Formules: SII

G. Félix/R. Célian/P. Arsinoé

10 avril 2024

Table des matières

1 MECANIQUE

1.1 STATIQUE

CONDITION DE GLISSEMENT : $\boxed{\|\vec{dt}\| = |\vec{dn}\|.\tan\phi}$ OU $\tan(\phi) = f$

CONDITION D'ADHERENCE : $\boxed{[\|\vec{dt}\| \leq |\vec{dn}\|.\tan\phi_0}$ OU $\tan(\phi_0) = f_0$

TORSEUR D'UNE ACTION MECANIQUE :

$$(\mathcal{T}_{eff/1})_O = \begin{pmatrix} F_x & M_x \\ F_y & M_y \\ F_z & M_z \end{pmatrix}_O = \begin{pmatrix} \overrightarrow{R(eff \to 1)} \\ \overrightarrow{M_{/O}(eff \to 1)} \end{pmatrix}$$

FORMULE DE VARIGNON : $\boxed{\overrightarrow{M_{/A}(\vec{F})} = \overrightarrow{M_{/O}(\vec{F})} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{F}}$

PFS : DANS UN REPERE GALILEEN R_g SI UN SYSTEME S EST A L'EQUILIBRE ALORS :

$$\boxed{(\mathcal{T}_{\overline{S}/S}) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{R(\overline{S} \to S)} \\ \overrightarrow{M_{/O}(\overline{S} \to S)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}}$$

THEOREME DES ACTIONS RECIPROQUES : $\boxed{(\mathcal{T}_{S1/S2}) = (-\mathcal{T}_{S1/S2})}$

SOLIDE SOUMIS A DEUX GLISSEURS :

LES ACTIONS AGISSANT SUR LE SOLIDE ONT LA MEME INTENSITE, SONT DE SENS OPPOSES ET PORTEES PAR LA MEME DROITE

SOLIDE SOUMIS A TROIS GLISSEURS :
$\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ SONT TOUTES CONCOURANTES EN UN POINT.

DANS LE CADRE D'UN PROBLEME PLAN : $\boxed{(\mathcal{T}_{i/j}) = \begin{pmatrix} F_{i/j} & - \\ F_{i/j} & - \\ - & Ni/j \end{pmatrix}}$

1.2 CINEMATIQUE

VECTEUR VITESSE : $\boxed{\overrightarrow{V(P/R_0)} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}_{R_0}}$

VECTEUR ACCELERATION : $\boxed{\overrightarrow{\Gamma(P/R_0)} = \frac{d\overrightarrow{V_{P/R_0}}}{dt}_{R_0}}$

FORMULE DE BOOR : $\boxed{\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}_R = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} \wedge \overrightarrow{OP}}$

TORSEUR CINEMATIQUE : $\boxed{(\mathcal{V}_{2/R}) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/R}} \\ \overrightarrow{V_{P\in 2/R}} \end{pmatrix}_P}$

FORMULE DE VARIGNON : $\boxed{\overrightarrow{V_{Q\in R_1/R_0}} = \overrightarrow{V_{P\in R_1/R_0}} + \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_0]}}}$

ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE : $\boxed{\|\overrightarrow{V_{P\in S/R_0}}\| = \|\overrightarrow{OP}\|.\omega_{S/R_0}}$

TRANSLATION RECTILIGNE : $\boxed{\text{LES VITESSES DE TOUS LES POINTS DU SOLIDES SONT EGALES}}$

COMPOSITION DES VITESSES : $\boxed{\overrightarrow{V_{P\in S/R_0}} = \overrightarrow{V_{P\in S/R_1}} + \overrightarrow{V_{P\in R_1/R_0}}}$

COMPOSITION DES TORSEURS : $\boxed{(\mathcal{V}_{2/R}) = (\mathcal{V}_{2/R_1}) + (\mathcal{V}_{R_1/R})}$

ROULEMENT SANS GLISSEMENT :

SI DEUX SOLIDES E ET S ROULENT SANS GLISSER L'UN SUR L'AUTRE EN UN POINT I, ALORS :

