

# Masse og kraft

Jonas Telle

Department of Physics, University of Oslo, N-0316 Oslo, Norway

(Dated: Spring 2025)

For å måle massen til et aluminiumslodd konstruerer vi tre vekter rundt en bladfjær som avbøyes ved belastning: i) Ved å måle utslaget direkte med et måleaur, ii) ved å måle høyden av en reflektert laserstråle og iii) med strekkklapper og en Wheatstone-bro. Vi finner ingen stor kvalitetsforskjell mellom vektene: Følsomheten er rundt 30g og det dynamiske området løper fra  $10^{-2}$ kg til 1kg for alle tre. Om vi likevel skal krone en av vektene som den beste, velger vi måleursvekta, som gir et masseanslag på aluminiumsloddet på  $2.17 \pm 0.03$ kg. Masseanslagene fra alle vektene samsvarer innenfor usikkerheten. Vi tror likevel at strekkklappvekta har potensiale for høyere presisjon enn de andre vektene dersom man bruker enten høyere påtrykt spenning eller en mer sensitiv spenningsmåler.

## I. Introduksjon

Masse er en av de fundamentale størrelsene vi er interessert i å måle i fysikken. I dette forsøket sammenlikner vi tre metoder å måle masse på, med utgangspunkt i Hookes lov, altså at avbøyningen av en bladfjær er proporsjonal med kraften som virker på den. Når vi henger en vekt fra bladfjæren er denne kraften gravitasjonskraften, som igjen er proporsjonal med massen. Avbøyningen kan måles i) direkte med et måleaur, ii) optisk, ved å måle høyden der en laserstråle reflektert av bladfjæra treffer veggen, eller iii) elektrisk, med strekkklapper og en Wheatstone-bro. Ved bruk av kalibreringsvekter og lineærregresjon kan vi anslå proporsjonalitetskonstanten for hver metode, og får dermed tre ulike vekter som vi kan bruke til å veie et aluminiumslodd med ukjent masse. Vi er interessert i å vurdere hver av metodene ved å anslå usikkerheten  $\Delta m$  ved ulike utslag, samt følsomheten og dynamisk område. Forsøket gir trening i kalibrering, lineærregresjon og usikkerhetsberegninger, og understreker at alle måleapparater har en iboende usikkerhet.

## II. Teori

Hovedantagelsen som ligger til grunn for vektmålingene våre er at den elastiske deformasjonen av bladfjæra er lineær i hele det området der vi ønsker at vekten vår skal være presis. Dette har godt teoretisk grunnlag i Hookes lov, og vi demonstrerer også denne antagelsens gyldighet eksperimentelt fordi kalibreringsvektene tydelig faller på en nokså rett linje når de pottes mot utslaget i hver av vektene.

I del ii) antar vi små utslag  $dy$  i bladfjæra og at forflytningen i treffpunktet fra laseren på bladfjæra  $dx \ll L$ , der  $L$  er avstanden fra treffpunktet på bladfjæra til treffpunktet på veggen. Vi antar også at avbøyningen kan tilnærmes som en enkel pivot som vist i figur 1. Når bladfjæra avbøyes en liten vinkel  $\theta \approx \frac{dy}{x} \propto dy$ , der vi brukte liten-vinkel-approksimasjonen for  $\tan \theta$ , vil refleksjonsvinkelen øke med  $2\theta$  (se figur 1). Vinkelen laseren lager mot horisontalen er  $\alpha$ , og vi har da følgende anslag

for høyden på treffpunktet på veggen:

$$h(\theta) = L \tan(\alpha + 2\theta) \approx L(\tan \alpha + 2\theta \sec^2 \alpha)$$

der vi Taylor-utvikler  $\tan x$  om  $\alpha$  for å finne et anslag for funksjonsverdien ved en liten perturbasjon  $2\theta$ . Vi ser da at endringen i høyden  $\Delta h(\theta) \approx 2\theta L \sec^2 \alpha \propto \theta$ , som vi innledningsvis viste at igjen var proporsjonal med utslaget  $dy$ . Merk at vi ikke er interessert i proporsjonalitetskonstanten per se, fordi vi ikke ønsker å måle alle størrelsene som inngår i denne og dermed introdusere flere usikkerhetsmomenter. Det er derimot en styrke ved forsøket vårt at vi, gitt en lineær relasjon, kan kalibrere vekta og dermed bestemme proporsjonalitetskonstanten (altså stigningstallet) med god nøyaktighet ved hjelp av regresjon.

Del iii) baserer seg på strekkklapper og en Wheatstones bro. Strekkklappene innheloder hver sin måletråd, hvis resistans varierer ved forlengelse, og er festet på hver sin side av bladfjæra, slik at én komprimeres mens den andre forlenges ved elastisk deformasjon av bladfjæra. Ved å koble disse ( $R_1$  og  $R_2$ ) til en Wheatstone-bro, påtrykke en spenning  $E$  og balansere broa ved å justere motstandene  $R_3$  og  $R_4$  i fjæras likevektsstilling kan vi måle spenningen som funksjon av vekt:

$$e(R_1(m), R_2(m)) = E \left( \frac{R_4}{R_2 + R_4} - \frac{R_3}{R_1 + R_3} \right). \quad (1)$$

Også her kan man forsøke en teoretisk berettigelse av linearitet ved å anta at  $R_1$  og  $R_2$  avhenger affint av deformasjonen,  $R_i = R_0 + k dy$ , der vi vet fra Hookes lov at  $dy \propto m$ , og deretter taylorutvikle brøkene. Dette blir ikke spesielt pent, og vi lener oss derfor på de eksperimentelle resultatene i dette tilfellet; vi skal se at disse gir god evidens for at spenningen er proporsjonal med massen.

