

# Formules: Physique

T. T. Tan

## Sommaire

1	Oscillateur harmonique	3
2	Signal sinusoïdal	3
3	Propagation d'un signal	3
4	Superposition de 2 signaux sinusoïdaux	4
5	Onde lumineuse	4
6	Formation d'images par un système optique	5
7	Lentilles minces dans l'approximation de Gauss	5
8	Électrocinétique en régime continu	5
9	Circuits en régime transitoire	6
10	Oscillateurs amortis	7
11	Régime sinusoïdal forcé (RSF)	7
12	Filtrage linéaire	9
13	Cinématique	10
14	Principes de la dynamique	11
15	Travail et puissance mécaniques	11
16	Mouvement d'une particule chargée dans E ou B	11
17	Théorème du moment cinétique	11
18	Mouvement dans un champ de force centrale conservative	12
19	Solide en rotation autour d'un axe fixe (cf. Mécanique)	13
20	Description d'un système thermodynamique	13
21	Énergie échangée par un système au cours d'une transformation	14
22	1 <sup>er</sup> principe de la thermodynamique. Bilans d'énergie	14
23	2 <sup>nd</sup> principe de la thermodynamique	16
24	Machines thermiques	17
25	Champ magnétique	19
26	Lois de l'induction	19
27	Loi de Laplace (cf. Magnétostatique)	19

28 Éléments de traitement du signal	19
29 Calculs et opérateurs vectoriels	20
30 Mécanique	21
31 Électrostatique	24
32 Magnétostatique	26
33 Équations de Maxwell	28
34 Propagation, rayonnement	30
35 Chemin optique, utilisation	32
36 Interférences	34
37 Compléments de thermodynamique	36
38 Systèmes ouverts en régime stationnaire	38
39 Conduction, convection	38
40 Physique quantique	42
41 Thermodynamique statistique	47
42 Compléments: Calculs d'incertitudes	51
43 Compléments: Rayonnement d'équilibre, corps noir	52
44 Compléments	52

*Veuillez signaler toute erreur constatée*

## 1 Oscillateur harmonique

LOI DE HOOKE:  $\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow M} = -k(l(t) - l_0) \vec{i}$  si  $\vec{i}$  est dans le sens de l'étirement.

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE TYPE O.H.:  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$  avec  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

SOLUTION:  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

PULSATION PROPRE:  $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}mv^2 \\ E_{p,\text{pesanteur}} &= \pm mgz + C \\ E_{p,\text{élastique}} &= \frac{1}{2}k[l(t) - l_0]^2 \\ E_m &= E_c + E_{p,\text{total}} \end{aligned}$$

## 2 Signal sinusoïdal

SIGNAL SINUSOÏDAL:  $s(t) = S_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$        $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

DÉPHASAGE:  $\omega \Delta t = |\Delta \varphi|$

## 3 Propagation d'un signal

CÉLÉRITÉ DE L'ONDE:  $c = \frac{d}{\tau}$

ONDE PROGRESSIVE:

Visualisation dans le temps:  $s(x, t) = s\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$  ( $x$  croissant)       $s(x, t) = s\left(0, t + \frac{x}{c}\right)$  ( $x$  décroissant)

Visualisation dans l'espace:  $s(x, t) = s(x - ct, 0)$  ( $x$  croissant)       $s(x, t) = s(x + ct, 0)$  ( $x$  décroissant)

ONDE PROGRESSIVE SINUSOÏDALE:  $s(x, t) = S_m \cos(\omega t - kx + \varphi)$

PULSATION TEMPORELLE/SPATIALE:  $\omega T = k\lambda = 2\pi$        $c = \lambda f = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$        $T = \frac{1}{f}$        $\lambda = \frac{1}{\sigma}$

## 4 Superposition de 2 signaux sinusoïdaux

FORMULE D'INTERFÉRENCES:  $S_m = \sqrt{S_{1m}^2 + S_{2m}^2 + 2S_{1m}S_{2m} \cos(\Delta\varphi)}$

INTERFÉRENCE CONSTRUCTIVE/DESTRUCTIVE:  $\delta = d_1 - d_2 = \frac{\lambda\Delta\varphi}{2\pi}$

Constructive:  $\Delta\varphi = m2\pi$  soit  $\delta = m\lambda$  avec  $m \in \mathbb{N}^*$

Destructive:  $\Delta\varphi = \pi + m2\pi$  soit  $\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$  avec  $m \in \mathbb{N}$

ONDE STATIONNAIRE:  $s(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$

Distance entre 2 noeuds/ventres consécutifs:  $\frac{\lambda}{2}$

Conditions aux limites  $s(0, t) = s(L, t) = 0$

Quantification de la pulsation spatiale:  $k_n = \frac{n\pi}{L}$   $L = n \frac{\lambda_n}{2}$

## 5 Onde lumineuse

DOMAINE DU VISIBLE:  $\lambda \in [400, 650]$  en nm

FRÉQUENCES OPTIQUES:  $f = 5,6 \cdot 10^{14}$  Hz

DANS UN MILIEU TRANSPARENT:  $f$  est indépendante du milieu traversé  $v = \frac{c}{n}$   $\lambda_{\text{milieu}} = \frac{\lambda}{n}$

DIFFRACTION DE LA LUMIÈRE:  $\tan \theta = \frac{L}{2D}$   $\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$  avec  $a \ll D$

TACHE D'AIRY:  $\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \iff \Delta\theta = 1,22 \frac{\lambda}{R}$

avec  $R$  le rayon de l'ouverture circulaire et  $\Delta\theta$  le diamètre angulaire de la tache centrale

CONDITIONS DE DIFFRACTION:  $\lambda \approx a$  et  $\lambda < a$   $\lambda \ll a \implies$  phénomène imperceptible

LOIS DE LA RÉFLEXION:  $i = r$

LOIS DE LA RÉFRACTION:  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

CAS LIMITES:

Réfraction limite:  $n_1 < n_2 \implies i_2 < i_1 \implies i_2 = i_{2m}$  et  $i_1 = \frac{\pi}{2}$

Réflexion totale:  $n_1 > n_2 \implies i_2 > i_1 \implies i_2 = \frac{\pi}{2}$  et  $i_1 = i_{1m}$

## 6 Formation d'images par un système optique

CONDITIONS DE GAUSS:  $f = \overline{OF}$   $f' = \overline{OF'}$

## 7 Lentilles minces dans l'approximation de Gauss

DISTANCES FOCALES:  $f = \overline{OF}$   $f' = \overline{OF'}$

VERGENCE:  $V = \frac{1}{f'}$  avec  $f'$  en mètre et  $V$  en dioptrie  $\delta$

THÉORÈME DES VERGENCES: Pour deux lentilles minces accolées,  $V = V_1 + V_2$

GRANDISSEMENT:  $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

FORMULES DE CONJUGAISON (TOUJOURS FOURNIES):

$$\text{Descartes: } \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

$$\text{Newton: } \frac{1}{\overline{FA} \cdot \overline{F'A'}} = \frac{1}{\overline{FO} \cdot \overline{F'O}} \quad \gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$$

CONDITION DE FORMATION D'IMAGE:  $D \geq 4f'$  avec  $D$  la distance entre l'objet et l'écran

GROSSISSEMENT:  $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$

## 8 Électrocinétique en régime continu

INTENSITÉ ÉLECTRIQUE:  $i(t) = \frac{dq}{dt}$  (en régime variable)  $I = \frac{Q}{T}$  (en régime continu)

POTENTIEL ÉLECTRIQUE:  $V(M) = \frac{E_p(M)}{q}$

TENSION:  $U_{AB} = V_A - V_B$

PIUSSANCE ÉLECTROCINÉTIQUE:  $\mathcal{P}_{\text{reçue/fournie}} = UI$

En convention récepteur:  $\mathcal{P}_{\text{reçue}} > 0$  (caractère récepteur) et  $\mathcal{P}_{\text{reçue}} < 0$  (caractère générateur)

En convention générateur:  $\mathcal{P}_{\text{fournie}} > 0$  (caractère générateur) et  $\mathcal{P}_{\text{fournie}} < 0$  (caractère récepteur)

LOI D'OHM:  $U = RI$

CONDUCTANCE:  $G = \frac{1}{R}$

SOURCES IDÉALES:  $U = E$  (source idéale de tension)

$I = \eta$  (source idéale de courant)

SOURCES RÉELLES:  $U = E_{th} - IR_{th}$  (générateur de Thévenin) $I = \eta_N - \frac{U}{R_N}$  (générateur de Norton)LOIS DE KIRCHHOFF: Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des noeuds d'un réseau électriqueLoi des noeuds:  $\sum_{\text{entrants}} I_k = \sum_{\text{sortants}} I_k$ Loi des mailles:  $\sum_{i=1}^{n-1} U_{A_i A_{i+1}} = U_{A_1 A_2} + U_{A_2 A_3} + \dots + U_{A_{n-1} A_n} = U_{A_1 A_n}$ 

ASSOCIATION DE RÉSISTANCES EN SÉRIE:

$R_{eq} = \sum R_i$

$U_k = \frac{R_k}{R_{eq}} U$  (pont diviseur de tension)

ASSOCIATION DE RÉSISTANCES EN PARALLÈLE:

$\frac{1}{R_{eq}} = \sum \frac{1}{R_i}$

$I_k = \frac{\frac{1}{R_k}}{\frac{1}{R_{eq}}} I$  (pont diviseur de courant)

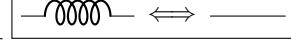
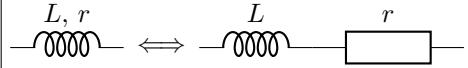
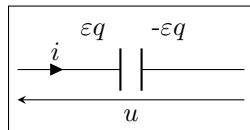
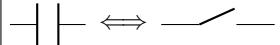
RÉSISTANCE D'ENTRÉE:  $R_e = \frac{U_e}{I_e}$ 

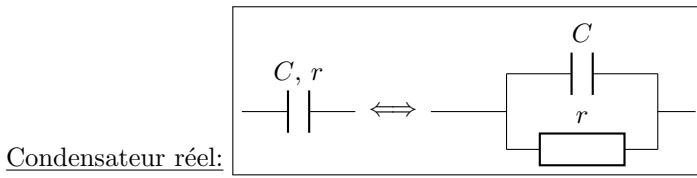
## 9 Circuits en régime transitoire

ARQS:  $\frac{L}{c} \ll \tau$  avec  $\tau$  le temps caractéristique des variations des courants et des tensions entre noeudsConséquence: ARQS  $\Rightarrow$  lois de Kirchhoff et ses conséquences (diviseur de courant/tension)

LOI DES NOEUDS EN TERMES DE POTENTIEL/THÉORÈME DE MILLMAN (À REDÉMONTRER):

$$\forall k, i_k = \frac{v_k - v}{R_k} = G_k(v_k - v) \text{ et } \sum i_k = 0 \Rightarrow v = \frac{\sum G_k v_k}{\sum G_k}$$

BOBINE:  $u = L \frac{di}{dt}$  (en CR)     $u = -L \frac{di}{dt}$  (en CG)En régime continu:   $\iff$      Énergie emmagasinée:  $E_L = \frac{1}{2} L i^2 - \frac{1}{2} L i^2(0)$ Bobine réelle: CONDENSATEUR:  $i = C \frac{du}{dt}$  (en CR)     $i = -C \frac{du}{dt}$  (en CG)     $q = \varepsilon C u$      $i = \varepsilon \frac{dq}{dt}$  avec  $\varepsilon = \pm 1$ En régime continu:   $\iff$      Énergie emmagasinée:  $E_C = \frac{1}{2} C u^2 - \frac{1}{2} C u^2(0)$



ASSOCIATION DE BOBINES:  $L_{eq} = \sum L_i$  (en série)       $\frac{1}{L_{eq}} = \sum \frac{1}{L_i}$  (en parallèle)

ASSOCIATION DE CONDENSATEURS:  $\frac{1}{C_{eq}} = \sum \frac{1}{C_i}$  (en série)       $C_{eq} = \sum C_i$  (en parallèle)

CONSTANTE DE TEMPS:  $\tau = \frac{L}{R} = RC$

EFFECTUER UN BILAN D'ÉNERGIE: Loi des mailles  $\xrightarrow{\times i(t)}$  Bilan en puissance  $\xrightarrow{\int dt}$  Bilan d'énergie

## 10 Oscillateurs amortis

FORME CANONIQUE (RLC):  $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{e(t)}{L}$  avec  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$  et  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT:  $2\lambda = \frac{1}{Q} \implies \ddot{q} + 2\lambda\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{e(t)}{L}$

FORCE DE FROTTEMENT FLUIDE:  $\vec{f} = -\alpha \cdot \vec{v}$

ANALOGIE ÉLECTROMÉCANIQUE:  $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$

## 11 Régime sinusoïdal forcé (RSF)

VALEUR MOYENNE D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE:  $S_{\text{moyenne}} = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt$  pour  $t_0 \in \text{dom}(s)$

Valeurs moyennes à connaître:

$$\langle \sin(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \sin(n\omega t + \varphi) \rangle = \langle \cos(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \cos(n\omega t + \varphi) \rangle = 0 \quad \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$$

VALEUR EFFICACE D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE:  $S_{\text{efficace}}^2 = \langle s^2(t) \rangle \iff S_{\text{efficace}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle}$

Valeur efficace d'un signal sinusoïdal:  $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi) \implies S_{\text{efficace}} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$

NOTATION COMPLEXE:  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \implies \underline{x}(t) = X_m e^{j\varphi} e^{\omega t}$

Amplitude complexe:  $X_m = X_m e^{j\varphi} \implies \begin{cases} X_m = |X_m| \\ \varphi = \arg(X_m) \end{cases}$

Linéarité:  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \lambda x(t) + \mu y(t) = z(t) \implies \lambda \underline{x} + \mu \underline{y} = \underline{z} \implies \lambda \underline{X}_m + \mu \underline{Y}_m = \underline{Z}_m$

Dérivation-Intégration:  $\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega \underline{x}$      $\int \underline{x}(t)dt = \frac{1}{j\omega} \underline{x}$

Valeur moyenne d'un produit:  $\langle a.b \rangle = \frac{1}{2} \Re e(a^* . b)$

REPRÉSENTATION DE FRESNEL:

Axe de référence: On choisit la grandeur commune selon l'axe de référence

circuit en série → intensité  $i$     circuit en parallèle → tension  $u$

additivité des tensions → diagramme en tension    loi des noeuds → diagramme en intensité

PIUSSANCE:

Puissance instantanée consommée:  $p(t) = u(t).i(t)$

Puissance moyenne:  $\mathcal{P} = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re e(u^* . i) = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\varphi)$

LOI D'OHM COMPLEXE: Pour un dipôle linéaire:  $\underline{u} = \underline{Z}.\underline{i}$  en CR     $\underline{u} = -\underline{Z}.\underline{i}$  en CG

Impédance complexe:  $|\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m}$      $\arg(\underline{Z}) = \varphi_{u/i}$

Résistance et réactance d'une impédance:  $R = \Re e(\underline{Z})$  (résistance)     $X = \Im m(\underline{Z})$  (réactance)

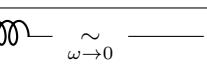
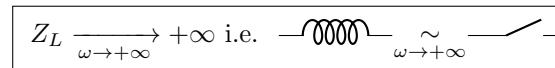
Admittance complexe:  $\underline{G} = \frac{1}{\underline{Z}}$

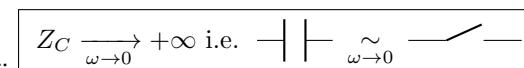
Résistor:  $Z_R = R$      $\varphi_R = 0$

Bobine:  $Z_L = jL\omega$      $Z_L = L\omega$      $\varphi_L = \frac{\pi}{2}$

Condensateur:  $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$      $Z_C = \frac{1}{C\omega}$      $\varphi_L = -\frac{\pi}{2}$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE:

Bobine:  $Z_L \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} 0$  i.e.      $Z_L \xrightarrow[\omega \rightarrow +\infty]{} +\infty$  i.e. 

Condensateur:  $Z_C \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} +\infty$  i.e.      $Z_C \xrightarrow[\omega \rightarrow +\infty]{} 0$  i.e. 

