Fondamenti di Automatica – AA2018/19

Argomenti teorici oggetto di domande

Valerio Nappi

1. Stabilità: definizioni, stabilità interna, stabilità alla Lyapunov.
2. Relazione tra stabilità e autovalori: teoremi.
3. Criterio di Routh: enunciato.
4. Teoremi del valore iniziale e finale.
5. Teorema della risposta in frequenza e suo corollario.
6. Sistemi di controllo in anello aperto: stabilità, realizzabilità, robustezza.
7. Criterio di Nyquist.
8. Criterio di Bode.
9. Regolatori PID: struttura e anti-windup.
10. Teorema di Shannon, filtro anti aliasing.
11. Stabilità dei sistemi a tempo discreto.

me@valerionappi.it

https://5n44p.github.io/triennale-elettronica-polimi/

1 Stabilità: definizioni, stabilità interna, stabilità alla Lyapunov

Sia $x\ t\ = f(x\ t\ , u\ t\ )$ con $u\ t\ = u$ costante per $t \geq 0$. Sia inoltre $x_{0,n}$ il movimento nominale del sistema, e $x\ 0\ = x_{0,p} \neq x_{0,e}$ il movimento perturbato. Il movimento si dice stabile se:

$$\forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad t.c. \quad \forall x_{0,p} \ \left\|x_{0,p} - x_{0,e}\right\| < \delta$$

$$si\ abbia \left\|x_p(t) - x_{0,e}\right\| < \varepsilon \quad \forall t > 0$$

Il sistema si dice instabile se non è stabile. Il sistema si dice asintoticamente stabile se $\lim_{t \to \infty} \left\|x_p(t) - x_{0,e}\right\| = 0$.

1.1 Teorema di Lyapunov

Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e sia $v(x) \in C^1(\mathbb{R})$. Si dice:

- $v(x)$ definita positiva in x se $v\ x\ = 0$ e $v\ x\ > 0\ \forall x \in B_r(x)$
- $v(x)$ semi definita positiva in x se $v\ x\ = 0$ e $v\ x\ \geq 0\ \forall x \in B_r(x)$
- $v(x)$ definita negativa in x se $v\ x\ = 0$ e $v\ x\ < 0\ \forall x \in B_r(x)$
- $v(x)$ semi definita negativa in x se $v\ x\ = 0$ e $v\ x\ \leq 0\ \forall x \in B_r(x)$

Dato allora $x = f\ x\ \ t.c.\ f\ x\ \in C^1(B_r(x))$ con x equilibrio, se:

- $\exists\ v(x) \in C^1(B_r(x))$ definita positiva
- $v(x)$ è semidefinita negativa lungo le traiettorie del sistema in $B_r(x)$

Allora x è un punto di equilibrio stabile.

me@valerionappi.it

2 Relazione tra stabilità e autovalori: teoremi

Siano λ_i *per* $i = 1,2,3 \dots n$ gli autovalori di un sistema lineare tempo invariante di ordine n.

2.1 Teorema di asintotica stabilità

Se $Re\ \lambda_i\ < 0\ \forall i \iff$ il sistema è asintoticamente stabile.

2.2 Teorema di instabilità

Se $\exists\ \lambda_i\ t.c.\ Re\ \lambda_i\ > 0 \implies$ il sistema è instabile.

2.3 Teorema di semplice stabilità

Se $Re\ \lambda_i\ \leq 0\ \forall i\ e\ \forall\ j\ t.c.\ Re(\lambda_j) = 0\ si\ ha\ mg(\lambda_j) = ma(\lambda_j) \iff$ il sistema è semplicemente stabile.

3 Criterio di Routh: enunciato

Sia A, B, C, D un sistema LTI. Sia inoltre $\Delta_A\ \lambda\ = \alpha_0\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$ il polinomio caratteristico della matrice A del sistema.

Sia la tabella di Routh definita come:

$$\begin{matrix} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 \\ h_1 & h_2 & 0 \\ k_1 & k_2 & 0 \\ l_1 & 0 & 0 \\ m_1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Dove, in generale:

$$h_2 = -\frac{1}{\alpha_1} det \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_5 \end{bmatrix}$$

Il sistema è A.S. $\iff$ tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono concordi e diversi da zero.