Til slutt repeterer vi kort noen grunnleggende konsepter som leseren antas kjent med: Følsomheten til et instrument beskriver den minste størrelsen som kan måles med nøyaktighet, og kan variere avhengig av størrelsesordenen som måles. Med det dynamiske området til vekta mener vi antall størrelsesordner man kan få gode målinger innenfor. Vi bruker minste kvadraters metode til å utføre lineærregresjon og anslår

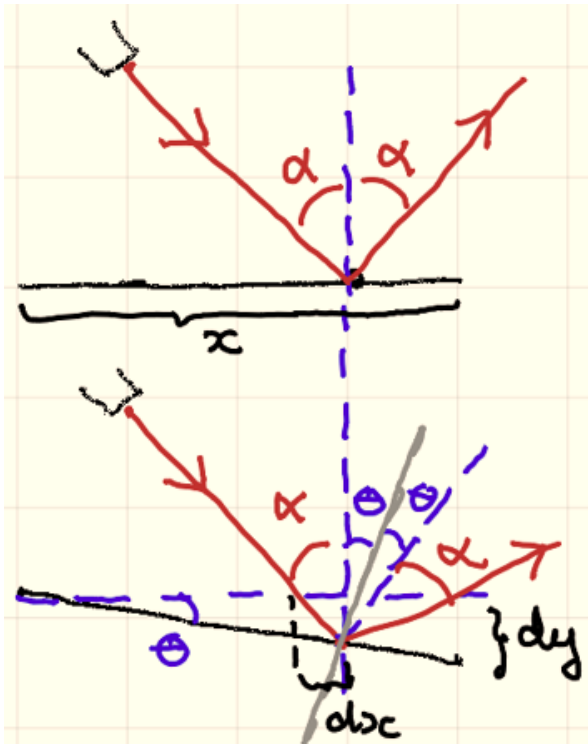


Figure 1. En laserstråle reflekteres av en flate med en liten helningsvinkel  $\theta$  slik at vinkelutslaget fra den opprinnelige flatenormalen endrer seg med  $2\theta$ .

usikkerhetene i koefisientene som beskrevet i kapittel 4 i [1]. Ellers anslår vi usikkerheter ved hjelp av feilpropagering, som også er beskrevet utførlig i samme kilde.

### III. Eksperimentelt

#### A. Utstysliste

- Balansevekt
- Tape og binders
- Kalibreringslodd, OIML-standard klasse 1 (1g, 2 × 10g, 3 × 100g, 500g, 1kg, 2kg)
- Hansker
- Bladfjær
- Kurv med tverrpinne
- Aluminiumslodd
- Måleur (BAKER J02)
- Stativ (Base, stang med skruegang, mellomledd, klype, stang med hull)

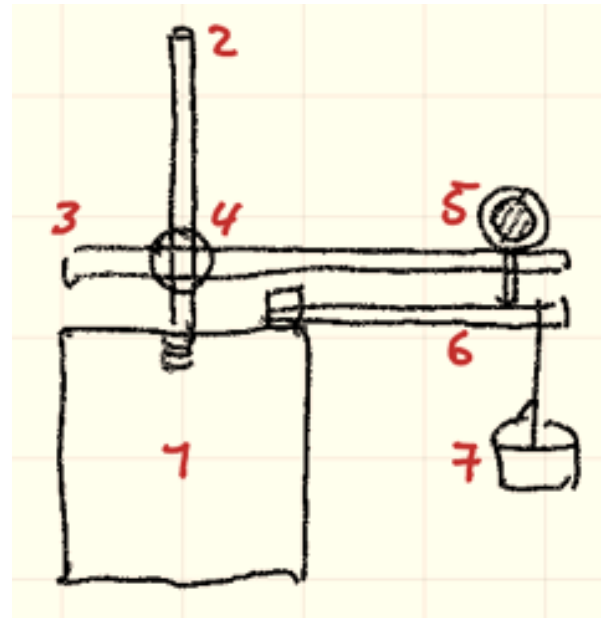


Figure 2. Oppsett for måleurvekta. Tallene betegner: 1) base, 2) stang med skruegang, 3) stang med hull, 4) mellomledd, 5) måleur, 6) bladfjær, 7) kurv festet med tverrpinne.

- Umbraco og skrutrekker
- Laserperker
- Tommestokk
- Ark og penn
- Strekkklapper (premontert på bladfjær)
- Wheatstone-bro
- Spenningskilde
- Multimeter (Fluke 75)

#### B. Måleur

Vi monterer stativet med base, stang med skruegang, mellomledd og stang med hull som vist i figur 2. Til basen festes bladfjæra, og vektskåla henger ytterst i denne. Måleuret føres gjennom stanga med hull. Vi velger først en kontaktposisjon for måleuret et par centimeter fra enden av bladfjæren for å forsikre at vi har god kontakt også når vekten nærmer seg 2.5kg; dette er også en avveining mellom sensitivitet (som er bedre lenger ute) og teoretisk kunnskap som tilsier at Hookes lov først og fremst er gyldig for små utslag i de fleste metaller. Vi kommer tilbake til denne avveiningen senere når vi tester andre posisjoner.

