Formulario di Campi Elettromagnetici

Lorenzo Rossi - lorenzo14.rossi@mail.polimi.it

AA 2019/2020

1 Riguardo al formulario

Questo formulario verrà espanso (ed, eventualmente, corretto) periodicamente fino a fine corso. Link repository di GitHub: https://github.com/lorossi/formulario-campi-elettromagnetici link diretto qua.

2 Trigonometria

- Teorema di Carnot $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$ con α angolo compreso tra b e c

3 Numeri complessi

- Radice quadrata di numeri complessi $z \in \mathbb{C}$, $z = \alpha + j\beta = re^{j\theta} \rightarrow \sqrt{z} = \sqrt[n]{z}(\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{n} + j\sin\dfrac{\theta + 2k\pi}{n})$ con $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$
- Parte reale di un numero complesso $x \in \mathbb{C}$, $Re[x] = \dfrac{x + x^*}{2}$

4 Elettrostatica

- Legge di Coulomb $\vec{F} = \dfrac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2}\vec{a_r} = \dfrac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \dfrac{(\vec{R_q} - \vec{R_p})}{|\vec{R_q} - \vec{R_p}|^3}$
- Legge di Gauss $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\Omega \leftrightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_\Omega}{\epsilon}$

4.1 Campo Elettrico

- Campo $\vec{E}$ in presenza di cariche puntiformi $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \dfrac{(\vec{R_q} - \vec{R_p})}{|\vec{R_q} - \vec{R_p}|^3} = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \dfrac{1}{R^2}\vec{a_r}$
- Densità di flusso elettrico $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$, $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi} \cdot \dfrac{(\vec{R_q} - \vec{R_p})}{|\vec{R_q} - \vec{R_p}|^3} = \dfrac{Q}{4\pi} \cdot \dfrac{1}{R^2}\vec{a_r}$
- Densità superficiale di carica $\sigma = D_n = \epsilon E_n$6t
- Momento di dipolo elettrico $\vec{p} = Q\vec{d}$
- Potenziale elettrostatico $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl} \Rightarrow V = -\displaystyle\int \vec{E} \cdot \vec{dl}$
- Relazioni tra $\vec{D}$ ed $\vec{e}$ $\nabla \cdot (\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho_\Omega$, $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$
- All'interno di mezzi lineari $\vec{P} = \epsilon_0\chi\vec{E}$ con χ detta suscettività elettrica, $\chi \geq 0$
- Relazione tra ϵ e χ $\epsilon = (1 + \chi_e)\epsilon_0 = \epsilon_0\epsilon_r \rightarrow \epsilon_r = 1 + \chi_e \rightarrow \vec{D} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$

- Relazione tra $\vec{P}$, $\vec{D}$,$\vec{E}$ nei mezzi isotropi $\vec{P}\|\vec{D}\|\vec{E}$
- Energia del sistema $W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i V_i = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \rho_\Omega V d\Omega = \frac{1}{2}\int\limits_{s} \vec{D}\cdot\vec{E} d\Omega = \frac{1}{2}\int\limits_{s} \epsilon|\vec{E}|^2 d\Omega$
- Densità di energia $w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\epsilon|\vec{E}|^2$

4.1.1 Interfaccia tra due mezzi

- **conduttori** (componente tangenziale) $E_{1t} = E_{2t}$, $\vec{a_n}\times(\vec{E_2}-\vec{E_1}) = 0$, $\frac{\vec{D_{1t}}}{\vec{D_{2t}}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$
- **conduttori** (componente normale) $D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$, $\vec{a_n}\cdot(\vec{D_2}-\vec{D_1}) = \rho_s$, $\epsilon_{2n}E_{2n} - \epsilon_{1n}E_{1n} = \rho_s$
- **dielettrici** (componente tangenziale) $E_{2t} = E_{1t}$, $D_{2t} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}D_{1t}$
- **dielettrici** (componente normale) $D_{2n} = D_{1n}$, $E_{2n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}E_{1n}$
- **conduttore e dielettrico** (componente tangenziale) $E_{2t} = 0$, $D_{2t} = 0$
- **conduttore e dielettrico** (componente normale) $D_{2n} = \rho_s$, $E_{2n} = \frac{\rho_s}{\epsilon_2}$

4.2 Capacità elettrica

- Condensatore a facce piane parallele $C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0\epsilon_r A}{d}$
- Formula generale $C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint\limits_S \vec{D}\cdot d\vec{S}}{-\int\limits_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot\vec{dl}}$
- Energia immagazzinata in un condensatore $W_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

