Formule di Campi Elettromagnetici

Lorenzo Rossi - lorenzo14.rossi@mail.polimi.it

AA 2019/2020

1 Riguardo al formulario

Questo formulario verrà espanso (ed, eventualmente, corretto) periodicamente fino a fine corso. Link repository di GitHub: https://github.com/lorossi/formulario-campi-elettromagnetici link diretto qua.

2 Trigonometria

- Teorema di Carnot $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$ con α angolo compreso tra b e c

3 Numeri complessi

- Radice quadrata di numeri complessi $z \in \mathbb{C}$, $z = \alpha + j\beta = re^{j\theta} \to \sqrt{z} = \sqrt[n]{z}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + j\sin\frac{\theta+2k\pi}{n})$ con $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$
- Parte reale di un numero complesso $x \in \mathbb{C}$, $Re[x] = \frac{x+x^*}{2}$

4 Elettrostatica

- Legge di Coulomb $\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2}\vec{a_r} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{R_q}-\vec{R_p})}{|\vec{R_q}-\vec{R_p}|^3}$
- Legge di Gauss $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\Omega \leftrightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_\Omega}{\epsilon}$

4.1 Campo Elettrico

- Campo $\vec{E}$ in presenza di cariche puntiformi $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{R_q}-\vec{R_p})}{|\vec{R_q}-\vec{R_p}|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2}\vec{a_r}$
- Densità di flusso elettrico $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$, $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{(\vec{R_q}-\vec{R_p})}{|\vec{R_q}-\vec{R_p}|^3} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2}\vec{a_r}$
- Momento di dipolo elettrico $\vec{p} = Q\vec{d}$
- Potenziale elettrostatico $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl} \Rightarrow V = -\int \vec{E} \cdot \vec{dl}$
- Relazioni tra $\vec{D}$ ed $\vec{e}$ $\nabla \cdot (\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho_\Omega$, $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$
- All'interno di mezzi lineari $\vec{P} = \epsilon_0\chi\vec{E}$ con χ detta suscettività elettrica, $\chi \geq 0$
- Relazione tra ϵ e χ $\epsilon = (1+\chi_e)\epsilon_0 = \epsilon_0\epsilon_r \to \epsilon_r = 1 + \chi_e \to \vec{D} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} = \epsilon_0(1+\chi_e)\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$
- Relazione tra $\vec{P}$, $\vec{D}$,$\vec{E}$ nei mezzi isotropi $\vec{P}\|\vec{D}\|\vec{E}$
- Energia del sistema $W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_iV_i = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\Omega V d\Omega = \frac{1}{2}\int_s \vec{D} \cdot \vec{E} d\Omega = \frac{1}{2}\int_s \epsilon|\vec{E}|^2 d\Omega$
- Densità di energia $w_e = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2}\epsilon|\vec{E}|^2$

4.1.1 Interfaccia tra due mezzi

- **conduttori** (componente tangenziale) $E_{1t} = E_{2t}$, $\vec{a_n} \times (\vec{E_2} - \vec{E_1}) = 0$, $\frac{\vec{D_{1t}}}{\vec{D_{2t}}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$
- **conduttori** (componente normale) $D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$, $\vec{a_n} \cdot (\vec{D_2} - \vec{D_1}) = \rho_s$, $\epsilon_{2n} E_{2n} - \epsilon_{1n} E_{1n} = \rho_s$
- **dielettrici** (componente tangenziale) $E_{2t} = E_{1t}$, $D_{2t} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} D_{1t}$
- **dielettrici** (componente normale) $D_{2n} = D_{1n}$, $E_{2n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{1n}$
- **conduttore e dielettrico** (componente tangenziale) $E_{2t} = 0$, $D_{2t} = 0$
- **conduttore e dielettrico** (componente normale) $D_{2n} = \rho_s$, $E_{2n} = \frac{\rho_s}{\epsilon_2}$

4.2 Capacità elettrica

- Condensatore a facce piane parallele $C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}$
- Formula generale $C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{-\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$
- Energia immagazzinata in un condensatore $W_e = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

4.3 Corrente elettrica / Legge di Ohm

- Velocità di deriva $\vec{v_d} = \mu_q \vec{E}$, $\vec{v_d} \| \vec{E}$
- Densità di corrente $\vec{J} = qN\vec{v_d} = qN\mu_q \vec{E} = \sigma \vec{E}$ con σ detta conducibilità del mezzo
- In un conduttore ideale, si ha $\mu \to \infty$, $\sigma \to \infty$

