Formulario di Campi Elettromagnetici

Lorenzo Rossi

Anno Accademico 2019/2020

Email: lorenzo14.rossi@mail.polimi.it

GitHub: https://github.com/lorossi/formulario-campi-elettromagnetici

Versione aggiornata al 08/06/2020

Indice

1 Riguardo al formulario

Questo formulario verrà espanso (ed, eventualmente, corretto) periodicamente fino a fine corso.
Link repository di GitHub: https://github.com/lorossi/formulario-campi-elettromagnetici
L'ultima versione può essere scaricata direttamente da questo link premendo poi su "Download".

2 Richiami di base

2.1 Trigonometria

- Teorema di Carnot $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$ con α angolo compreso tra b e c

2.2 Numeri complessi

- Radice quadrata di numeri complessi $z \in \mathbb{C}$,
  $z = \alpha + j\beta = re^{j\theta} \rightarrow \sqrt{z} = \sqrt[n]{z}\left(\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{n} + j\sin\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$
  con $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$
- Parte reale di un numero complesso $x \in \mathbb{C}$, $Re[x] = \dfrac{x + x^*}{2}$
- Inverso della parte reale: siano $z = \alpha + j\beta$, $y = \dfrac{1}{z} \rightarrow \mathrm{Re}(y) \neq \dfrac{1}{\alpha}$, $\mathrm{Re}(y) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$

2.3 Teoremi fondamentali

- Teorema di Stokes (rotore)
  - Si applica a campi vettoriali su una linea chiusa orientabile ed orientata in modo coerente alla normale della superficie tramite regola della mano destra
  - $\oint_s \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_\Omega \nabla \cdot \vec{F} d\Omega$
- Teorema di Gauss (divergenza)
  - Si applica ad un campo vettoriale su una superficie chiusa semplice ed orientata con bordo regolare Ω
  - $\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} d\Omega = \iint_\Omega \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_\Omega \left(\vec{F} \cdot \vec{n}\right) dS$

2.4 Sistemi di coordinate

- Coordinate cartesiane
  - Elemento di spostamento infinitesimo $dl = dx\vec{u_x} + dy\vec{u_y} + dz\vec{u_z}$
  - Elemento di volume $dV = dxdydz$
- Coordinate cilindriche
  - Elemento di spostamento infinitesimo $dl = d\rho\vec{u_\rho} + \rho d\phi\vec{u_\phi} + dz\vec{u_z}$

- Elemento di volume $dV = \rho d\rho d\phi d_z$

- Coordinate polari
  - Elemento di spostamento infinitesimo $dl = dr\vec{u_r} + Rd\theta\vec{u_\theta} + R\sin\theta d\phi\vec{u_\phi}$
  - Elemento di volume $dV = R^2 \sin\theta d\theta d\phi dR$

2.5 Operatori differenziali

- Gradiente
  - campo scalare $\rightarrow$ campo vettoriale
  - $\nabla F(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{u_z}$
- Divergenza
  -
  - $\nabla \cdot \vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_x}{\partial z}$
- Rotore
  - campo vettoriale $\rightarrow$ campo vettoriale
  - $\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{u_x} + \left(\frac{\partial F_c}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{u_y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{u_z}$

2.6 Equazioni di Maxwell nel vuoto

1. Legge di Gauss elettrica $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
2. Legge di Gauss magnetica $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
3. Legge di Faraday $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
4. Legge di Ampere-Maxwell $\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

3 Elettrostatica

- Legge di Coulomb $\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2}\vec{a_r} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{R_q} - \vec{R_p})}{|\vec{R_q} - \vec{R_p}|^3}$
- Legge di Gauss $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\Omega \leftrightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_\Omega}{\epsilon}$