Utslaget på måleuret måles for 22 ulike kalibrerte vekter nokså jevnt fordelt i spennet 0.000 - 2.500kg. Vi oppnår så mange målinger ved å kombinere ulike

sammensetninger av kalibreringsvektene, se utstyrslisten over. En lineærregresjon støtter antagelsen om at sammenhengen mellom utslag og masse er lineær, og vi måler utslaget for aluminiumsloddet og gjør en prediksjon på massen.

Vi kan anslå usikkerheten i vekten  $\Delta m$  ved ulike utslag ved å inverttere lineærregresjonen:

$$m = \frac{h - b}{a},$$

der  $m$  er massen,  $h$  er utslaget,  $a$  er stigningstallet og  $b$  er konstantleddet fra lineærregresjonen. Feilpropagering gir da

$$\Delta m(h) = \sqrt{\frac{\Delta h^2}{a^2} + \left(\frac{b - h}{a^2}\right)^2 \Delta a^2 + \frac{\Delta b^2}{a^2}}, \quad (2)$$

der  $\Delta a$  er usikkerheten i stigningstallet,  $\Delta b$  er usikkerheten i konstantleddet og  $\Delta h$  er usikkerheten i utslaget. Produsenten oppgir en usikkerhet på  $\Delta h_{\text{måle}} = 0.001\text{mm}$  i måleuret, men denne er dominert av oppsettsrelaterte usikkerheter: Vibrasjoner fra andre som jobber rundt oss samt ustabiliteter i stativet - spesielt er basen litt løst festet til bordet - gjør at måleuret vandrer litt og gir litt ulike utslag for den samme massen, selv om vi banker i bordet før hver måling. Ved å måle noen masser flere ganger anslår vi at denne usikkerheten er på omtrent  $\Delta h_{\text{oppsett}} = 0.05\text{mm} \approx \Delta h$ .

Det er rimelig å anta at  $h$ -avhengigheten i  $\Delta m$  vil være liten ettersom utslaget er mindre enn  $10^{-2}\text{m}$ , slik at bidraget fra leddet med  $h^2$  blir lite, gitt at systemet er lineært slik at  $\Delta a$  ikke blir stor. I neste seksjon skal vi se at dette stemmer nokså godt overens med resultatene. Når vi oppgir massemålingen av aluminiumsloddet bruker vi selvsagt masseusikkerheten evaluert i utslagshøyden for dette.

Til slutt anslår vi følsomhet og dynamisk område for denne måleposisjonen eksperimentelt. En måling på 10g gir et utslag akkurat på den anslåtte utslagsusikkerheten  $\Delta h \approx 0.05\text{mm}$ , så dette er den minste størrelsen vi kan måle med nøyaktighet. Også med aluminiumsloddet på vekta får vi et tilsvarende utslag for 10g, som antyder at denne vekta ikke har betydelig dårligere følsomhet øverst i det dynamiske området enn nederst. Dette passer med refleksjonene over, om at  $\Delta m$  har liten  $h$ -avhengighet, og tyder igjen på at Hookes lov holder godt. Vi kan ikke måle vekter noe særlig over 2kg fordi måleuret mister kontakt med fjæra, så det dynamiske området er 2, med solide målinger fra 10g til 1kg.

Nå flytter vi måleurets kontaktposisjon til helt ytterst på fjæra. Her blir utslaget større for samme vekt, men det er fremdeles ikke mulig å lese av endringer på 1g, og for 10g har utslaget bare økt til 0.06mm. Dette er fremdeles så nærme måleusikkerheten at det ikke er hensiktsmessig å angi en bedre følsomhet. Vi måler utslag ved likevektsstilling, 100g, 500g og 1kg for å undersøke linearitet. Merk at selv med 1kg nærmer vi oss måleurets fulle utstreknin, og vi tester derfor ikke tyngre vekter.

Det hadde vært interessant å måle større utslag, fordi vi teoretisk forventer at Hookes lov omsider bør bryte sammen, men vi får dessverre ikke gjort målinger over 10mm og skal se at alle posisjonene synes å gi nokså lineære utslag.

Vi tester ytterligere to plasseringer, først midt på bladfjæra og til slutt langt inne. Konklusjonen er at følsomheten minker dramatisk når vi beveger oss inn på fjæra: I midtstilling kan vi knapt måle 20g, og langt inne er følsomheten knapt 100g! Dette reduserer det dynamiske området til 1 (det er urimelig å forsøke å måle masser oppmot 10kg med oppsettet vårt). Også her finner vi en lineær sammenheng mellom masse og deformasjon.

### C. Refleksjon av laserstråle

Vi tar nå ned måleuret og stanga med hull, og monterer i stedet klypa slik at den holder en laserpeker ned mot den blanke siden av bladfjæra slik at laseren reflekteres og lager et punkt på veggen, se figur 3. Vi fokuserer laseren til punktet blir tydelig, og henger opp ark slik at vi kan merke av punktets plassering ved hver vekt. Merk at treffpunktet, både på bladfjæra og veggen, forflytter seg et stykke ved belastning, så vi forsørger at vi kan måle 2.3kg med oppsettet før vi starter kalibreringen (Vi måler ikke helt opp til 2.5kg fordi vi nå vet at aluminiumsloddet er omtrent 2.2kg). Herifra går forsøket som det forrige fram til avsnittet om usikkerhetsberegninger, men 'utslaget' er nå høyden på veggen, som vi måler med tommestokk. Vi måler høyden *i forhold til et nullpunkt definert ved høyden for 1kg* for å bruke færrest mulig ledd på tommestokken; dette er enklere å håndtere og gir en (riktignok liten) forbedring i måleusikkerheten.

