

Elektromagnetisk stråling og elektronndiffraksjon

Jonas Telle

Department of Physics, University of Oslo, N-0316 Oslo, Norway

(Dated: Spring 2025)

Elektromagnetisk stråling og partikkelbølger er fundamentale konsepter i moderne fysikk, og i interaksjon med materie danner fenomenene grunnlaget for flere eksperimentelle teknikker. Vi har utforsket fire strålingsfenomener ved å i) beregne effektiviteten til en GM-teller, ii) identifisere radioaktive isotoper i uraninitt med gammaspektroskopi, iii) validere teoretiske gitteravstander i en KCl-krystall ved hjelp av røntgendiffraksjon, og iv) måle gitteravstander i grafitt med elektronndiffraksjon. GM-tellerens effektivitet anslåes til $0.91 \pm 0.09\%$, eller ca. 1%. Gammaspektroskopi antyder forekomster av Ra226, Pb214, Bi214 (døtre av U238) og AC228 (fra Th232), men med betydelig usikkerhet. Gitteravstandene i KCl beregnes derimot i full korrespondanse med litteraturverdiene innenfor $\pm 0.5^\circ$. Anslagene for gitteravstander i grafitt er potensielt preget av systematisk usikkerhet, og spesielt er den korteste avstanden $d_{11} = 113 \pm 2\text{pm}$ et stykke unna den teoretiske verdien. Dette medfører at vi overestimerer forholdet $d_{10}/d_{11} = 1.83 \pm 0.04$ med 2.5 standardavvik.

I. Introduksjon

Elektromagnetisk stråling og partikkelbølger er fundamentale konsepter i moderne fysikk, og i interaksjon med materie danner fenomenene grunnlaget for flere eksperimentelle teknikker. Vi undersøker her Geiger-Müller-rør, gammaspektroskopi, røntgendiffraksjon og elektronndiffraksjon. GM-rør benyttes til å registrere ioniserende stråling, mens gammaspektroskopi gir informasjon om energinivåene til atomkjerner. Røntgendiffraksjon og elektronndiffraksjon utnytter bølgeegenskapene til henholdsvis røntgenstråler og elektroner for å kartlegge krysstellstrukturer på atomnivå. Forsøket er spesielt interessant fordi det utnytter kvantefenomener, fra karakteristiske spektere og radioaktive henfall til bølge-partikkeldualiteten.

Forsøket er naturlig firedele. I del i) måler vi effektiviteten til et GM-rør ved hjelp av en ^{137}Cs -kilde med kjent aktivitet, hvilket er nyttig for kalibrering der som man skal sammenlikne måleresultater på tvers av målemetoder. I del ii) bruker vi gammaspektroskopi til å identifisere radioaktive isotoper i en uraninitt-prøve. Denne metoden kan være et nyttig verktøy om man skal identifisere isotoper i prøver av ukjent opphav, eller om man vil undersøke om en prøve av kjent opphav, for eksempel selvlysende maling tidligere brukt på klokkevisere, inneholder farlige stoffer. I del iii) forsøker vi å bekrefte den teoretiske gitterplanavstanden for en KCl-krystall med et røntgenspektrometer, og får erfaring med et viktig instrument i materialvitenskap og studiet av krysstellstrukturer. I del iv) måler vi gitteravstandene i en prøve av polykrysallinsk grafitt ved hjelp av elektronndiffraksjon, og i prosessen påviser vi elektronets bølgeegenskaper.

II. Teori

A. Ioniserende stråling

Stråling deles inn i ladde partikler (eg. elektroner), uladde partikler (eg. nøytroner) og elektromagnetisk stråling, som igjen gjerne deles inn etter frekvens i det elektromagnetiske spekteret. Vi sier at stråling er ioniserende om den har nok energi til å slå løs elektroner fra et atom.

Blant den høyenergetiske elektromagnetiske strålingen kan vi igjen skille mellom ståling med ulik opprinnelse. I dette forsøket er vi interessert i γ - og røntgen-stråling, der γ -strålingen i dette eksperimentet emitteres ved deeksitasjon av en atomkjerne mens røntgenstrålingen emitteres ved nedbremsing av elektroner (gjerne kald bremsstrahlung). Vi skal utfylle nødvendige detaljer om disse to fenomenene i de relevante subsekjonene under.

B. GM-teller

En GM-teller måler antall ioniserende partikler den mottar. Den består av et ledende rør med et ionisasjonskammer fylt med gass som omhyller en anode langs sylinderaksen. Når ioniserende partikler absorberes i gassen frigjøres elektroner som trekkes mot den positivt ladde anoden. Ved stor påtrykt spenning vil dette elektronet ionisere flere gassatomer, og når alle disse elektronene treffer anoden får vi en kort strømpuls, som gir én telling.

1. Aktivitet

I dette forsøket har vi en ^{137}Cs -kilde med oppgitt aktivitet $A_0 = 190\text{kBq}$ i April 2003. Basert på dette er vi interessert i å finne aktiviteten i dag. Selv om desintegrasjon er et probabilistisk kvante-fenomen, er det så mange partikler i kilden at vi kan anslå at halveringstiden

er konstant. Vi får så en elementær differensiallikning for antall radioaktive kjerner ved tiden t :

$$dN = -\lambda N dt \quad \text{og} \quad N(T) = N_0/2$$

der λ er den ukjente henfallskonstanten, N_0 er antall partikler ved $t = 0$ og T er halveringstiden. Løser vi for henfallskonstanten får vi $\lambda = \ln 2 / T$, og siden aktiviteten er henfall per tid får vi

$$A(t) = -\frac{dN}{dt} = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}. \quad (1)$$

Halveringstiden til ^{137}Cs er omtrent $T = 30\text{år}$ [1], og da forsøket vårt ble gjennomført i Mars 2025 var det omtrent 21.92 år siden det oppgitte aktivitetsmålet. Ved innsetting i (1) har vi da en aktivitet $A \approx 115\text{kBq}$ i dag. Vi skal se at usikkerheten her blir neglisjerbar når vi feilpropagerer selv om vi runder av til nærmeste kBq.

