

Fuente: <https://github.com/5danalfaro/practicassNL>

DIAGRAMA/PLANO DE FASE DE UN PÉNDULO SIMPLE CON MASA SIMPLE

SISTEMAS NO LINEALES

NOVEMBER 17, 2019

DANIEL I ALFARO POSADA

Diagrama de fase de un péndulo simple con rozamiento

El diagrama de fases del péndulo lo construiremos con la velocidad y ángulo con respecto a la normal. Para visualizar mejor cada una de las condiciones iniciales se ha desarrollado un pequeño programa que simula la posición del péndulo, y se ha ejecutado para a varias condiciones iniciales. Dado que el tamaño de la varilla es de un metro, las dos condiciones iniciales que no daban lugar a ningún movimiento del diagrama eran, como era de esperar, para aquellas en las que α era igual a π o 0 (y sus correspondientes en vueltas del péndulo) y la velocidad era igual a cero.

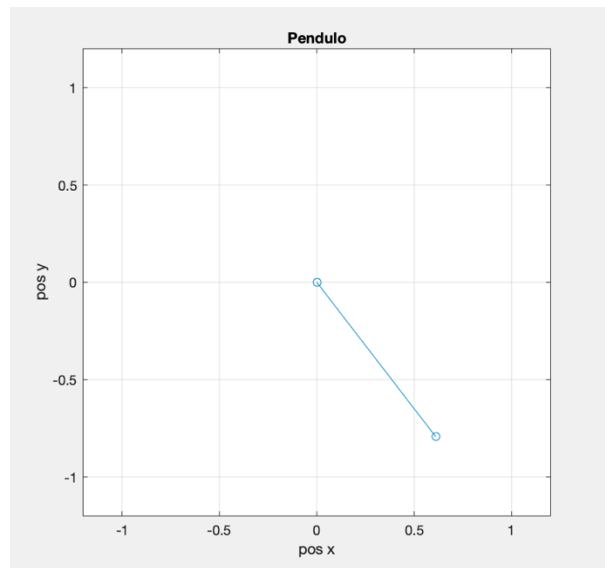


Figura 1: Movimiento del péndulo modelado

Se han observado también, diferentes comportamientos ante distintas variables de longitud de la varilla, de masa del péndulo y constante de rozamiento con el aire.

Para construir el diagrama de fase se han tomado 50 condiciones iniciales de α_0 y v_0 diferentes (al coger $l=1$, la velocidad y variación de ángulo son iguales), se han insertado en el modelo de simulink y se han visualizado los resultados.

Condiciones iniciales

Para realizar la práctica lo que haremos es variar las condiciones iniciales y los factores del sistema:

$$\alpha_0 = [-5, \dots, 5] \quad v = [-2, \dots, 2] \quad l = 1 \quad B = 1 \quad m = [1, 3]$$

Modelo en Simulink

El Modelo en Simulink es similar al anterior desarrollado en la anterior entrega teniendo en cuenta que la variable de salida que queremos además es la velocidad. Por lo que quedaría así:

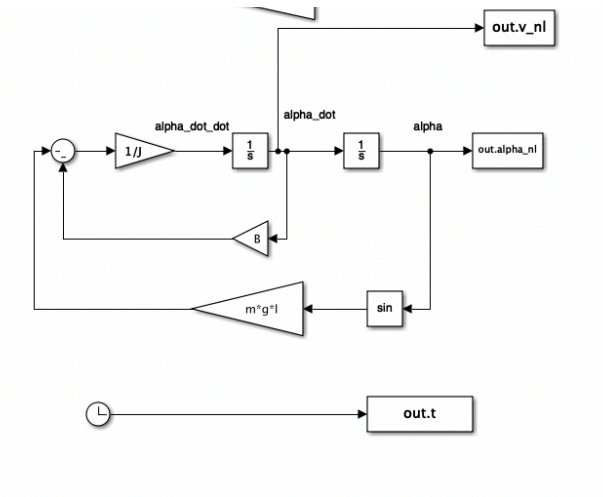


Figura 2: Modelo en Simulink del péndulo libre no linealizado

Resultados - Diagrama de fases

Además de lo mencionado anteriormente hemos elegido un tiempo de simulación de entre 5 y 10 segundos para poder visualizar los puntos iniciales y los puntos finales