$\boxed{\overrightarrow{V_{I\in S/R_0}} = \overrightarrow{V_{I\in E/R_0}} \text{ et } \overrightarrow{V_{I\in S/E}} = \overrightarrow{0}}$

FERMETURE GEOMETRIQUE : SOIT $(O_1, O_2, ..., O_N)$ DES POINTS DE L'ESPACE,
$1 \leq i \leq N$, ON A $\boxed{\sum_i \overrightarrow{O_iO_{i+1}} = \overrightarrow{O_NO_1}}$

BOUCLAGE CINEMATIQUE : $\boxed{(\mathcal{V}_{i/i}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

1.3 CINETIQUE

CENTRE DE MASSE : $\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OG_i}}{\sum_i m_i}}$

RESULTANTE CINETIQUE : $\boxed{\overrightarrow{R_c} = m.\overrightarrow{V(G/R)}}$

MOMENT CINETIQUE : $\boxed{\overrightarrow{\sigma_A(S/R)} = m.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V(A \in S/R)} + I(A,S).\overrightarrow{\Omega(S/R)}}$

TORSEUR CINETIQUE : $\boxed{(\mathcal{C}_{S/R}) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{R_c} \\ \overrightarrow{\sigma_A(S/R)} \end{pmatrix}_{A,R}}$

1.4 DYNAMIQUE

RESULTANTE DYNAMIQUE : $\boxed{\overrightarrow{R_d(S/R)} = m.\overrightarrow{\Gamma_{G,S/R}}}$

MOMENT DYNAMIQUE : $\boxed{\overrightarrow{\delta_A(S/R)} = \frac{d\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}}{dt}_R + m.\overrightarrow{V_{A\in S/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}}}$

TORSEUR DYNAMIQUE : $\boxed{(\mathcal{D}_{S/R}) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{R_d(S/R)} \\ \overrightarrow{\delta_A(S/R)} \end{pmatrix}}$

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE : $\boxed{\begin{pmatrix} \overrightarrow{R_d(S/R)} \\ \overrightarrow{\delta_A(S/R)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{R(\overline{S} \to S)} \\ \overrightarrow{M_A(\overline{S} \to S)} \end{pmatrix}_P}$

1.5 GEOMETRIE DES MASSES

UNE MATRICE D'INERTIE EST DE LA FORME : $\boxed{I_O[S] = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}}$

AVEC $\boxed{\text{A,B,C LES MOMENTS D'INERTIES}}$ ET $\boxed{\text{E,F,D LES PRODUITS D'INERTIE}}$

CALCUL DES PRODUITS ET DES MOMENTS D'INERTIE (HORS PROGRAMME) :
$\boxed{A = \int_{P\in S} (y^2 + z^2)\, dm}$ $\boxed{D = \int_{P\in S} y.z\, dm}$

$\boxed{B = \int_{P \in S} (x^2 + z^2)\, dm}$ $\boxed{E = \int_{P \in S} x.z\, dm}$

$\boxed{C = \int_{P \in S} (y^2 + x^2)\, dm}$ $\boxed{F = \int_{P \in S} y.x\, dm}$

LES PLANS DE SYMETRIES ANNULENT LES PRODUITS D'INERTIE QUI DEPENDENT DE LA DIRECTION ORTHOGONALE AU PLAN

THEOREME DE HYUGENS : $\boxed{I_O[S] = I_G[S] + m. \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -cb \\ -ac & -cb & a^2 + b^2 \end{pmatrix}}$ AVEC $\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

1.6 ENERGETIQUE

ENERGIE CINETIQUE : $\boxed{E_c(S/R) = \frac{1}{2}.\left(\mathcal{C}_{S/R}\right).\left(\mathcal{V}_{S/R}\right)}$

$\boxed{E_c(S/R) = \frac{1}{2}. \begin{pmatrix} \overrightarrow{R_c} \\ \overrightarrow{\sigma_A(S/R)} \end{pmatrix}_{A,R} . \begin{pmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A \in S/R}} \end{pmatrix}_P}$