2. Effektivitet

Det er velkjent at GM-røret ikke på langt nær måler alle γ -stråler som treffer det. Dette er fordi strålingen ikke ioniserer gassen direkte, og kun måles dersom den slår løs et elektron i rørveggen ved Compton- eller fotolektrisk effekt slik at dette elektronet kan ionisere gassen. Når vi plasserer GM-røret i god avstand fra kilden er det også rimelig å forvente at vi først og fremst vil observere γ -stråling fra ^{137}Cs -kilden, som følge av de-eksitasjonen av datterkjærnen Ba-137m, og ikke β -strålingen fra overgangen til denne datterkjærnen. Rundt 6% av henfallene går forøvrig rett fra ^{137}Cs til grunntilstanden ^{137}Ba og vil ikke frigi γ -stråling. Vi kan da forvente en effektivitet på 1%, eller kanskje hakket mindre på grunn av 6% tapt β -stråling.

Effektiviteten kan beregnes ved

$$\varepsilon = 4\pi \frac{n_r - n_b}{A\Omega} \quad (2)$$

der n_r er antall fotoner som registreres per sekund med kilden, n_b er tilsvarende for bakgrunnsstrålingen, A er aktiviteten til kilden og Ω er romvinkelen. Sistnevnte beregnes enkelt, siden GM-røret har et sirkulært vindu med radius $r = 7.5\text{mm}$ oppgitt av produsenten, med neglisjerbar usikkerhet. Da er

$$\Omega = \frac{\pi r^2}{R^2} \quad (3)$$

der R er avstanden til kilden. Det er viktig å ta hensyn til bakgrunnsstrålingen for ikke å overdrive effektiviteten til GM-røret.

Siden radioaktivt henfall følger Poisson-fordelingen, vet vi at standardavviket for netto tellerate kan beregnes ved

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{k_r - k_b}{\Delta t}} \quad (4)$$

der k_r og k_b er antall tellinger med og uten kilde, og Δt er det totale tidsintervallet (siden Poisson-fordelingen er

minneløs trenger vi altså ikke å dele opp hver måleserie, men kan bruke $k = \sum_i k_i$ og $\Delta t = \sum_i \Delta t_i$, der i løper over antall måleserier). Den effektive telleraten er naturlig gitt ved $n = \frac{k_r - k_b}{\Delta t}$ når vi bruker like mange like lange serier for begge k -verdier.

C. Gammaspektroskopি

Som en konsekvens av kvantefysikken er energinivåene i atomer og molekyler kvantisert. Hvert isotop får dermed et karakteristisk strålingsspektrum, fordi kun bestemte bølgelengder av γ -stråling tilsvarende mulige energidifferanser mellom energinivåer i løsningen av Schrödingerlikningen for akkurat det potensialet dette molekylet danner kan emitteres. Dette åpner for at man kan identifisere isotoper basert på γ -strålingen de emitterer ved radioaktive henfall.

Vi bruker et spektrometer med en NaI(Tl)-scintillator for å gjøre analysen. Stråling fra materialprøven treffer scintillatoren, som utsender lys som registreres av en fotokatode ved at elektroner slåes løs og gir et elektrisk signal. Dette forsterkes med en fotomultiplikator før det går til en pulsformer. Hver puls har høyde proporsjonal med energien til den innkommende gammastrålingen, og sammen med antall pulser per tid får vi informasjon om strålingsintensiteten, som fremkommer relativt i programmet i form av tellinger per kanal.

1. Kalibrering

Scintillatoren, altså den thaliumaktiverte natriumjodidkrystallen, er lysutsendende ved bestråling, og spiller en tilsvarende rolle som gassen i GM-røret. Responsfunksjonen er videre avhengig av krystallens form, og vi må derfor kalibrere målingene ved å sammenlikne mot kjente topper. Siden pulshøyden er proporsjonal med innstälingsenergien, kan vi finne et affint forhold mellom tellinger per kanal og gammaenergien:

$$E = \Delta E \cdot I + E_0 \quad (5)$$

der ΔE kalles pulshøydespekter-dispersjonen og E_0 er nullpunktssenergien. Verdiene for disse finnes fra kalibreringen ved å måle kanalnummeret til to fullenergitopper med kjent energi: ΔE er da stigningstallet og E_0 konstantleddet til linja gjennom disse.

Ved å lese av kanalnummeret på fullenergitoppene i gammaspakteret kan vi da omregne til energien denne overgangen tilsvarer, og sammenlikne med kjente energier ved gamma-henfall for diverse stoffer. Da kan vi identifisere radioaktive isotoper i materialet på grunn av energikvantiseringen vi beskrev innledningsvis.

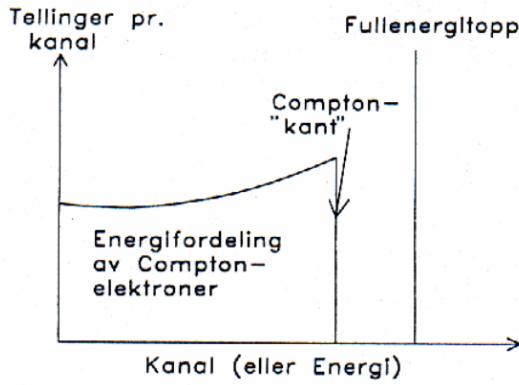


Figure 1. Skjematisk energispektrum illustrerer comptonkanten og fullenergitoppen, til sammenlikning med dataene i figurer 6 og 7. Figuren er hentet fra [2].

2. Spekterets form

I figur 1 ser vi en idealisert, eller skjematisk, fremstilling av et energispektrum fra gammaspektroskopi. Merk at det i starten er et kontinuum av energier; dette skyldes comptonspredning der i scintillatoren mister energi avhengig av spredningsvinkelen til fotonet. Comptonkanten representerer den maksimale energien vi detekterer fra Comptonspredning. Målte spektrum vil ha stor spredning fordi alle trinnene i gammaspektrometeret medfører statistisk spredning. I tillegg vil omgivelsene gi bidrag i form av en tilbakespredningstopp der fotoner reflekteres av materialet bak krystallen og re-absorberes. I tillegg kan stårlingen fra den radioaktive kilden eksitere elektroner i omgivelsene, som kan gi lavenergetiske energitopper. Vi skal senere se disse effektene i dataene våre.