3.1 Campo Elettrico

- Campo $\vec{E}$ in presenza di cariche puntiformi $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{R_q} - \vec{R_p})}{|\vec{R_q} - \vec{R_p}|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2}\vec{a_r}$
- Densità di flusso elettrico $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$, $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{(\vec{R_q} - \vec{R_p})}{|\vec{R_q} - \vec{R_p}|^3} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2}\vec{a_r}$
- Densità superficiale di carica $\sigma = D_n = \epsilon E_n$6t
- Momento di dipolo elettrico $\vec{p} = Q\vec{d}$
- Potenziale elettrostatico $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl} \Rightarrow V = -\int \vec{E} \cdot \vec{dl}$
- Relazioni tra $\vec{D}$ ed $\vec{e}$ $\nabla \cdot (\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho_\Omega$, $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$
- All'interno di mezzi lineari $\vec{P} = \epsilon_0\chi\vec{E}$ con χ detta suscettività elettrica, $\chi \geq 0$
- Relazione tra ϵ e χ $\epsilon = (1 + \chi_e)\epsilon_0 = \epsilon_0\epsilon_r \to \epsilon_r = 1 + \chi_e \to \vec{D} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$
- Relazione tra $\vec{P}$, $\vec{D}$,$\vec{E}$ nei mezzi isotropi $\vec{P}\|\vec{D}\|\vec{E}$
- Energia del sistema $W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_iV_i = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho_\Omega V d\Omega = \frac{1}{2}\int_s \vec{D} \cdot \vec{E} d\Omega = \frac{1}{2}\int_s \epsilon|\vec{E}|^2 d\Omega$
- Densità di energia $w_e = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2}\epsilon|\vec{E}|^2$

3.1.1 Interfaccia tra due mezzi

- **conduttori** (componente tangenziale) $E_{1t} = E_{2t}$, $\vec{a_n} \times (\vec{E_2} - \vec{E_1}) = 0$, $\frac{\vec{D_{1t}}}{\vec{D_{2t}}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$
- **conduttori** (componente normale) $D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$, $\vec{a_n} \cdot (\vec{D_2} - \vec{D_1}) = \rho_s$, $\epsilon_{2n}E_{2n} - \epsilon_{1n}E_{1n} = \rho_s$
- **dielettrici** (componente tangenziale) $E_{2t} = E_{1t}$, $D_{2t} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}D_{1t}$
- **dielettrici** (componente normale) $D_{2n} = D_{1n}$, $E_{2n} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}E_{1n}$
- **conduttore e dielettrico** (componente tangenziale) $E_{2t} = 0$, $D_{2t} = 0$
- **conduttore e dielettrico** (componente normale) $D_{2n} = \rho_s$, $E_{2n} = \frac{\rho_s}{\epsilon_2}$

3.2 Capacità elettrica

- Condensatore a facce piane parallele $C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}$
- Formula generale $C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint\limits_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{-\int\limits_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$
- Energia immagazzinata in un condensatore $W_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

3.3 Corrente elettrica / Legge di Ohm

- Velocità di deriva $\vec{v_d} = \mu_q \vec{E}$, $\vec{v_d} \| \vec{E}$
- Densità di corrente $\vec{J} = qN\vec{v_d} = qN\mu_q\vec{E} = \sigma\vec{E}$ con σ detta conducibilità del mezzo
- In un conduttore ideale, si ha $\mu \to \infty$, $\sigma \to \infty$

4 Magnetostatica

- Legge di Ampere $\oint\limits_c \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int\limits_s \vec{J} \cdot \vec{ds} \leftrightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

4.1 Campo Magnetico

- Legge di Biot Savart (differenziale) $d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 \vec{dl}_1 \times [I_2 \vec{dl}_2 \times \vec{a_{12}}]}{R^2}$
- Legge di Biot Savart (integrale) $\vec{F_{12}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint\limits_{c_1} \oint\limits_{c_2} \frac{\vec{dl}_1 \times [\vec{dl}_2 \times \vec{a_{12}}]}{R^2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint\limits_{c_1} \oint\limits_{c_2} \frac{\vec{a_{12}} \cdot [\vec{dl} \cdot \vec{d2}]}{R^2}$, $\vec{F_{12}} = -\vec{F}21$
- Densità di flusso magnetico (differenziale) $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 \vec{dl}_2 \times \vec{a_{12}}}{R^2}$
- Densità di flusso magnetico (integrale) $\vec{B} = \oint\limits_{c_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 \vec{dl}_2 \times \vec{a_{12}}}{R^2} = \oint\limits_{c_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \cdot (\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2)}{R^2}$
- Campo magnetico $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$
- Autoinduttanza magnetica $L_{11} = \frac{\Phi 11}{I_1} = \frac{\int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{d}_1}{I_1}$ con $\vec{B}_1 = \frac{\mu I_1}{4\pi} \oint_{c1} \frac{\vec{dl} \cdot \vec{ar}}{R^2}$, $\Phi_{m,11} = \frac{\mu I_1}{4\pi} \int\limits_{s_1} (\oint\limits_{c1} \frac{\vec{dl} \cdot \vec{a_r}}{R^2}) ds$
  $\Rightarrow L_{11} = \frac{\mu}{4\pi} \int\limits_{s_1} (\oint\limits_{c_1} \frac{\vec{dl} \times \vec{a_r}}{R^2}) \cdot \vec{ds}$
- Mutua induttanza $L_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \int\limits_{s_2} \left(\int\limits_{c_1} \frac{\vec{dl} \times \vec{a_r}}{R^2} \right) \cdot \vec{ds}$
- Energia del sistema $W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2$
- Densità di energia $w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu H^2$