5 Magnetostatica

- Legge di Ampere $\oint_c \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_s \vec{J} \cdot \vec{ds} \leftrightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

5.1 Campo Magnetico

- Legge di Biot Savart (differenziale) $d\vec{F_{12}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l_1} \times [I_2 d\vec{l_2} \times \vec{a_{12}}]}{R^2}$
- Legge di Biot Savart (integrale) $\vec{F_{12}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{c_1} \oint_{c_2} \frac{d\vec{l_1} \times [d\vec{l_2} \times \vec{a_{12}}]}{R^2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{c_1} \oint_{c_2} \frac{\vec{a_{12}} \cdot [\vec{dl} \cdot \vec{d2}]}{R^2}$, $\vec{F_{12}} = -\vec{F21}$
- Densità di flusso magnetico (differenziale) $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l_2} \times \vec{a_{12}}}{R^2}$
- Densità di flusso magnetico (integrale) $\vec{B} = \oint_{c_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l_2} \times \vec{a_{12}}}{R^2} = \oint_{c_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \cdot (d\vec{l_1} \cdot d\vec{l_2})}{R^2}$
- Campo magnetico $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$
- Autoinduttanza magnetica $L_{11} = \frac{\Phi 11}{I_1} = \frac{\int_{S_1} \vec{B_1} \cdot d\vec{d_1}}{I_1}$ con $\vec{B_1} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{c1} \frac{\vec{dl} \cdot \vec{a_r}}{R^2}$, $\Phi_{m,11} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \int_{s_1} (\oint_{c1} \frac{\vec{dl} \cdot \vec{a_r}}{R^2}) ds$
  $\Rightarrow L_{11} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{s_1} (\oint_{c_1} \frac{\vec{dl} \times \vec{a_r}}{R^2}) \cdot \vec{ds}$
- Mutua induttanza $L_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{s_2} (\int_{c_1} \frac{\vec{dl} \times \vec{a_r}}{R^2}) \cdot \vec{ds}$
- Energia del sistema $W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2$
- Densità di energia $w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu H^2$

5.1.1 Campo Magnetico nei materiali

- Momento di dipolo magnetico $\vec{m} = A \cdot I \cdot \vec{a_n}$
- Densità di momento magnetico $\vec{M} = \lim_{\Delta\Omega \to 0} \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta\Omega}$ se il mezzo è lineare $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ con χ_m detta suscettività magnetica
- Permeabilità del mezzo $\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0(1 + \chi_m)$
- Relazione tra $\vec{H}$ e $\vec{M}$: $\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

5.1.2 Interfaccia tra due mezzi

- Componente tangenziale $H_{2t} - H_{1t} = J_{sn}$, $\frac{J_{2t}}{\sigma_2} = \frac{J_{1t}}{\sigma_1}$
- Componente normale $H_{2n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1n}$, $B_{2n} = B_{1n}$, $\vec{a_n} \cdot (\vec{B_2} - \vec{B_1}) = 0$, $\rho_s = (\epsilon_2 - \epsilon_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1}) E_{2n}$, $\rho_s = (\epsilon_1 - \epsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}) E_{1n}$

5.2 Resistenza elettrica / Legge di Joule

- Resistenza $R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\oint_s \vec{J} \cdot \vec{ds}} = \frac{1}{\sigma} \frac{\int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\oint_s \vec{E} \cdot \vec{ds}}$
- Relazione tra resitenza e capacità $R \cdot C = \frac{\epsilon}{\sigma} \leftrightarrow \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon}$
- Legge di Joule (differenziale) $\frac{\partial P}{\partial \Omega} = \vec{E} \cdot \vec{J}$ detta anche potenza specifica
- Legge di Joule (integrale) $P = \int_\Omega \vec{E} \cdot \vec{J} \, d\Omega$

6 Regime dinamico

- Legge di Faraday $\oint_c \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{ds}$ se la superficie non cambia nel tempo
- Circuitazione di $\vec{H}$ e corrente di spostamento $\oint_c \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_s \vec{J} \cdot \vec{ds} + \frac{d}{dt} \int_s \vec{D} \cdot \vec{ds}$
- Legge di conservazione della carica $\oint_s \vec{J} \cdot \vec{ds} = -\frac{d}{dt} \int_\Omega \rho_\Omega \, d\Omega$