Usikkerhetsberegningene er noe annerledes her. For det første er det begrenset hvor fokusert laseren blir, og når bladfjæra bøyes blir laserpunktet noe utstrukt. Når vi markerer laserprikkens plassering kan vi ikke forsikre at vi er helt i sentrum av prikken, og får dermed et bidrag til usikkerheten lik radiusen til prikken, som vi måler til omtrent  $\Delta h_{\text{markør}} \approx 2\text{mm}$ . Tommestokken har en leddusikkerhet  $\Delta h_{\text{ledd}} = 0.5\text{mm}$  og en skalausikkerhet  $\Delta h_{\text{skala}} = 1.0 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ . Vi anslår en avlesningsusikkerhet på  $\Delta h_{\text{avles}} \approx 1\text{mm}$  fordi det er noe utfordrende å gjøre høydemålingene mens man står oppå bordet for å nå opp til punktene. Vi bruker aldri mer enn 3 ledd, og den største høyden vi måler (fra referansepunktet) er  $\ell = 38.0\text{cm}$ , så vi kan gjøre et overslag på usikkerheten som

$$\Delta h \approx \sqrt{\Delta h_{\text{markør}}^2 + 3 \cdot \Delta h_{\text{ledd}}^2 + (\ell \cdot \Delta h_{\text{skala}})^2 + \Delta h_{\text{avles}}^2} \approx 2\text{mm}.$$

Vi ser at markørusikkerheten dominerer. Beregningen av  $\Delta m(h)$  følger samme uttrykk som før, men fordi vi valgte nullpunktet for målingene ved 1kg har den et bunnpunkt her heller enn for større utslag, se figur 8b).

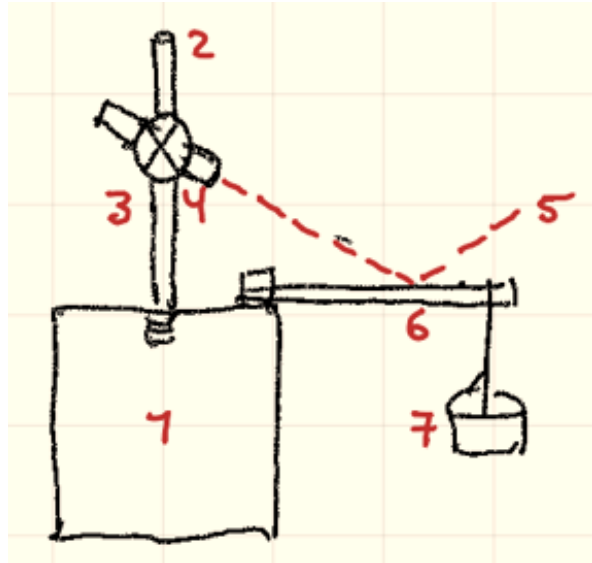


Figure 3. Oppsett for laservekta. Tallene betegner: 1) base, 2) stang med skruegang, 3) mellomledd med klype, 4) laserpeker, 5) laserstrålen treffer omsider papirer hengt opp på veggen bak vekta, 6) bladfjær, 7) kurv festet med tverrrinne.

Eksperimentelt anslår vi følsomheten til omtrent 20g; den er noe større enn med forrige vekt på grunn av markørusikkerheten, for vi krever at laserstrålen beveger seg med minst én radius. Den er noe større ved stor vekt fordi laserspredningen øker her. Det dynamiske området er selvsagt fortsatt 2.

#### D. Strekkklapp

Vi demonterer stativet og fester bladfjæra med strekkklapper til basen, og kobler kretsen som vist i figur 4. Kretskortet med Wheatstone-broa er ustabil, så vi støtter det opp så det ikke flytter seg under forsøket. Vi bruker en spenning  $E \approx 5V$ . Wheatstone-broa balanseres til multimeteret viser 0.0mV med skrutrekker. Igjen går forsøket i kjente baner, men nå er 'utslaget' spenningen i mV.

Produsenten oppgir en usikkerhet i multimeteret på  $\pm 0.4\% + 1$ , og den største målingen vår er på 7.0mV, altså er det usikkerheten i siste gjeldende siffer som dominerer og vi har  $\Delta h = 0.1mV$ . Her blir  $\Delta a$  veldig liten, og på residualplottet ser vi at vi har klart best linearitet med denne vekta. Dette speiles også i at  $\Delta m(h)$  er nesten helt flat, se figur 8c). Til gjengjeld er snittverdien noe større enn med de andre metodene, fordi multimeteret har begrenset presisjon.

Denne vekten skiller seg altså fra de tidligere ved at utslaget ikke kan leses av mer nøyaktig enn usikkerheten tillater; multimeteret gir ingen respons før vi har en endring på 0.1mV. Siden startverdien i den balanserte kretsen kan være  $\pm 0.1mV$  starter vi med å laste vekten med