IMPÉDANCES EN SÉRIE:  $Z_{eq} = \sum Z_i$      $u_k = \frac{Z_k}{Z_{eq}} \underline{u}$  (pont diviseur de tension)

IMPÉDANCES EN PARALLÈLE:  $G_{eq} = \sum G_i$      $\underline{i}_k = \frac{G_k}{G_{eq}} \underline{i}$  (pont diviseur de courant)

LOI DES NOEUDS EN TERMES DE POTENTIEL/THÉORÈME DE MILLMAN (À REDÉMONTRER):

$$\forall k, \underline{i}_k = \frac{\underline{v}_k - \underline{v}}{Z_k} = G_k(\underline{v}_k - \underline{v}) \text{ et } \sum \underline{i}_k = 0 \implies \underline{v} = \frac{\sum G_k \cdot \underline{v}_k}{\sum G_k}$$

## 12 Filtrage linéaire

FONCTION DE TRANSFERT:  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{S_m}{E_m}$

DIAGRAMME DE BODE:

Courbe de réponse en gain:  $G(\omega) = |\underline{H}| = \frac{S_m(\omega)}{E_m}$

Courbe de réponse en gain décibels:  $GdB(\omega) = 20 \log(G) = 20 \log |\underline{H}|$

Courbe de réponse en phase:  $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H})$

Signal de sortie:  $e(t) = E_m \cos(\omega t) \rightarrow s(t) = G(\omega)E_m \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$

BANDE PASSANTE à 3dB:  $\text{BP} = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^+, G(\omega) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \right\} = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^+, GdB(\omega) \geq GdB_{\max} - 3\text{dB} \right\}$

PULSATION DE COUPURE:  $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$

PULSATION DE RÉSONANCE: S'il y a résonance,  $G(\omega_r) = G_{\max}$

LARGEUR DE LA BP:  $\Delta\omega = \sup(\text{BP}) - \inf(\text{BP})$

ACUITÉ DE LA RÉSONANCE:  $\mathcal{A}_r = \frac{\omega_r}{\Delta\omega}$

DÉRIVATEUR:  $\underline{H}(jx) = jx$

INTÉGRATEUR:  $\underline{H}(jx) = \frac{1}{jx}$

FILTRE PASSE BAS D'ORDRE 1:  $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jx}$  avec  $x = \frac{\omega}{\omega_c}$

BF/HF: BF:  $x \ll 1$    HF:  $x \gg 1$

Exemple: Circuit RC avec  $s(t) = u_C(t)$     $H_0 = 1$     $\omega_c = \frac{1}{RC}$

FILTRE PASSE BAS D'ORDRE 2:  $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$  avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

BF/HF: BF:  $x \ll \inf(1, Q)$    HF:  $x \gg \sup\left(1, \frac{1}{Q}\right)$

Condition de résonance d'amplitude:  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Pulsation de résonance:  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$

Exemple: Circuit RLC avec  $s(t) = u_C(t)$      $H_0 = 1$      $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$      $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

FILTRE PASSE HAUT D'ORDRE 1:  $\underline{H}(jx) = \frac{H_0 j x}{1 + j x}$  avec  $x = \frac{\omega}{\omega_c}$

BF/HF: BF:  $x \ll 1$     HF:  $x \gg 1$

Exemple: Circuit RC avec  $s(t) = u_R(t)$      $H_0 = 1$      $\omega_c = \frac{1}{RC}$

FILTRE PASSE HAUT D'ORDRE 2:  $\underline{H}(jx) = \frac{-H_0 x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$  avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

BF/HF: BF:  $x \ll \inf(1, Q)$     HF:  $x \gg \sup\left(1, \frac{1}{Q}\right)$

Condition de résonance d'amplitude:  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Exemple: Circuit RLC avec  $s(t) = u_L(t)$      $H_0 = 1$      $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$      $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

FILTRE PASSE BANDE D'ORDRE 2:  $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$  avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

BF/HF: BF:  $x \ll \inf(1, Q)$     HF:  $x \gg \sup\left(1, \frac{1}{Q}\right)$

Acuité de résonance:  $A_r = Q$

Exemple: Circuit RLC avec  $s(t) = u_R(t)$      $H_0 = 1$      $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$      $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

FILTRE COUPE BANDE D'ORDRE 2:  $\underline{H}(jx) = \frac{(1 - x^2) H_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$  avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

## 13 Cinématique

VECTEUR DE DÉPLACEMENT ÉLÉMENTAIRE:

Cartésiennes:  $M(x, y, z) \implies d\overrightarrow{OM} = dx.\overrightarrow{u_x} + dy.\overrightarrow{u_y} + dz.\overrightarrow{u_z}$

Cylindriques/polaires:  $M(r, \theta, z) \implies d\overrightarrow{OM} = dr.\overrightarrow{u_r} + r.d\theta.\overrightarrow{u_\theta} + dz.\overrightarrow{u_z}$

Sphériques:  $M(r, \theta, \varphi) \implies d\overrightarrow{OM} = dr.\overrightarrow{u_r} + r.d\theta.\overrightarrow{u_\theta} + r.\sin(\theta).d\varphi.\overrightarrow{u_\varphi}$

DÉRIVÉE DES VECTEURS DE LA BASE POLAIRE:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

VECTEUR D'ACCÉLÉRATION POUR UN MOUVEMENT CIRCULAIRE:

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r + \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta$$

ABSCISSE CURVILIGNE/LONGEUR ÉLÉMENTAIRE:

$$ds = \left\| d\vec{OM} \right\| \text{ et } s(t) = \int_0^t ds$$

## 14 Principes de la dynamique

RELATION BARYCENTRIQUE: Soient  $M_1, M_2, \dots, M_n$   $n$  points matériels de barycentre  $G$ . Alors

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{GM}_i = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \forall \text{ point } O, \vec{OG} = \frac{1}{m_{\text{total}}} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{OM}_i$$

QUANTITÉ DE MOUVEMENT:  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE (PFD):  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \vec{a}$

PRINCIPE DE L'INERTIE (CARACTÉRISATION D'UN RÉFÉRENTIEL GALILÉEN):  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \iff \vec{v} = \vec{Cte}$

## 15 Travail et puissance mécaniques

TRAVAIL D'UNE FORCE  $\vec{F}$ :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} \quad W_{A \rightarrow B} = \int_{A \rightarrow B} \delta W = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

PIUSSANCE D'UNE FORCE:  $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

## 16 Mouvement d'une particule chargée dans E ou B

FORCE DE LORENTZ:  $\vec{F} = q \vec{E}(M) + q \vec{v}(M) \wedge \vec{B}(M)$

CHAMP ÉLECTRIQUE UNIFORME:  $\|\vec{E}(M)\| = \frac{U}{d}$

ÉNERGIE POTENTIELLE ÉLECTRIQUE:  $E_p(M) = qV(M) + Cte$

## 17 Théorème du moment cinétique

MOMENT EN O D'UNE FORCE APPLIQUÉE EN M :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT À UN AXE  $\Delta$  ORIENTÉ:

$$\vec{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} \cdot \vec{u} \text{ avec } \Delta = (O, \vec{u})$$

$\vec{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm d \|\vec{F}\|$  où  $d$  est le bras de levier

MOMENT CINÉTIQUE EN O D'UN POINT MATÉRIEL:

$$\vec{L}_O(M)_{/R} = \vec{OM} \wedge \vec{p}_{/R} = \vec{OM} \wedge m \vec{v}_{/R}$$

MOMENT CINÉTIQUE PAR RAPPORT À UN AXE  $\Delta$  ORIENTÉ:  $L_\Delta(M)_{/R} = \overrightarrow{L_O}(M)_{/R} \cdot \vec{u}$  avec  $\Delta = (O, \vec{u})$

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE EN O:  $\frac{d\overrightarrow{L_O}(M)_{/R}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O} \left( \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} \right)$

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE PAR RAPPORT À UN AXE FIXE  $\Delta$ :  $\frac{dL_\Delta(M)_{/R}}{dt} = \mathcal{M}_\Delta \left( \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} \right)$

## 18 Mouvement dans un champ de force centrale conservative

FORCE CENTRALE CONSERVATIVE:  $\vec{F} = F(r) \cdot \vec{u}_r = -\frac{dE_p}{dr} \cdot \vec{u}_r$

CONSERVATION DU MOMENT CINÉTIQUE:  $\frac{d\overrightarrow{L_O}(M)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{L_O}(M) = \vec{Cte}$

Mouvement plan:  $\forall t, \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{L_O}(M)$  et  $\vec{v} \perp \overrightarrow{L_O}(M)$   $\Rightarrow$  plan du mouvement  $(\overrightarrow{OM_0}, \vec{v}_0)$

Constante des aires:  $C = r^2 \dot{\theta} = \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}\|$

Loi des aires:  $dS = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM}\| \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} C$

ÉNERGIES:

Énergie cinétique:  $E_c = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (r \dot{\theta})^2 = E_{cr} + E_{c\theta}$

Énergie potentielle effective:  $E_{p,\text{eff}} = E_{c\theta} + E_p(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)$

Énergie mécanique:  $E_m = E_{cr} + E_{p,\text{eff}}$

Limites du mouvement radial:  $E_{p,\text{eff}}(r) \leq E_{m_0}$

FORCE CENTRALE NEWTONIENNE:  $\vec{f} = -\frac{mk}{r^2} \vec{u}_r$  et  $E_p = -\frac{mk}{r}$

3<sup>ÈME</sup> LOI DE KEPLER:  $\forall \text{ planète}, \frac{T^2}{a^3} = Cte$

MOUVEMENT KÉPLÉRIEN:  $k = GM > 0$

MOUVEMENT KÉPLÉRIEN CIRCULAIRE:

Vitesse de circularisation:  $\text{PFD selon } \vec{u}_r \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{k}{r}}$

Période de révolution:  $v = \frac{2\pi r}{T}$

Énergie mécanique:  $E_m = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{mk}{r} = -\frac{mk}{2r}$

Relation entre  $G, M, g_0, R_T$ :  $\vec{f} = \vec{P} \Rightarrow GM = g_0 R_T^2$

MOUVEMENT KÉPLÉRIEN ELLIPTIQUE: Notons  $A$  l'apogée ( $OA = r_{\max}$ ),  $P$  la périhélie ( $OP = r_{\min}$ )

Aphélie/périhélie:

$$\boxed{\dot{r} = 0 \implies \vec{v}_p, \vec{v}_a \text{ sont orthoradiaux et } E_{p,\text{eff}}(r_{\min}) = E_{p,\text{eff}}(r_{\max}) = E_{m_0}}$$

$$\boxed{\left\| \vec{L}_O(A) \right\| = \left\| \vec{L}_O(P) \right\| \implies r_A v_A = r_P v_P}$$

Énergie mécanique:

$$\boxed{\forall r, E_{p,\text{eff}}(r) = E_{m_0} \iff 2E_{m_0}r^2 + 2mkr - mC^2 = 0} \implies \boxed{-\frac{mk}{E_{m_0}} = r_{\min} + r_{\max} = 2a}$$

Détermination de la vitesse/la position:

$$\boxed{\text{Conservation de } E_m \implies \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mk}{r} = -\frac{mk}{2a} \implies v = \sqrt{2k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)} \text{ et } \frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{v^2}{k}\right)}$$

Vecteur excentricité (non exigible):

$$\boxed{\vec{a} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}_r = -\frac{k}{r^2}\left(-\frac{1}{\dot{\theta}}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right) = \frac{k}{C}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \implies \vec{v} = \frac{k}{C}(\vec{u}_\theta + \vec{e})}$$

$$\boxed{\text{On choisit l'axe Oy de sorte que } \vec{e} = e.\vec{u}_y \implies \vec{e} \cdot \vec{u}_\theta = e \cdot \cos(\theta)}$$

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{u}_\theta = \frac{k}{C}(1 + e \cdot \cos(\theta)) = r\dot{\theta} = \frac{C}{r} \implies r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\theta)} \text{ avec } p = \frac{C^2}{k}}$$

## 19 Solide en rotation autour d'un axe fixe (cf. Mécanique)

## 20 Description d'un système thermodynamique

$$\boxed{\text{FORCE DE PRESSION: } \vec{F} = PS \vec{n} \quad \text{pression} = \frac{\text{force}}{\text{surface}} \quad 1 \text{ bar} \approx 1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ Pa}}$$

$$\boxed{\text{GRANDEUR EXTENSIVE, GRANDEUR MOLAIRE, GRANDEUR MASSIQUE: } A = n.A_m = m.a}$$

$$\boxed{\text{VOLUME, VOLUME MOLAIRE, VOLUME MASSIQUE, MASSE VOLUMIQUE: } V = n.V_m = m.v = \frac{m}{\rho}}$$

$$\boxed{\text{DENSITÉ: } d = \frac{\rho_{\text{corps}}}{\rho_{\text{référence}}}}$$

ORDRE DE GRANDEUR À CONNAÎTRE:

$$\boxed{\rho_{\text{eau}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3} = 1 \text{ kg.L}^{-1} \quad M(\text{eau}) = 18 \text{ g.mol}^{-1}}$$

$$\boxed{\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg.m}^{-3} \quad M(\text{air}) = 29 \text{ g.mol}^{-1}}$$

ÉQUATION D'ÉTAT D'UN GAZ PARFAIT (GP):  $\boxed{PV = nRT}$  avec  $P$  en Pa,  $V$  en  $\text{m}^3$  et  $T$  en  $K$

ÉQUATION D'ÉTAT D'UNE PHASE CONDENSÉE INCOMPRESSIBLE ET INDILATABLE:  $\boxed{V = Cte}$

ÉNERGIE INTERNE (EXTENSIVE): 
$$U = \sum E_{c,\text{microscopique}} + \sum E_{p,\text{microscopique}}$$
 
$$U = n.U_m = m.u$$

THÉORÈME DES MOMENTS: 
$$V = m_g.v_g + m_l.v_l \text{ et } x_g + x_l = 1 \implies x_g = \frac{LM}{LG} = \frac{v - v_l}{v_g - v_l}$$

## 21 Énergie échangée par un système au cours d'une transformation

TRAVAIL ÉLEMENTAIRE DES FORCES DE PRESSION REÇU PAR LE SYSTÈME: 
$$\delta W = -P_{\text{ext}} dV$$

TRAVAIL DES FORCES DE PRESSION REÇU PAR LE SYSTÈME: 
$$W = \int_{V_i}^{V_f} \delta W = - \int_{V_i}^{V_f} P_{\text{ext}} dV$$

TRANSFORMATIONS:  $\boxed{\text{isobare} = \text{monobare} + \text{QS}}$   $\boxed{\text{isotherme} = \text{monotherme} + \text{QS}}$

TRANSFORMATION ISOCHORE: 
$$V = Cte \implies W = 0$$

TRANSFORMATION MONOBARE/ISOBARE: 
$$P_{\text{ext}} = Cte = P_0 \implies W = -P_0(V_f - V_i)$$

TRANSFORMATION QS: 
$$\forall t, P_{\text{sys}} = P_{\text{ext}} \implies W = - \int_{V_i}^{V_f} P_{\text{sys}}(V) dV$$

TRANSFORMATION CYCLIQUE:

$\curvearrowright$  cycle moteur (sens horaire):  $W_{\text{cycle}} < 0$

$\curvearrowright$  cycle récepteur (sens trigonométrique):  $W_{\text{cycle}} > 0$

TRANSFORMATION ADIABATIQUE: 
$$Q = 0$$

## 22 1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique. Bilans d'énergie

ÉNERGIE INTERNE:

- Gaz parfait

1<sup>ère</sup> loi de Joule: 
$$U(T)$$

GP monoatomique: 
$$U = \frac{3}{2}nRT$$

GP diatomique: 
$$U = \frac{5}{2}nRT$$

Plus généralement: 
$$U = nC_{v,m}T$$

- Phase condensée idéale

$V = Cte \implies U(V, T) = U(T)$  
$$C_{v,m}(T) \approx Cte = C_{v,m}$$
 
$$U = nC_{v,m}T$$

$U$  est une fonction d'état, elle ne dépend que des paramètres d'état

ÉNERGIE TOTALE (EXTENSIVE): 
$$E_{\text{totale}} = E_m \text{ macroscopique} + U$$

1<sup>ER</sup> PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE:

$$\Delta E_{\text{totale}} = W_{\text{ext,nc}} + Q \quad \Delta E_c(G) + \Delta U = W_{\text{ext}} + Q \quad \Delta E_c(G) \approx 0 \implies \Delta U = W + Q$$

Forme courante:  $\Delta U = W + Q$

Forme élémentaire:  $dU = \delta W + \delta Q$

TRAVAIL ÉLECTRIQUE:

$$\mathcal{P}_{\text{reçue}}(t) = u(t)i(t) \quad \delta W_{\text{élec}} = \mathcal{P}_{\text{reçue}}(t)dt \quad W_{\text{élec}} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}_{\text{reçue}}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} u(t)i(t)dt$$