D. Røntgendiffraksjon

Røntgenstråling produseres ved hjelp av et røntgenrør, som er et vakuumrør med en glødekatode som sender ut elektroner. Disse akselereres av en påsatt spennin U og treffer anoden med en kinetisk energi eU . Ved kollisjon bremses elektronene ned, og det emitteres røntgenstråling i form av: (i) bremsstrahlung (kontinuumstråling), som oppstår når elektroner deakselereres ved kollisjon med anoden og har kontinuerlig energi med en øvre grense gitt av den maksimale elektronenergien eU , og (ii) karakteristisk stråling, som oppstår når et atom i anodematerialet ioniseres og et elektron fra en ytre skall faller inn for å fylle tomrommet. Energien til denne strålingen avhenger kun av anodematerialets energinivåer og ikke av akselerasjonsspenningen U , så lenge U er tilstrekkelig høy til å ionisere de relevante skallene.

Et røntgenspektrometer består av tre hovedelementer:

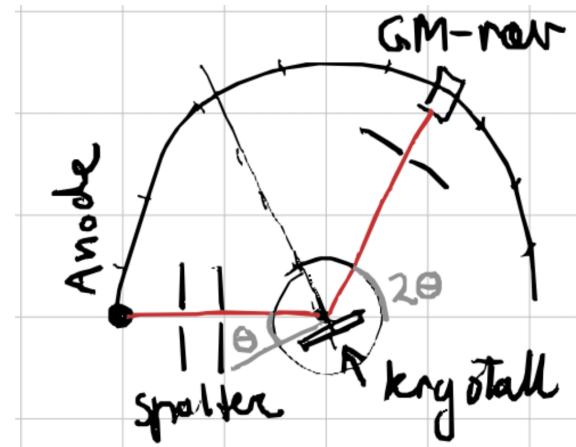


Figure 2. Skjematisk tegning av røntgenspektrometeret montert på et dreiebord.

Et røntgenrør, som genererer røntgenstråling gjennom bremsstrahlung og karakteristisk stråling, en krystall, som brukes som et naturlig gitter for diffraksjon og spredning av strålingen, og en detektor, som registrerer den reflekterte strålingen ved bestemte vinkler. Krystallen og detektoren er montert på et dreiebord med vinkelskala, se figur 2, som gjør det mulig å variere innfallsvinkelen θ og observere refleksjonsvinkelen 2θ . Man kan da bestemme bølgelengdene til den karakteristiske røntgenstrålingen ved hjelp av Braggs lov:

1. Braggdiffraksjon

For å analysere røntgenspektra brukes diffraksjon i krystallgitre, der røntgenstråler reflekteres og interfererer konstruktivt under visse betingelser. Krystaller har en periodisk struktur med gitterplan som kan betraktes som naturlige refleksjonsgitter. Interferens mellom røntgenstråler reflektert fra ulike gitterplan er konstruktiv hvis differansen i ganglengde er et heltallig antall bølgelengder:

$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad (6)$$

der θ er vinkelen mellom innfallende stråling og gitterplanet, d er avstanden mellom gitterplanene, n er et heltall, og λ er bølgelengden til strålingen. Gitteravstanden må være i samme størrelsesorden som bølgelengden.

Ved å bruke en monoenergetisk røntgenkilde og variere θ , kan man observere reflektert stråling i retning 2θ i forhold til innfallende stråling. Skarpe interferensmaksima oppstår for bestemte vinkler, der første ordens maksimum svarer til en gangforskjell λ mellom naboplanene, mens andre ordens maksimum svarer til 2λ .

2. Spekterets form

Vi kan anslå toppunktene plassering ved å ta hen-syn til energinivåene i anodematerialet. De relevante karakteristiske linjene for kobber er oppgitt i tabell I. Vi bruker standardnotasjon for overganger, altså emitteres $K_{\alpha,1}$ ved overgang fra L -skallet til K -skallet, der α angir hvor elektronet kom fra i forhold til destinasjonen og den andre indeksen angir finstruktur. Vi tar gjennomsnittet av finstrukturene i spektrene, som skyldes oppsplitting av energinivåene i fleratomige systemer, fordi oppsettet vårt har begrenset oppløsning. Som forklart innledningsvis er plasseringen av de karakteristiske toppene uavhengig av spenningen U gitt at U er høy nok til å generere de tilhørende bølgelengdene.

Table I. Karakteristiske linjer for kobber. Hentet fra [2].

Linje	Bølgelengde (pm)
$K_{\alpha,1}$	154.4
$K_{\alpha,2}$	154.0
$K_{\beta,1}$	139.2
$K_{\beta,2}$	138.1

Vi kan da beregne de teoretiske verdiene for toppene med en kobberanode for en KCl-krystall med oppgitt $2d = 629\text{pm}$ ved hjelp av likning (6). Anslagene er angitt i tabell IV i resulatsdelen.

E. Elektronndiffraksjon

De Broglie postulerte i 1924 at materie har bølgeegenskaper med bølgelengde λ avhengig av bevegelsesmengden p [2]. Når elektroner akselereres gjennom en potensialforskjell U kan bevegelsesmengden kan finnes ved

$$eU = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} - mc^2$$

der e er elementærladningen, m er elektronets hvilemasse og c er lysfarten. Broglie-bølgelengden er da

$$\lambda = \frac{h}{p} = \lambda_c \sqrt{\frac{mc^2}{2eU}} f(U) \quad (7)$$

der $\lambda_c = \frac{h}{mc}$ og $f(U)$ er den relativistiske korreksjonsfaktoren

$$f(U) = \left(1 + \frac{eU}{2mc^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

Tabell II viser verdier for korreksjonsfaktoren for ulike spenninger. Merk at den ved lave spenninger er tilnærmet lik 1.