CAS PARTICULIERS :

SOLIDE EN TRANSLATION : $\boxed{E_c(S/R) = \frac{1}{2}.mV^2}$

SOLIDE EN ROTATION : $\boxed{E_c(S/R) = \frac{1}{2}.J.\Omega^2}$

PUISSANCE D'UNE ACTION MECANIQUE : $\boxed{P(S_i \to S_j/R) = \left(\mathcal{T}_{S_i \to S_j}\right).\left(\mathcal{V}_{S_j/R}\right)}$

$\boxed{P(S_i \to S_j/R) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{R(S_i \to S_j)} \\ \overrightarrow{M_{/O}(S_i \to S_j)} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S_j/R}} \\ \overrightarrow{V_{O \in S_j/R}} \end{pmatrix}}$

PUISSANCE MUTUELLE ENTRE DEUX SOLIDES : $\boxed{P(S_1 \longleftrightarrow S_2) = \left(\mathcal{T}_{S_1 \to S_2}\right).\left(\mathcal{V}_{S_2/S_1}\right)}$

CAS PARTICULIERS :

PUISSANCE D'UNE LIAISON PIVOT : $\boxed{P_p = -\omega.C_{frott}}$

PUISSANCE D'UNE LIAISON GLISSIERE : $\boxed{P_G = -V.f_{frott}}$

PUISSANCE D'UN MOTEUR : $\boxed{P_{mot} = C_m.\omega_m}$

TRAVAIL D'UNE ACTION MECANIQUE : $\boxed{W(1 \to 2/R) = \int_{t_1}^{t_2} P(1 \to 2/R)\, dt}$

THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE : $\boxed{\frac{d}{dt} E_c = \sum P(\overline{S} \to S/R)}$

RENDEMENT INSTANTANE : $\boxed{\eta = \frac{P_{sortant}}{P_{entrant}}}$

RENDEMENT MOYEN : $\boxed{\eta = \frac{W_{sortant}}{W_{entrant}}}$

RENDEMENT TOTAL : $\boxed{\eta_{global} = \prod \eta_i}$

PUISSANCE DES PERTES ENERGETIQUES : $\boxed{P_{pertes} = P_e - P_s = P_e.(\eta - 1)}$

2 SLCI ET ASSERVISSEMENT

2.1 TRANSFORMEE DE LA PLACE

TRANFORMEE DE LAPLACE : $\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}\, dt}$

2.1.1 PROPRIETE DE LA TRANSFORMEE

LINEARITE : $\boxed{\mathcal{L}[a.f(t)+b.g(t)] = a.\mathcal{L}[f(t)] + b.\mathcal{L}[g(t)]}$

DERIVATION : $\boxed{\mathcal{L}[\frac{d^n f(t)}{dt^n}] = p^n.\mathcal{L}[f(t)]}$

INTEGRATION : $\boxed{\mathcal{L}[\int_0^t g(\tau)\,d\tau] = \frac{1}{p}.\mathcal{L}[g(t)]}$

THEOREME DE LA VALEUR FINALE : $\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p.\mathcal{L}[f](p)}$

THEOREME DE LA VALEUR INITIALE : $\boxed{\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to+\infty} p.\mathcal{L}[f](p)}$

THEOREME DU RETARD : $\boxed{g(t) = f(t-\tau) \Rightarrow \mathcal{L}[g(t)] = e^{-p\tau}\mathcal{L}[f(t)]}$