TRANSFORMATION ISOCHORE:  $W = 0 \implies \Delta U = Q$

ENTHALPIE:  $H = U + PV$      $H = n.H_m = m.h$

**$H$  est une fonction d'état, elle ne dépend que des paramètres d'état**

TRANSFORMATION ISOBARE/MONOBAIRE:  $(P_{\text{ext}} = Cte \text{ ou } P = Cte) \implies \Delta H = Q$

Plus généralement:  $\Delta H + \Delta E_c(G) = W_{\text{autre que pression}} + Q$

ENTHALPIE D'UN GP (2<sup>ÈME</sup> LOI DE JOULE):  $H(T)$

CAPACITÉ THERMIQUE ISOCHORE (à VOLUME CONSTANT):  $C_v = \frac{dU}{dT}$

CAPACITÉ THERMIQUE ISOBARE (à PRESSION CONSTANTE):  $C_p = \frac{dH}{dT}$

FORMULE DE MAYER:  $C_p - C_v = nR \implies C_p > C_v \quad C_{p,m} - C_{v,m} = R \quad c_p - c_v = \frac{R}{M}$

INDICE ADIABAQTIQUE D'UN GAZ:  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}} = \frac{c_p}{c_v} > 1$

RELATIONS UTILES:  $C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$      $C_{v,m} = \frac{R}{\gamma - 1}$      $c_v = \frac{R}{M(\gamma - 1)}$

TRANSFORMATION QUELCONQUE D'UN GP:

$$\Delta U = C_v \Delta T = n.C_{v,m} \Delta T = m.c_v \Delta T \quad \Delta H = C_p \Delta T = n.C_{p,m} \Delta T = m.c_p \Delta T$$

PHASE CONDENSÉE IDÉALE:

$$V \ll V_{gaz} \implies H_m \approx U_m \implies H_m(T) \approx U_m(T) \implies C_p \approx C_v = C \quad \Delta U \approx \Delta H = C \Delta T$$

CHANGEMENT D'ÉTAT D'UNE MASSE M D'UN CORPS PUR:  $m(\varphi_1) \xrightarrow{\text{P et T fixées}} m(\varphi_2)$

Enthalpie de changement d'état (chaleur latente):  $Q = \Delta H = n.\Delta_{1 \rightarrow 2}H_m(T) = m.\Delta_{1 \rightarrow 2}h(T)$

$$\Delta_{1 \rightarrow 2}H_m(T) = H_{m,2}(T) - H_{m,1}(T) \quad \Delta_{1 \rightarrow 2}h(T) = h_2(T) - h_1(T)$$

$$\text{Transformation inverse: } \Delta_{1 \rightarrow 2}H_m(T) = -\Delta_{2 \rightarrow 1}H_m(T) \quad \Delta_{1 \rightarrow 2}h(T) = -\Delta_{2 \rightarrow 1}h(T)$$

Fusion (solide → liquide):  $\Delta_{\text{fusion}} H_m(T) > 0$

Vaporisation (liquide → gaz):  $\Delta_{\text{vaporisation}} H_m(T) > 0$

Sublimation (solide → gaz):  $\Delta_{\text{sublimation}} H_m(T) > 0$

CHANGEMENT D'ÉTAT PARTIEL D'UN CORPS PUR DE MASSE  $m$ :  $m(\varphi_1 \text{ ou } \varphi_2) \xrightarrow[\text{réversible}]{P \text{ et } T \text{ fixées}} m_1(\varphi_1) + m_2(\varphi_2)$

$$\Delta H = m \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta_{1 \rightarrow 2} h(T) = \Delta m_2 \cdot \Delta_{1 \rightarrow 2} h(T)$$

$$\Delta H = m \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta_{2 \rightarrow 1} h(T) = \Delta m_1 \cdot \Delta_{2 \rightarrow 1} h(T)$$

## 23 2<sup>nd</sup> principe de la thermodynamique

2<sup>nd</sup> PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE:  $\Delta S = S_e + S_c$

$S$  est l'entropie, une fonction d'état extensive et non conservative

Entropie échangée:  $S_e = \sum \frac{Q_i}{T_i}$

Entropie créée:  $S_c \geq 0$  transformation réversible  $\implies S_c = 0$  transformation irréversible  $\implies S_c > 0$

Forme élémentaire:  $dS = \delta S_e + \delta S_c$

ENTROPIE D'UN GAZ PARFAIT (À SAVOIR RETROUVER CF. COMPLÉMENTS DE THERMODYNAMIQUE):

Le couple  $(T, V)$ :  $S(T, V) = C_v \ln(T) + nR \ln(V) + Cte$

Le couple  $(T, P)$ :  $S(T, P) = C_p \ln(T) - nR \ln(P) + Cte$

Le couple  $(P, V)$ :  $S(P, V) = C_v \ln(P) + C_p \ln(V) + Cte$

TRANSFORMATION ADIABATIQUE RÉVERSIBLE:  $Q = 0$  et  $S_c = 0 \implies \Delta S = 0$  i.e.  $S = Cte$  (isentropique)

LOIS DE LAPLACE:

Conditions d'application:

un GP de coefficient  $\gamma$  constant subissant une transformation adiabatique réversible

Le couple  $(T, V)$ :  $TV^{\gamma-1} = Cte$

Le couple  $(T, P)$ :  $P^{1-\gamma}T^\gamma = Cte$

Le couple  $(P, V)$ :  $PV^\gamma = Cte$

Conséquence: compression adiabatique réversible d'un GP  $\implies$  échauffement

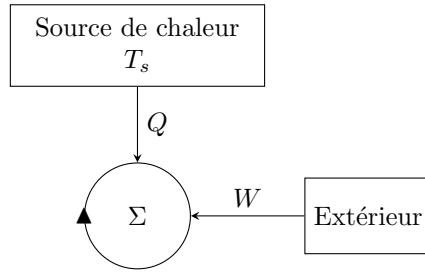
ENTROPIE D'UNE PHASE CONDENSÉE IDÉALE (À SAVOIR RETROUVER):  $S(T) = C \ln(T) + Cte$

CHANGEMENT D'ÉTAT D'UNE MASSE M D'UN CORPS PUR:  $m(\varphi_1) \xrightarrow[\text{réversible}]{P \text{ et } T \text{ fixées}} m(\varphi_2)$

Entropie de changement d'état:  $\Delta S_{1 \rightarrow 2}(T) = S_e = \frac{Q}{T} = \frac{\Delta H_{1 \rightarrow 2}(T)}{T}$

## 24 Machines thermiques

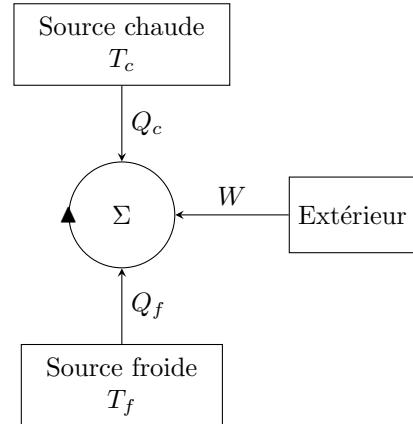
MACHINE THERMIQUES MONOTHERME:



2<sup>nd</sup> principe de Kelvin:

$$\Delta U(\Sigma) = 0 \text{ et } \Delta S(\Sigma) = 0 \implies Q \leq 0 \text{ et } W \geq 0 \implies \text{il n'existe pas de moteur cyclique monotherme}$$

MACHINES THERMIQUES DITHERMES:



1<sup>er</sup> principe et 2<sup>nd</sup> principe:  $\Delta U(\Sigma) = 0 \text{ et } \Delta S(\Sigma) = 0$

Inégalité de Clausius-Carnot:  $\Delta S(\Sigma) = 0 \implies \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \leq 0$

Égalité de Clausius-Carnot:  $\Delta S(\Sigma) \text{ et cycle réversible} \implies \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$

Classification: moteur thermique:  $W < 0$       machine frigorifique:  $W > 0$

RENDEMENT/EFFICACITÉ:  $\eta = \varepsilon = \frac{E_{\text{utile}}}{E_{\text{dépensée}}}$

MOTEUR THERMIQUE DITHERME:

Mode de fonctionnement:  $Q_c > 0$        $Q_f < 0$        $W < 0$

Rendement:  $\eta = \frac{-W}{Q_c}$

Théorème de Carnot:  $\eta \leq \eta_{\max} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = \frac{T_c - T_f}{T_c}$

RÉFRIGÉRATEUR:

Mode de fonctionnement:  $Q_c < 0$      $Q_f > 0$      $W > 0$

Efficacité:  $\varepsilon = \frac{Q_f}{W}$

Théorème de Carnot:  $\varepsilon \leq \varepsilon_{\max} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$

POMPE À CHALEUR (PAC):

Mode de fonctionnement:  $Q_c < 0$      $Q_f > 0$      $W > 0$

Efficacité:  $\varepsilon = \frac{-Q_c}{W}$

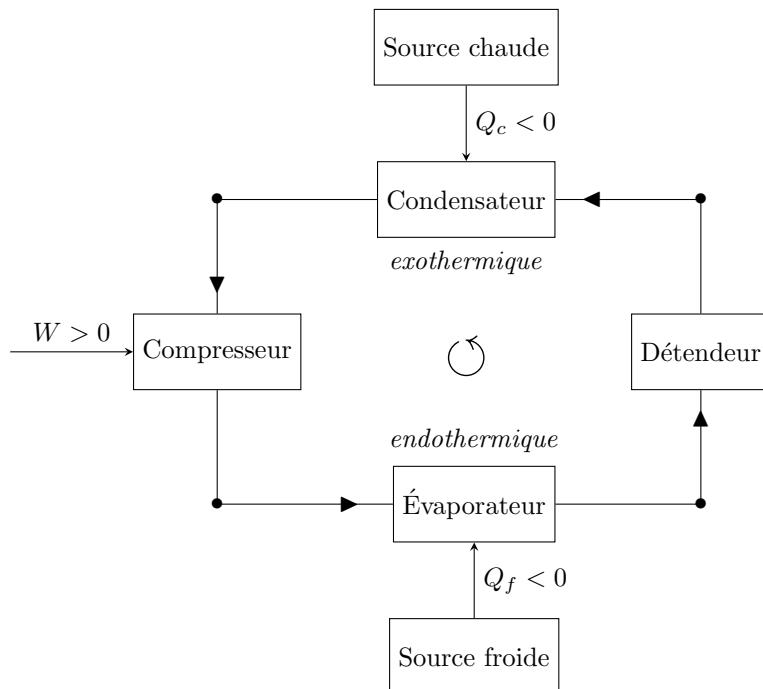
Théorème de Carnot:  $\varepsilon \leq \varepsilon_{\max} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$

1<sup>ER</sup> PRINCIPE POUR UN FLUIDE EN ÉCOULEMENT PERMANENT:

$$\Delta e + \Delta h = w_{\text{machine}} + q_{\text{machine}} \quad \frac{\Delta e_c \approx 0}{\Delta e_p \approx 0} \quad \Delta h = w_{\text{machine}} + q_{\text{machine}}$$

où  $w_{\text{machine}}$  est le travail massique utile échangé par le fluide avec les pièces mobiles de la machine (excluant le travail des forces de pression au sein du fluide)

CYCLE D'UNE MACHINE FRIGORIFIQUE:



## 25 Champ magnétique

## 26 Lois de l'induction

FLUX MAGNÉTIQUE À TRAVERS UNE SURFACE ORIENTÉE:

Soit  $S$  une surface délimitée par un contour  $C$  orienté

$$\phi = \iint_S \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}$$

LOI DE FARADAY:  $e = -\frac{d\phi}{dt}$  où  $e$  est la f.e.m. induite et  $\phi$  le flux magnétique à travers la surface du circuit

INDUCTANCE PROPRE: Soit un circuit parcouru par un courant d'intensité  $i$  qui crée un champ magnétique propre  $\vec{B}(M)$  et génère un flux propre  $\phi_p$  à travers la surface du circuit

$$\phi_p = L.i$$
 où  $L$  est le coefficient d'auto-inductante

## 27 Loi de Laplace (cf. Magnétostatique)

## 28 Éléments de traitement du signal

THÉORÈME DE FOURIER: Soit  $f$  une fonction périodique, de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)] = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Composante continue:  $A_0 = C_0 = \langle f(t) \rangle$

Relations des coefficients de Fourier:  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$A_n = \langle 2f(t) \cos(n\omega t) \rangle \quad B_n = \langle 2f(t) \sin(n\omega t) \rangle$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \tan(\varphi_n) = -\frac{B_n}{A_n} \quad A_n = C_n \cos(\varphi_n) \quad B_n = -C_n \sin(\varphi_n)$$

Parité:  $f$  est paire  $\implies \forall n \in \mathbb{N}^*, B_n = 0$        $f$  est impaire  $\implies \forall n \in \mathbb{N}, A_n = 0$

PIUSSANCE D'UN SIGNAL RÉEL PÉRIODIQUE:  $\mathcal{P}_f = \langle f^2(t) \rangle$

THÉOREME DE PARSEVAL:  $f$  est développable en série de Fourier  $\implies \mathcal{P}_f = \langle f^2(t) \rangle = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} C_n^2$

Valeur efficace:  $F_{\text{efficace}} = \sqrt{C_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{C_n}{\sqrt{2}} \right)^2}$

SÉRIE DE FOURIER EN NOTATION COMPLEXE:  $f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \longrightarrow \underline{f}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underline{C}_n e^{jn\omega t}$

$$\underline{C}_0 = C_0 = A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \underline{C}_n = C_n e^{j\varphi_n} = A_n - jB_n = \langle 2f(t) e^{-jn\omega t} \rangle$$

CIRCUIT LINÉAIRE:  $\exists$  une ED linéaire reliant le signal d'entrée à celui de sortie,  $\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^{(k)} s}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^{(k)} e}{dt^k}$

FONCTION DE TRANSFERT: 
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k(j\omega)^k}$$

PRINCIPE DU FILTRAGE LINÉAIRE:

$$\underline{e}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t} \xrightarrow{\text{filtre}} \underline{s}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underline{H}(jn\omega) C_n e^{jn\omega t} \text{ avec } \underline{H}(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{H}(j\omega)$$

TAUX DE DISTORSION:  $D_p = \frac{C_p}{C_0}$       TAUX D'ONDULATION:  $\tau = \frac{\sup C_i}{C_0}$

DISCONTINUITÉS: [Les discontinuités sont "encodées" dans les harmoniques élevées]

## 29 Calculs et opérateurs vectoriels

PRODUIT SCALAIRE:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$  et  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$

PRODUIT VECTORIEL:  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$  et  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |b & y| \\ |c & z| \\ |a & x| \\ |b & y| \end{pmatrix}$

FORMULE DU DOUBLE PRODUIT VECTORIEL:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} \text{ et } (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} - (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v}$$

LES OPÉRATEURS EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES:

Soit  $V(x, y, z)$  un champ scalaire et  $\vec{A}(x, y, z)$  un champ vectoriel

Gradient:  $\vec{\text{grad}}(V) = \vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$

Divergence:  $\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$$\text{Rotationnel: } \vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\text{Laplacien scalaire: } \Delta V = \nabla^2 V = \text{div}(\vec{\text{grad}}(V)) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\text{Laplacien vectoriel: } \vec{\Delta} \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

FORMULE DU DOUBLE ROTATIONNEL:

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{A})) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \vec{\Delta} \vec{A} \quad \text{i.e. } \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\Delta} \vec{A}$$

THÉORÈME DE GREEN-OSTROGRADSKI: Soit  $S$  une surface fermée délimitant un volume  $\mathcal{V}$

$$\forall \vec{U} \text{ champ de vecteur, } \oint_S \vec{U} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} d\tau$$

THÉORÈME DE STOKES: Soit  $C$  une courbe fermée orientée et  $S$  une surface orientée par le contour  $C$

$$\forall \vec{U} \text{ champ de vecteur, } \oint_C \vec{U} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{U} \cdot d\vec{S}$$

## 30 Mécanique

$$\text{ÉNERGIE CINÉTIQUE: } E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$\text{THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE: } \Delta E_c = W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = E_c(B) - E_c(A) \quad \text{ou } dE_c = \delta W$$

$$\text{ÉNERGIE POTENTIELLE: } \vec{f} \text{ dérive de l'énergie potentielle } E_p \iff \forall \vec{dr}, \vec{f} \cdot \vec{dr} = -dE_p \iff \vec{f} = -\vec{\nabla} E_p$$

$$\text{ÉNERGIE MÉCANIQUE: } E_m = E_c + E_p$$

$$\text{FORMULE DE BOUR: } \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{A} \wedge \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}$$

$$\text{VITESSE/ACCÉLÉRATION ABSOLUE: } \vec{v}_{\text{abs}}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \left( \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \quad \vec{a}_{\text{abs}}(M) = \left( \frac{d\vec{v}_{\text{abs}}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$$