Vi skal måle to gitteravstander i polykrystallinsk grafitt ved å gjøre målinger på diffraksjonsmønsteret fra elektronstråling gjennom krystallgitteret. Elektroner sendes mot gitteret og brytes før de treffer en skjerm.

Table II. Relativistisk korreksjonsfaktor $f(U)$ i prosent for utvalgte spenningsverdier.

U (kV)	1	5	20	50	100
f(U) (%)	99.995	99.756	99.037	97.643	95.446

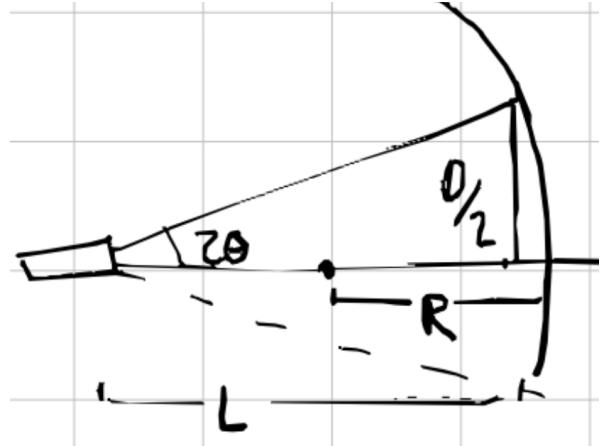


Figure 3. Skjematisk illustrasjon av elektronndiffraksjon. Elektronene kommer fra venstre langs horisontalen og treffer krystallen (firkantet boks), og brytes i konusform så de lager ringmønstre på skjermen (buet overflate). R er radiusen i skjerm-kula og $L = 2R$ er avstanden fra krystallfilmen til skjermen.

Fordi graffittbitene har tilfeldig orientering blir spredningen polarsymmetrisk, og vi får ringmønstre på skjermen, se figur 3. Med en liten-vinkel-tilnærming ser vi på figuren at $2\theta \approx \frac{D}{2L}$ der D er diameteren i ringen og L er avstanden mellom skjermen og der strålen treffer karbonfilmen, når 2θ er vinkelen mellom strålen etter diffraksjonen og horisontalen. Da er gitteravstanden

$$d = \frac{\lambda}{2\theta} = \frac{2\lambda L}{D}. \quad (9)$$

De to ulike gitteravstandene gir to ulike lysende ringer på skjermen.

Under antagelsen om at krystallstrukturen i grafitt er regulært heksagonal kan vi med enkel trigonometri utlede at det teoretiske forholdet mellom gitteravstandene d_{10} og d_{11} er $\sqrt{3}$, se figur 4. Litteraturverdiene for d_{10} og d_{11} er oppgitt til henholdsvis 213pm og 123pm.

F. Usikkerhetsberegninger

Den generelle feilpropageringsformelen kan skrives som

$$df(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\left(\frac{df}{dx_1} dx_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{df}{dx_n} dx_n\right)^2}. \quad (10)$$

I vårt tilfelle får vi spesielt bruk for dette anvendt på likning (2):

$$\Delta d \approx \sqrt{\left(\frac{\sigma_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta R}{R}\right)^2} \quad (11)$$

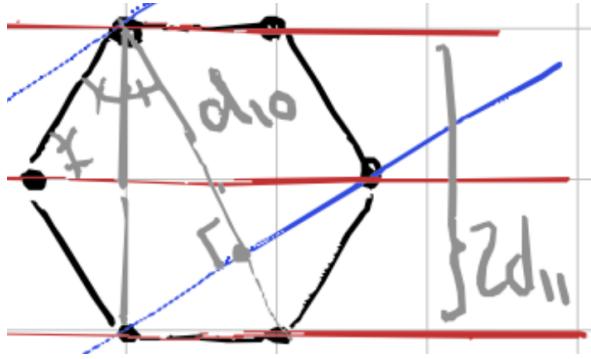


Figure 4. En enkelt celle i et regulært heksagonalt krystallgitter. Den markerte rettvinklede trekanten har høyde d_{10} og hypotenus $2d_{11}$. Den dobbeltmerkede vinkelen er del av en av 6 likesidede trekantene som danner sekskanten, og vinkelen er dermed 60° . De enkeltmerkede er halveringsvinklene på 30° .

der vi kutter neglisjerbare ledd fra Δr og ΔA og bruker σ_n fra likning (4) der n er telleraten.

I tillegg tillegger vi litt oppmerksomhet til usikkerhetsberegningen for gitteravstanden målt fra likning (9) med elektronidiffraksjon. Vi innfører $\phi = \lambda/D$ og finner usikkerheten $\sigma_\phi^2 = \frac{1}{n-1} \sum (\phi_i - \bar{\phi})^2$, der n er antall målinger (vi tar bort en frihetsgrad i nevneren fordi gjennomsnittsverdien fester det siste målepunktet når de første er kjent). Vi får da standardfeilen i gjennomsnittet $s_\phi = \frac{\sigma_\phi}{\sqrt{n}}$ (dette er bare feilpropagering anvendt på gjennomsnittet). Vi har da $\bar{d} = 2L\bar{\phi}$ og kan feilpropagere på vanlig vis for å finne usikkerheten

$$\Delta \bar{d} = \bar{d} \sqrt{\left(\frac{s_\phi}{\bar{\phi}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2}. \quad (12)$$

III. Eksperimentelt

A. GM-teller

Kilden vi bruker er ^{137}Cs og hadde aktivitet 190 kBq i April 2003. I teoridelen har vi forklart hvordan vi finner aktiviteten i dag. Vi setter opp et stativ som på figur 5 slik at kilden peker rett opp mot telleren. Dersom disse ikke står helt sentralt langs en linje kan telleraten bli noe svekket, så vi prøver å justere dem etter beste evne på øyemål. Fordi vi ikke vet nøyaktig hvor kilden ligger i hylsteret sitt er det noe usikkerhet tilknyttet avstanden mellom GM-røret og den effektive kilden, men den er i hvertfall innenfor $16 \pm 0.5\text{cm}$ - merk at denne usikkerheten bidrar nokså mye ved feilpropagering til den endelige usikkerheten i effektiviteten $\Delta\varepsilon$. Vi kan nå beregne romvinkelen fra likning (3).

