

Formule di Campi Elettromagnetici

Lorenzo Rossi - lorenzo14.rossi@mail.polimi.it

AA 2019/2020

1 GitHub

- Link repo di GitHub: <https://github.com/lorossi/formulario-campi-elettromagnetici>

2 Trigonometria

- Teorema di Carnot $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(\alpha)$ con α angolo compreso tra b e c

3 Elettrostatica

- Legge di Coulomb $\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{a}_r = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{R}_q - \vec{R}_p)}{|\vec{R}_q - \vec{R}_p|^3}$
- Legge di Gauss $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\Omega \leftrightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_\Omega}{\epsilon}$

3.1 Campo Elettrico

- Campo \vec{E} in presenza di cariche puntiformi $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{R}_q - \vec{R}_p)}{|\vec{R}_q - \vec{R}_p|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \vec{a}_r$
- Densità di flusso elettrico $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{(\vec{R}_q - \vec{R}_p)}{|\vec{R}_q - \vec{R}_p|^3} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2} \vec{a}_r$
- Momento di dipolo elettrico $\vec{p} = Q\vec{d}$
- Potenziale elettrostatico $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$
- Relazioni tra \vec{D} ed \vec{E} $\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_\Omega$, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
- All'interno di mezzi lineari $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ con χ detta suscettività elettrica, $\chi \geq 0$
- Relazione tra ϵ e χ $\epsilon = (1 + \chi_e)\epsilon_0 = \epsilon_0 \epsilon_r \rightarrow \epsilon_r = 1 + \chi_e \rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$
- Relazione tra \vec{P} , \vec{D} , \vec{E} nei mezzi isotropi $\vec{P} \parallel \vec{D} \parallel \vec{E}$
- Energia del sistema $W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i = \frac{1}{2} \int_\Omega \rho_\Omega V d\Omega = \frac{1}{2} \int_s \vec{D} \cdot \vec{E} d\Omega = \frac{1}{2} \int_s \epsilon |\vec{E}|^2 d\Omega$
- Densità di energia $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2$

3.1.1 Interfaccia tra due mezzi

- **conduttori** (componente tangenziale) $E_{1t} = E_{2t}$, $\vec{a}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$, $\frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$
- **conduttori** (componente normale) $D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$, $\vec{a}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s$, $\epsilon_{2n} E_{2n} - \epsilon_{1n} E_{1n} = \rho_s$
- **dieletrici** (componente tangenziale) $E_{2t} = E_{1t}$, $D_{2t} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} D_{1t}$
- **dieletrici** (componente normale) $D_{2n} = D_{1n}$, $E_{2n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{1n}$
- **conduttore e dielettrico** (componente tangenziale) $E_{2t} = 0$, $D_{2t} = 0$
- **conduttore e dielettrico** (componente normale) $D_{2n} = \rho_s$, $E_{2n} = \frac{\rho_s}{\epsilon_2}$

3.2 Capacità elettrica

- Condensatore a facce piane parallele $C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}$
- Formula generale $C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_{P_2} \vec{D} \cdot d\vec{S}}{-\int_{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$
- Energia immagazzinata in un condensatore $W_e = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

3.3 Corrente elettrica / Legge di Ohm

- Velocità di deriva $\vec{v}_d = \mu_q \vec{E}$, $\vec{v}_d \parallel \vec{E}$
- Densità di corrente $\vec{J} = qN\vec{v}_d = qN\mu_q \vec{E} = \sigma \vec{E}$ con σ detta conducibilità del mezzo
- In un conduttore ideale, si ha $\mu \rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow \infty$

4 Magnetostatica

- Legge di Ampere $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} \leftrightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

4.1 Campo Magnetico

- Legge di Biot Savart (differenziale) $d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times [I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{a}_{12}]}{R^2}$
- Legge di Biot Savart (integrale) $\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{c_1} \oint_{c_2} \frac{d\vec{l}_1 \times [d\vec{l}_2 \times \vec{a}_{12}]}{R^2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{c_1} \oint_{c_2} \frac{\vec{a}_{12} \cdot [d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2]}{R^2}$, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
- Densità di flusso magnetico (differenziale) $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{a}_{12}}{R^2}$
- Densità di flusso magnetico (integrale) $\vec{B} = \oint_{c_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{a}_{12}}{R^2} = \oint_{c_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \cdot (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)}{R^2}$
- Campo magnetico $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$
- Autoinduttanza magnetica $L_{11} = \frac{\Phi_{11}}{I_1} = \frac{\int_{s_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1}{I_1}$ con $\vec{B}_1 = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{c_1} \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{r}}{R^2}$, $\Phi_{m,11} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \int_{s_1} (\oint_{c_1} \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{r}}{R^2}) ds$
 $\Rightarrow L_{11} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{s_1} (\oint_{c_1} \frac{d\vec{l} \times d\vec{r}}{R^2}) \cdot d\vec{s}$
- Mutua induttanza $L_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{s_2} (\oint_{c_1} \frac{d\vec{l} \times d\vec{r}}{R^2}) \cdot d\vec{s}$
- Energia del sistema $W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2$
- Densità di energia $w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu H^2$

4.1.1 Campo Magnetico nei materiali

- Momento di dipolo magnetico $\vec{m} = A \cdot I \cdot \vec{a}_n$
- Densità di momento magnetico $\vec{M} = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta\Omega}$ se il mezzo è lineare $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ con χ_m detta suscettività magnetica
- Permeabilità del mezzo $\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0 (1 + \chi_m)$
- Relazione tra \vec{H} e \vec{M} : $\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

4.1.2 Interfaccia tra due mezzi

- Componente tangenziale $H_{2t} - H_{1t} = J_{sn}$, $\frac{J_{2t}}{\sigma_2} = \frac{J_{1t}}{\sigma_1}$
- Componente normale $H_{2n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1n}$, $B_{2n} = B_{1n}$, $\vec{a}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$, $\rho_s = (\epsilon_2 - \epsilon_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1}) E_{2n}$, $\rho_s = (\epsilon_1 - \epsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}) E_{1n}$

4.2 Resistenza elettrica / Legge di Joule

- Resistenza $R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s}} = \frac{1}{\sigma} \frac{\int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s}}$
- Relazione tra resistenza e capacità $R \cdot C = \frac{\epsilon}{\sigma} \leftrightarrow \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon}$
- Legge di Joule (differenziale) $\frac{\partial P}{\partial \Omega} = \vec{E} \cdot \vec{J}$ detta anche potenza specifica
- Legge di Joule (integrale) $P = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} d\Omega$

5 Regime dinamico

- Legge di Faraday $\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$ se la superficie non cambia nel tempo
- Circuitazione di \vec{H} e corrente di spostamento $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt} \int_s \vec{D} \cdot d\vec{s}$
- Legge di conservazione della carica $\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_{\Omega} d\Omega$
- Vettore di Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- Teorema di Poynting $P_{diss} = \oint_{\Sigma} \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma}$
- Equazione di Helmholtz (onda piana senza perdite) $\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial t^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2} = 0$
- Velocità della luce (velocità di propagazione delle onde) $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \approx 3 \cdot 10^8$
- Rapporto tra \vec{E} e \vec{H} nel vuoto $\frac{\mu_0}{\epsilon_0} = 377 \Omega$