4.3 Corrente elettrica / Legge di Ohm

- Velocità di deriva $\vec{v_d} = \mu_q\vec{E}$, $\vec{v_d}\|\vec{E}$
- Densità di corrente $\vec{J} = qN\vec{v_d} = qN\mu_q\vec{E} = \sigma\vec{E}$ con σ detta conducibilità del mezzo
- In un conduttore ideale, si ha $\mu \to \infty$, $\sigma \to \infty$

5 Magnetostatica

- Legge di Ampere $\oint\limits_c \vec{H}\cdot\vec{dl} = \int\limits_s \vec{J}\cdot\vec{ds} \leftrightarrow \nabla\times\vec{H} = \vec{J}$

5.1 Campo Magnetico

- Legge di Biot Savart (differenziale) $d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\vec{dl_1}\times[I_2\vec{dl_2}\times\vec{a_{12}}]}{R^2}$
- Legge di Biot Savart (integrale) $\vec{F_{12}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint\limits_{c_1}\oint\limits_{c_2}\frac{\vec{dl_1}\times[\vec{dl_2}\times\vec{a_{12}}]}{R^2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint\limits_{c_1}\oint\limits_{c_2}\frac{\vec{a_{12}}\cdot[\vec{dl}\cdot\vec{d2}]}{R^2}$, $\vec{F_{12}} = -F\vec{2}1$

- Densità di flusso magnetico (differenziale) $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{a_{12}}}{R^2}$

- Densità di flusso magnetico (integrale) $\vec{B} = \oint\limits_{c_2} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{a_{12}}}{R^2} = \oint\limits_{c_2} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J} \cdot (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)}{R^2}$

- Campo magnetico $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

- Autoinduttanza magnetica $L_{11} = \frac{\Phi 11}{I_1} = \frac{\int_{S_1} \vec{B_1} \cdot d\vec{d_1}}{I_1}$ con $\vec{B_1} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint\limits_{c1} \frac{d\vec{l} \cdot \vec{ar}}{R^2}$, $\Phi_{m,11} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \int\limits_{s_1} (\oint\limits_{c1} \frac{d\vec{l} \cdot \vec{a_r}}{R^2}) ds$

  $\Rightarrow L_{11} = \frac{\mu}{4\pi} \int\limits_{s_1} (\oint\limits_{c_1} \frac{d\vec{l} \times \vec{a_r}}{R^2}) \cdot d\vec{s}$

- Mutua induttanza $L_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \int\limits_{s_2} (\int\limits_{c_1} \frac{d\vec{l} \times \vec{a_r}}{R^2}) \cdot d\vec{s}$

- Energia del sistema $W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2$

- Densità di energia $w_m = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2}\mu H^2$

5.1.1 Campo Magnetico nei materiali

- Momento di dipolo magnetico $\vec{m} = A \cdot I \cdot \vec{a_n}$

- Densità di momento magnetico $\vec{M} = \lim\limits_{\Delta\Omega \to 0} \frac{\sum_i \vec{m_i}}{\Delta\Omega}$ se il mezzo è lineare $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ con χ_m detta suscettività magnetica

- Permeabilità del mezzo $\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0(1 + \chi_m)$

- Relazione tra $\vec{H}$ e $\vec{M}$: $\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

5.1.2 Interfaccia tra due mezzi

- Componente tangenziale $H_{2t} - H_{1t} = J_{sn}$, $\frac{J_{2t}}{\sigma_2} = \frac{J_{1t}}{\sigma_1}$

- Componente normale $H_{2n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1n}$, $B_{2n} = B_{1n}$, $\vec{a_n} \cdot (\vec{B_2} - \vec{B_1}) = 0$, $\rho_s = (\epsilon_2 - \epsilon_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1}) E_{2n}$, $\rho_s = (\epsilon_1 - \epsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}) E_{1n}$

5.2 Resistenza elettrica / Legge di Joule

- Resistenza $R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s}} = \frac{1}{\sigma} \frac{\int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s}}$

- Relazione tra resitenza e capacità $R \cdot C = \frac{\epsilon}{\sigma} \leftrightarrow \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon}$

- Legge di Joule (differenziale) $\frac{\partial P}{\partial \Omega} = \vec{E} \cdot \vec{J}$ detta anche potenza specifica

- Legge di Joule (integrale) $P = \int\limits_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} \, d\Omega$

6 Regime dinamico

- Legge di Faraday $\oint\limits_c \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int\limits_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{ds}$ se la superficie non cambia nel tempo
- Circuitazione di $\vec{H}$ e corrente di spostamento $\oint\limits_c \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int\limits_s \vec{J} \cdot \vec{ds} + \frac{d}{dt} \int\limits_s \vec{D} \cdot \vec{ds}$
- Legge di conservazione della carica $\oint\limits_s \vec{J} \cdot \vec{ds} = -\frac{d}{dt} \int\limits_\Omega \rho_\Omega \, d\Omega$