VITESSE/ACCÉLÉRATION RELATIVE:

$$\vec{v}_{\text{rel}}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) = \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} \quad \vec{a}_{\text{rel}}(M) = \left( \frac{d\vec{v}_{\text{rel}}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}$$

$\mathcal{R}'$  EN TRANSLATION DANS  $\mathcal{R}$ :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} = \vec{0}$$

Loi de composition des vitesses:  $\vec{v}_{\text{abs}}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(O') + \vec{v}_{\text{rel}}(M)$  avec  $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(O')$  la vitesse d'entraînement

Loi de composition des accélérations:  $\vec{a}_{\text{abs}}(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(O') + \vec{a}_{\text{rel}}(M)$  avec  $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(O') = \vec{a}_{\text{entr}}$

$\mathcal{R}'$  EN ROTATION UNIFORME AUTOOUR D'UN AXE FIXE  $\Delta$  DE  $\mathcal{R}$ :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} = \vec{\Omega} = \Omega \cdot \vec{u}_z \quad \text{avec } \frac{d\Omega}{dt} = 0$$

Loi de composition des vitesses:

$$\vec{v}_{\text{abs}}(M) = \vec{v}_{\text{rel}}(M) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{v}_{\text{rel}}(M) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM} \quad \text{avec } H = \text{proj}_{\Delta}^{\perp}(M)$$

Accélération de Coriolis:

$$\vec{a}_{\text{cor}}(M) = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\text{rel}}(M)$$

Accélération d'entraînement:

$$\vec{a}_{\text{entr}}(M) = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM}) = -\Omega^2 \overrightarrow{HM} \quad \text{avec } H = \text{proj}_{\Delta}^{\perp}(M)$$

Loi de composition des accélérations:

$$\vec{a}_{\text{abs}}(M) = \vec{a}_{\text{rel}}(M) + \vec{a}_{\text{cor}}(M) + \vec{a}_{\text{entr}}(M)$$

DYNAMIQUE DANS  $\mathcal{R}'$  NON GALILÉEN:

Force d'inertie d'entraînement:  $\vec{f}_{\text{entr}} = -m\vec{a}_{\text{entr}}(M)$

Force d'inertie de Coriolis:  $\vec{f}_{\text{cor}} = -m\vec{a}_{\text{cor}}(M)$

$\mathcal{R}'$  en translation dans  $\mathcal{R}$ :  $\vec{f}_{\text{entr}} = -m\vec{a}_{\text{entr}}(O')$      $\vec{f}_{\text{cor}} = \vec{0}$

$\mathcal{R}'$  en rotation uniforme autour d'un axe fixe  $\Delta$  de  $\mathcal{R}$ :

$$\vec{f}_{\text{entr}} = m\Omega^2 \overrightarrow{HM} \quad \vec{f}_{\text{cor}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\text{rel}}(M) \quad \text{avec } H = \text{proj}_{\Delta}^{\perp}(M) \text{ et } \vec{f}_{\text{entr}} \text{ la force d'inertie centrifuge}$$

RFD dans  $\mathcal{R}'$ :  $m\vec{a}_{\text{rel}}(M) = \vec{f}_{\text{inter}} + \vec{f}_{\text{entr}} + \vec{f}_{\text{cor}}$

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE DANS  $\mathcal{R}$ : Soit  $A$  un point fixe de  $\mathcal{R}'$

Moment cinétique de  $M$  en  $A$  dans  $\mathcal{R}'$ :  $\vec{L}_A(M) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}_{\text{rel}}(M)$

TMC dans  $\mathcal{R}'$ :  $\left( \frac{d\vec{L}_A(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \vec{M}_A(\vec{f}_{\text{inter}}) + \vec{M}_A(\vec{f}_{\text{entr}} + \vec{f}_{\text{cor}})$

THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE DANS  $\mathcal{R}'$ :

Énergie cinétique dans  $\mathcal{R}'$ :  $E_c = \frac{1}{2}mv_{\text{rel}}^2$

Puissance de la force de Coriolis:  $\mathcal{P}(\vec{f}_{\text{cor}}) = 0$

TEC dans  $\mathcal{R}'$ :  $\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}_{\text{inter}}) + \mathcal{P}(\vec{f}_{\text{entr}})$

$$\Delta E_c = W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_{\text{inter}}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_{\text{entr}})$$

ÉNERGIE POTENTIELLE D'ENTRAÎNEMENT:

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(O') = a \cdot \vec{u}_x \text{ et } \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} = \vec{0} \implies E'_{\text{pot}} = m \cdot a \cdot x' + Cte \text{ et } \vec{f}_{\text{entr}} = -(\vec{\nabla} E'_{\text{pot}})_{\mathcal{R}'}$$

Poids apparent dans  $\mathcal{R}'$ :  $\vec{g}^* = \vec{g} + \frac{1}{m} \vec{f}_{\text{entr}}$

ÉNERGIE POTENTIELLE CENTRIFUGE:

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} = \Omega \cdot \vec{u}_z \text{ et } H = \text{proj}_{\Delta}^{\perp}(M) \implies E'_{\text{centrifuge}} = -\frac{1}{2} m \Omega^2 \cdot H M^2 + Cte \text{ et } \vec{f}_{\text{entr}} = -(\vec{\nabla} E'_{\text{centrifuge}})_{\mathcal{R}'}$$

**Solide en rotation autour d'un axe fixe:** On utilise les coordonnées cylindriques d'axe  $Oz$

Soit  $S$  un solide tournant autour de l'axe fixe  $\Delta = Oz$  à la vitesse angulaire  $\Omega$ . Posons alors  $\vec{\Omega} = \Omega \cdot \vec{e}_z$

CINÉMATIQUE:  $\forall M \in S, \vec{v}_{M \in S} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} = r \Omega \vec{e}_{\theta}$

MOMENT CINÉTIQUE DU SOLIDE  $S$  DANS  $\mathcal{R}$ :

Moment cinétique vectoriel:  $\vec{L}_O = \iiint_S (\vec{OM} \wedge \vec{v}_{M \in S}) dm = \left( \iiint_S r^2 dm \right) \vec{\Omega} - \Omega \cdot \iiint_S (r z \vec{e}_r) dm$

Moment d'inertie de  $S$  par rapport à  $\Delta$ :  $J_{\Delta} = \iiint_S r^2 dm$

Moment cinétique scalaire:  $L_{\Delta} = \vec{L}_O \cdot \vec{e}_z = J_{\Delta} \Omega$

Propriété d'axe principal d'inertie de  $S$  (non exigible):

$$\exists n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, \left[ \text{rotation} \left( \frac{2\pi}{n} \right) \rightarrow S \right] = S \implies \vec{L}_O = J_{\Delta} \vec{\Omega}$$

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE:

TMC vectoriel:  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum (\vec{\mathcal{M}}_O)$

TMC scalaire:  $\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \sum (\mathcal{M}_{\Delta})$

ÉNERGIE CINÉTIQUE:  $E_c = \iiint_S \frac{1}{2} (r \Omega)^2 dm = \frac{1}{2} J_{\Delta} \Omega^2$

PIUSSANCE D'UN EFFORT MÉCANIQUE REÇUE PAR  $S$ :  $\forall Q \in S, \mathcal{P}_{\text{effort}} = \vec{\mathcal{M}}_{Q \in S} \cdot \vec{\Omega} + \vec{F} \cdot \vec{v}_{Q \in S}$

THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE:  $\frac{dE_c}{dt} = \sum (\mathcal{P}_{\text{effort}}) \quad \Delta E_c = \sum (W_{\text{effort}})$

## Compléments de mécanique du solide

THÉORÈME DU CENTRE DE MASSE: Soit un système de masse totale  $M$  et de barycentre des masses  $G$

$$M \cdot \vec{a}_G = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

VITESSE DE GLISSEMENT DE  $S_2$  SUR  $S_1$ :  $\boxed{\vec{v}_{gl} = \overrightarrow{v(I \in S_2/\mathcal{R})} - \overrightarrow{v(I \in S_1/\mathcal{R})}}$  avec  $\mathcal{R}$  un référentiel

LOI DE COULOMB DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT:  $\boxed{\vec{R}_T \wedge \vec{v}_{gl} = \vec{0}}$  et  $\boxed{\vec{R}_T \cdot \vec{v}_{gl} < 0}$

$v_{gl} \neq 0$ :  $\boxed{R_T = f \cdot R_N}$

$v_{gl} = 0$ :  $\boxed{R_T \leq f_0 \cdot R_N}$  et  $\boxed{f \leq f_0}$

## 31 Électrostatique

LOI DE COULOMB (2 CHARGES PONCTUELLES  $q_1$  ET  $q_2$ ):  $\boxed{\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{q_1 \cdot q_2 \cdot \vec{A}_1 A_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot (A_1 A_2)^3}}$

CHAMP ÉLECTRIQUE CRÉÉ PAR UNE CHARGE  $q_1$  PONCTUELLE:  $\boxed{\vec{E}_1(M) = \frac{q_1 \cdot \vec{A}_1 M}{4\pi\epsilon_0 \cdot (A_1 M)^3}}$

ORDRE DE GRANDEUR: Valeur du champ électrique disruptif dans l'air sec (pour ioniser l'air sec):  $\boxed{3MV/m}$

DISTRIBUTION DE CHARGES PONCTUELLES (PRINCIPE DE SUPERPOSITION):  $\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \cdot \vec{A}_i M}{(A_i M)^3}}$

DISTRIBUTIONS CONTINUES DE CHARGE ÉLECTRIQUE:

Volumique:  $\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{A \in V} \rho_A \frac{\vec{A}M}{(AM)^3} \cdot d\tau_A}$  et  $\boxed{Q = \iiint_{A \in V} \rho_A \cdot d\tau_A}$

Surfacique:  $\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{A \in S} \sigma_A \frac{\vec{A}M}{(AM)^3} \cdot dS_A}$  et  $\boxed{Q = \iint_{A \in S} \sigma_A \cdot dS_A}$

Linéique:  $\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{A \in C} \lambda_A \frac{\vec{A}M}{(AM)^3} \cdot dl_A}$  et  $\boxed{Q = \int_{A \in C} \lambda_A \cdot dl_A}$

RÈGLES DE SYMÉTRIE:

Soit  $\mathcal{V}$  un échantillon de matière chargé électriquement qui crée un champ  $\vec{E}(M)$

- $\Pi$  plan de symétrie de  $\mathcal{V} \implies \Pi$  plan de symétrie de  $\vec{E}(M)$
- $\Pi'$  plan d'antisymétrie de  $\mathcal{V} \implies \Pi'$  plan d'antisymétrie de  $\vec{E}(M)$
- $\mathcal{V}$  invariant par rotation ou par translation  $\implies \vec{E}(M)$  invariant par rotation ou par translation

POTENTIEL ÉLECTRIQUE:

$\forall$  point  $M$ ,  $\boxed{V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}}$  et  $\boxed{\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}}(V(M)) = -\vec{\nabla}V(M)}$  et  $\boxed{E_{\text{pot}} = q \cdot V(M)}$

POTENTIEL ÉLECTRIQUE GÉNÉRALISÉ:  $\forall M, V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \cdot A_i M}$

CIRCULATION DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE:  $\int_{A \rightarrow B} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B)$  et  $dV = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

RELATION DE MAXWELL-GAUSS:  $\text{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

ÉQUATION DE POISSON:  $\Delta V = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V \implies \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

ÉQUATION DE LAPLACE:  $\rho = 0 \implies \Delta V = 0$

RELATION DE MAXWELL-FARADAY:  $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$

THÉORÈME DE GAUSS:  $\forall S$  surface fermée,  $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

THÉORÈME DE GAUSS POUR LE CHAMP DE GRAVITATION:  $\forall S$  surface fermée,  $\iint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$

avec  $\vec{G}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^3} \vec{r}$  tel que  $\vec{F}_{\text{gravitationnelle}} = m\vec{G}(\vec{r})$

SPHÈRE PLEINE UNIFORMÉMENT CHARGÉE:  $E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$  avec  $Q_{\text{int}} = \begin{cases} Q_{S_0} = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho & \text{si } r > R \\ \frac{4\pi}{3} r^3 \rho = Q_{S_0} \left(\frac{r}{R}\right)^3 & \text{si } r < R \end{cases}$

SPHÈRE CREUSE:  $E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{si } r > R \\ 0 & \text{si } r < R \end{cases}$

FIL INFINI UNIFORMÉMENT CHARGÉ:  $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

CYLINDRE INFINI UNIFORMÉMENT CHARGÉ EN VOLUME:  $E(r) = \begin{cases} \frac{R^2 \rho}{2\varepsilon_0 r} & \text{si } r > R \\ \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} & \text{si } r < R \end{cases}$

PLAN INFINI UNIFORMÉMENT CHARGÉ:  $E(z) = \begin{cases} +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \text{si } z < 0 \end{cases}$

## THÉORÈME DE COULOMB:

Dans une géométrie quelconque, au voisinage extérieur immédiat d'un conducteur en équilibre,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$$

LIGNES DE CHAMP ÉLECTRIQUE:  $\forall M \in C, \vec{E}(M)$  est tangent à  $C$  i.e.  $\forall \vec{dl}, \vec{E}(M) \wedge \vec{dl} = \vec{0}$

SURFACES ÉQUIPOTENTIELLES:  $\forall (M, M') \in S, V(M) = V(M')$  et  $\forall M \in S, \vec{E}(M) \perp S$

CONDENSATEUR PLAN:  $\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{U}{d} \vec{u}_z$  et  $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$

MOMENT DIPOLAIRE D'UN DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE:  $\vec{p} = q \vec{A} \vec{B}$

Le moment dipolaire de  $H_2O$ :  $p = 1,84D$  avec  $1D = \frac{1}{3}10^{-29}Cm$

ACTIONS SUBIES PAR UN DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE DANS UN CHAMP EXTÉRIEUR  $\vec{E}$ :

$\vec{E}$  uniforme:  $\vec{F} = \vec{0}$  et  $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$        $\vec{E}$  non uniforme:  $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$  et  $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$

ÉNERGIE POT. D'INTERACTION D'UN DIPÔLE **rigide** DANS UN CHAMP EXTÉRIEUR  $\vec{E}$ :  $E_{\text{pot}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE  $V(r, \theta)$  CRÉÉ PAR UN DIPÔLE à grande distance:  $V(M) = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

## 32 Magnétostatique

DENSITÉ VOLUMIQUE DE COURANT  $\vec{j}$ :  $di = \vec{j} \cdot d\vec{S}$  et  $\vec{j} = \rho_m \cdot \vec{v}$  avec  $\rho_m = n \cdot q$

Dans un milieu métallique:  $q = -e \implies \rho_m < 0$

Dans les solutions électrolytiques:  $\vec{j} = \sum_{\text{ions}} \rho_i \cdot \vec{v}_i$

PERMÉABILITÉ MAGNÉTIQUE DU VIDE:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H.m^{-1}$

RELATIONS LOCALES DE LA MAGNÉTOSTATIQUE POUR  $\vec{B}$  ET  $\vec{j}$ :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

CARACTÈRE CONSERVATIF DU FLUX DE  $\vec{j}$ :  $\forall S$  surface fermée,  $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \implies I_{\text{entrant}} = I_{\text{sortant}}$

CARACTÈRE CONSERVATIF DU FLUX DE  $\vec{B}$ :  $\forall S$  surface fermée,  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \implies \Phi_{\text{entrant}} = \Phi_{\text{sortant}}$

## RÈGLES DE SYMÉTRIE:

Soit  $\mathcal{V}$  un échantillon de matière parcouru par des courants permanents créant un champ  $\vec{B}(M)$

- $\Pi$  plan de symétrie de  $\mathcal{V} \implies \Pi$  plan d'antisymétrie de  $\vec{B}(M)$
- $\Pi'$  plan d'antisymétrie de  $\mathcal{V} \implies \Pi'$  plan de symétrie de  $\vec{B}(M)$
- $\mathcal{V}$  invariant par rotation ou par translation  $\implies \vec{B}(M)$  invariant par rotation ou par translation

THÉORÈME D'AMPÈRE:  $\forall C$  courbe fermée orientée,  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$  avec  $I_{\text{enlacé}} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

$S$  est une surface délimitée par le contour  $C$

Le sens d'orientation de  $C$  doit être en cohérence avec celui du vecteur  $d\vec{S}$

FIL RECTILIGNE INFINI:  $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

FIL INFINI DE SECTION NON NULLE:  $B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{si } r > R \\ \frac{\mu_0 I \cdot r}{2\pi R^2} & \text{si } r < R \end{cases}$