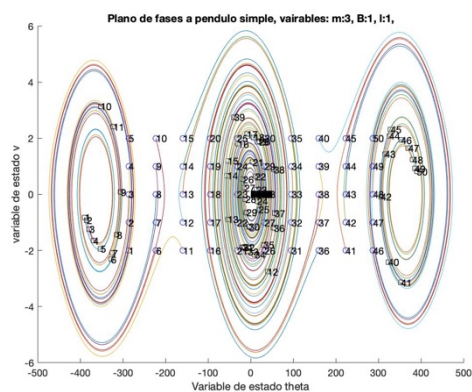


Figura 3: Diagrama de Fases.
 $m=3, B=1, l=1$

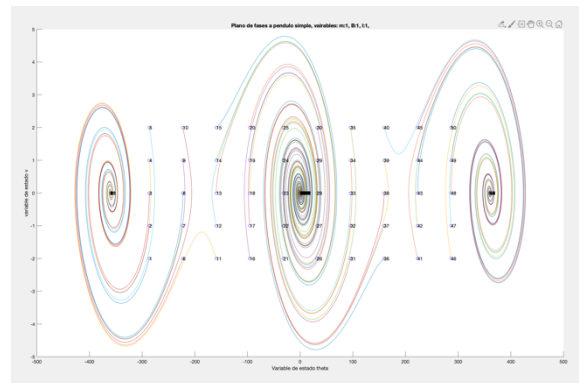


Figura 4: Diagrama de Fases
 $m=1, B=1, l=1$

Como se puede observar entre la figura 3 y 4, la llegada al punto de equilibrio estable del péndulo de masa 1 es mucho más rápida. Aspectos interesantes a destacar son el claro comportamiento inestable de los puntos α igual a -180 y $+180$ y v igual a cero. Como se puede observar en la trayectoria 11 en ambos diagramas es repelida en el entorno del punto $-180,0$.

Comparativa entre el modelo linealizado y no linealizado

Comentarios de la linealización del movimiento del péndulo

Como explicamos en la anterior entrega, la ecuación que describe el movimiento de nuestro péndulo linealizado es la siguiente:

$$\alpha_0 = \sin^{-1} \left(\frac{T_0}{mgl} \right),$$

$$J\Delta\ddot{\alpha} + B\Delta\dot{\alpha} + mgl \cos \alpha_0 \Delta\alpha = \Delta T$$

Como se puede observar dado que el par es cero en todo momento el punto de equilibrio se encuentra en aquellos puntos donde $\sin(\alpha)$ sea igual a cero. Sin embargo, cabe destacar que para los puntos de inestabilidad, el elemento $\cos(\alpha_0)$ se hace negativo y tenemos una realimentación positiva en el modelo de simulink, lo que hace el modelo linealizado en ese punto completamente diferente al comportamiento de la realidad.

Modelo en Simulink – Linealizado & No linealizado

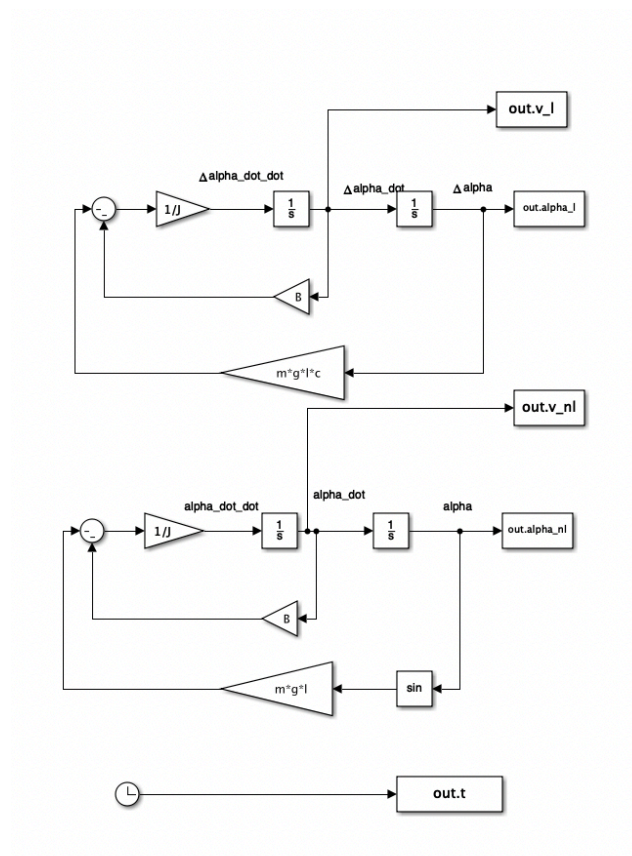


Figura 5: Modelo en Simulink del péndulo libre no linealizado y linealizado

Resultados de la comparativa entre el modelo linealizado y no linealizado

Hemos representado únicamente una trayectoria del diagrama de fases para poder comparar ambos modelos. En primer lugar hemos comparado las dos trayectorias para el punto de equilibrio estable, y en segundo lugar para el punto de equilibrio inestable:

