Formule di Campi Elettromagnetici

Lorenzo Rossi - lorenzo14.rossi@mail.polimi.it - https://github.com/lorossi

AA 2019/2020

1 Trigonometria

- Teorema di Carnot $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(\alpha)$ con α angolo compreso tra b e c

2 Elettrostatica

- Legge di Coulomb $\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2}\vec{a_r} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{R_q} - \vec{R_p})}{|\vec{R_q} - \vec{R_p}|^3}$
- Legge di Gauss $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\Omega \leftrightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_\Omega}{\epsilon}$

2.1 Campo Elettrico

- Campo $\vec{E}$ in presenza di cariche puntiformi $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{R_q} - \vec{R_p})}{|\vec{R_q} - \vec{R_p}|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2}\vec{a_r}$
- Densità di flusso elettrico $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$, $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{(\vec{R_q} - \vec{R_p})}{|\vec{R_q} - \vec{R_p}|^3} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2}\vec{a_r}$
- Momento di dipolo elettrico $\vec{p} = Q\vec{d}$
- Potenziale elettrostatico $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl} \Rightarrow V = -\int \vec{E} \cdot \vec{dl}$
- Relazioni tra $\vec{D}$ ed $\vec{e}$ $\nabla \cdot (\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho_\Omega$, $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$
- All'interno di mezzi lineari $\vec{P} = \epsilon_0\chi\vec{E}$ con χ detta suscettività elettrica, $\chi \geq 0$
- Relazione tra ϵ e χ $\epsilon = (1 + \chi_e)\epsilon_0 = \epsilon_0\epsilon_r \rightarrow \epsilon_r = 1 + \chi_e \rightarrow \vec{D} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$
- Relazione tra $\vec{P}$, $\vec{D}$,$\vec{E}$ nei mezzi isotropi $\vec{P}\|\vec{D}\|\vec{E}$
- Energia del sistema $W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_iV_i = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\Omega V d\Omega = \frac{1}{2}\int_s \vec{D} \cdot \vec{E} d\Omega = \frac{1}{2}\int_s \epsilon|\vec{E}|^2 d\Omega$
- Densità di energia $w_e = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2}\epsilon|\vec{E}|^2$

2.1.1 Interfaccia tra due mezzi

- **conduttori** (componente tangenziale) $E_{1t} = E_{2t}$, $\vec{a_n} \times (\vec{E_2} - \vec{E_1}) = 0$, $\frac{\vec{D_{1t}}}{\vec{D_{2t}}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$
- **conduttori** (componente normale) $D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$, $\vec{a_n} \cdot (\vec{D_2} - \vec{D_1}) = \rho_s$, $\epsilon_{2n}E_{2n} - \epsilon_{1n}E_{1n} = \rho_s$
- **dielettrici** (componente tangenziale) $E_{2t} = E_{1t}$, $D_{2t} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}D_{1t}$
- **dielettrici** (componente normale) $D_{2n} = D_{1n}$, $E_{2n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}E_{1n}$
- **conduttore e dielettrico** (componente tangenziale) $E_{2t} = 0$, $D_{2t} = 0$
- **conduttore e dielettrico** (componente normale) $D_{2n} = \rho_s$, $E_{2n} = \frac{\rho_s}{\epsilon_2}$

2.2 Capacità elettrica

- Condensatore a facce piane parallele $C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}$

- Formula generale $C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint\limits_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{-\int\limits_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$

- Energia immagazzinata in un condensatore $W_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

2.3 Corrente elettrica / Legge di Ohm

- Velocità di deriva $\vec{v_d} = \mu_q \vec{E}$, $\vec{v_d} \| \vec{E}$

- Densità di corrente $\vec{J} = qN\vec{v_d} = qN\mu_q \vec{E} = \sigma \vec{E}$ con σ detta conducibilità del mezzo

- In un conduttore ideale, si ha $\mu \to \infty$, $\sigma \to \infty$

3 Magnetostatica

- Legge di Ampere $\oint\limits_c \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int\limits_s \vec{J} \cdot \vec{ds} \leftrightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

3.1 Campo Magnetico

- Legge di Biot Savart (differenziale) $d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times [I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{a_{12}}]}{R^2}$