4.1.1 Campo Magnetico nei materiali

- Momento di dipolo magnetico $\vec{m} = A \cdot I \cdot \vec{a_n}$
- Densità di momento magnetico $\vec{M} = \lim\limits_{\Delta\Omega \to 0} \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta\Omega}$ se il mezzo è lineare $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ con χ_m detta suscettività magnetica
- Permeabilità del mezzo $\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0 (1 + \chi_m)$
- Relazione tra $\vec{H}$ e $\vec{M}$: $\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

4.1.2 Interfaccia tra due mezzi

- Componente tangenziale $H_{2t} - H_{1t} = J_{sn}, \; \dfrac{J_{2t}}{\sigma_2} = \dfrac{J_{1t}}{\sigma_1}$
- Componente normale $H_{2n} = \dfrac{\mu_1}{\mu_2} H_{1n}, \; B_{2n} = B_{1n}, \; \vec{a_n} \cdot \left(\vec{B_2} - \vec{B_1}\right) = 0, \; \rho_s = \left(\epsilon_2 - \epsilon_1 \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) E_{2n}$, $\rho_s = \left(\epsilon_1 - \epsilon_2 \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) E_{1n}$

4.2 Resistenza elettrica / Legge di Joule

- Resistenza $R = \dfrac{V}{I} = \dfrac{-\displaystyle\int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\displaystyle\oint_s \vec{J} \cdot \vec{ds}} = \dfrac{1}{\sigma} \dfrac{\displaystyle\int_{p_1}^{p_2} \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\displaystyle\oint_s \vec{E} \cdot \vec{ds}}$
- Relazione tra resitenza e capacità $R \cdot C = \dfrac{\epsilon}{\sigma} \leftrightarrow \dfrac{G}{C} = \dfrac{\sigma}{\epsilon}$
- Legge di Joule (differenziale) $\dfrac{\partial P}{\partial \Omega} = \vec{E} \cdot \vec{J}$ detta anche potenza specifica
- Legge di Joule (integrale) $P = \displaystyle\int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} \, d\Omega$

5 Regime dinamico

- Legge di Faraday $\oint_c \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{ds}$ se la superficie non cambia nel tempo
- Circuitazione di $\vec{H}$ e corrente di spostamento $\oint_c \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_s \vec{J} \cdot \vec{ds} + \frac{d}{dt} \int_s \vec{D} \cdot \vec{ds}$
- Legge di conservazione della carica $\oint_s \vec{J} \cdot \vec{ds} = -\frac{d}{dt} \int_\Omega \rho_\Omega \, d\Omega$

5.1 Teorema di Poyinting

- Vettore di Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- Vettore di Poyting (dominio dei fasori) $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$
- Teorema di Poynting $P_{diss} = \oint_\Sigma \vec{S} \cdot d\,\Sigma$
- Vettore di Poynting associato ad un onda piana $\vec{S_{ist}} = \frac{A^2}{\eta_0} \cos^2(\omega t)\, \vec{a_z}$, $\vec{S_{ave}} = \frac{A^2}{2\eta_0}\, \vec{a_z}$
- Vettore di Poynting associato ad un onda piana (dominio dei fasori) $\vec{S_{ist}} = \frac{1}{2} Re[\vec{E} \times \vec{H}^*]$