SOLÉNOÏDE INFINI (BOBINE DE  $N$  SPIRES):  $B(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > R \text{ (propriété admise)} \\ \mu_0 I \cdot n & \text{si } r < R \end{cases}$  avec  $n = \frac{N}{l}$

Coefficient d'auto-inductance:  $\phi_p = N \cdot B \cdot S \implies L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$

BOBINE TORIQUE À SECTION RECTANGULAIRE  $B(r, z) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2\pi r} & \text{si } M \text{ est dans la bobine} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  avec  $n = \frac{N}{l}$

Coefficient d'auto-inductance:  $\phi_p = N \cdot \phi_{1\text{spire}} \implies L = h \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)$

LA LOI DE LAPLACE: Soit  $\vec{B}$  un champ magnétique "extérieur"

Un élément de courant **filiforme** de longueur  $dl$  dans  $\vec{B}$ :  $d\vec{F}_L = I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B}$

Un fil parcouru par le courant  $I$  dans  $\vec{B}$ :  $\vec{F}_L = \int I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B}$

Un échantillon parcouru par des courants **volumiques**:  $\vec{F}_L = \iiint \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$

COUPLE DE LAPLACE:

Soit un cadre plan de  $N$  spires parcourues par  $I$  placé dans un champ magnétique extérieur **uniforme**  $\vec{B}$

$\vec{F}_L \approx \vec{0}$  et  $\vec{\Gamma}_L = \vec{M} \wedge \vec{B}$  avec  $\vec{M} = N \cdot I \cdot \vec{S}$

$P_L = \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{\Omega}$  et  $\delta W_L = P_L dt \implies E_{\text{pot}} = -\vec{M} \cdot \vec{B}$

EFFET HALL:  $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{\vec{j} \wedge \vec{B}}{n_e.e}$  et  $U_{PN} = \int_{P \rightarrow N} \vec{E}_H \cdot \vec{dl} = \frac{I.B}{n_e.e.b}$

MOMENT MAGNÉTIQUE:

Spire circulaire parcourue par  $I$ :  $\vec{M} = I \cdot \vec{S}$

Bobine plate de  $N$  spires parcourue par  $I$ :  $\vec{M} = N.I \cdot \vec{S}$

Un atome/noyau atomique (**au niveau microscopique**):  $\vec{M} = \gamma \cdot \vec{L}$

où  $\vec{L}$  est le moment cinétique et  $\gamma$  est le rapport gyromagnétique

CONSTANTE DE PLANCK RÉDUITE:  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34} J.s$

ACTIONS SUBIES PAR UN DIPÔLE MAGNÉTIQUE DANS UN CHAMP EXTÉRIEUR  $\vec{B}$ :

$\vec{F}_L = (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{M} \cdot \vec{B}) = -\vec{\nabla} E_{\text{pot}}$  et  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$  et si  $\vec{B}$  est uniforme, alors  $\vec{F}_L = \vec{0}$

ÉNERGIE POT. D'INTERACTION D'UN DIPÔLE MAGNÉTIQUE DANS UN CHAMP EXT.  $\vec{B}$ :  $E_{\text{pot}} = -\vec{M} \cdot \vec{B}$

PRÉCESSION DE LARMOR DU MOMENT MAGNÉTIQUE  $\vec{M}$  atomique/nucléaire:

$\vec{\Omega}_{\text{Larmor}} = -\gamma \cdot \vec{B}$  et  $\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{\Omega}_{\text{Larmor}} \wedge \vec{M}$

CHAMP  $\vec{B}$  CRÉÉ PAR UN DIPÔLE MAGNÉTIQUE à grande distance:  $\vec{B} = -\vec{\nabla} \left( \frac{\mu_0 M \cos(\theta)}{4\pi r^2} \right)$

$$\Rightarrow B_r = \frac{2\mu_0 M \cos(\theta)}{4\pi r^3} \text{ et } B_\theta = \frac{\mu_0 M \sin(\theta)}{4\pi r^3}$$

COMPLÉMENTS (HP):

Induction de Lorentz et f.é.m. induite:  $de = (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dl} \Rightarrow e = \oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dl}$

Puissance de la force de Laplace et puissance de la f.é.m. induite:  $\mathcal{P}_e = -\mathcal{P}_L$

### 33 Équations de Maxwell

RELATION LOCALE DE CONSERVATION DE LA CHARGE/RELATION DE CONTINUITÉ:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

ÉQUATIONS DE MAXWELL:

Maxwell-Gauss (MG):  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Maxwell-Faraday (MF):  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwell-Thomson (MT):  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Maxwell-Ampère (MA):  $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D)$  avec  $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

À l'ARQS magnétique, on a:  $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}$

THÉORÈME DE SCHWARZ:  $f$  est deux fois dérivable en  $a \implies \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (a) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (a)$

Corollaire:  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{B})) = 0 \xrightarrow{(\text{MA})} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  (relation de continuité)

THÉORÈME DE GREEN-OSTROGRADSKI: Soit  $S$  une surface fermée délimitant un volume  $\mathcal{V}$

$\forall \vec{U}$  champ de vecteur,  $\oint_S \vec{U} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} d\tau$

THÉORÈME DE STOKES: Soit  $C$  une courbe fermée orientée et  $S$  une surface orientée par le contour  $C$

$\forall \vec{U}$  champ de vecteur,  $\oint_C \vec{U} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{U} \cdot d\vec{S}$

FORME INTÉGRALE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL:

Théorème de Gauss (MG):  $\forall S$  surface fermée,  $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}(t)}{\varepsilon_0}$

Loi de l'induction de Faraday (MF):  $\forall C$  courbe fermée orientée,  $e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Caractère conservatif du flux de  $\vec{B}$  (MT):  $\forall S$  surface fermée,  $\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

Théorème d'Ampère généralisé (MA):  $\forall C$  courbe fermée orientée,  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{\text{enlacé}} + \mu_0 \iint_S \vec{j}_D \cdot d\vec{S}$

RELATION ENTRE  $\mu_0, \varepsilon_0, c$ :

$\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$  ou  $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$  avec  $c$  la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide

ÉQUATION DE PROPAGATION DES CHAMPS DANS UNE RÉGION VIDE DE CHARGE ET DE COURANT:

Supposons que  $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$

$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$  avec  $\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}$

$\vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$  avec  $\vec{\Delta} \vec{B} = \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2}$

LOI D'OHM LOCALE:  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  avec  $\gamma$  la conductivité du milieu

Résistance électrique d'un fil:  $U_{AB} = \int_{A \rightarrow B} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\gamma} \int_{A \rightarrow B} \vec{j} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{I}{s} l = \frac{l}{\gamma s} I \implies R = \frac{l}{\gamma s}$

MODÈLE DE CONDUCTIVITÉ DE DRUDE ET LORENTZ:

Équation différentielle:  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \cdot \vec{E} - k \cdot \vec{v} \implies \tau \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} = \frac{q \cdot \tau}{m} \vec{E}$

Vitesse moyenne:  $\langle \vec{v} \rangle = \vec{v}_{\text{limite}} = \frac{q \cdot \tau}{m} \vec{E}$

Densité de courant:  $\vec{j} = n.q.\langle \vec{v} \rangle = \frac{n.q^2.\tau}{m} \vec{E} \Rightarrow \gamma = \frac{n.q^2.\tau}{m}$

PIUSSANCE VOLUMIQUE REÇUE PAR LES PORTEURS DE CHARGE:  $\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

RELAXATION DANS UN MILIEU OHMIQUE:  $\frac{1}{\tau'}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  et  $\tau' = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$

CONDUCTEUR PARFAIT:  $\gamma \rightarrow +\infty \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$  et  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$  et  $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

DENSITÉ D'ÉNERGIE DANS LE CHAMP:  $w = w_{\text{élec}} + w_{\text{mag}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$  en  $J.m^{-3}$

VECTEUR DE POYNTING:  $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$  et  $\|\vec{\Pi}\| \propto W.m^{-2}$  (puissance surfacique)

PIUSSANCE ÉLECTROMAGNÉTIQUE TRAVERSANT UNE SURFACE  $S$  (FERMÉE OU NON):  $\mathcal{P}_S = \iint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS}$

BILAN D'ÉNERGIE DANS UN CONDUCTEUR CYLINDRIQUE:

$$\mathcal{P}_{\text{e.m.}} = \frac{dW_{\text{stockée}}}{dt} + \mathcal{P}_{\text{electrocinétique}} \Rightarrow -\oint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = \frac{d}{dt} \iiint_V w.d\tau + \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E}.d\tau$$

avec:

- $\mathcal{P}_{\text{e.m.}}$ : la puissance électromagnétique entrante à travers  $S$
- $W_{\text{stockée}}$ : l'énergie électromagnétique stockée dans  $V$
- $\mathcal{P}_{\text{electrocinétique}}$ : la puissance electrocinétique reçue dans  $V$  par les porteurs de charge

Théorème de Poynting:  $-\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = \frac{dw}{dt} + \vec{j} \cdot \vec{E}$

## 34 Propagation, rayonnement

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION D'ONDE DE D'ALEMBERT (EOD) À 1 DIMENSION:

$$\frac{\partial^2 f(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(z,t)}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow f(z,t) = h\left(t - \frac{z}{c}\right) + g\left(t + \frac{z}{c}\right) \text{ avec } h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$$

ONDE PLANE PROGRESSIVE (OPPÉ.M.) DANS LE VIDE: Soit  $\vec{u}$  la direction de propagation d'une OPPé.m.

Champs transverses:  $\vec{E} \perp \vec{u}$  et  $\vec{B} \perp \vec{u}$

Les champs:  $\vec{E} = c.(\vec{B} \wedge \vec{u})$      $\vec{B} = \frac{1}{c}.(\vec{u} \wedge \vec{E})$      $E = c.B$      $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$  est un trièdre direct

Énergie:  $w = \epsilon_0 E^2$      $\vec{\Pi} = c.w.\vec{u}$   $\Rightarrow$  énergie transportée à la vitesse  $c$

Quantité de mouvement volumique:  $\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{w}{c} \cdot \vec{u}$

Pression de radiation:  $P = \langle w \rangle$  (subie par une surface noire absorbant l'OPPé.m. en incidence normale)

ONDE PLANE PROGRESSIVE MONOCHROMATIQUE/HARMONIQUE (OPPM É.M.) DANS LE VIDE:

Soit  $\vec{u}$  la direction de propagation d'une OPPM é.m.

Vecteur d'onde:  $\vec{k} = k \cdot \vec{u}$  avec  $k$  le module d'onde

$$\text{Période temporelle/spatiale: } T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \implies T\omega = \lambda k = 2\pi$$

$$\text{Relation de dispersion: } \omega = c.k \iff \lambda = c.T$$

$$\text{Champ complexe: } \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i\varphi} \quad \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_0 e^{i\varphi}$$

$$\text{Convention de phase: } \varphi(\vec{r}, t) = \omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} \quad \text{ou} \quad \varphi(\vec{r}, t) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t$$

$$\text{Équivalence en notation complexe: } \frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow \pm i\omega \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \longleftrightarrow \mp i \cdot \vec{k}$$

ESSAI DE TYPOLOGIE DES ONDES:  $f(\vec{r}, t)$  est une

$$\text{Onde plane OP: } \exists \vec{u} \text{ unitaire, } \forall (\vec{r}, t), f(\vec{r}, t) = f(\vec{r} \cdot \vec{u}, t)$$

$$\text{Onde progressive: } \exists \vec{u} \text{ unitaire, } \forall (\vec{r}, t), f(\vec{r}, t) = f\left(\vec{r}, t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{v}\right)$$

$$\text{Onde plane progressive non atténuée OPP: } \exists \vec{u} \text{ unitaire, } \forall (\vec{r}, t), f(\vec{r}, t) = f\left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{v}\right)$$

$$\text{Onde plane progressive atténuée ou amplifiée: } \exists \vec{u} \text{ unitaire, } \forall (\vec{r}, t), f(\vec{r}, t) = f\left(\vec{r} \cdot \vec{u}, t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{v}\right)$$

$$\text{Onde réelle plane progressive monochromatique OPPM: } \forall (\vec{r}, t), f(\vec{r}, t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_0)$$

$$\text{OPPM harmonique complexe: } \forall (\vec{r}, t), f(\vec{r}, t) = A \cdot e^{i(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_0)}$$

PAQUET D'ONDES: L'onde plane scalaire  $E(z, t)$  d'amplitude spectrale  $S(\omega)$ :  $E(z, t) = \int S(\omega) \cdot e^{i(k.z - \omega.t)} d\omega$

$$\text{VITESSE DE PHASE: } v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

$$\text{MILIEU DISPERSIF: } \boxed{\text{Un milieu est dispersif} \iff v_\varphi = v_\varphi(\omega) \iff \omega \text{ et } k \text{ ne sont pas proportionnels}}$$

$$\text{VITESSE DE GROUPE: } v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

$$\text{RELATION ENTRE LES VITESSES: Souvent, } \boxed{\omega^2 = c^2 \cdot k^2 + Cte} \implies \boxed{2\omega.d\omega = 2.c^2 \cdot k.dk} \implies \boxed{v_\varphi \cdot v_g = c^2}$$

$$\text{RELATION POUR LES PAQUETS D'ONDES: } \boxed{\Delta t \cdot \Delta\nu \approx 1} \text{ où } \Delta\nu \text{ est la largeur spectrale fréquentielle}$$

$$\text{FORMULES UTILES: } \langle a.b \rangle = \frac{1}{2} \Re(a^* \cdot b) \quad \text{et} \quad \langle \vec{A} \wedge \vec{B} \rangle = \frac{1}{2} \Re(\vec{A}^* \wedge \vec{B})$$

OPPM É.M. DANS UN PLASMA:

Hypothèses:

- Approximation des cations immobiles: seules les  $e^-$  contribuent au courant volumique
- Un  $e^-$  oscille à la même pulsation que l'onde avec une amplitude  $\ll \lambda \Rightarrow \vec{E}$  est considéré uniforme à chaque instant dans le volume d'oscillation de l' $e^-$  ( $\vec{r}(t) \approx Cte$ ). Notons  $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{-i\omega t}$
- $v \ll c \Rightarrow -e \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$  est négligé

Conséquences:  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} \Rightarrow m i\omega \vec{v} = e \vec{E} \Rightarrow \vec{j} = \frac{ine^2}{m\omega} \vec{E} \Rightarrow \gamma = \frac{ine^2}{m\omega}$

Relation de dispersion: (MF) et (MA)  $\Rightarrow k^2 \cdot c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$  avec  $\omega_p = \sqrt{\frac{n \cdot e^2}{m \cdot \epsilon_0}}$

Indice de réfraction:  $n = \frac{c}{\omega/k} = \frac{c}{v_\varphi} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

OPPM é.m. non atténuée ( $\omega > \omega_p$ ):  $k \in \mathbb{R}$  et  $\langle \vec{H} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re(\vec{E}^* \wedge \vec{B}) = \frac{k}{2\mu_0 \omega} (\vec{E}^* \cdot \vec{E}) \vec{u}$

Onde é.m. évanescante ( $\omega < \omega_p$ ):  $k \in i\mathbb{R}$  et  $\langle \vec{H} \rangle = \vec{0}$

**MODÈLE DU DIPÔLE RAYONNANT:** Au point fixe O (origine) se trouve la charge électrique négative  $-q$ . Au point S mobile sur l'axe Oz se trouve la charge électrique positive  $q$  de mouvement  $z_S(t) = a \cos(\omega t)$

Moment du dipôle oscillant:  $\vec{p} = q \vec{OS} = \vec{p}_0 \cos(\omega t)$  avec  $p_0 = qa$

Approximations du modèle:  $a \ll \lambda \ll r$  avec  $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} c$

Condition non-relativiste:  $|\dot{z}|_{\max} = a\omega = 2\pi \frac{a}{\lambda} c \Rightarrow a \ll \lambda \Leftrightarrow |\dot{z}|_{\max} \ll c$

Zone de rayonnement:  $\lambda \ll r$  (**zone de rayonnement**)  $\Rightarrow \|\vec{E}\| \text{ et } \|\vec{B}\| \searrow \text{en } \frac{1}{r}$

PROPAGATION D'UNE OPPM É.M. DANS UN MÉTAL:

Hypothèses:  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$     $\gamma \in \mathbb{R}^+$     $\left\| \vec{j}_D \right\|_{\max} \ll \left\| \vec{j} \right\|_{\max}$  (ARQS magnétique)    $\rho = 0$

Équation de diffusion:  $\vec{\text{rot}}(\text{MF}) \Rightarrow \vec{\Delta}(\vec{E}) = \mu_0 \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow (ik)^2 \vec{E} = \pm \mu_0 i\omega \gamma \vec{E}$