6.1 Teorema di Poyinting

- Vettore di Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- Vettore di Poyting (dominio dei fasori) $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$
- Teorema di Poynting $P_{diss} = \oint\limits_\Sigma \vec{S} \cdot d\,\Sigma$
- Vettore di Poynting associato ad un onda piana $\vec{S_{ist}} = \frac{A^2}{\eta_0} \cos^2(\omega t)\, \vec{a_z}$, $\vec{S_{ave}} = \frac{A^2}{2\eta_0} \vec{a_z}$
- Vettore di Poynting associato ad un onda piana (dominio dei fasori) $\vec{S_{ist}} = \frac{1}{2} Re[\vec{E} \times \vec{H}^*]$

7 Onde Piane

- Equazione di Helmoltz (onda piana uniforme senza perdite) $\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial t^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2} = 0$
- Equazione di Helmoltz (dominio dei fasori) $\nabla^2 \vec{E} = \gamma^2 \vec{E}$
- Lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{c}{f}$
- Costante di propagazione $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \alpha + j\beta$ dove $\alpha = costante\ di\ attenuazione > 0$, $\beta = costante\ di\ fase = \frac{2\pi}{\lambda}$
- Velocità della luce (velocità di propagazione delle onde) $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \cong 3 \cdot 10^8$
- Impedenza intrinseca del mezzo $\eta = \frac{E^+}{H^+}$
- Impedenza d'onda $Z = \frac{E^+ - E^-}{H^+ - H^-}$
- Indice di rifrazione $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$

7.1 Polarizzazione

- Sia $\vec{E}(x, y, z.t)$ un campo elettrico con componenti in sole x e z. Allora, sul piano trasverso ($z = 0$) si ottiene:
  - $\vec{E}(z,t) = E_x \cos(\omega t)\vec{a_x} + E_Y \cos(\omega t + \phi_0)\vec{a_y}$
  - Si distinguono due casi particolari:
    1. $\phi_0 = 0$, E_x, E_y qualsiasi. Allora: $\xi = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right)$, $|\vec{E}(0,t)|^2 = (E_x^2 + E_y^2)\cos(\omega t)$ **Polarizzazione lineare**
    2. $\phi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$, $E_x = E_y = E$. Allora: $\xi(t) = \mp\omega t$, $|\vec{E}|^2 = E^2$ **Polarizzazione circolare**

7.2 Incidenza delle onde

7.2.1 Incidenza normale su discontinuità piana

Mezzi ideali e senza perdite, onda elettromagnetica con componenti in x e y nella sezione $z = cost$

- Coefficiente di riflessione $\Gamma = \Gamma(0)\exp(2j\beta z)$, dove $\Gamma(0) = \dfrac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$, $|\Gamma(0)| \leq 1$
- Coefficiente di trasmissione $T = T(0)\exp(2j\beta z)$, dove $T(0) = \dfrac{2n_2}{n_2 + n_1} = 1 + \Gamma(0)$, $|T(0)| \leq 2$
- Onda riflessa $E_1^-(0) = E_1^+(0) \cdot \Gamma(0)$
- Onda trasmessa $E_2^+(0) = E_1^+(0) \cdot T(0)$
- Impedenza d'onda $Z(z) = \eta_1 \left(\dfrac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \right)$

7.2.2 Incidenza non normale

Ipotesi: onda su piano xz

- Impedenza TE $\eta_n^{TE} = \dfrac{\eta}{cos(\theta_n)}$
- Impedenza TM $\eta_n^{TM} = \eta \cdot cos(\theta_n)$
- Componente TE dell'onda ha componente y
- Componente TE dell'onda ha componenti xz
- Angolo di incidenza $\theta = \arctan\left(\dfrac{\beta_z}{\beta_x}\right)$
- Costante di propagazione $\gamma \rightarrow$ va proiettata nelle direzioni x e y tramite sin e cos

7.2.3 Trasmissione totale

- Indice di rifrazione $\Gamma = 0 \leftrightarrow Z_L = Z_{in}$
- Angolo di Brewster $\theta_P = \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}\right) = \arctan \dfrac{n_2}{n_1}$

7.3 Mezzi attraversati dalle onde

7.4 Mezzo senza perdite

- $\sigma = 0 \Rightarrow \gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$
- $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\epsilon}} = 377\,\Omega$
- $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c \cong 3 \times 10^8\, m/s$
- $\lambda = \dfrac{v}{f}$
- Impedenza intrinseca del vuoto (dominio dei fasori) $\dfrac{\vec{E^+}}{\vec{H^+}} = \dfrac{j\omega\mu}{\gamma} = \eta$, $\dfrac{\vec{E^-}}{\vec{H^-}} = -\dfrac{j\omega\mu}{\gamma} = -\eta$