Vi gjør 5 måleserier på 60s hver for både bakgrunnsstrålingen og kilden og anslår telleraten i begge tilfeller. Da kan vi anslå GM-rørets effektivitet med

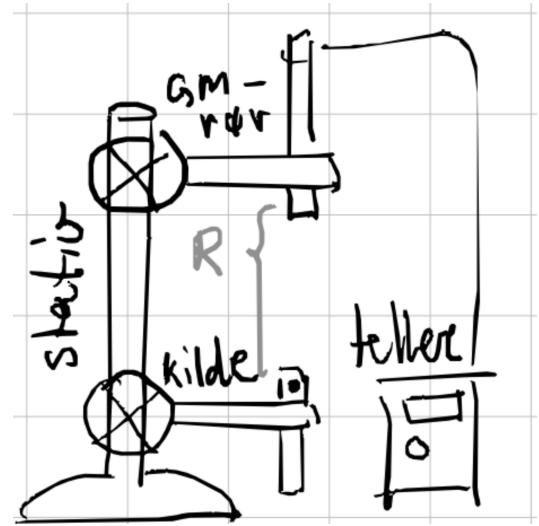


Figure 5. Skjematiske tegninger av oppsett for å undersøke effektiviteten til GM-telleren.

usikkerhet som beskrevet i likning (2), (4) og (11).

B. Gammaspektroskopi

Vi kobler NaI(Tl)-scintillatoren til en datamaskin med programmet Windas for databehandling. For å kalibrere, altså for å finne forholdet mellom kanalnummer og energi, gjør vi først målinger av ^{137}Cs og ^{60}Co , hvis desintegrasjonsskjemaer er velkjente. Vi finner dispersjonen og nullpunktenergien ved bruk av Cs-toppen og den høyeste Co-toppen, og bruker den siste Co-toppen for å verifisere at kalibreringen er rimelig.

Vi er nå klare til å identifisere radioaktive isotoper i en uraninitt-prøve. Vi tar opp spekteret og leser av så mange fullenergitopper vi klarer, og omgjør kanalnummere til energi ved hjelp av kalibreringen i forrige steg. Deretter sammenlikner vi med en tabell for kjente energier for henfallskjeden til ^{238}U og forsøker å identifisere fullenergitopene med isotoper av ulike grunnstoffer i denne kjeden. Vi får nokså tydelige topper, og det viser seg å spille liten rolle hvordan man kutter bort bakgrunnsstrålingen for hvilket kanalnummer som avleses, så vi bruker en lineær tilnærming på øyemål - resultatene blir altså de samme når vi går grundigere til verks, så dette er det ingen grunn til her. Vi anslår en usikkerhet $\Delta I \leq 5$, og bruker gjennomsnittsverdien i kalibreringen. I tabell III ser vi at det ikke er perfekt korrespondanse mellom avlesningen våre og forventede verdier, også utenfor usikkerheten. Dette kommer vi tilbake til i diskusjonsdelen.

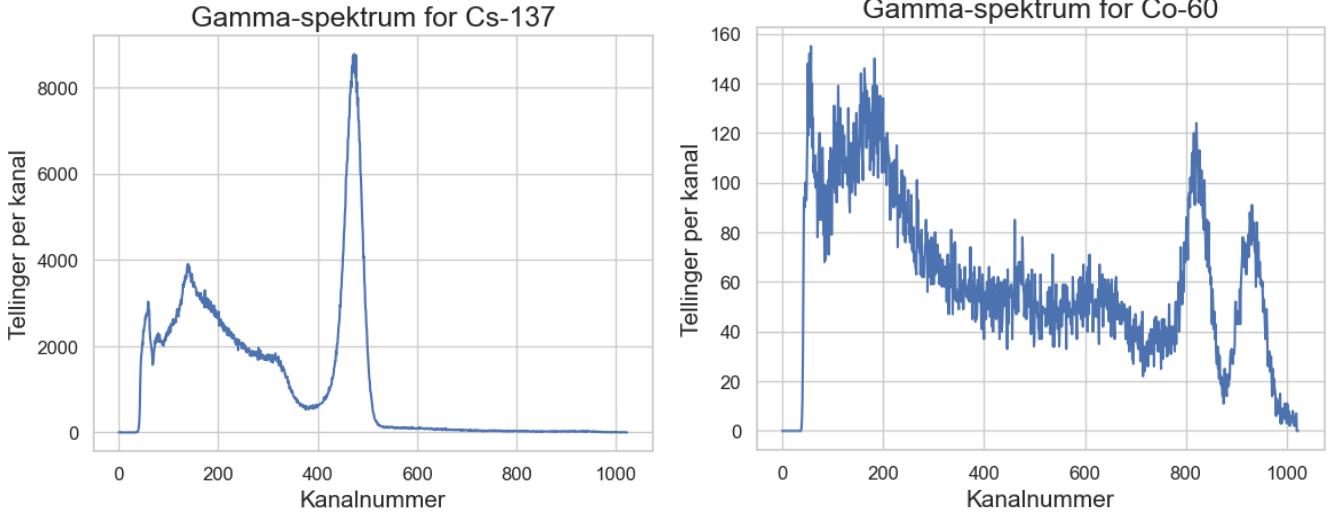


Figure 6. Energispektrum for Cesium 137 (venstre) og Cobolt 60 (høyre). Merk at verdiene på andreaksen er svært ulike fordi Cesium-målet ble gjort over betydelig lengre tid; dette er også hvorfor det synes mye større spredning i Cobolt-plottet. Toppene lar seg likevel tydelig identifisere i begge tilfeller ved inn-zooming.