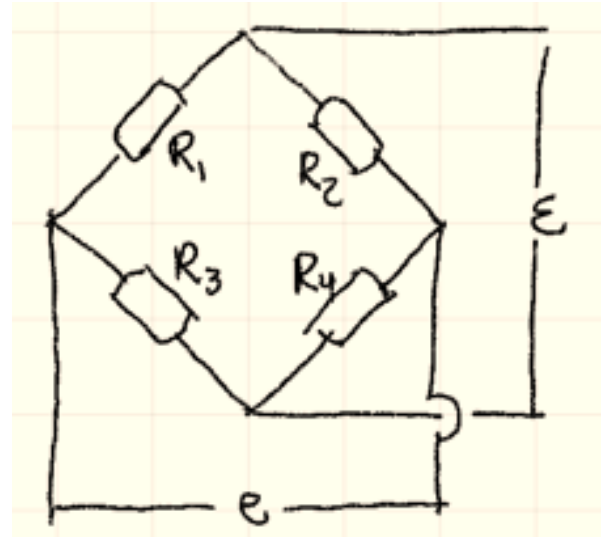


Figure 4. Kretsdiagram for strekkklappvekta, hentet fra [2].  $E$  er den påtrykte spenningen. Strekkklappene på hver sin side av bladfjæra er henholdsvis  $R_1$  og  $R_2$ . Vi balanserer Wheatstone-broa ved å justere resistansen i  $R_3$  og  $R_4$  slik at  $e = 0$  i vektas likevektstilling (ubelastet).

binders akkurat til vi får et utslag på multimeteret (dette kunne i prinsippet ha skjedd etter én eneste binders, så vi kan ikke si noe om følsomheten enda). Vi kan deretter anslå følsomheten ved å legge på binders til multimeteret responderer igjen, og veie disse på balansevekten. Vi får en følsomhet på omtrent  $26g \approx 0.03kg$ . Det dynamiske området er fortsatt 2.

### IV. Resultater

#### A. Måleurl

Figur 5 viser målepunktene fra kalibreringen sammen med lineærtilpasningen. Stigningstallet ble  $\alpha_1 = -6.0 \pm 0.3 \frac{mm}{kg}$  og konstantleddet  $\beta_1 = 9.7 \pm 0.1mm$ . I samme figur ser vi et residualplott, som indikerer at bladfjæra ikke er helt lineær; selv om residualene er små viser de et tydelig mønster.

Figur 8a) viser  $\Delta m$  som funksjon av utslaget på måleuret; merk at den er noe større for store utslag (altså lav masse), men alltid lik 0.03kg gitt ett gjeldende siffer. Utslaget for aluminiumsloppet ble målt til  $h_M = 1.00mm$ , som gir et første masseanslag  $M_1 = \alpha_1 h_M + \beta_1 \pm \Delta m(h_M) \approx 2.17 \pm 0.03kg$ .

#### B. Refleksjon av laserstråle

Figur 6 viser målepunktene fra kalibreringen sammen med lineærtilpasningen. Stigningstallet ble  $\alpha_2 = 31.9 \pm 0.4 \frac{cm}{kg}$  og konstantleddet  $\beta_2 = -33.4 \pm 0.5cm$ . Det

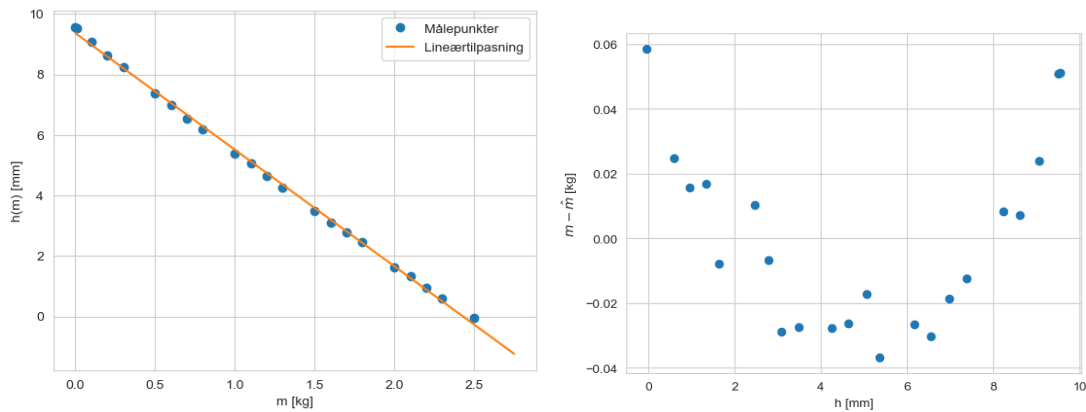


Figure 5. Regresjonsanalyse og residualplott for måleurt-vekta. At stigningstallet er negativt skyldes at utslaget i måleuret minker når massen øker. Merk at det er et tydelig parabelmønster i residualplottet.

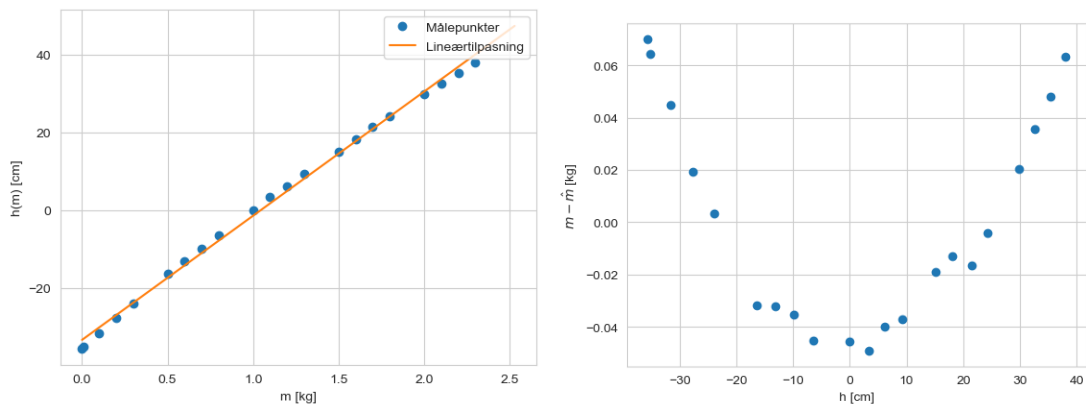


Figure 6. Regresjonsanalyse og residualplott for laser-vekta. Igjen ser vi parabelmønsteret i residualplottet.