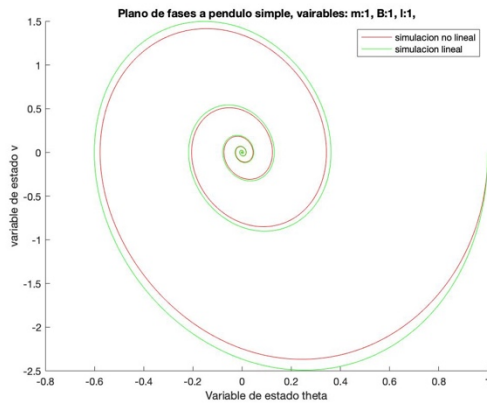


Figura 6: punto de equilibrio estable

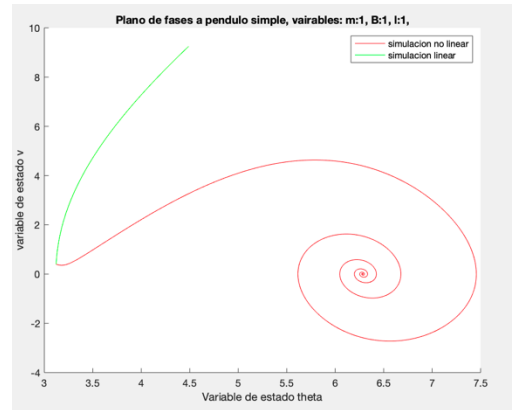


Figura 7: punto de equilibrio inestable

Para el punto de equilibrio estable, se analizará a continuación la validación de la hipótesis que ambos modelos son aproximadamente iguales. Sin embargo, como se puede observar, para el punto de equilibrio inestable nuestra aproximación es bastante deficiente (únicamente hemos representado una parte de la modelización, ya que al ser realimentación positiva el sistema crece sin llegar a estabilizarse).

Nos gustaría mencionar, que únicamente se puede comparar para puntos cercanos al punto de equilibrio, ya que como se observa en la figura 8, al haber linealizado nuestro sistema para un único punto de equilibrio, las trayectorias difieren enormemente cuando empezamos a alejarnos de él.

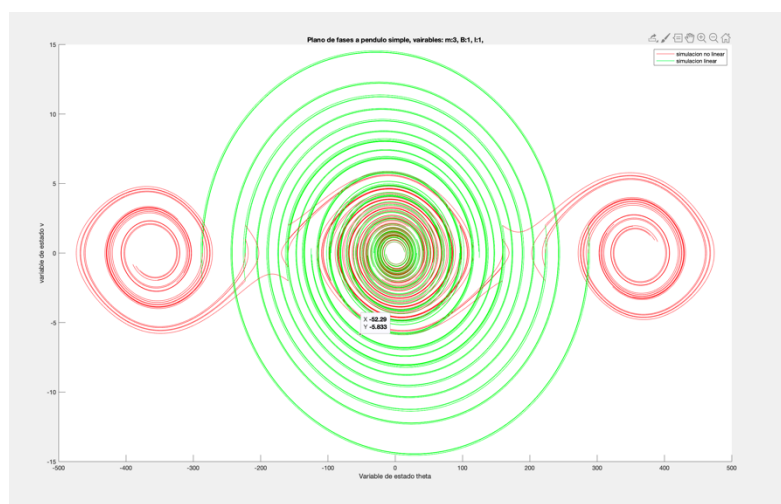


Figura 8: Plano de fase para varias trayectorias, comparativa del modelo lineal (en verde) y el modelo no lineal (en rojo)

Comparativa entre ambos modelos velocidad y alpha

Las diferencias se pueden observar en las figuras 9 y 10 (Diferencias en “absoluto” y en “porcentaje”). Se puede ver no son muchas, y disminuyen cuando el péndulo se empieza a “parar”. Únicamente en ciertos puntos donde el ángulo o la velocidad tiende a cero, que es cuando las diferencias son muy altas entre ambos modelos en diferencias porcentual. Por lo tanto podemos determinar que la hipótesis es válida, ambos modelos se comparten de manera muy similar cuando las c.i. están cerca del punto de equilibrio estable.

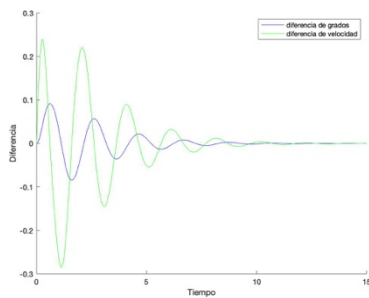


Figura 9: Diferencias entre modelos

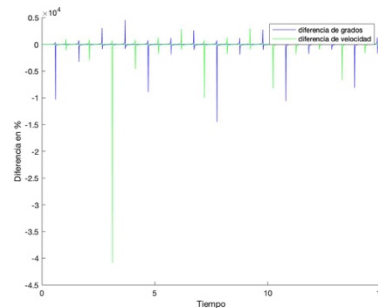


Figura 10: Diferencia (%) entre ambos modelos