C. Røntgenspektrometri

Vi har et premontert røntgenspektrometer med spalter og GM-rør, og bruker en KCl-krystall med $2d = 629\text{pm}$. Vi velger spenning $U_R = 30\text{kV}$ og måler for vinkler rundt disse med inkrement 0.5° , der hver måling har måletid 10s, for å verifisere at gitterplanavstanden er som oppgitt for KCl-krystallen. Vi kan enkelt lese av første- og andreordens maksima når vi plotter dataene. Merk at det er en viss usikkerhet i vinkelmålene, fordi dreiebordet var defekt slik at vi ikke kunne lese av vinkler under 1° nøyaktig.

D. Elektronndiffraksjon

Vi har premontert elektronkanon, fokuseringssystem og karbonfilm i en evakuert glassbeholder (TELTRON 555) med oppgitt $L = 125 \pm 2\text{mm}$. Når systemet er gått varmt justerer vi nominell spenning U_n i 11 trinn fra 3.00kV til 5.00kV , og noterer strømmen samt måler indre og ytre diameter for minste og største ring med plast-skyvelære. Et metallskyvelære er en leder og ville forstyrre ringene. Uansett er ringene noe diffuse, så det er en betydelig usikkerhet i målingene. Merk at det er viktig å måle strømmen I , som endrer seg med spenningen, underveis, siden det er lagt inn en motstand på $R = 10\text{M}\Omega$ mellom høyspenningsforsyningen og anoden; vi trenger da I for å finne den faktiske anodespenningen $U = U_n - RI$.

Vi kan nå beregne elektronbølgelengden λ med likning (7). Vi beregner fra likning (8) at å utelate den relativistiske korrekjonen gir en relativ feil på omtrent 0.22%; det er altså ikke strengt tatt nødvendig å regne

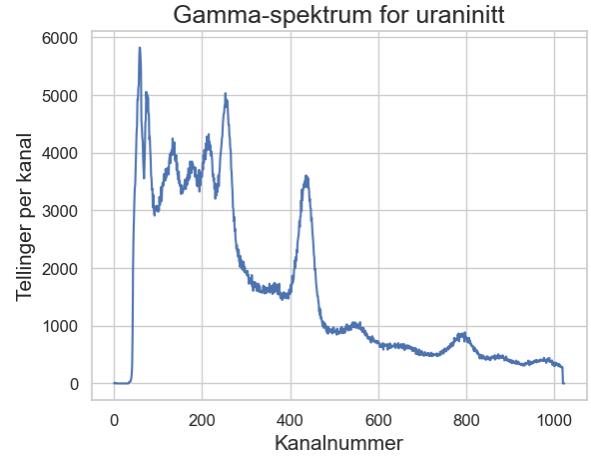


Figure 7. Målt energispektrum for uraninitt.

relativistisk, ettersom denne feilen vil domineres av måleusikkerheten av diameterne, men vi tar med faktoren for å unngå systematiske avvik. Likning (9) gir så anslagene våre for d_{10} , svarende til indre ring, og d_{11} , svarende til ytre ring, med feilpropagert usikkerhet gitt ved likning (12), der vi tar hensyn til ΔL og standardfeilen i diametermålene, som dominerer måleusikkerheter tilknyttet spenning og strøm. Vi sammenlikner til slutt forholdet mot det geometriske anslaget fra teoridelen på $\sqrt{3}$ samt litteraturverdiene. Vi beregner den relative usikkerheten i forholdet med feilpropagering ved å legge sammen de relative usikkerhetene i d_{10} og d_{11} .

IV. Resultater

A. GM-teller

Aktiviteten til kilden i mars 2025 anslåes til 115 kBq. Den effektive telleraten måles til $n = 0.57 \pm 0.04$ Bq. I prosent får vi da en effektivitet på $0.91 \pm 0.09\%$, der vi bruker likning (11) for å beregne usikkerheten.

B. Gammaspektroskopi

Energispekturene for Cesium 137 og Cobolt 60 er plottet i figur 6. Fullenergitoppen for ^{137}Cs er ved kanalnummer $I = 474$, mens den høyeste for ^{60}Co er ved $I = 931$. Dette gir kalibreringen $\Delta E = 1.47\text{keV}$ og $E_0 = -33.96\text{keV}$, som predikerer $\tilde{I} = 822$ for den andre toppen til Cobolt 60. I våre observasjoner har vi anslått denne til kanalnummeret $I = 821 \pm 5$.

Energispekteret for uraninittprøven er plottet i figur 7. Tabell III viser energiene ved våre observerte topper sammen med teoretiske gammaenergier for døtre av ^{238}U (og én fra kjeden ^{232}Th).

Table III. Gamma-energier ved observerte topper fra uraninitt-prøve sammen med teoretiske energier for døtre av Uran238. De tomme feltene (-) har ingen passende verdi.
*Produkt fra Th232, ikke Uran238.

Energitopp (± 7 keV)	Teoretisk (keV)	Isotop
51	-	-
75	-	-
164	186	Ra226
226	240	Pb214
282	295	Pb214
340	352	Pb214
608	610	Bi214/Pb214
772	768	Bi214
942	911	AC228*
1130	1120	Bi214
1263	1238	Bi214
1412	1378	Bi214
-	1764	Bi214

C. Røntgendiffraksjon

Figur 8 viser antall tellinger per sekund, altså et relativt mål på mottatt intensitet, rundt de teoretiske topene, som er angitt sammen med våre anslag i tabell IV.

D. Elektronendiffraksjon

Anslagene våre for d_{10} , d_{11} og forholdet mellom disse, med usikkerheter beregnet fra likning (12), er presentert sammen med teoretiske verdier i tabell V.

Table IV. Eksperimentelle og teoretiske verdier for første- og andreordens maksima for 2θ med røntgendiffraksjon for en kobberanode og en KCl-krystall.

Orden	Overgang	Teoretisk	Eksperimentell
1	K_α	28.4°	$28.0 \pm 0.5^\circ$
1	K_β	25.5°	$25.5 \pm 0.5^\circ$
2	K_α	58.7°	$59.0 \pm 0.5^\circ$
2	K_β	52.3°	$52.5 \pm 0.5^\circ$

Table V.