6 Onde Piane

- Equazione di Helmoltz (onda piana uniforme senza perdite) $\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial t^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2} = 0$
- Equazione di Helmoltz (dominio dei fasori) $\nabla^2 \vec{E} = \gamma^2 \vec{E}$
- Lunghezza d'onda nel vuoto $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{c}{f}$
- Lunghezza d'onda nel mezzo $\lambda = \frac{c}{f} \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$
- Costante di propagazione $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \alpha + j\beta$ dove $\alpha = costante\ di\ attenuazione > 0$,
  $\beta = costante\ di\ fase = \frac{2\pi}{\lambda}$
- Velocità della luce (velocità di propagazione delle onde) $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \cong 3 \cdot 10^8$
- Impedenza intrinseca del mezzo $\eta = \frac{E^+}{H^+}$
- Impedenza d'onda $Z = \frac{E^+ - E^-}{H^+ - H^-}$

- Indice di rifrazione $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$
- Densità di potenza trasportata $|S| = \frac{1}{2}\frac{|\vec{E}|^2}{\eta} = \frac{1}{2}|\vec{H}|^2\eta$

6.1 Polarizzazione

- Sia $\vec{E}(x, y, z.t)$ un campo elettrico con componenti in sole x e z. Allora, sul piano trasverso ($z = 0$) si ottiene:
  - $\vec{E}(z, t) = E_x \cos(\omega t)\vec{a_x} + E_Y \cos(\omega t + \phi_0)\vec{a_y}$
  - Si distinguono due casi particolari:
    1. $\phi_0 = 0$, E_x, E_y qualsiasi. Allora: $\xi = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right)$, $|\vec{E}(0, t)|^2 = (E_x^2 + E_y^2)\cos(\omega t)$ **Polarizzazione lineare**
    2. $\phi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$, $E_x = E_y = E$. Allora: $\xi(t) = \mp\omega t$, $|\vec{E}|^2 = E^2$ **Polarizzazione circolare**

6.2 Incidenza delle onde

6.2.1 Incidenza normale su discontinuità piana

Mezzi ideali e senza perdite, onda elettromagnetica con componenti in x e y nella sezione $z = cost$

- Coefficiente di riflessione $\Gamma = \Gamma(0)\exp(2j\beta z)$, dove $\Gamma(0) = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$, $|\Gamma(0)| \leq 1$
- Coefficiente di trasmissione $T = T(0)\exp(2j\beta z)$, dove $T(0) = \frac{2n_2}{n_2 + n_1} = 1 + \Gamma(0)$, $|T(0)| \leq 2$
- Onda riflessa $E_1^-(0) = E_1^+(0) \cdot \Gamma(0)$
- Onda trasmessa $E_2^+(0) = E_1^+(0) \cdot T(0)$
- Impedenza d'onda $Z(z) = \eta_1\left(\frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}\right)$

6.2.2 Incidenza non normale

Ipotesi: onda su piano xz

- Impedenza TE $\eta_n^{TE} = \frac{\eta}{cos(\theta_n)}$
- Impedenza TM $\eta_n^{TM} = \eta \cdot cos(\theta_n)$
- Componente TE dell'onda ha componente y
- Componente TE dell'onda ha componenti xz
- Angolo di incidenza $\theta = \arctan\left(\frac{\beta_z}{\beta_x}\right)$
- Costante di propagazione $\gamma \rightarrow$ va proiettata nelle direzioni x e y tramite sin e cos

6.2.3 Trasmissione totale

- Indice di rifrazione $\Gamma = 0 \leftrightarrow Z_L = Z_{in}$
- Angolo di Brewster $\theta_P = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}\right) = \arctan\frac{n_2}{n_1}$

6.3 Mezzi attraversati dalle onde

6.3.1 Mezzo senza perdite

- $\sigma = 0 \Rightarrow \gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$
- $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 377\,\Omega$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c \cong 3 \times 10^8\,m/s$
- $\lambda = \frac{v}{f}$
- Impedenza intrinseca del vuoto (dominio dei fasori) $\frac{\vec{E^+}}{\vec{H^+}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \eta$, $\frac{\vec{E^-}}{\vec{H^-}} = -\frac{j\omega\mu}{\gamma} = -\eta$