2.1.2 TRANSFORMEES USUELLES

DIRAC : $\boxed{F(p) = 1}$

ECHELON : $\boxed{F(p) = \frac{K}{p}}$

RAMPE : $\boxed{F(p) = \frac{K}{p^2}}$

2.2 AUTOMATIQUE

2.2.1 FONCTION TRANSFERT

FONCTION TRANSFERT : $\boxed{H(P) = \frac{S(p)}{E(p)}}$

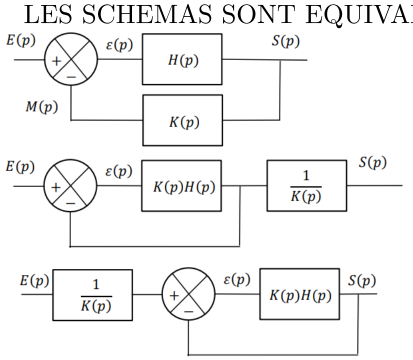
FORME CANONIQUE : $\boxed{H(p) = \frac{K}{p^\alpha}.\frac{P(p)}{Q(p)}}$ K EST LE **GAIN** ET α LA **CLASSE** DU SYSTEME

POUR UN SYSTEME EN BOUCLE FERMEE LA FORMULE DE BLACK : $\boxed{H(p) = \frac{CD}{1+CD.CR}}$

POUR UN SYSTEME EN BOUCLE OUVERTE : $\boxed{H(p) = CD.CR}$

2.2.2 ALGEBRE DES SCHEMAS-BLOCS

LES SCHEMAS SONT EQUIVALENTS :



2.3 ANALYSE TEMPOREL

2.3.1 PREMIER ORDRE

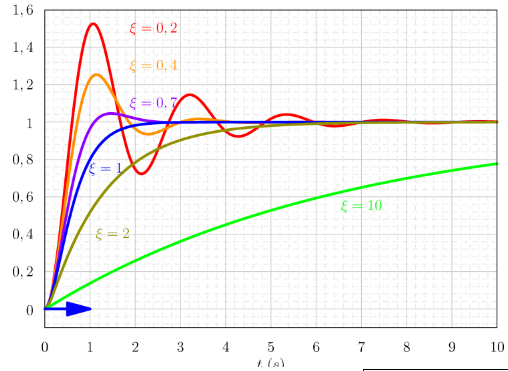
FONCTION TRANSFERT CANONIQUE : $\boxed{H(p) = \frac{K}{1+\tau.p}}$

RAPIDITE : $\boxed{t_{r5\%} = 3\tau}$

2.3.2 DEUXIEME ORDRE

FONCTION TRANFERT CANONIQUE : $\boxed{H(p) = \frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}}$

INFLUENCE DE ξ :



PREMIER DEPASSEMENT : $\boxed{D = e^{\frac{-\pi.\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$

RAPIDITE : VOIR ABAQUE

2.4 ANALYSE FREQUENTIELLE

2.4.1 DIAGRAMME DE BODE

LE MODULE : $\boxed{A(\omega) = |H(j\omega)|}$

LA PHASE : $\boxed{\phi(\omega) = Arg(H(j\omega)}$

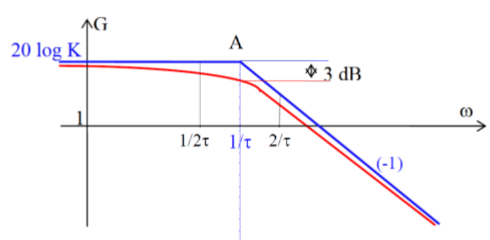
LE GAIN EN DB : $\boxed{G(\omega) = 20.log|H(j\omega)|}$

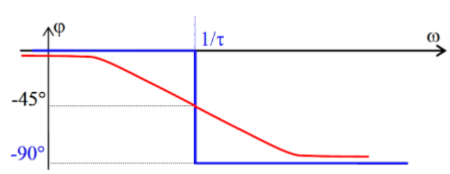
2.4.2 REPONSES FREQUENTIELLES DES SYSTEMES FONDAMENTAUX

<u>INTEGRATEUR PUR :</u> $\boxed{H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}}$ $\boxed{G_{dB} = 20log(K) - 20log(\omega)}$ $\boxed{\phi = -90^o}$

<u>DERIVATEUR PUR :</u> $\boxed{H(j\omega) = K.j\omega}$ $\boxed{G_{dB} = 20log(K) + 20log(\omega)}$ $\boxed{\phi = 90^o}$