7.5 Buon conduttore

- $\sigma >> \omega\epsilon \Rightarrow \gamma = \sqrt{-\omega^2\mu\epsilon}$
- $\eta = \frac{1+j}{sqrt2}\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}} \Rightarrow \alpha \cong \beta \cong \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$
- $v \cong \frac{\omega}{\beta} \cong \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$
- $\lambda = 2\pi\delta = \frac{v}{f}$
- Spessore pelle $\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$
- Costante dielettrica $\epsilon = \epsilon^{'} + j\epsilon^{''}$
- Costante di permeabilità magnetica $\mu = \mu^{'} + j\mu^{''}$

8 Linee TEM

- Equazione 1 $\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = -\frac{\partial I(z,t)}{\partial z} \cdot L$ con L = induttanza per unità di lunghezza
- Equazione 2 $\frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = -\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} \cdot C$ con C = capacità per unità di lunghezza
- Uguaglianze $\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon}$, $L_0C_0 = \mu_0\epsilon_0$
- Impedenza $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$

8.1 Cavo coassiale

- Capacità $C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$ con $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$
- Induttanza $L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
- Attenuazione conduttore $\alpha_c = \frac{R}{2Z_C}$
- Attenuazione dielettrico $\alpha_d = \frac{GZ_C}{2} = \frac{\pi}{\lambda}\frac{\epsilon"}{\epsilon'}$
- Impedenza $Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\eta}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
- Resistenza $R = \frac{R_s}{2\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, $R_s = \sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{1}{\sigma\delta}$
- Conduttanza $G = C\frac{\omega\epsilon"}{\epsilon'} = \frac{2\pi\omega\epsilon"}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

9 Linee quasi TEM

- Velocità nell'onda $v = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
- Costante dielettrica efficace $\epsilon_{eff} = \dfrac{LC}{\mu_0}$

10 Adattamento di potenza

- Potenza disponibile $P_D = \dfrac{|V_g|^2}{8R_g} = P_D$
- Potenza sul carico $P_L = P_D(1 - |\Gamma_L|^2)$

11 Guide d'onda rettangolari

- Pulsazione di taglio $\omega_c = \dfrac{1}{\sqrt{\omega\epsilon}}\sqrt{\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{m\pi}{b}\right)^2}$ con a, b interi
- Impedenza modale $Z_{te} = \dfrac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\omega_c}{\omega}\right)}} = \dfrac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{f_c}{f}\right)}}$
- Frequenza di taglio $f_c = \dfrac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}$
- Velocità di gruppo $v_g = v\sqrt{1 - \left(\dfrac{\omega_c}{\omega}^2\right)}$
- Lunghezza d'onda di gruppo $\lambda_g = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\omega_c}{\omega}^2\right)}}$
- Potenza trasportata $P = \dfrac{|E_0|^2 ab}{4 \cdot Z_{te}}$
- Coefficiente di attenuazione $\alpha = \dfrac{2\pi}{\lambda_c}\sqrt{1 - \left(\dfrac{f}{f_c}\right)^2}$

12 Antenne

- Direttività $D = \dfrac{4\pi}{\int f(\theta, \phi) d\Omega} = \dfrac{S_{max}}{S_{iso}}$
- Area efficace $A_e = \dfrac{|l_e|^2 \eta_0}{4R}$
- Relazione universale $\dfrac{G}{A_e} = \dfrac{4\pi}{\lambda^2}$
- Tensione a vuoto $V_0 = l_e \cdot E_{inc} \cdot \sqrt{f_r(\theta, \phi}$
- Potenza ricevuta $P_R = P_D = S_{inc} \cdot A_e \cdot f(\theta, \phi)$

12.1 Dipolo Hertziano

- Lunghezza efficace $l_e = l$
- Area efficace $A_e = \frac{3}{8}\frac{\lambda^2}{\pi}$
- Funzione di direttività $f(\theta, \phi) = \sin^2(\theta)$
- Tensione a vuoto $V_0 = l_e \cdot E_{inc}$
- Densità di potenza $S = \frac{P_t D}{4\pi R^2} f(\theta, \phi)$
- Resistenza di radiazione $R_R = \frac{2}{3}\pi\eta_0 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$

12.2 Spira magnetica

Ipotesi: incidenza perpendicolare, adattamento di polarizzazione

- Lunghezza efficace $l_e = l_m \frac{Z_{in}}{\eta_0}$
- Funzione di direttività $f(\theta, \phi) = 1$
- Tensione a vuoto $V_0 = j\omega\mu \frac{E_{inc}}{\eta_0} S$
- Densità di potenza $S = \frac{P_t D}{4\pi R^2} f(\theta, \phi)$
- Resistenza di radiazione $R_R = \eta_0 \frac{8\pi^3}{3} \left(\frac{5}{\lambda^2}\right)^2$