6.3.2 Buon conduttore

- $\sigma >> \omega\epsilon \Rightarrow \gamma = \sqrt{-\omega^2\mu\epsilon}$
- $\eta = \frac{1+j}{sqrt2}\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}} \Rightarrow \alpha \cong \beta \cong \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$
- $v \cong \frac{\omega}{\beta} \cong \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$
- $\lambda = 2\pi\delta = \frac{v}{f}$
- Spessore pelle $\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$
- Costante dielettrica $\epsilon = \epsilon^{'} + j\epsilon^{''}$
- Costante di permeabilità magnetica $\mu = \mu^{'} + j\mu^{''}$

7 Linee TEM

- Equazione 1 $\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = -\frac{\partial I(z,t)}{\partial z} \cdot L$ con L = induttanza per unità di lunghezza
- Equazione 2 $\frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = -\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} \cdot C$ con C = capacità per unità di lunghezza
- Uguaglianze $\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon}$, $L_0 C_0 = \mu_0 \epsilon_0$
- Impedenza $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$

7.1 Potenza ed energia in una linea

- Potenza disponibile $P_D = \frac{|V_g|^2}{8R_g} = P_D$
- Potenza sul carico $P_L = P_D(1 - |\Gamma_L|^2)$
- Potenza sul carico (in funzione della corrente) $P_L = \frac{1}{2}|V|^2 \operatorname{Re}(Y)$
- Potenza sul carico (in funzione della tensione) $P_L = \frac{1}{2}|I|^2 \operatorname{Re}(Z)$
- Densità di energia trasmessa $S_{tra} = S_{inc}\left(1 - |\Gamma|^2\right)$

7.2 Corrente e tensione in una linea non attenuativa

- Tensione $|V_L| = |V^+(0)|\,|1 + \Gamma_L|$
- Corrente $|I_L| = |I^+(0)|\,|1 - \Gamma_L|$

7.3 Cavo coassiale

- Capacità $C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$ con $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$
- Induttanza $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
- Attenuazione conduttore $\alpha_c = \frac{R}{2Z_C}$
- Attenuazione dielettrico $\alpha_d = \frac{GZ_C}{2} = \frac{\pi}{\lambda}\frac{\epsilon''}{\epsilon'}$
- Impedenza $Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\eta}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
- Resistenza $R = \frac{R_s}{2\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, $R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{1}{\sigma\delta}$

- Conduttanza $G = C\frac{\omega\epsilon"}{\epsilon'} = \frac{2\pi\omega\epsilon"}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

8 Linee quasi TEM

- Velocità nell'onda $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Costante dielettrica efficace $\epsilon_{eff} = \frac{LC}{\mu_0}$

9 Linee TE in guida rettangolare

Sia a il lato della guida che giace sull'asse x e sia b il lato della guida che giace sull'asse y. Allora le ampiezze e le frequenze di taglio dei modi TM_{mn} sono:

Modo	Lunghezza di taglio	Frequenza di taglio
TE_{10}	$\lambda_c = 2a$	$f_c = \frac{c}{2a}$
TE_{01}	$\lambda_c = 2b$	$f_c = \frac{c}{2b}$
TE_{20}	$\lambda_c = a$	$f_c = \frac{c}{a}$
TE_{02}	$\lambda_c = b$	$f_c = \frac{c}{b}$

- Pulsazione di taglio $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\omega\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$ con a, b interi
- Impedenza modale $Z_{te} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)}}$
- Frequenza di taglio $f_c = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}$
- Velocità di gruppo $v_g = v\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c{}^2}{\omega}\right)}$
- Lunghezza d'onda di gruppo $\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c{}^2}{\omega}\right)}}$
- Potenza trasportata $P = \frac{|E_0|^2 ab}{4 \cdot Z_{te}}$
- Coefficiente di attenuazione $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_c}\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$

10 Adattamento di impedenza

L'obiettivo dell'adattamento di impedenza è portare la massima potenza disponibile sul carico $P_L = P_D$ annullando quindi il coefficiente di riflessione ($\Gamma = 0$).

10.1 Strutture adattanti

Esistono 3 tipologie di strutture adattanti:

- Trasformatore $\dfrac{\lambda}{4}$ - solo per carichi **reali**
- Stub semplice - per carichi **reali** o **complessi**
- Stub doppio - per carichi **reali** o **complessi**

10.1.1 Trasformatore lambda-quarti

Funziona esclusivamente con carichi reali. È costituito da un pezzo di conduttore lungo un quarto della lunghezza d'onda λ. Impedenza del trasformatore: $Z_x = \sqrt{Z_{in} \cdot Z_L}$ con Z_{in} impedenza di ingresso e Z_L impedenza di carico.