Épaisseur de peau:  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \cdot \omega \cdot \gamma}} \Rightarrow k^2 = \left( \frac{1 \pm i}{\delta} \right)^2$

Relation entre les vitesses:  $v_\varphi = \omega \cdot \delta = \frac{\omega}{\beta}$  et  $v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = 2 \cdot v_\varphi$

## 35 Chemin optique, utilisation

INDICE DE RÉFRACTION:  $n = \frac{c}{v_\varphi}$

INDICES DE RÉFRACTION:  $n_{\text{eau}} \approx 1,33$     $n_{\text{verres}} \in [1, 2]$  dans le visible    $n_{\text{verres}} \in [3, 4]$  dans l'IR

APPROXIMATION SCALAIRE DES ONDES LUMINEUSES:  $(\vec{E}, \vec{B}) \xrightarrow{\text{approximation}} \psi(\vec{r}, t) \in \mathbb{C}$

INTENSITÉ LUMINEUSE DE L'ONDE:  $I = \frac{1}{2}\psi.\psi^* = \frac{1}{2}|\psi|^2$

LOI DE MALUS:  $I = I_0 \cdot \cos(\theta)^2$  avec  $\theta$  l'angle que fait la direction de polarisation avec l'axe du polariseur

ÉQUATION LOCALE D'UN RAYON (MILIEU NON HOMOGÈNE) (HP):  $\vec{\nabla} n = \frac{d(n \cdot \vec{u})}{ds}$  avec  $s$  l'abscisse curviligne

FIBRE OPTIQUE À GRADIENT D'INDICE:

Profile de l'indice:  $n(r) = n_0 - a.r^2$

Invariant de Snell-Descartes de la réfraction:  $n_0 \cdot \sin(\alpha_0) = n(r) \cdot \sin(\alpha) = D = n(r_{max}) \cdot 1$

Mise en équation:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{1}{\tan(\alpha)} \quad (\text{géométrie})$$

$$\rightarrow 1 + \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2(\alpha)} = \left( \frac{n(r)}{D} \right)^2 \approx \frac{n_0^2 - 2.a.n_0.r^2}{n_0^2 \cdot \sin^2(\alpha_0)} = \frac{1}{\sin^2(\alpha_0)} - \frac{2.a.r^2}{n_0^2 \cdot \sin^2(\alpha_0)}$$

$$\rightarrow \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 + \frac{2.a.r^2}{n_0^2 \cdot \sin^2(\alpha_0)} = \frac{1}{\sin^2(\alpha_0)} - 1 = \frac{1}{\tan^2(\alpha_0)}$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{d^2r}{dz^2} + \frac{2.a.r}{n_0^2 \cdot \sin^2(\alpha_0)} \right) = 0$$

CHEMIN OPTIQUE:  $L(A, B) = (AB) = \int_{A \rightarrow B} n \cdot \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_{A \rightarrow B} n.ds$

Relation locale:  $\vec{\nabla} L = n \cdot \vec{u}$  où le vecteur unitaire  $\vec{u}$  définit la direction de propagation de l'onde lumineuse

Différence de phase:  $\varphi(B, t) - \varphi(A, t) = -k.(AB) + \varepsilon.\pi$  avec  $\varepsilon \in \{0, \pm 1\}$

Si B est un point focal/de réflexion métallique/de réflexion sur un milieu plus réfringent,  $\varepsilon = \pm 1$   
Si B est un point de réfraction/de réflexions sur un milieu moins réfringent,  $\varepsilon = 0$

Milieu homogène et hors discontinuités:  $(AB) = n.AB$

SURFACE D'ONDE:  $\mathcal{S}$  est une surface d'onde pour une source ponctuelle A quand  $\forall M \in \mathcal{S}, (AM) = Cte$

MILIEU ISOTROPE: Un milieu dans lequel les propriétés de propagation ne dépendent pas de la direction  $\vec{u}$  de l'onde ni de sa polarisation

THÉORÈME DE MALUS-DUPIN:

Dans un milieu isotrope, après un nombre **quelconque** de **réflexions** ou de **réfractions**, les rayons issus d'un même point source (rayons isogènes) demeurent perpendiculaires aux surfaces d'onde.

## 36 Interférences

ADDITIVITÉ DES AMPLITUDES SCALAIRES:  $\psi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}, t) + \psi_2(\vec{r}, t)$

INTERFÉRENCES:  $\boxed{\text{Les ondes interfèrent en } M \iff I(M) \neq I_1 + I_2}$

FORMULE D'INTERFÉRENCES (CAS GÉNÉRAL): Si  $\psi_1(\vec{r}, t) = \psi_{01} e^{i(\omega_1 t - \varphi_{01})}$  et  $\psi_2(\vec{r}, t) = \psi_{02} e^{i(\omega_2 t - \varphi_{02})}$

$$\boxed{I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi(M)] \text{ avec } \varphi(M) = \varphi_{02} - \varphi_{01}}$$

Ondes incohérentes:  $\boxed{\omega_1 \neq \omega_2 \text{ et/ou } \varphi(M) \text{ fluctue aléatoirement}} \implies \boxed{I(M) = I_1 + I_2}$

Ondes cohérentes:  $\boxed{\omega_1 = \omega_2 = \omega \text{ et } \varphi(M) \text{ ne fluctue pas}}$

FORMULE DE FRESNEL DES INTERFÉRENCES À 2 ONDES COHÉRENTES:

$$\boxed{I(M) = (I_1 + I_2) \cdot [1 + \Gamma \cdot \cos(\varphi)] \text{ avec } \Gamma = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \leq 1 \text{ (le contraste)}}$$

DIFFÉRENCE DE MARCHE: Soient 2 ondes issues d'un **même point source**

$$\boxed{\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 \text{ et } \varphi = \varphi_1(M, t) - \varphi_2(M, t) = \frac{2\pi \cdot \delta(M)}{\lambda_0}}$$

CONDITION NÉCESSAIRE D'OBSERVATION D'INTERFÉRENCE EN  $M$ :  $\boxed{|\delta(M)| < c \cdot \Delta t = \Delta l}$

où  $\Delta t$  est la cohérence temporelle vérifiant  $\Delta t \cdot \Delta \nu \approx 1$  et  $\Delta l$  est la longueur de cohérence temporelle

DISPOSITIFS INTERFÉRENTIELS:

par division de front d'onde: trous d'Young, fentes d'Young, miroirs de Fresnel, ...

par divisons d'amplitude (lame semi-réfléchissante): interféromètres de Michelson, anneaux de Newton, ...

INTERFÉRENCE DE  $N$  ONDES DE MÊME AMPLITUDE, DONT LES PHASES SONT EN SUITE ARITHMÉTIQUE:

$$\boxed{\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \psi_n(M, t) = \psi_0 e^{i(\omega t - n \cdot \varphi)} \text{ et } \psi(M, t) = \sum_{n=1}^N \psi_n(M, t)} \implies \boxed{I(\varphi) = \frac{1}{2} \psi \cdot \psi^* = I_0 \cdot \left( \frac{\sin(N \frac{\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \right)^2}$$

TROUS D'YOUNG:

$$\boxed{\text{Différence de marche: } \delta(M) = \left\| \vec{S}_2 \vec{M} \right\| - \left\| \vec{S}_1 \vec{M} \right\| \implies \delta(M) = \frac{a \cdot x}{D}}$$

$$\boxed{\text{Interfrange: } i = \frac{\lambda \cdot D}{a}}$$

$$\boxed{\text{Ordre d'interférence } p \text{ au point } M: p = \frac{\delta}{\lambda}}$$

$$\boxed{\text{Intensité lumineuse en } M: I(M) = (I_1 + I_2) \left[ 1 + \Gamma \cdot \cos \left( 2\pi \frac{x}{i} \right) \right] = (I_1 + I_2) [1 + \Gamma \cdot \cos(2\pi \cdot p)]}$$

$$\boxed{\text{Interférence constructive/destructive: constructive } \iff p \in \mathbb{Z} \text{ et destructive } \iff p \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}}$$

FENTES D'YOUNG:

$$\boxed{\text{trous} \rightarrow \text{fentes fines}} \implies \boxed{\delta(M) \text{ inchangé}}$$

$$\boxed{\text{source ponctuelle} \rightarrow \text{source primaire fine}} \implies \boxed{\delta(M) \text{ inchangé}}$$

$$\boxed{\text{source primaire fine} \rightarrow \text{source primaire fine désaxée}} \implies \boxed{\delta(M) = \frac{a.X}{D'} + \frac{a.x}{D}}$$

Élargissement de la fente et perte de contraste:

$$\boxed{dI(M) = \frac{I_0.dX}{b} \cdot \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi.\delta}{\lambda}\right) \right] = f(X).dX} \implies \boxed{I(M) = \int_{-b/2}^{b/2} f(X).dX}$$

$$\boxed{I(M) = I_0 \cdot \left[ 1 + V \cdot \cos\left(\frac{2\pi.a.x}{\lambda.D}\right) \right]} \text{ avec } \boxed{V = \text{sinc}\left(\frac{\pi.a.b}{\lambda.D'}\right) = \text{sinc}\left(\pi \frac{b}{b_{CS}}\right)}$$

$$\text{Largeur de cohérence spatiale: } \boxed{b_{CS} = \frac{\lambda.D'}{a}}$$

Perte de contraste  $b \ll b_{CS} \implies$  contraste élevé et  $b > b_{CS} \implies$  perte de contraste

$$\text{Critère de brouillage: } \boxed{p = \frac{X}{b_{CS}} + \frac{x}{i}} \implies \boxed{\Delta p = \frac{\Delta X}{b_{CS}}}$$

- $\Delta X = \pm \frac{b_{CS}}{2} \implies \Delta p = \pm \frac{1}{2}$
- $b = b_{CS} \text{ et } |\Delta p| > \frac{1}{2} \implies$  brouillage des franges

INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON EN LAME D'AIR D'ÉPAISSEUR  $e$ : **Anneaux d'égale inclinaison**

$$\text{Source ponctuelle à distance finie: } \boxed{\delta \approx 2.e \cdot \cos(i) \approx 2.e \cdot \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)} \quad \boxed{p_0 = \frac{2.e}{\lambda}} \quad \boxed{i \approx \sqrt{2 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right)}}$$

$$\boxed{\text{source ponctuelle} \rightarrow \text{source étendue}} \implies \boxed{\text{les anneaux d'égale inclinaison se localisent à "l'infini"}}$$

Lame compensatrice:

$$\boxed{\text{lame compensatrice}} \implies \boxed{\text{éviter la dépendance de } \delta \text{ en } \lambda} \quad \boxed{\delta_{opt} = \delta_{geom} \pm \frac{\lambda}{2}}$$

$$\boxed{\text{Interférence à l'infini: } \delta = 2.e \cdot \cos(i)}$$

INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON EN COIN D'AIR D'ANGLE  $\alpha$ : **Franges d'égale épaisseur**

$$\text{Source ponctuelle à distance finie: } \sim 2 \text{ trous d'Young}$$

$$\text{Source ponctuelle à l'infini: Interfrange: } \boxed{i = \frac{\lambda}{2.\alpha}}$$

$$\boxed{\text{source ponctuelle} \rightarrow \text{source étendue}} \implies \boxed{\text{franges très localisées de profondeur } 2.h = \frac{\lambda}{\alpha \cdot \Delta\theta} = 1,6mm}$$

$$\boxed{\text{Différence de marche géométrique: } \delta_{geom} \approx 2.\alpha.x}$$

$$\text{Interfrange sur l'écran: } \boxed{i' = i \cdot |\gamma| = \frac{\lambda \cdot |\gamma|}{2.\alpha}}$$

Mesure de la largeur spectrale:  $p_1 - p_2 = q + \frac{1}{2}$  avec  $q \in \mathbb{Z}$  (condition de brouillage)  $\implies \frac{2.X.\Delta\lambda}{\lambda_1.\lambda_2} = q + \frac{1}{2}$

$$\implies \Delta\lambda = \frac{\lambda_1.\lambda_2}{2.\Delta X} \text{ (entre 2 brouillages } q \text{ et } q+1)$$

FRANGES D'ÉGALE ÉPAISSEUR D'UNE LAMELLE D'INDICE  $n$ :

$$\delta_{\text{géom}} = 2.n.e. \cos(r) \quad I \approx 2I_0 \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} 2.n.e(x, y). \cos(r) \right) \right]$$

INTERFÉROMÈTRE DE PÉROT ET FABRY, FILTRE INTERFÉRENTIEL:

Différence de marche et retard de phase:  $\delta = 2e \cos(i)$  et  $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{4\pi e \cos(i)}{\lambda}$

Amplitude résultante:  $\psi(P) = \psi_0 [1 + R.e^{-i\varphi} + R^2.e^{-2i\varphi} + \dots] = \psi_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (R.e^{-i\varphi})^n = \frac{\psi_0}{1 - R.e^{-i\varphi}}$

Intensité lumineuse:

$$I(P) = \frac{I_0}{(1 - R.e^{-i\varphi})(1 - R.e^{i\varphi})} = \frac{I_0}{1 + R^2 - 2.R.\cos(\varphi)} = \frac{I_0}{(1 - R^2) + 2R[1 - \cos(\varphi)]} = \frac{I_{\max}}{1 + m \cdot \sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right)}$$

avec  $I_{\max} = \frac{I_0}{(1 - R)^2}$  et  $m = \frac{4R}{(1 - R)^2}$

Finesse de l'appareil (à mi-hauteur)  $m \sin^2 \left( \frac{\delta\varphi/2}{2} \right) = 1 \implies \delta\varphi \approx \frac{4}{\sqrt{m}} \implies F = \frac{2\pi}{\delta\varphi}x$

FORMULE DU RÉSEAU (DIRECTION DES MAXIMA D'INTENSITÉ):  $\delta = a. [\sin(\theta) - \sin(i)] = p.\lambda$  avec  $p \in \mathbb{Z}$

## 37 Compléments de thermodynamique

TRAVAIL ÉLÉMENTAIRE ET CONDITION DE VALIDITÉ:  $|\frac{dx}{dt}| \ll u_{\text{gaz}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} \implies \delta W = -PdV$

CAPACITÉS THERMIQUES:  $C_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = nC_{v,m} = mc_v \quad C_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P = nC_{p,m} = mC_p$

1<sup>ÈRE</sup> IDENTITÉ THERMODYNAMIQUE (IDT1):  $dU = TdS - PdV$

2<sup>ÈME</sup> IDENTITÉ THERMODYNAMIQUE (IDT2):  $dH = TdS + VdP \iff dH = dU + VdP + PdV$

DIFFÉRENCELOGARITHMIQUE DE L'ÉQUATION DES GP (LGP):  $PV = nRT \implies \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$

VARIATION D'ENTROPIE POUR UNE TRANSFORMATION QUASISTATIQUE:  $dS = \frac{\delta Q}{T}$

EXPRESSIONS DE S (DÉMONSTRATIONS):

$$\text{Solides et liquides } (V = Cte): \boxed{\text{(IDT1) et } dV = 0} \implies \boxed{dS = \frac{dU}{T} = mc \frac{dT}{T}}$$

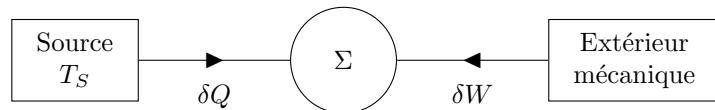
Gaz parfait (GP):

- Le couple  $(T, V)$ :  $\boxed{\text{(IDT1) et } \frac{P}{T} = nR \frac{1}{V}} \implies \boxed{dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T} dV = C_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}}$

- Le couple  $(T, P)$ :  $\boxed{\text{(IDT2) et } \frac{V}{T} = nR \frac{1}{P}} \implies \boxed{dS = \frac{dH}{T} - \frac{V}{T} dP = C_p \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P}}$

- Le couple  $(P, V)$ :  $\boxed{\text{(IDT1) et (LGP)}} \implies \boxed{dS = C_v \frac{dP}{P} + \gamma C_v \frac{dV}{V} = C_v \frac{d(PV^\gamma)}{PV^\gamma}}$

TRANSFORMATION MONOTHERME (NIVEAU  $\star$ ):