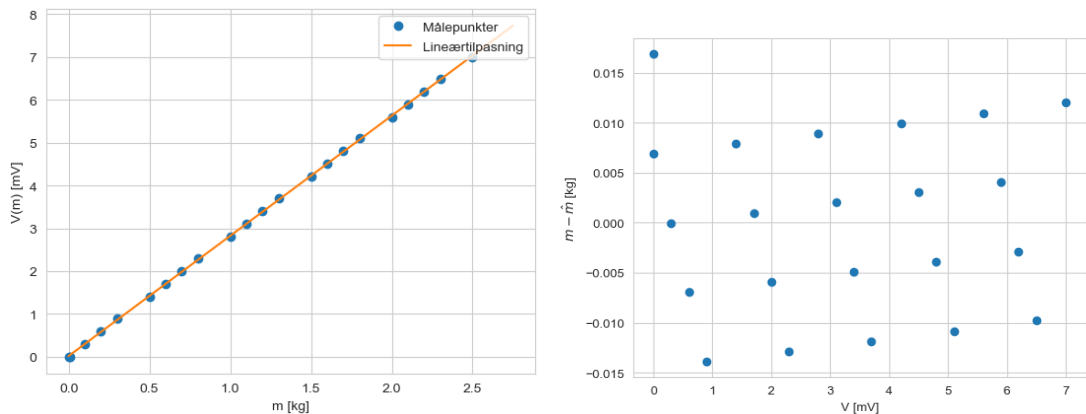


Figure 7. Regresjonsanalyse og residualplott for streklapp-vekta. Merk at skalaen på aksene i residualplottet er svært liten og at det ikke er noe tydelig ikke-lineært bidrag slik som for de andre vektene. Samtidig er oppløsningen i utslagsmålet noe dårligere her slik at målepunktene tvinges til et tydelig rutenett.

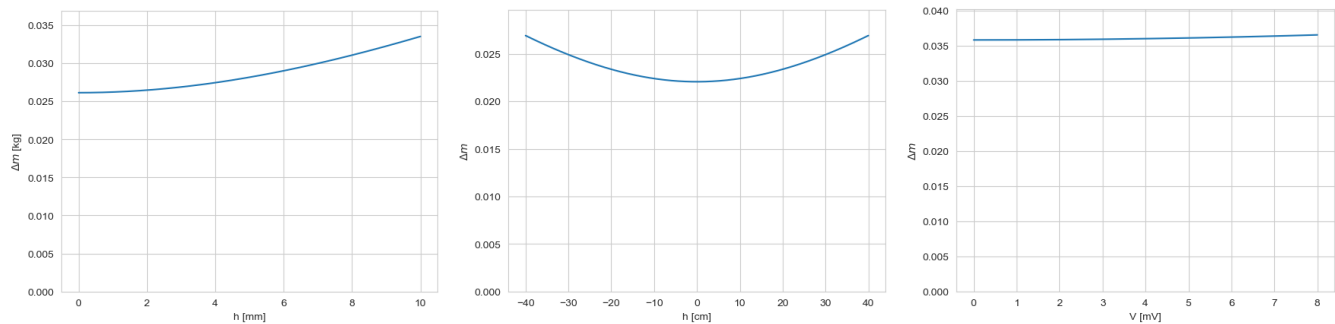


Figure 8. Henholdsvis  $\Delta m$  som funksjon av utslag for a) måleurvekta, b) laservekta og c) strekkklapp-vekta. Merk at nullpunktet for høyden i laservekta er ved 1kg-målingen, og at usikkerheten er minst her; sammenlikn gjerne med måleurvekta. For strekkklappvekta er  $\Delta m$  nesten uavhengig av utslaget, men til gjengjeld er usikkerheten noe større enn for de andre vektene.

tilhørende residualplottet indikerer igjen den samme alineariteten i bladfjæra, med presist samme form og identiske utslag (sammenlikn gjerne andreaksen med figur 5).

Figur 8b) viser  $\Delta m$  som funksjon av utslaget på veggen, og vi ser at usikkerheten er minst for masser rundt 1kg, i samsvar med valg av nullpunkt for høydemålingene våre.

Utslaget ble målt til  $h_M = 35.3\text{cm}$ , som gir et masseanslag  $M_2 \approx 2.15 \pm 0.03\text{kg}$ .

### C. Strekkklapp

Figur 7 viser målepunktene fra kalibreringen sammen med lineærtilpasningen. Stigningstallet ble  $\alpha_3 = 2.806 \pm 0.007 \frac{\text{mV}}{\text{kg}}$  og konstantleddet  $\beta_3 = 0.02 \pm 0.01\text{mV}$ . Det tilhørende residualplottet viser nå ingen alinearitet, i tråd med den svært lave usikkerheten i lineærtilpassningen.

Figur 8c) viser  $\Delta m$  som funksjon av utslaget på multimeteret. Legg merke til at kurven er nesten helt flat slik at denne vekta er like god i hele det dynamiske området, men at gjennomsnittsverdien til gjengjeld er noe høyere enn de andre med en usikkerhet  $\Delta m = 0.04\text{kg}$ .