10.1.2 Trasformatore lambda-quarti con neutralizzazione

Risolve il problema dell'impossibilità dei trasformatori lambda-quarti di adattare carichi complessi. È composto da un tratto di neutralizzazione lungo l_n e da un trasformatore lambda-quarti di impedenza Z_x. Il tratto di neutralizzazione sarà necessario a trasformare in impedenza puramente reale il carico. Il trasformatore lambda-quarti adatterà l'impedenza al valore caratteristico.
Operativamente, si dovrà:

1. Normalizzare l'impedenza del carico Z_L all'impedenza caratteristica Z_C ottendendo $\overline{Z_L}$
2. Tracciare la circonferenza con centro in 1 e passante per $\overline{Z_L}$
3. Partendo da $\overline{Z_L}$, ruotare in senso orario sulla circonferenza appena tracciata fino ad intersecare l'asse reale nel punto A
4. Il valore di l_n, normalizzato alla lunghezza d'onda λ, sarà letto come differenza tra il prolungamento del punto A sulla scala esterna della carta di Smith e medesimo prolungamento di $\overline{Z_L}$
5. Denormalizzare $\overline{Z_L}$ per ottenere Z_L
6. Il valore dell'impedenza del trasformatore sarà data da $Z_x = \sqrt{Z_{in} \cdot Z_L}$

10.1.3 Stub semplice

Detto anche stub *singolo*, è realizzato con un tratto di linea di trasmissione in *c.c.* o in *c.a* di lunghezza l_s, opportunamente collegato in serie o in parallelo alla linea ad un tratto di distanza d_s dal carico. Esistono due tipi di stub semplice:

1. Stub parallelo - si lavora con le ammettenze $\overline{Y_L} = \dfrac{Y_L}{Y_C} = \dfrac{Z_C}{Z_L}$
2. Stub serie - si lavora con le impedenze $\overline{Z_L} = \dfrac{Z_L}{Z_C}$

Si può cercare l_s in modo che dia origine ad un *corto circuito* o a un *circuito aperto*, mentre d_s potrà assumere un solo valore.

1. Il *circuito aperto* si troverà a destra dell'asse reale della carta di Smith
2. Il *corto circuito* si troverà a sinistra dell'asse reale della carta di Smith

La differenza tra stub in *circuito aperto* e in *corto circuito* sarà pari a mezzo giro sulla carta di smith $\frac{\lambda}{4}$.
Operativamente, per gli stub *serie* si dovrà:

1. Normalizzare l'impedenza del carico Z_L all'impedenza caratteristica Z_C (o impedenza di ingresso) ottendendo $\overline{Z_L}$
2. Segnare sulla carta di Smith il valore di $\overline{Z_L}$
3. Tracciare la circonferenza a modulo costante pari a $\overline{Z_L}$
4. Partendo da $\overline{Z_L}$, ruotare in senso orario sulla circonferenza appena tracciata fino ad intersecare la circonferenza di raggio unitario nel generico punto A
5. Il valore di d_s, normalizzato alla lunghezza d'onda λ, sarà letto come differenza tra il prolungamento del punto A sulla scala esterna della carta di Smith e medesimo prolungamento di $\overline{Z_L}$
6. Partendo da A si procede ruotando fino a $Z = 0$ (per uno stub c.c.) o $Z = \inf$ (per uno stub c.a.) nel generico punto B
7. Analogamente a quanto trovato per d_s, la lunghezza dello stub sarà pari alla differenza tra il prolungamento del punto B e medesimo prolungamento di A

Il procedimento sarà analogo per gli stub *parallelo* ma si dovrà lavorare con le ammettenze al posto delle impedenze.

