) (x: Co effect A) : Lwt.t A :=
  match s with
    | O => error tt
      | S s =>
    match x with
      | Bind _ _ x f => Lwt.bind   (eval_aux s x) (fun v_x => eval_aux s (f
     v_x))
      | Split _ x y  => Lwt.choose (eval_aux s x) (eval_aux s y)
      | Join _ _ x y => Lwt.join   (eval_aux s x) (eval_aux s y)
      | Ret _ v => Lwt.ret v
      | Call c => eval_command c
    end
  end.

CoFixpoint handle_commands : Co effect unit :=
    ilet! name := read_line in
    match name with
      | None => ret tt
      | Some command =>
        ilet! result := log (LString.s "Input: "
                     ++ command ++ LString.s ".")
     in handle_commands
    end.

Definition launch (m: list LString.t -> Co effect unit): unit :=
    let argv := List.map String.to_lstring Sys.argv in
    Lwt.launch (eval (m argv)).

Definition corun (argv: list LString.t): Co effect unit :=
    handle_commands.

Definition main := launch corun.
```

8.3 Формалізація вводу-виводу для PTS/BEAM

This work is expected to compile to a limited number of target platforms. For now, Erlang, Haskell, and LLVM are awaiting. Erlang version is expected to be used both on LING and BEAM Erlang virtual machines. This language allows you to define trusted operations in System F and extract this routine to Erlang/OTP platform and plug as trusted resources. As the example, we also provide infinite coinductive process creation and inductive shell that linked to Erlang/OTP IO functions directly.

IO protocol. We can construct in pure type system the state machine based on (co)free monads driven by IO/IOI protocols. Assume that String is a List Nat (as it is in Erlang natively), and three external constructors: getLine, putLine and pure. We need to put correspondent implementations on host platform as parameters to perform the actual IO.

```
String: Type = List Nat
data IO: Type =
     (getLine: (String -> IO) -> IO)
     (putLine: String -> IO)
     (pure: () -> IO)
```

8.3.0.1 Infinity I/O Type

Infinity I/O Type Spec.

```
-- IOI/@: (r: U) [x: U] [[s: U] -> s -> [s -> #IOI/F r s] -> x] x
   \ (r : *)
-> \/ (x : *)
-> (\/ (s : *)
   -> s
   -> (s -> #IOI/F r s)
   -> x)
-> x

-- IOI/F
   \ (a : *)
-> \ (State : *)
-> \/ (IOF : *)
-> \/ (PutLine_ : #IOI/data -> State -> IOF)
-> \/ (GetLine_ : (#IOI/data -> State) -> IOF)
-> \/ (Pure_ : a -> IOF)
-> IOF

-- IOI/MkIO
   \ (r : *)
-> \ (s : *)
-> \ (seed : s)
-> \ (step : s -> #IOI/F r s)
-> \ (x : *)
-> \ (k : forall (s : *) -> s -> (s -> #IOI/F r s) -> x)
-> k s seed step
```

Infinite I/O Sample Program.

```
-- Morte/corecursive
( \ (r: *1)
 -> ( (((#IOI/MkIO r) (#Maybe/@ #IOI/data)) (#Maybe/Nothing #IOI/data))
    ( \ (m: (#Maybe/@ #IOI/data))
     -> (((((#Maybe/maybe #IOI/data) m) ((#IOI/F r) (#Maybe/@ #IOI/data)))
           ( \ (str: #IOI/data)
            -> ((((#IOI/putLine r) (#Maybe/@ #IOI/data)) str)
                (#Maybe/Nothing #IOI/data))))
         (((#IOI/getLine r) (#Maybe/@ #IOI/data))
          (#Maybe/Just #IOI/data))))))
```

Erlang Coinductive Bindings.

```
copure() ->
    fun (_) -> fun (IO) -> IO end end.

cogetLine() ->
    fun(IO) -> fun(_) ->
        L = ch:list(io:get_line("> ")),
        ch:ap(IO,[L]) end end.

coputLine() ->
    fun (S) -> fun(IO) ->
        X = ch:unlist(S),
        io:put_chars(": "++X),
        case X of "0\n" -> list([]);
                      _ -> corec() end end end.

corec() ->
    ap('Morte':corecursive(),
        [copure(),cogetLine(),coputLine(),copure(),list([])]).


> om_extract:extract("priv/normal/IOI").
ok
> Active: module loaded: {reloaded,'IOI'}

> om:corec().
> 1
: 1
> 0
: 0
#Fun<List.3.113171260>
```

8.3.0.2 I/O Type

I/O Type Spec.

```
-- IO/@
   \ (a : *)
-> \/ (IO : *)
-> \/ (GetLine_ : (#IO/data -> IO) -> IO)
-> \/ (PutLine_ : #IO/data -> IO -> IO)
-> \/ (Pure_ : a -> IO)
-> IO
```

```
-- IO/replicateM
   \ (n: #Nat/@)
-> \ (io: #IO/@ #Unit/@)
-> #Nat/fold n (#IO/@ #Unit/@)
               (#IO/[>>] io)
               (#IO/pure #Unit/@ #Unit/Make)
```

Guarded Recursion I/O Sample Program.

```
-- Morte/recursive
((#IO/replicateM #Nat/Five)
 ((((#IO/[>>=] #IO/data) #Unit/@) #IO/getLine) #IO/putLine))
```

Erlang Inductive Bindings.

```
pure() ->
    fun(IO) -> IO end.

getLine() ->
    fun(IO) -> fun(_) ->
        L = ch:list(io:get_line("> ")),
        ch:ap(IO,[L]) end end.

putLine() ->
    fun (S) -> fun(IO) ->
        io:put_chars(": "++ch:unlist(S)),
        ch:ap(IO,[S]) end end.

rec() ->
    ap('Morte':recursive(),
        [getLine(),putLine(),pure(),list([])]).
```

Here is example of Erlang/OTP shell running recursive example.

```
> om:rec().
> 1
: 1
> 2
: 2
> 3
: 3
> 4
: 4
> 5
: 5
#Fun<List.28.113171260>
```