$2^{\text{nd}}$  principe appliqué au système  $\{\Sigma + \text{Pont thermique}\}$

$$\implies \boxed{dS = \frac{\delta Q}{T_S} + \delta S_c = \frac{\delta Q}{T_S} + S_{c,\text{Pont thermique}} + S_{c,\Sigma}}$$

$$\boxed{\delta S_{c,\text{Pont thermique}} = -\delta S_{e,\text{Pont thermique}}} \text{ (relation admise)} \implies \boxed{\delta S_{c,\text{Pont thermique}} = \delta Q \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_S} \right) \geq 0}$$

$$\implies \boxed{dS = \frac{\delta Q}{T} + \delta S_{c,\Sigma}} \xrightarrow[\text{quasistatique}]{\text{transformation}} \boxed{dS = \frac{\delta Q}{T} \text{ et } \delta S_{c,\Sigma} = 0}$$

$$\boxed{\text{réversibilité}} \implies \boxed{\delta S_{\text{totale}} = dS + \delta S_{\text{Source}} = 0} \implies \boxed{\delta Q \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_S} \right) = 0} \implies \boxed{T = T_S \text{ (isotherme)}}$$

COMPRESSIONS DU GP:

$$\text{Compression isotherme réversible: } \boxed{W = nRT \ln \left( \frac{V_i}{V_f} \right) = nRT \ln(\alpha) > 0} \quad \boxed{Q = -W < 0}$$

$$\text{Compression adiabatique: } \boxed{Q = 0} \quad \boxed{W = \Delta U = \frac{\Delta(PV)}{\gamma - 1}} \quad \boxed{T_{f,\text{irréversible}} > T_{f,\text{réversible}}}$$

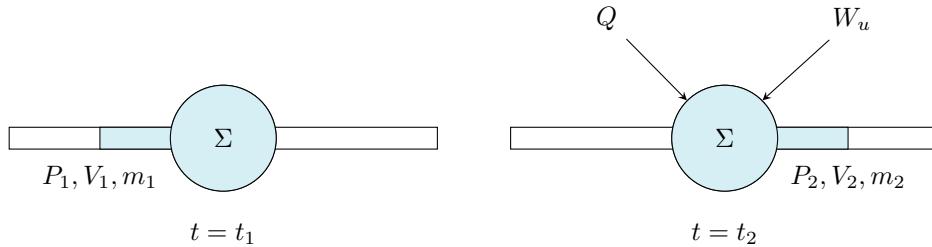
$$\text{Polytropique réversible: } \boxed{PV^k = K = Cte} \quad \boxed{W = \frac{\Delta(PV)}{k - 1} > 0}$$

$1 < k < \gamma$  : cas intermédiaire entre l'isotherme et l'adiabatique

## 38 Systèmes ouverts en régime stationnaire

1<sup>ER</sup> PRINCIPE POUR UN FLUIDE EN ÉCOULEMENT PERMANENT:

Démonstration:



$$m = D_m(t_2 - t_1) \xrightarrow{\text{conservation du débit massique}} m = m_1 = m_2$$

1<sup>er</sup> principe appliqué au système  $\{m + m_\Sigma\}$  entre la date  $t_1$  et la date  $t_2$

$$\Rightarrow \Delta E + \Delta U = W + Q = (P_1 V_1 - P_2 V_2 + W_u)$$

$$\text{i.e. } (E_\Sigma + E_2) - (E_1 + E_\Sigma) + (U_\Sigma + U_2) - (U_1 + U_\Sigma) = (P_1 V_1 - P_2 V_2) + W_u + Q$$

$$\text{i.e. } (E_2 - E_1) + [(U_2 + P_2 V_2) - (U_1 + P_1 V_1)] = W_u + Q$$

$$\text{i.e. } \Delta E + \Delta H = W_u + Q \quad \text{i.e. } m(\Delta e + \Delta h) = W_u + Q$$

$$\xrightarrow{\text{diviser par } m} \Delta e + \Delta h = w_u + q \quad \xrightarrow{\text{diviser par } (t_2 - t_1)} D_m(\Delta e + \Delta h) = \mathcal{P}_m + \dot{Q}$$

2<sup>ND</sup> PRINCIPE POUR UN FLUIDE EN ÉCOULEMENT PERMANENT:  $\Delta s = s_e + s_c$

DÉTENTE DE JOULE-THOMSON (JOULE-KELVIN):

$$\text{détente adiabatique irréversible sans travail utile } w_u \Rightarrow \Delta e + \Delta h = 0 + 0 = 0$$

$$\Delta e \approx 0 \Rightarrow \Delta h = 0 \Rightarrow \text{transformation isenthalpique}$$

COMPLÉMENT (HP): écoulement quasistatique élémentaire  $\Rightarrow \delta w_u = v dP$

## 39 Conduction, convection

CONDUCTION THERMIQUE: propagation d'enthalpie sans déplacement macroscopique de matière

CONVECTION THERMIQUE: propagation d'enthalpie avec déplacement macroscopique de matière

$$\text{FLUX THERMIQUE: } \Phi = \frac{Q}{\Delta t} \quad d\Phi = \frac{\delta Q}{dt}$$

$$\text{VECTEUR DENSITÉ DE FLUX THERMIQUE: } \forall d\Sigma, d\Phi = \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{\Sigma} \quad \left\| \vec{j}_{\text{th}} \right\| \propto W.m^{-2}$$

$$\text{PIUSSANCE THERMIQUE INSTANTANÉE TRAVERSANT } \Sigma: \Phi = \iint_{\Sigma} \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{\Sigma}$$

LOI DE FOURIER DE LA CONDUCTION THERMIQUE:  $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \vec{\nabla} T$  avec  $\lambda$  la conductivité thermique

LOI DE NEWTON DU CONTACT SOLIDE-FLUIDE (CONVECTION):

Soit un solide de température  $T_S$  subissant un échange convectif avec un fluide de température  $T_F$  (sauf au voisinage de la paroi). Soit  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à la surface du solide de sens  $S \rightarrow F$

$\vec{j}_{\text{th}} = h(T_S - T_F) \vec{n}$  avec  $h$  le coefficient de transfert thermique de surface/d'échange conducto-convectif

CONDUCTION EN RÉGIME STATIONNAIRE/PERMANENT:  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

ANALOGIES ÉLECTROTHERMIQUES:

$$\boxed{V_1 - V_2 \longleftrightarrow T_1 - T_2} \quad \boxed{I \longleftrightarrow \Phi} \quad \boxed{j_{\text{elec}} \longleftrightarrow j_{\text{th}}} \quad \boxed{q \longleftrightarrow H} \quad \boxed{C_{\text{elec}} \longleftrightarrow C_{\text{th}}}$$

$$\text{En régime permanent, } \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{elec}} = 0 \longleftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{th}} = 0} \quad \boxed{\Delta V = 0 \longleftrightarrow \Delta T = 0}$$

RÉSISTANCE THERMIQUE:  $\boxed{R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}}$  avec  $T_1 > T_2$

BARREAU CYLINDRIQUE CALORIFUGÉ LATÉRALEMENT:

$$\text{1er principe appliqué à la tranche } [x, x + dx] \implies \boxed{\frac{dU}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} = \Phi(x) - \Phi(x + dx) = -\frac{d\Phi}{dx} dx}$$

$$\text{régime permanent} \implies \boxed{\frac{dU}{dt} = 0} \implies \boxed{\frac{d\Phi}{dx} = 0}$$

$$\Phi = j_{\text{th}} \Sigma = -\lambda \frac{dT}{dx} \Sigma \implies \boxed{\frac{dT}{dx} = Cte} \implies \boxed{T \text{ est une fonction affine de } x}$$

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} = \frac{L}{\lambda \Sigma}}$$

GÉOMÉTRIE CYLINDRIQUE:

$$\text{1er principe appliqué à la portion délimitée par } C(r, L) \text{ et } C(r + dr, L) \implies \boxed{\frac{d\Phi}{dr} = 0}$$

$$\forall r \in [R_1, R_2], \vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r \implies \boxed{\Phi = 2\pi r L \left( -\lambda \frac{dT}{dr} \right)} \implies \boxed{\frac{dT}{\Phi} = -\frac{1}{2\pi L \lambda} \frac{dr}{r}}$$

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} = \frac{1}{2\pi L \lambda} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$$

GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE:

$$\text{1er principe appliqué à la portion délimitée par } S(r) \text{ et } S(r + dr) \implies \boxed{\frac{d\Phi}{dr} = 0}$$

$$\forall r \in [R_1, R_2], \vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r \implies \boxed{\Phi = 4\pi r^2 \left( -\lambda \frac{dT}{dr} \right)} \implies \boxed{\frac{dT}{\Phi} = -\frac{1}{4\pi \lambda} \frac{dr}{r^2}}$$

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} = \frac{1}{4\pi \lambda} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

RÉSISTANCE THERMIQUE CONVECTIVE:  $\boxed{R_{\text{conv}} = \frac{1}{h\Sigma}}$

LOIS D'ASSOCIATION DES RÉSISTANCES THERMIQUES:

$$\text{En série: } R_{eq} = R_1 + R_2$$

$$\text{En parallèle: } \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ENTROPIE CRÉÉE: Considérons un barreau cylindrique et la tranche  $[x, x + dx]$

$$\text{Entropie volumique créée par unité de temps: } \sigma = \frac{\dot{S}_c}{\Sigma dx}$$

$$2^{\text{nd}} \text{ principe appliqué à la tranche } [x, x + dx] \implies \frac{dS}{dt} = \dot{S}_e + \dot{S}_c = \left( \frac{\Phi}{T(x)} - \frac{\Phi}{T(x + dx)} \right) + (\Sigma dx)\sigma$$

$$\text{régime permanent} \implies \frac{dS}{dt} = 0 \implies (\Sigma dx)\sigma = \Phi \left( \frac{1}{T(x + dx)} - \frac{1}{T(x)} \right) = \Phi d \left( \frac{1}{T} \right) = -\Phi \frac{dT}{T^2}$$

$$\Phi = j_{\text{th}}\Sigma = -\lambda \frac{dT}{dx}\Sigma \implies \sigma = \frac{\lambda}{T^2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 \geq 0$$

BARRE AVEC PERTES LATÉRALES, AILETTE DE REFROIDISSEMENT: Considérons un barreau cylindrique

$$1^{\text{er}} \text{ principe appliqué à la tranche } [x, x + dx]$$

$$\implies \frac{dU}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} = \Phi(x) - \Phi(x + dx) - 2\pi R dx h(T(x) - T_0) = -\frac{d\Phi}{dx} dx - 2\pi R dx h(T(x) - T_0)$$

$$\Phi(x) = j_{\text{th}}\pi R^2 = -\lambda \frac{dT}{dx} \pi R^2 \implies -\frac{d\Phi}{dx} dx = \lambda \pi R^2 \frac{d^2 T}{dx^2} dx$$

$$\text{régime permanent} \implies \frac{dU}{dt} = 0 \implies \delta^2 \frac{d^2 T}{dx^2} - T(x) = -T_0 \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}}$$

$$\implies T(x) = T_0 + A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta} = T_0 + \alpha \cdot \text{ch}(x/\delta) + \beta \cdot \text{sh}(x/\delta)$$

$$\bullet \quad [L \gg \delta \text{ ou approximation de barre infinie}] \implies T(x) = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-x/\delta}$$

$$\bullet \quad [T(L) = T_2] \implies \begin{cases} T_1 = T_0 + A + B \\ T_2 = T_0 + A e^{-L/\delta} + B e^{L/\delta} \end{cases}$$

$$\bullet \quad [T(L) \text{ non imposée}] \implies \begin{cases} T_1 = T_0 + A + B \\ T_2 = T_0 + A e^{-L/\delta} + B e^{L/\delta} \\ -\lambda \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = h(T(L) - T_0) \end{cases}$$

$$\bullet \quad [T(L) = T_1] \implies x \mapsto T \left( x - \frac{L}{2} \right) \text{ est paire} \implies T(x) = T_0 + \alpha \cdot \text{ch} \left( \frac{x - L/2}{\delta} \right)$$

ÉQUATION DE LA CHALEUR UNIDIMENSIONNELLE: Soit un barreau cylindrique calorifugé latéralement

$$\boxed{1^{\text{er}} \text{ principe appliqué à la tranche } [x, x + dx] \implies \frac{\partial U}{\partial t} = \Sigma j_{\text{th}}(x, t) - \Sigma j_{\text{th}}(x + dx, t) = -\Sigma \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} dx = \lambda \Sigma dx \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T} (mcT) = \rho \Sigma dx \frac{\partial T}{\partial t} \implies \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \implies \frac{\partial T}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \text{ avec } \chi = \frac{\lambda}{\rho c}}$$

ORDRE DE GRANDEUR DE LA DURÉE D'UN RÉGIME TRANSITOIRE THERMIQUE: Notons  $L$  la dimension caractéristique du problème et  $\tilde{T}$  un ordre de grandeur de  $T$

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \implies \rho c \frac{\tilde{T}}{\tau} = \lambda \frac{\tilde{T}}{L^2} \implies \tau = \frac{\rho c L^2}{\lambda} \text{ et } L \sim \sqrt{\tau}}$$

DIFFUSION THERMIQUE AVEC UN COURANT ÉLÉCTRIQUE:

$$\boxed{dr = \frac{dx}{\gamma \Sigma} \text{ et } I = \Sigma j_{\text{elec}} \implies \mathcal{P}_{\text{elec}} = dr I^2 = \frac{1}{\gamma} (j_{\text{elec}})^2 = \vec{j}_{\text{elec}} \cdot \vec{E} \text{ (puissance électrique volumique)} \\ \implies \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mathcal{P}_{\text{elec}}}$$

ÉQUATION DE LA CHALEUR/DE DIFFUSION THERMIQUE GÉNÉRALE:  $\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + \mathcal{P}_{\text{volumique dissipée}}}$

ÉQUATION DE LA CHALEUR EN GÉOMÉTRIE CYLINDRIQUE:

$$\boxed{1^{\text{er}} \text{ principe appliqué à la portion délimitée par } C(r, L) \text{ et } C(r + dr, L)}$$

$$\begin{aligned} &\implies \frac{\partial}{\partial t} (\rho L 2\pi r dr c T) = L 2\pi r j_{\text{th}}(r, t) - L 2\pi (r + dr) j_{\text{th}}(r + dr, t) + L 2\pi r dr \mathcal{P} \\ &\implies \rho c r dr \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} [r j_{\text{th}}(r, t)] dr + r dr \mathcal{P} \\ &\implies \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \mathcal{P} \end{aligned}$$

ÉQUATION DE LA CHALEUR EN GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE:

$$\boxed{1^{\text{er}} \text{ principe appliqué à la portion délimitée par } S(r) \text{ et } S(r + dr)}$$

$$\begin{aligned} &\implies \frac{\partial}{\partial t} (\rho 4\pi r^2 dr c T) = 4\pi r^2 j_{\text{th}}(r, t) - 4\pi (r + dr)^2 j_{\text{th}}(r + dr, t) + 4\pi r^2 dr \mathcal{P} \\ &\implies \rho c r^2 dr \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} [r^2 j_{\text{th}}(r, t)] dr + r^2 dr \mathcal{P} \\ &\implies \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \mathcal{P} \end{aligned}$$

## 40 Physique quantique

RELATION DE PLANCK-EINSTEIN (ÉNERGIE D'UN PHOTON): 
$$e = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

QUANTITÉ DE MOUVEMENT DU PHOTON: 
$$p = \frac{e}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

HYPOTHÈSE DE DE BROGLIE: 
$$\forall \text{ particule/corpuscule de quantité de mouvement } p, \lambda = \frac{h}{p}$$

NIVEAUX D'ÉNERGIE DE L'ATOME D'HYDROGÈNE: 
$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$$
 avec  $E_0 = 13,6 eV$

Les états liés de l'électron dans l'atome d'hydrogène sont dégénérés

FONCTION D'ONDE (AMPLITUDE DE PROBABILITE DE PRÉSENCE): 
$$\Psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$$

Probabilité de présence de  $M$  à la date  $t$ , à la position  $\vec{r}$ : 
$$dp = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d\tau$$

Densité de probabilité: 
$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{dp}{d\tau} = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$$

Condition de normalisation de la fonction d'onde: 
$$\forall t, \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}, t) . d\tau = 1$$

MOUVEMENT 1D:

Probabilité de présence de  $M$  à la date  $t$ , à la position  $[x, x + dx]$ : 
$$dp = |\Psi(x, t)|^2 dx$$

Densité de probabilité linéique: 
$$\rho(x, t) = \frac{dp}{dx} = |\Psi(x, t)|^2$$

Condition de normalisation de la fonction d'onde: 
$$\forall t, \int_{-\infty}^{+\infty} \rho . dx = 1$$

Position moyenne de la particule quantique: 
$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \rho . dx$$

Écart type sur la position de la particule: 
$$\sigma_x(t) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 \rho . dx}$$

CONSTANTE DE PLANCK RÉDUITE (QUANTUM DU MOMENT CINÉTIQUE): 
$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34} J.s$$