	Teoretisk (pm)	Eksperimentell (pm)
d_{10}	213	207 ± 4
d_{11}	123	113 ± 2
d_{10}/d_{11}	$1.73 \approx \sqrt{3}$	1.83 ± 0.04

V. Diskusjon

A. GM-teller

Effektiviteten på $0.91 \pm 0.09\%$ er akkurat innenfor det grove litteraturanslaget på 1% oppgitt i [2]. Forsøket kunne likevel ha vært forbedret ved å bruke vater til å forsikre at GM-røret og kilden var presist på en linje; ellers blir anslaget for romvinkelen feil. Fordi vi gjorde dette på øyemål er det mulig at det er en viss systematisk feil i svaret vårt. En annen mulig forbedring ville være å øke antall måleserier. Det er nemlig ganske stor variasjon i antall tellinger blant de 5 seriene vi gjorde, både for bakgrunnsstrålingen (maks 30, min. 21) og med kilden (maks 63, min. 53). Å måle over lengere tid kunne bedre usikkerheten noe, se bemerkninger under likning (4).

B. Gammaspektroskopi

Vi kan sammenlikne kalibreringsplottet i figur 6 med teorien: Vi ser en svært tydelig Compton-kant før fullenergitoppen, og også antydning til en tilbakespredningstopp rundt $I = 175$, selv om denne er overraskende høy og dermed kanskje kan skyldes andre bidrag. Også Cobolt-plottet viser tilsvarende egenskaper, men Compton-kanten er noe mindre tydelig, og denne analysen kunne vi gjerne ha kjørt lenger for å få et finere plott med mindre støy, men toppenes gjennomsnittlige plassering vil ikke påvirkes betydelig av måletid, så dette er først og fremst et estetisk poeng. De første topene i begge plottene skyldes røntgenstråling, og vi skal diskutere disse til slutt, men først litt om usikkerhet.

Fordi vi treffer tilnærmet perfekt på validerings-toppen fra ^{60}Co (prediksjon 822, eksperimentell 821 ± 5) er kalibreringen sannsynligvis god. Usikkerheten i kanalnummeret kunne vært redusert ved et mer kvantitatativt mål på FWHM enn øyemål, men som nevnt i eksperimentaldelen ville ikke dette være berettiget; vi ser nemlig fra resultatene i tabell III at selv med det grove anslaget

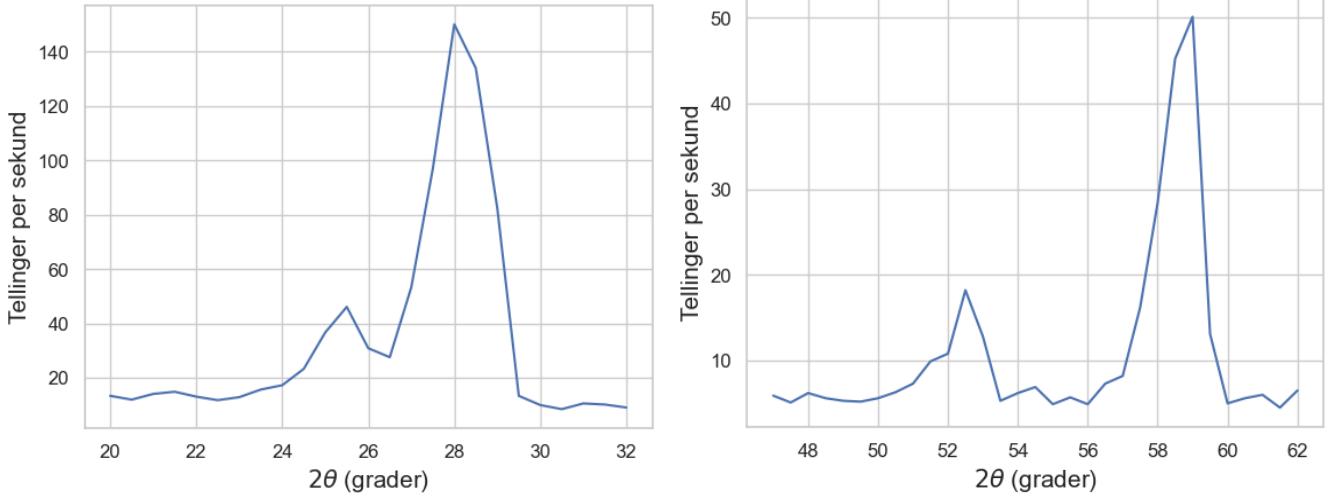


Figure 8. Tellerate mot vinkel i to ulike intervaller rundt teoretiske maksima, med ett målepunkt for hver halve grad på førsteaksen. Vi ser i hvert plott to tydelige topper, som sammenfaller fint med de teoretiske verdiene, se tabell IV.

$\Delta I = 5$, som gir $\Delta E = 7$, treffer vi ikke veldig godt på energiene, og de fleste faller utenfor usikkerheten. Dette kan skyldes at flere av toppene for uraninit var lave og vanskeligere å lese av nøyaktig, spesielt fordi spekteret her har så mange toppe at det er svært vanskelig å finne formen til bakgrunnen. Dette kan gi en liten systematisk feil, som kan bikkje i ulike retninger avhengig av hvor vi er på spekteret. Fra tabellen ser det ut til at vi underestimerer hvor bratt bakgrunnen er i starten og overestimerer mot slutten. Leseren inviteres til selv å studere figur 7 og forsøke å plukke ut bakgrunnen, spesielt for lave kanalnummer; det er ikke trivelt, og heller ikke klart hvordan man skulle gjøre et bedre estimat med et enkelt program, men med erfaring eller AI kunne man sannsynligvis gi gode estimerater. Eventuelt kunne vi forsøkt å gjøre egne mål av bakgrunnen for å trekke fra, men også her ville stokastikk spilt inn og vi måtte forsørget samme måletid med og uten kilden for å få en meningsfull korrespondanse.