- Legge di Biot Savart (integrale) $\vec{F_{12}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint\limits_{c_1} \oint\limits_{c_2} \frac{d\vec{l}_1 \times [d\vec{l}_2 \times \vec{a_{12}}]}{R^2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint\limits_{c_1} \oint\limits_{c_2} \frac{\vec{a_{12}} \cdot [\vec{dl} \cdot \vec{d2}]}{R^2}$, $\vec{F_{12}} = -\vec{F}21$

- Densità di flusso magnetico (differenziale) $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{a_{12}}}{R^2}$

- Densità di flusso magnetico (integrale) $\vec{B} = \oint\limits_{c_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{a_{12}}}{R^2} = \oint\limits_{c_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \cdot (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)}{R^2}$

- Campo magnetico $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\vec{\mu_0}}$

- Autoinduttanza magnetica $L_{11} = \frac{\Phi 11}{I_1} = \frac{\int_{S_1} \vec{B_1} \cdot d\vec{d}_1}{I_1}$ con $\vec{B_1} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint\limits_{c1} \frac{\vec{dl} \cdot \vec{a_r}}{R^2}$, $\Phi_{m,11} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \int\limits_{s_1} (\oint\limits_{c1} \frac{\vec{dl} \cdot \vec{a_r}}{R^2}) ds$ $\Rightarrow L_{11} = \frac{\mu}{4\pi} \int\limits_{s_1} (\oint\limits_{c_1} \frac{\vec{dl} \times \vec{a_r}}{R^2}) \cdot \vec{ds}$

- Mutua induttanza $L_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \int\limits_{s_2} (\int\limits_{c_1} \frac{\vec{dl} \times \vec{a_r}}{R^2}) \cdot \vec{ds}$

- Energia del sistema $W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2$

- Densità di energia $w_m = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2}\mu H^2$

3.1.1 Campo Magnetico nei materiali

- Momento di dipolo magnetico $\vec{m} = A \cdot I \cdot \vec{a_n}$

- Densità di momento magnetico $\vec{M} = \lim\limits_{\Delta\Omega \to 0} \frac{\sum_i \vec{m_i}}{\Delta\Omega}$ se il mezzo è lineare $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ con χ_m detta suscettività magnetica

- Permeabilità del mezzo $\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0(1 + \chi_m)$

- Relazione tra $\vec{H}$ e $\vec{M}$: $\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

3.1.2 Interfaccia tra due mezzi

- Componente tangenziale $H_{2t} - H_{1t} = J_{sn}$, $\frac{J_{2t}}{\sigma_2} = \frac{J_{1t}}{\sigma_1}$
- Componente normale $H_{2n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1n}$, $B_{2n} = B_{1n}$, $\vec{a_n} \cdot (\vec{B_2} - \vec{B_1}) = 0$, $\rho_s = (\epsilon_2 - \epsilon_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1}) E_{2n}$, $\rho_s = (\epsilon_1 - \epsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}) E_{1n}$

3.2 Resistenza elettrica / Legge di Joule

- Resistenza $R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\oint_s \vec{J} \cdot \vec{ds}} = \frac{1}{\sigma} \frac{\int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\oint_s \vec{E} \cdot \vec{ds}}$
- Relazione tra resitenza e capacità $R \cdot C = \frac{\epsilon}{\sigma} \leftrightarrow \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon}$
- Legge di Joule (differenziale) $\frac{\partial P}{\partial \Omega} = \vec{E} \cdot \vec{J}$ detta anche potenza specifica
- Legge di Joule (integrale) $P = \int\limits_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} \, d\Omega$

4 Regime dinamico

- Legge di Faraday $\oint\limits_c \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int\limits_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{ds}$ se la superficie non cambia nel tempo
- Circuitazione di $\vec{H}$ e corrente di spostamento $\oint\limits_c \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int\limits_s \vec{J} \cdot \vec{ds} + \frac{d}{dt} \int\limits_s \vec{D} \cdot \vec{ds}$
- Legge di conservazione della carica $\oint\limits_s \vec{J} \cdot \vec{ds} = -\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} \rho_{\Omega} \, d\Omega$
- Vettore di Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- Teorema di Poynting $P_{diss} = \oint\limits_{\Sigma} \vec{S} \cdot d\,\Sigma$
- Equazione di Helmoltz (onda piana senza perdite) $\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial t^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2} = 0$
- Velocità della luce (velocità di propagazione delle onde) $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \approx 3 \cdot 10^8$
- Rapporto tra $\vec{E}$ e $\vec{H}$ nel vuoto $\frac{\mu_0}{\epsilon_0} = 377\,\Omega$