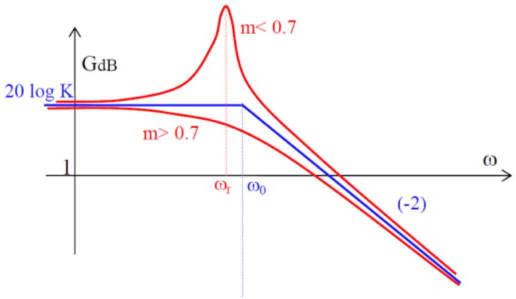
<u>1^{er} ORDRE :</u> $\boxed{H(j\omega) = \frac{K}{1+\tau j\omega}}$

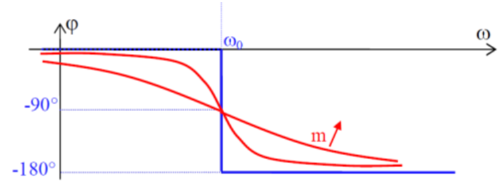




<u>2^{eme} ORDRE :</u> $\boxed{H(j\omega) = \frac{K}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{2m}{\omega_0}\omega}}$

PULSATION DE RESONNANCE : $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2m^2} \text{ pour m} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}}$





2.5 PRECISION

ON DEFINIT L'ERREUR : $\boxed{erreur(t) = e(t) - s(t)}$ et $\boxed{\lim_{t\to+\infty} erreur(t) = \lim_{p\to 0} p.Erreur(p)}$

<u>ERREUR STATIQUE</u> : ENTREE ECHELON

<u>ERREUR DE TRAINAGE</u> : ENTREE EN RAMPE

HOMOGENEITE :<u>LE PRODUIT DES GAINS A L'EXTERIEUR DE LA BOUCLE DOIT ETRE EGAL AU PRODUIT DES GAINS DU RETOUR</u>

ERREUR EN FONCTION DE LA CLASSE DU SYSTEME :

Classe / Entrée	0	1	2
Echelon	$\frac{1}{1+K}$	0	0
Rampe	∞	$\frac{1}{K}$	0
Parabole	∞	∞	$\frac{1}{K}$

EN CAS DE PERTURBATION, SORTIR LA PERTURBATION DE LA BOUCLE ET PRENDRE LA CONSIGNE NULLE PUIS UTILISER LA LINEARITE DU SYSTEME.

2.6 STABILITE

2.6.1 EN BOUCLE FERMEE, ANALYSE DE H(p)

UN SYSTEME EST STABLE SI SA REPONSE CONVERGE

<u>CARACTERISATION</u> : LE SYSTEME EST STABLE QUE SI LA FTBF NE COMPORTE QUE DES POLES A PARTIE REELLE NEGATIVE

$\boxed{\text{LA STABILITE DE LA BO N'IMPLIQUE PAS CELLE DE LA BF ET INVERSEMENT}}$

POLE DOMINANT : $\boxed{\text{LE PLUS PROCHE DE L'AXE DES IMAGINAIRE}}$
ON PEUT PARFOIS NEGLIGER LES AUTRES DEVANT LES POLES DOMNIANTS

2.6.2 EN BOUCLE OUVERTE, ANALYSE GRAPHIQUE

LE SYSTEME EST STABLE SI LA COURBE DE GAIN EST SOUS 0 LORSQUE LA PHASE ATTEINT -180°

MARGE DE GAIN : $\boxed{\text{L'ECART ENTRE LE GAIN ET 0 LORSQUE LA PHASE ATTEINT -180°}}$
MARGE DE PHASE : $\boxed{\text{L'ECART ENTRE LA PHASE ET -180° LORSQUE LE GAIN S'ANNULE}}$