Utslaget for aluminiumsloddet ble målt til  $e_M = 6.1\text{mV}$ , som gir et siste masseanslag  $M_3 \approx 2.17 \pm 0.04\text{kg}$ .

## V. Diskusjon

### A. Linearitet

Figur 9 viser lineærtilpasninger for andre måleurstillinger langs bladfjæra basert på noen få målepunkter. Vi ser ingen *åpenbare* avvik fra linearitet utover et lite avvik i utslag mellom likevektsstillingen og de påfølgende punktene, som kunne være et argument for å ekskludere likevektspunktet fra regresjonsanalysen som danner prediksjonsgrunnlaget for den kalibrerte vekta. Vi vurderer likevel at plottet med så lite data *ikke* gir tilstrekkelig grunnlag for dette.

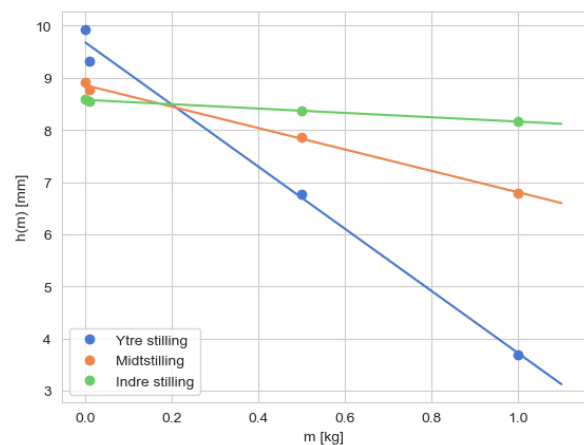


Figure 9. Regresjonsanalyse for ulike kontaktpunkter for måleuret langs bladfjæra. Vi kan ikke se noe åpenbart avvik fra linearitet i noen av stillingene, men det kunne vært gunstig med et større spenn av målinger. Vi merker oss oppførselen fra likevektsstillingen til første måling bryter med lineærregresjonen i alle tilfellene.

Det ville være rimelig å forvente at Hookes lov brøt sammen ved store utslag, men selv i ytterste posisjon synes bladfjæra å oppføre seg pent. Det er dog viktig å merke at måleurets lengde begrenser oss til å måle utslag på 10mm, slik at vi ikke kan teste denne stillingen med masser oppmot 2kg. Det hadde vært interessant å utforske store utslag med et annet oppsett for å anslå når utslagene blir for store til at man kan bruke lineærapprosimasjonen vår.

I *residualplottene* for måleurvekta og laservekta finner vi likevel god evidens for et systematisk avvik fra linearitet i bladfjæra (figur 5 og 6). Selv om dette er teoretisk interessant, er det ikke avgjørende for forsøket vårt; det er klart at lineærapprosimasjonen er god og gyldig fra regresjonsanalysene, og Hookes lov, som vi presenterte i teoridelen, synes fortsatt en rimelig approksimasjon. Merk også at for utslagene fra masser rundt



massen til aluminiumsloddet er residualene svært nærme null, slik at vi antagelig har en modell som treffer godt på loddets masse.

Vi ser likevel at usikkerhetsbidraget fra lineærapprosimasjonen er større for disse vektene enn for strekkappvekta, som har en forsvinnende stigningstallsusikkerhet  $\Delta\alpha_3 = 0.007 \frac{mV}{kg}$ . Deette gjenspeiles i residualplottet (figur 7), som ikke antyder noe avvik fra linearitet; residualene kan nesten speiles om  $y = 0$ . Merk dog at skalaen i residualplottet er på nivå med oppløsningen i måleinstrumentet slik at målepunktene tvinges til et tydelig rutenett; vi kunne dermed hatt mye å tjene på å bruke et måleinstrument med bedre oppløsning.

I vårt tilfelle blir usikkerheten dermed størst for strekkappvekta, selv om denne utviser best linearitet, fordi den begrensede oppløsningen i multimeteret bidrar betydelig til å øke usikkerheten. På bakgrunn av det fine residualplottet hadde det vært interessant å forsøke å gjenskape strekkappvekta med et mer presist multimeter for å undersøke om vi kan oppnå enda bedre presisjon med denne målemetoden enn med de andre. Det er selvsagt også mulig at vi da bare ville sett det samme parabel-mønsteret i residualplottet for denne metoden, men det er noe teoretisk grunnlag for at dette ikke ville være tilfelle: Strekkappene er nemlig festet mye lenger inn på bladfjæra. Fra figur 9 vet vi at utslaget her er mye mindre med samme vekt, og vi startet denne seksjonen med å forklare at det kan være rimelig å anta at lineærtilnærmingen er bedre for mindre utslag.

## B. Balansering av vektene

I figur 8b) ser vi at nullpunktet for høydemålinger har en viss innvirkning på presisjonen til vekta, fordi den er mer presis ved små utslag. Dette følger av feilpropagering der et ledd avhenger av  $h$ , se likning (2). I figuren ser vi at det i dette tilfellet kunne være rimelig å oppgi masser rundt 1kg med usikkerhet 0.2kg, mens vi kun får en presisjon på 0.3kg rundt utslaget fra aluminiumsloddet. Siden vi allerede viste at massen til loddet var rundt 2.2kg fra måleursvekta, kunne det ha vært hensiktsmessig å velge nullpunktet for høydemålingene i nærheten av utslaget fra kalibreringsvekta på 2kg. Tilsvarende kunne vi ha balansert Wheatstone-broa med en belastning fra kalibreringsvekta på 2kg, heller enn ved likevektsstillingen, for å redusere usikkerheten i målerrekkevidden vi er interessert i (i dette tilfellet viser figur 8c) at dette ikke hadde hatt noe å si i i praksis, for utslaget har svært liten innvirkning på usikkerheten til denne vekta). Likevel kan en slik balansering virke kunstig, og i reelle situasjoner vil man ofte bruke vekta til å måle en rekke ulike masser som spenner hele det dynamiske området.