6.1 Teorema di Poyinting

- Vettore di Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- Vettore di Poyting (dominio dei fasori) $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$
- Teorema di Poynting $P_{diss} = \oint_\Sigma \vec{S} \cdot d\,\Sigma$
- Vettore di Poynting associato ad un onda piana $\vec{S_{ist}} = \frac{A^2}{\eta_0} \cos^2(\omega t)\, \vec{a_z}$, $\vec{S_{ave}} = \frac{A^2}{2\eta_0} \vec{a_z}$
- Vettore di Poynting associato ad un onda piana (dominio dei fasori) $\vec{S_{ist}} = \frac{1}{2} Re[\vec{E} \times \vec{H}^*]$

6.2 Onde Piane

- Equazione di Helmoltz (onda piana uniforme senza perdite) $\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial t^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2} = 0$
- Equazione di Helmoltz (dominio dei fasori) $\nabla^2 \vec{E} = \gamma^2 \vec{E}$
- Lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{c}{f}$
- Costante di propagazione $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \alpha + j\beta$ dove $\alpha = costante\ di\ attenuazione > 0$, $\beta = costante\ di\ fase = \frac{2\pi}{\lambda}$
- Velocità della luce (velocità di propagazione delle onde) $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \cong 3 \cdot 10^8$

6.2.1 Polarizzazione

- Sia $\vec{E}(x, y, z.t)$ un campo elettrico con componenti in sole x e z. Allora, sul piano trasverso ($z = 0$) si ottiene:
  - $\vec{E}(z,t) = E_x \cos(\omega t)\vec{a_x} + E_Y \cos(\omega t + \phi_0)\vec{a_y}$
  - Si distinguono due casi particolari:
    1. $\phi_0 = 0$, E_x, E_y qualsiasi. Allora: $\xi = \arctan(\frac{E_y}{E_x})$, $|\vec{E}(0,t)|^2 = (E_x^2 + E_y^2)\cos(\omega t)$ **Polarizzazione lineare**
    2. $\phi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$, $E_x = E_y = E$. Allora: $\xi(t) = \mp\omega t$, $|\vec{E}|^2 = E^2$ **Polarizzazione circolare**

6.2.2 Incidenza normale su discontinuità piana

Mezzi ideali e senza perdite, onda elettromagnetica con componenti in x e y nella sezione $z = cost$

- Coefficiente di riflessione $\Gamma = \Gamma(0)\exp 2j\beta z$, dove $\Gamma(0) = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$, $|\Gamma(0)| \leq 1$
- Coefficiente di trasmissione $T = T(0)\exp 2j\beta z$, dove $T(0) = \frac{2n_2}{n_2 + n_1} = 1 + \Gamma(0)$, $|T(0)| \leq 2$
- Onda riflessa $E_1^-(0) = E_1^+(0) \cdot \Gamma(0)$
- Onda trasmessa $E_2^+(0) = E_1^+(0) \cdot T(0)$
- Impedenza d'onda $Z(z) = \eta_1(\frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)})$

6.2.3 Mezzo senza perdite

- $\sigma = 0 \Rightarrow \gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$
- $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 377\,\Omega$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c \cong 3 \times 10^8\, m/s$
- $\lambda = \frac{v}{f}$
- Impedenza intrinseca del vuoto (dominio dei fasori) $\frac{\vec{E^+}}{\vec{H^+}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \eta$, $\frac{\vec{E^-}}{\vec{H^-}} = -\frac{j\omega\mu}{\gamma} = -\eta$

6.2.4 Buon conduttore

- $\sigma >> \omega\epsilon \Rightarrow \gamma = \sqrt{-\omega^2\mu\epsilon}$
- $\eta = \frac{1+j}{sqrt2}\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}} \Rightarrow \alpha \cong \beta \cong \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$
- $v \cong \frac{\omega}{\beta} \cong \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$
- $\lambda = 2\pi\delta = \frac{v}{f}$
- Spessore pelle $\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$
- Costante dielettrica $\epsilon = \epsilon^{'} + j\epsilon^{''}$
- Costante di permeabilità magnetica $\mu = \mu^{'} + j\mu^{''}$