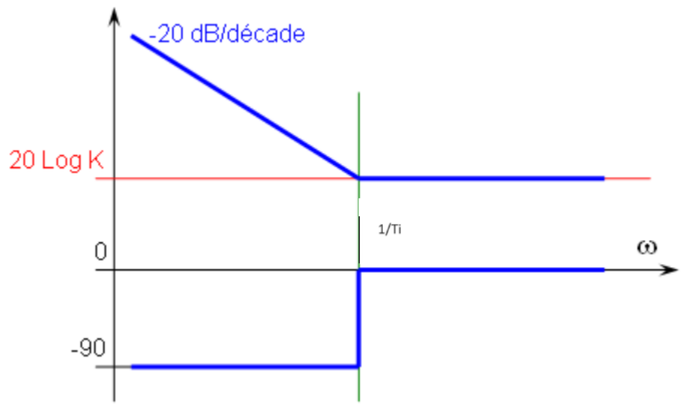
2.7 CORRECTION

POUR UN SYSTEME EN FTBO : $\boxed{K \nearrow \Rightarrow \text{vivacité} \nearrow \text{précision} \nearrow \text{stabilité} \searrow}$

2.7.1 CORRECTEUR INTEGRAL

CORRECTEUR INTEGRAL : $\boxed{C_R = \frac{K_i}{P}}$
PRENDRE $K_i = 1$, EN DEDUIRE LA REPONSE CORRIGEE PUIS MODIFIER K_i POUR OBTENIR UNE REPONSE STABLE.

CORRECTEUR PROPORTIONNELLE INTEGRALE : $\boxed{C(p) = K_{pi}\frac{1+T_i p}{T_i p}}$



CHOISIR Ti POUR ANNULER L'EFFET INTEGRAL AU VOISINAGE DU POINT CRITIQUE
CHOISIR Kpi POUR AUGMENTER LA RAPIDITE

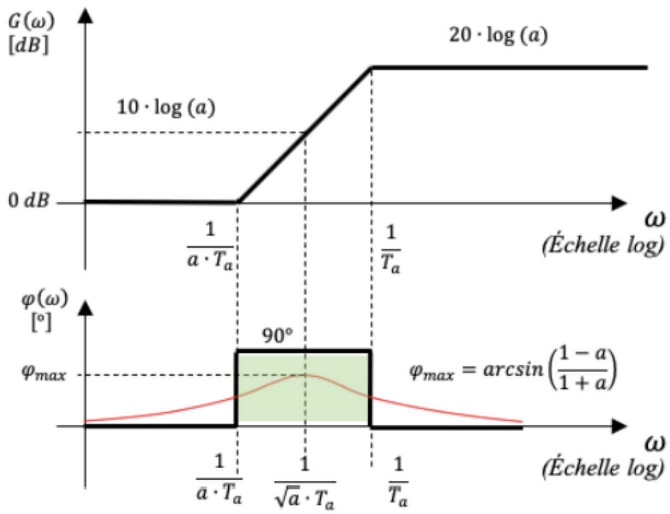
CORRECTEUR A RETARD DE PHASE : $\boxed{C(p) = b.\frac{1+\tau p}{1+b\tau p} \text{ avec } b > 1}$

Correcteur	Précision	Rapidité	Stabilité
Intégral	++	-	-
Proportionnel intégral	++	+	modifier le gain
Retard de phase	+	+	modifier le gain

2.7.2 CORRECTEUR A ACTION DERIVEE

CORRECTEUR A AVANCE DE PHASE : $\boxed{C(p) = K\frac{1+Tp}{1+aTp} \text{ avec } a > 1}$

CHOISIT POUR APPORTER LOCALEMENT DE LA PHASE



$G(\omega)$ $[dB]$
$20 \cdot \log(a)$
$10 \cdot \log(a)$
$0\ dB$
ω
(Échelle log)
$\frac{1}{a \cdot T_a}$
$\frac{1}{T_a}$
$\varphi(\omega)$ [°]
90°
φ_{max}
$\varphi_{max} = arcsin\left(\frac{1-a}{1+a}\right)$
ω
(Échelle log)
$\frac{1}{a \cdot T_a}$
$\frac{1}{\sqrt{a} \cdot T_a}$
$\frac{1}{T_a}$