## C. Sammenlikning av resultater

For enkel sammenlikning gjentar vi de endelige masseanslagene våre i tabell I, sammen med en måling med balansevekt som vi her anser for å ha neglisjerbar usikkerhet på størrelsesorden 10g (produsenten oppgir en usikkerhet på under 1g). Merk at alle anslagene akkurat sammenfaller innenfor usikkerheten, hvilket tyder på at det ikke er betydelige systematiske feil i noen av vektene. Vi kunne likevel ønsket høyere presisjon; det beste anslaget vårt har en usikkerhet på hele 30g. Det dynamiske området er likt for alle vektene ( $10^{-2} - 1\text{kg}$ ) og er derfor ikke inkludert i tabellen.

Table I. Masseanslag med usikkerhet for aluminiumsloddet med ulike metoder, samt den *eksperimentelt* tilnærmede følsomheten for hver metode.

Metode	Masse (kg)	Usikkerhet (kg)	Følsomhet (kg)
Måleur	2.17	$\pm 0.03$	0.01
Laser	2.15	$\pm 0.03$	0.02
Strekkapp	2.17	$\pm 0.04$	0.03
Balansevekt	2.18	-	-

Samlet sett er det ikke mye som skiller vektene våre; alle har samme dynamiske område, fra 10g til 1kg og en følsomhet på 20 – 40g innenfor hele dette området. Vi kan likevel forsøke å rangere vektene slik:

1. Måleur
2. Refleksjon av laserstråle
3. Strekkapp

Første- og andre plassen er nesten uadskillelig, og vi foretrekker måleurvekta bare fordi anslaget på 2.17kg er noe nærmere den antatte sanne verdien. Måleurvekta har også en noe bedre eksperimentelt bestemt følsomhet på 10g kontra 20g for laservekta, men dette venter lite siden begge verdiene er mindre enn prediksjonsusikkerheten. Denne er større enn den eksperimentelle verdien fordi dataene fra kalibreringen ikke er helt lineære med noen av disse metodene, slik vi ser i residualplottene i figur 5 og 6. Dermed blir det en viss usikkerhet i koeffisientene, og spesielt avhenger usikkerheten svakt av hvor i det dynamiske området vi gjør målinger. Dette er ikke tilfellet med strekkappvekta.

Det er dermed interessant at strekkapp-vekta, som kommer dårligst ut fordi den har størst usikkerhet siden den er begrenset av oppløsningen i multimeteret, er den vi anser for å ha størst potensiale og er mest interessert i å utvikle videre: I figur 7 ser vi intet avvik fra linearitet, og usikkerheten i regresjonen er svært liten. Med en mer presis spenningsmåler kan det tenkes at denne vekta kunne vært betydelig mer presis. Dette kunne i så fall være fordi den avhenger av utslaget lenger inn på bladfjæra, som er mindre slik at Hookes lov kanskje passer enda bedre.

## D. Forbedringer

Utover de små (og nokså ubetydelige) forbedringene vi har drøftet over, er det et større poeng som kanskje kunne ha løftet streklappvekta fra tredje- til førsteplass. Vi visste at multimeteret hadde begrenset oppløsning i mV-området, og det kunne derfor vært hensiktsmessig å øke den påtrykte spenningen betydelig fra  $E = 5\text{V}$ : Fra likning (1) i teoridelen husker vi at den avleste spennin-gen  $e \propto E$ . Fra måleurvekta og laservekta var vi vandt med at oppsettsusikkerheter dominerte usikkerhetene i måleutstyret, og vi viet dermed oppmerksomheten til å balansere Wheatstone-broa nøyaktig til  $0.0\text{mV}$  og støtte opp kretskortet så det skulle ligge helt stille. Men i streklapptilfellet var det måleusikkerhetene som dominerte oppsettsusikkerhetene! Dette gir følgende viktige

lærdom: På labben bør vi tenke nøye etter hvilket usikkerhetsmoment som er størst, slik at vi kan fokusere oppmerksomheten vår på dette og ikke kaste bort krefter på å minimere usikkerheter som uansett er neglisjerbare.

## VI. Konklusjon

Vi finner ingen stor kvalitetsforskjell mellom vektene; følsomheten er rundt  $30\text{g}$  og det dynamiske området løper fra  $10^{-2}\text{kg}$  til  $1\text{kg}$  for alle tre. Om vi likevel skal krone en av vektene som den beste, velger vi måleurvekta, som gir et masseanslag på aluminiumsloddet på  $2.17 \pm 0.03\text{kg}$ . Masseanslagene fra alle vektene samsvarer innenfor usikkerheten. Vi tror likevel at streklappvekta har potensiale for høyere presisjon enn de andre vektene dersom man bruker enten høyere påtrykt spenning eller en mer sensitiv spenningsmåler.

---

[1] G. Squires, *Practical Physics*, Practical Physics (Cambridge University Press, 2001).

[2] D. K. Dysthe, A. Røyne, and O. I. Ulven, “Masse og kraft,” PDF, revidert desember 2023 av Nina Jeppesen Edin og Tor Ole Odden.