10.1.4 Stub doppio

È una struttura adattante formata da due stub semplici di lunghezza l_1 e l_2 posti a distanza d_s (fissata) tra di loro. I due stub possono essere sia collegati in serie che in parallelo

1. La lunghezza del primo stub (il più vicino al carico) è ricercata in modo da eguagliare la parte reale dell'impedenza carico a quella della linea
2. La lunghezza del secondo stub è ricercata in modo da annullare la parte immaginaria dell'impedenza di carico

Operativamente, per gli stub *parallelo* si dovrà

1. Normalizzare l'ammettenza del carico Y_L all'impedenza caratteristica Y_C (o impedenza di ingresso) ottendendo $\overline{Y_L}$
2. Segnare sulla carta di Smith il valore di $\overline{Y_L}$
3. Tracciare la circonferenza a modulo costante pari a $\overline{Y_L}$ *"circonferenza di partenza"*
4. Rutotare la circonferenza di raggio unitario in senso antiorario di un angolo pari a d_s attorno al suo centro *"circonferenza di arrivo"*

5. Si trovano quindi 2 intersezioni tra la due circonferenze ed è necessario sceglierne uno *"punto di partenza"* A
6. Tracciare la circonferenza con centro in 1 e passante per A e ruotare di una lunghezza pari a d_s fino ad arrivare al *"punto di arrivo"* B
7. Calcolare le ammettenze dei due stub $Y_{S1} = A - \overline{Y_L}$ e $Y_{S2} = -\operatorname{Im}(B)$
8. Le lunghezze dei due stub saranno quelle che portano i loro rispettivi valori di ammettenza tale da avere un c.c. $Y = \inf$ o un c.a. $Y = 0$, dipendentemente dalla struttura che si sta cercando di realizzare

Il procedimento sarà analogo per gli stub *serie* ma si dovrà lavorare con le impedenze al posto delle ammettenze. **Nota:** generalmente d_s è un dato del problema.

10.2 Note sulla Carta di Smith

- Ruotare in senso orario corrisponde ad una direzione verso il carico (allontanandosi quindi dal generatore)
- 1 giro completo della carta corrisponde a 0.5λ
- La carta di Smith può essere usata indifferentemente con impedenze e ammettenze
- Ogni tacca sulla circonferenza esterna corrisponde a $\dfrac{1}{500} = 0.002$ di lambda.

10.3 Potenza in una linea adattata

- Potenza al carico $P_L = P_D = \dfrac{|V_g|^2}{8R_g}$
- La potenza disponibile è uguale in qualsiasi punto della linea

11 Antenne

- Direttività $D = \dfrac{4\pi}{\int f(\theta,\phi)d\Omega} = \dfrac{S_{max}}{S_{iso}}$
- Area efficace $A_e = \dfrac{|l_e|^2\eta_0}{4R}$
- Relazione universale $\dfrac{G}{A_e} = \dfrac{4\pi}{\lambda^2}$
- Tensione a vuoto $V_0 = l_e \cdot E_{inc} \cdot \sqrt{f_r(\theta,\phi}$
- Potenza ricevuta $P_R = P_D = S_{inc} \cdot A_e \cdot f(\theta,\phi)$

11.1 Dipolo Hertziano

- Lunghezza efficace $l_e = l$
- Area efficace $A_e = \dfrac{3}{8}\dfrac{\lambda^2}{\pi}$
- Funzione di direttività $f(\theta,\phi) = \sin^2(\theta)$
- Tensione a vuoto $V_0 = l_e \cdot E_{inc}$
- Densità di potenza $S = \dfrac{P_t D}{4\pi R^2} f(\theta,\phi)$
- Resistenza di radiazione $R_R = \dfrac{2}{3}\pi\eta_0 \left(\dfrac{l}{\lambda}\right)^2$
- Campo elettrico irradiato (campo lontano) $E_\theta = \dfrac{j\omega\mu Il}{4\pi R} \exp -j\beta R$ con θ colatitudine e R distanza tra punto considerato e centro del dipolo

11.2 Spira magnetica

Ipotesi: incidenza perpendicolare, adattamento di polarizzazione

- Lunghezza efficace $l_e = l_m \dfrac{Z_{in}}{\eta_0}$
- Funzione di direttività $f(\theta,\phi) = 1$
- Tensione a vuoto $V_0 = j\omega\mu \dfrac{E_{inc}}{\eta_0} S$
- Densità di potenza $S = \dfrac{P_t D}{4\pi R^2} f(\theta,\phi)$
- Resistenza di radiazione $R_R = \eta_0 \dfrac{8\pi^3}{3} \left(\dfrac{5}{\lambda^2}\right)^2$