Samlet sett er det likevel slående at vi finner toppe *omtrent* ved de teoretiske verdiene (utenom ved den høyeste energien, som er kuttet ut av spekteret vårt fordi det tilhørende $\tilde{I} = 1225$ overstiger maksimumet $I_m = 1000$). Vi påstår derfor at resultatene ikke motviser noen av forekomstene presentert i tabellen, men heller at vi har undervurdert usikkerhetene tilknyttet både avlesning og kanskje stokastiske prosesser i måleapparatet. Slike potensielle usikkerhetskilder ble kort beskrevet i teoride- len, og forklarer hvorfor toppene ikke er helt skarpe i plottene våre.

Den øverste teoretiske toppen kommer altså ikke med fordi den overstiger maksimalenergien vi mäter. Merk at vi også har to lavere toppe ved omtrent 50 og 75 keV, henholdsvis, som ikke er forventet å finne i uraninit. Vi foreslår at dette er røntgenstråling fra omgivelsene - se til

sammenlikning på de to laveste toppene i Cesium-plottet i figur 6. Ved forstørring kan man lese av plasseringene av disse til omtrent $I_1 = 60$ og $I_2 = 75$, og det er kjent at slike toppe kan oppstå når elementer i omgivelsene til kilden eksisteres. I Cesium-plottet skyldes disse antageligvis røntgenstråling fra bly, når vi sammenlikner med litteraturverdier; ^{137}Ba -toppen som også nevnes i [2] har nemlig for lav energi (ca. 32.2keV). Det er altså god grunn til å anta at de laveste toppene ikke skyldes et isotop i uraninit, men de påviser at uraninit er radioaktivt og eksiterer stoffer i sine omgivelser.

C. Røntgendiffraksjon

Her finner vi sterk overenstemmelse mellom teori og eksperiment, og alle verdiene sammenfaller innenfor usikkerheten. Én topp har en gjennomsnittsverdi som ikke er akkurat ved nærmeste avrundingsverdi for den teoretiske, men det skyldes at den teoretiske på 58.72° er ca. midt mellom to måleverdier når vi bruker steglengde 0.5° . Det er derfor rimelig å anta at den antatte gitterstrukturen stemmer.

Finjusteringen av vinkel på dreiebordet var i ustand, men det hadde ellers vært interessant å teste flere verdier, for eksempel med steglengde 0.25° for å glatte ut plottene i figur 2. Med økt presisjon i vinkelen ville vi antagelig også måtte øke måletiden for å unngå at stokastiske effekter oversteg avrundingsfeilen. I vårt tilfelle, med avrunding til nærmeste halve grad, tyder resultatene på at en måletid på 10s er mer enn tilstrekkelig fordi den gir skarpe, tydelige toppe i figur 2.

D. Elektronondiffraksjon

Anslagene våre for gitteravstanden samsvarer *ikke* med de teoretiske verdiene innenfor usikkerhetsanslaget, selv om de er i riktig område. Merk at vi kun tar høyde for tilfeldige feil i usikkerhetsberegningen, og vi ser at den estimerte tilfeldige usikkerheten er nokså lav, spesielt for d_{11} som er lengst unna den sanne verdien. Dette tyder på at det antagelig er en systematisk feil i diametermålene, som alle ble gjort av en og samme person på svært diffuse ringer. Å gjøre flere målinger med samme person kunne bedret presisjonen, men nøyaktigheten ville forblitt dårlig. I stedet kunne vi ha forsøkt å motvirke systematiske feil ved å gjøre to *uavhengige* målinger, altså gjort av ulike personer som ikke kommuniserer resultatene seg imellom, av hver ring.

VI. Konklusjon

Vi har utforsket fire strålingsfenomener ved å i) beregne effektiviteten til en GM-teller, ii) identifisere ra-

dioaktive isotoper i uraninit med gammaspektroskop, iii) validere teoretiske gitteravstander i en KCl-krystall ved hjelp av røntgendiffraksjon, og iv) måle gitteravstander i grafitt med elektronondiffraksjon.

GM-tellerens effektivitet anslåes til $0.91 \pm 0.09\%$, eller ca. 1%. Gammaspektroskopi antyder forekomster av Ra226, Pb214, Bi214 (døtre av Uran238) og AC228 (fra Th232), men vi finner ikke perfekt korrespondanse mellom teoretiske og målte energier, antagelig på grunn av usikkerhet i energitoppenes plassering. Vi kan altså ikke hevde å ha gitt definitive bevis for alle disse isotopene. Gitteravstandene i KCl beregnes derimot i full korrespondanse med litteraturverdiene innenfor steglengden på 0.5° . Anslagene for gitteravstander i grafitt er potensielt preget av systematisk usikkerhet, og spesielt er den korteste avstanden $d_{11} = 113 \pm 2\text{pm}$ et stykke unna den teoretiske verdien. Dette medfører at vi overestimerer forholdet $d_{10}/d_{11} = 1.83 \pm 0.04$ med 2.5 standardavvik.

[1] Centers for Disease Control and Prevention, “[Cesium-137](#),” Accessed: 2025-04-02.

[2] N. J. Edin, “Elektromagnetisk stråling og elektronondiffraksjon,” PDF (2024), bygger på øvelser av Ole Ivar Ulven m.fl.

Appendiks: Utstyrslister

1. GM-teller

- Stativ med klemmer
- Geiger-Müller rør
- Kombinert spenningskilde og telleverk
- Radioaktiv kilde (^{137}Cs)
- Tommestokk

2. Gammaspektroskopi

- Gammaspektrometer
- PC med Windas
- Radioaktive kilder (^{137}Cs og ^{60}Co)
- Uraninit-prøve

3. Røntgendiffraksjon

- Røntgenspektrometer med GM-detektor og spenningsforsyning/telleverk
- KCl-krystall

4. Elektronidiffraksjon

- Evakuert glassbeholder for elektronidiffraksjon med spenningsforsyning
- Skyvelære i plast