4 Teoremi del valore iniziale e finale

Data la trasformata di Laplace F(s) di una funzione f(t), si ha che:

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

me@valerionappi.it

5 Teorema della risposta in frequenza e suo corollario

Sia $u\ t\ = U \sin(\omega_0 t + \varphi)$ e sia (A, B, C, D) un sistema LTI senza autovalori in ω_0.

Allora $\exists!\, x\ 0\ = (j\omega_0 I - A)^{-1}B$ tale che $y\ t\ = Y \sin(\omega_0 t + \Psi)$, con $Y = |G(j\omega_0)|U$ e $\Psi = \varphi + \measuredangle[G(j\omega_0)]$

5.1 Corollario

Se (A, B, C, D) è asintoticamente stabile:

$$y\ t\ \to y\ t\ \ per\ t \to \infty\ \forall x(0)$$

6 Sistemi di controllo in anello aperto: stabilità, realizzabilità, robustezza

È possibile realizzare sistemi di controllo in anello aperto. Nonostante questo, i sistemi di controllo in anello aperto presentano alcune criticità. Siano allora $P(s)$ la fdt del sistema sotto controllo e $C(s)$ la fdt del controllore. Sia inoltre $H(s)$ il trasferimento di un disturbo $d(s)$ all'uscita del controllore.

Risulta evidente che il sistema abbia trasferimento da $y_0(s)$ a $Y(s)$:

$$\frac{Y\ s}{y_0\ s} = C\ s\ P\ s$$

Si osserva allora che il controllore ideale è:

$$C\ s\ = P\ s\ ^{-1}$$

Questo approccio presenta alcune criticità:

1. La soluzione è basata sulle cancellazioni, ma se $P\ s$ presenta uno zero con $Re\ z\ > 0$, si ha una cancellazione critica, inficiando la stabilità del sistema.
2. Se $P\ s$ ha più poli che zeri, il controllore $C(s)$ non risulta realizzabile
3. Nel caso di incertezze sul guadagno di $P\ s\ = (\mu \pm \delta)\frac{N(s)}{D(s)}$, la serie col controllore risulta:

   $$F\ s\ = C\ s\ P\ s\ = 1 \pm \delta \frac{N(s)}{D(s)}$$

   E quindi un sistema non robusto.

me@valerionappi.it

7 Criterio di Nyquist

Si definisce diagramma di Nyquist la curva Γ chiusa nel piano di GauBB di $L(j\omega)$ per $-\infty < \omega < +\infty$, orientata per ω crescenti. Il criterio di Nyquist prescrive che, detto p il numero di poli con *Re>0*, e detto n il numero di giri di Γ attorno a *-1*, il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se n è ben definito e *n=p*.

8 Criterio di Bode

Sia $L(j\omega)$ la funzione d'anello di un sistema retroazionato. Sia *p=0*, e il diagramma di bode di $L(j\omega)$ taglia l'asse degli *0dB* una sola volta dall'alto al basso.

Il sistema risulta A.S. se e solo se $\mu > 0$ e $\varphi_m > 0$.

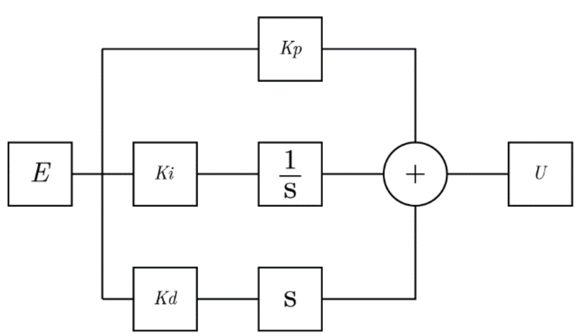
8.1 Approssimazione del criterio di Bode per sistemi a fase minima

Se $L(j\omega)$ è a fase minima, il sistema è A.S. se $L(j\omega)$ taglia l'asse degli *0dB* con una pendenza di *-20dB/dec*.

9 Regolatori PID: struttura e anti-windup

Un regolatore PID è la somma di tre regolatori: proporzionale, integrale e derivativo.

I controllori con componente integrale e un attuatore con azione limitata (che va incontro a fenomeni di saturazione), presentano il problema della carica integrale o windup.



me@valerionappi.it

https://5n44p.github.io/triennale-elettronica-polimi/