ÉQUATION DE SCHRÖDINGER DÉPENDANT DU TEMPS (ESDT): 
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(\vec{r}) . \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

où  $V(\vec{r})$  est l'énergie potentielle d'interaction d'une particule avec son environnement

Opérateur Hamiltonien: 
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \Rightarrow H[\Psi(\vec{r}, t)] = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

ESDT d'un mouvement 1D: 
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x) . \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

ÉTATS STATIONNAIRES QUANTIQUES 1D:  $\Psi(x, t) = \psi(x).f(t)$  avec  $\psi(x) \in \mathbb{C}$  et  $f(t) \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\text{ESDT}} \implies i\hbar \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + V(x) = E \text{ (constante indépendante de } t \text{ et de } x)$$

$$\implies f(t) = A \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) = Ae^{-i\omega t} \text{ avec } \omega = \frac{E}{\hbar} \implies \Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$$

Équation de Schrödinger indépendante du temps (ESIT):  $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x).\psi(x) = E.\psi(x)$

Spectre de valeurs propres:  $H[\psi(x)] = E.\psi(x) \implies E \in \text{Sp}(H)$

$$\text{Montrer que } E \in \mathbb{R}: \boxed{E = \alpha + i\beta} \implies f(t) = A \exp\left(\frac{\beta}{\hbar}t\right) \exp\left(-i\frac{\alpha}{\hbar}t\right) \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta > 0 \\ 0 & \text{si } \beta < 0 \end{cases}$$

FONCTION D'ONDE D'UNE PARTICULE LIBRE NON LOCALISÉE (ONDES DE DE BROGLIE):  $V(x) = 0$

$$\boxed{\text{ESIT}} \implies \psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0 \quad \boxed{E \leq 0} \implies \text{divergence ou problème de normalisation}$$

$$\boxed{k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0} \implies \Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx + \omega t)}$$

RELATIONS DE PLANCK-EINSTEIN:  $\boxed{p = \hbar k} \quad \boxed{E = \hbar\omega}$

Conséquences:

$$\boxed{k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}} \implies \boxed{E = \frac{(\hbar k)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} = E_c}$$

$$\boxed{E = \frac{p^2}{2m}} \implies \boxed{\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}} \implies \boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m}}$$

CONFINEMENT ET QUANTIFICATION: En l'absence de confinement, l'énergie  $E$  n'est pas quantifiée

PROBLÈME DE NORMALISATION:

$$\boxed{\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}} \implies \boxed{\rho(x, t) = |A|^2} \implies \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho dx \neq 1} \implies \boxed{\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{i(kx - \omega t)}.dk}$$

INÉGALITÉS D'HEISENBERG/THÉORÈME D'INDÉTERMINATION:  $\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}} \quad \boxed{\tau \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}}$

avec  $\Delta x$  l'incertitude sur la position,  $\Delta p_x$  l'incertitude sur la quantité de mouvement

et  $\tau$  l'étalement temporel de  $\Psi(x, t)$ ,  $\Delta E$  l'incertitude sur l'énergie de la particule

$$\text{Lien avec les inégalités pour des paquets d'ondes: } \boxed{\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}} \quad \boxed{\tau \Delta \omega \geq \frac{1}{2}}$$

DENSITÉ DE COURANT DE PROBABILITÉ:

Définition (non exigible):  $\vec{J} = \frac{\hbar}{m} \Re e \left[ \frac{1}{i} \Psi^* \cdot \vec{\nabla} \Psi \right]$

Relation (non exigible):  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  avec  $\rho = |\Psi|^2$

Signification pour un mouvement 1D:

$\|\vec{J}(x, t)\|$  est la probabilité de passage de la particule quantique à l'abscisse  $x$  et à la date  $t$ , par unité de temps

Signification pour un faisceau de particules identiques:

$\Psi$  représente tout un faisceau de particules identiques  $\Rightarrow \|\vec{J}\|$  est le débit de particules

Cas d'un état stationnaire 1D:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$

Cas de l'onde de de Broglie associée à un faisceau de particules:  $\vec{J} = \rho \vec{v} = |\Psi|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$

CONDITION SUR  $\psi$ : On considère l'état stationnaire  $\Psi(x, t) = \psi(x).f(t)$

$\psi(x)$  est une fonction toujours continue de  $x$ , même aux points de discontinuité de  $V(x)$

$\psi'(x)$  est une fonction continue de  $x$ , sauf en  $x_0$  si  $V(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} \infty$

ESIT  $\Rightarrow \psi''(x)$  est discontinue aux points où  $V(x)$  présente ses discontinuités, sauf si  $\psi(x) = 0$  en ces points

PUIT QUANTIQUE INFINI:  $\forall x \in [0, L], V(x) = 0 \quad V(x) \rightarrow \infty \text{ si } x \notin [0, L]$

Confinement et théorème d'indétermination:  $\Delta x \leq \frac{L}{2} \Rightarrow \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{L} \Rightarrow E_{\min} = \frac{p_{\min}^2}{2m} \geq \frac{1}{2m} \cdot \frac{\hbar^2}{L^2} > 0$

Confinement et spectre discret: ESIT  $\Rightarrow \psi'' + k^2 \psi = 0$  avec  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$  et  $E \geq E_{\min} > 0$

$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \xrightarrow[\text{continuité de } \psi]{\psi(0^-)=0} \psi(x) = A \sin(kx)$

$\Psi(L) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \quad (A \neq 0 \text{ car } B = 0) \Rightarrow k_n L = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^*$

Quantification de l'énergie:  $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = n^2 E_1$  avec  $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m L^2}$

$E_n \propto n^2$  est due au confinement très brutal des bords infinis du puit

$V(x) \propto x^2 \Rightarrow E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (\text{complément})$

Fonctions d'onde:  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right) = \psi_n(x) e^{-i \omega_n t}$

Normalisation:  $\int_0^L \rho dx = 1 \Rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$

Analogie avec la corde vibrante:

$$y_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) \quad \text{avec} \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \omega = v k_n \quad \text{et} \quad L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

$$\Psi_n(x, t) = \frac{1}{i\sqrt{2L}} [e^{i(k_n x - \omega_n t)} - e^{-i(k_n x + \omega_n t)}] \quad (\text{interférence de deux ondes de Broglie}) \implies L = n \frac{\lambda_{n,\text{de Broglie}}}{2}$$

$$E_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left( \frac{2\pi\hbar}{\lambda_{n,\text{de Broglie}}} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2$$

$$\text{MARCHE DE POTENTIEL: } \begin{cases} \forall x < 0, V(x) = 0 \\ \forall x > 0, V(x) = V > 0 \end{cases}$$

$$x < 0: \boxed{V(x) = 0} \implies \boxed{\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + BAe^{-i(kx + \omega t)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \boxed{E = \hbar\omega}$$

$$x > 0: \boxed{\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0}$$

$$\bullet V < E: \boxed{k' = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E - V)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Psi(x, t) = Ce^{i(k'x - \omega t)}} \quad (\text{absence de cause de réflexion pour } x > 0)$$

$$\boxed{\text{continuité de } \Psi \text{ et } \Psi' \text{ en } x = 0} \implies \begin{cases} A + B = C \\ ik(A - B) = ik'C \end{cases} \implies \boxed{B = \frac{k - k'}{k + k'}A} \text{ et } \boxed{C = \frac{2k}{k + k'}A}$$

$$\begin{cases} \vec{J}_i = \frac{\hbar k}{m}|A|^2 \vec{e}_x \\ \vec{J}_r = \frac{\hbar k}{m}|B|^2(-\vec{e}_x) \\ \vec{J}_t = \frac{\hbar k'}{m}|C|^2 \vec{e}_x \end{cases} \implies \begin{cases} R = \frac{\|\vec{J}_r\|}{\|\vec{J}_i\|} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k - k'}{k + k'}\right)^2 \quad (\text{probabilité de réflexion}) \\ T = \frac{\|\vec{J}_t\|}{\|\vec{J}_i\|} = \frac{k'|C|^2}{k|A|^2} = \frac{4kk'}{(k + k')^2} \quad (\text{probabilité de transmission}) \end{cases}$$

$$\bullet V > E: \boxed{q = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V - E)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Psi(x, t) = De^{-qx}.e^{-i\omega t}} \quad (\text{solution en } e^{qx} \text{ divergerait})$$

$$\boxed{\text{continuité de } \Psi \text{ et } \Psi' \text{ en } x = 0} \implies \begin{cases} A + B = D \\ ik(A - B) = -qD \end{cases} \implies \boxed{B = \frac{k - iq}{k + iq}A} \text{ et } \boxed{D = \frac{2k}{k + iq}A}$$

$$\boxed{R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{|k - iq|}{|k + iq|} = 1} \text{ et } \boxed{T = 1 - R = 0}$$

EFFET TUNNEL:  $\boxed{\forall x < 0, V(x) = 0}$   $\boxed{\forall x \in [0, L], V(x) = V > 0}$   $\boxed{\forall x > L, V(x) = 0}$   $\boxed{E < V}$

• Calcul estimatif du facteur de transmission  $T$ :  $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$  et  $q = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V - E)}$

$\boxed{\forall x \in [0, L], \Psi(x, t) = De^{-qx}e^{-i\omega t} + D'e^{qx}e^{-i\omega t}}$

Le terme  $D'e^{qx}e^{-i\omega t}$  provenant de la réflexion de l'onde évanescante en  $x = L$  est négligé

$\Rightarrow \boxed{\forall x \in [0, L], \Psi(x, t) \approx De^{-qx}e^{-i\omega t}}$

$\Rightarrow \boxed{\forall x > L, \Psi(x, t) \approx De^{-qL}e^{i(k(x-L)-\omega t)} \text{ (obtenue par continuité de } \psi \text{ en } x = L)}$

$$\begin{cases} \vec{J}_i \approx \frac{\hbar k}{m} |A|^2 \vec{e}_x \\ \vec{J}_t \approx \frac{\hbar k}{m} |D|^2 e^{-2qL} \vec{e}_x \\ D \approx \frac{2k}{k + iq} A \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\|\vec{J}_t\|}{\|\vec{J}_i\|} \approx \frac{|D|^2}{|A|^2} e^{-2qL} = \frac{4E}{V} e^{-2qL}$$

Cette estimation n'est correcte que si  $0 < E \ll V$

• Résultat du calcul exact du facteur de transmission  $T$ :  $T = \frac{4E(V - E)}{4E(V - E) + V^2 \operatorname{sh}^2(qL)}$

$L \gg \delta \Leftrightarrow qL \gg 1$  (approximation de barrière épaisse)  $\Rightarrow \boxed{\operatorname{sh}^2(qL) \approx \left(\frac{1}{2} e^{qL}\right)^2}$

$E \ll V \Rightarrow EV \ll V^2 \text{ et } E^2 \ll V^2 \Rightarrow \boxed{4E(V - E) \ll V^2 \operatorname{sh}^2(qL)}$

$\Rightarrow \boxed{T \approx \frac{16E(V - E)}{V^2} e^{-2qL}}$

ÉTAT NON STATIONNAIRE D'UNE PARTICULE DANS UN PUITS INFINI (THÉORÈME DE SUPERPOSITION):

Soit  $\boxed{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$  la fonction propre associée à l'état stationnaire d'énergie  $E_n$  du puits infini

$\boxed{\Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \psi_n(x)} \Rightarrow \boxed{\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \psi_n(x) e^{-i\omega_n t}}$  avec  $\boxed{\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}}$

Démonstration: Admettons que  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  soit une base

$\Rightarrow \boxed{\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \psi_n(x)} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \psi_n'' + V \psi_n \right] f_n(t) = i\hbar \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{df_n}{dt} \psi_n}$

$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} E_n f_n(t) \psi_n = i\hbar \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{df_n}{dt} \psi_n} \Rightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, E_n \cdot f_n = i\hbar \frac{df_n}{dt}} \Rightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = C_n e^{-i\omega_n t}}$

PROPRIÉTÉ D'UN ÉTAT NON STATIONNAIRE:  $\boxed{\text{Pour un état non stationnaire, il y a dispersion d'énergie}}$

## 41 Thermodynamique statistique

CONSTANTE DE BOLTZMANN:

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} J.K^{-1} \quad k_B \mathcal{N}_A = R \quad \text{avec } \mathcal{N}_A \text{ le nombre d'Avogadro et } R \text{ la constante des gaz parfaits}$$

$$\text{LOI DES GAZ PARFAITS PHYSICIENNE: } PV = Nk_B T \quad \text{avec } N = n\mathcal{N}_A \text{ le nombre de particules}$$

LOI DE BOLTZMANN (CARACTÉRISATION DE L'ÉQUILIBRE THERMIQUE):

Soit une particule  $P$  indépendante d'autres particules, en équilibre avec un thermostat de température  $T$

- **Spectre d'énergie discret:** Notons  $\{E_1, E_2, \dots, E_i, \dots\}$  les niveaux d'énergie accessibles à  $P$

$$\text{La probabilité d'occupation du niveau } E_i \text{ par } P \text{ (poids de Boltzmann): } p_i = \frac{1}{Z} g_i \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)$$

Dégénérescence du niveau  $E_i$ :  $g_i$  est le nombre d'états indépendants de même énergie  $E_i$ , souvent on aura  $g_i = 1$

$$\text{Condition de normalisation: } \sum_i p_i = 1$$

- **Spectre continu d'énergie:** Notons  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  les paramètres dont dépend l'énergie  $e$  de la particule.

$$\text{Probabilité que } \alpha_1 \in [\alpha_1, \alpha_1 + d\alpha_1], \dots \text{ (poids de Boltzmann): } dp = \frac{1}{Z} g(e) \exp\left(-\frac{e}{k_B T}\right) .d\alpha_1 .d\alpha_2 .d\alpha_3$$

$$\text{Condition de normalisation: } \int dp = 1$$

$$\bullet \text{ Facteur de Boltzmann: } \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right) \quad \exp\left(-\frac{e}{k_B T}\right)$$

$$\bullet \text{ Fonction de partition/facteur de normalisation: } Z = \sum_i g_i \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)$$

MODÈLE DE L'ATMOSPHÈRE ISOTHERME:

$$\text{équilibre mécanique de la tranche de gaz de volume } S.dz \implies SP(z) - SP(z + dz) - \rho g S dz = 0$$

$$\implies \frac{dP}{dz} = \rho g \Leftrightarrow \vec{\nabla} P = \rho \vec{g}$$

$$\text{gaz parfait} \implies \frac{dP}{dz} = -\frac{MP}{RT} g = -\frac{P}{H} \implies P(z) = P(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \text{ avec } H = \frac{RT}{Mg}$$

$$\text{Loi de l'hydrostatique de Pascal (fluide incompressible au repos): } \rho = Cte \implies P(z) = P(0) - \rho g z$$

$$\text{Interprétation de Boltzman de la loi barométrique: } P = \frac{N}{V} k_B T = nk_B T$$

$$\implies P \propto n \implies n(z) = n(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

$$\text{Pour une surface au sol } S \text{ donnée, } N = S \int_0^{+\infty} n(z) dz = n(0) S H$$

La proportion de molécules situées dans  $[z, z + dz]$ :

$$dp = \frac{dN}{N} = \frac{n(z)Sdz}{n(0)SH} = \frac{1}{H} \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right) dz = \frac{1}{H} \exp\left(-\frac{Mgz}{N_A k_B T}\right) dz = \frac{1}{H} \exp\left[-\frac{(mgz)}{k_B T}\right] dz$$

#### ÉNERGIE MOYENNE D'UNE PARTICULE À L'ÉQUILIBRE THERMIQUE:

Soit une particule  $P$  indépendante d'autres particules, en équilibre avec un thermostat de température  $T$

Spectre continu d'énergie:  $\bar{e} = \langle e \rangle = \int e.dp$

Spectre d'énergie discret:  $\bar{e} = \langle e \rangle = \sum_i E_i.p_i$

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \implies \bar{e} = \frac{1}{Z} \sum_i E_i g_i e^{-\beta E_i} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \sum_i g_i e^{-\beta E_i} \right] = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$$

Relation importante:  $\bar{e} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial(\ln Z)}{\partial \beta}$

ÉCART QUADRATIQUE ÉNERGÉTIQUE:  $\sigma_e = \sqrt{(e - \bar{e})^2} = \sqrt{\sum_i (E_i - \bar{e})^2.p_i} = \sqrt{e^2 - \bar{e}^2}$

#### N PARTICULES IDENTIQUES INDÉPENDANTES:

Énergie:  $E_{\text{tot}} = \sum_{j=1}^N e_j$  tel que  $\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, e_j \in \{E_1, E_2, \dots\}$

Énergie moyenne:  $\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \bar{e}_j = \bar{e}$  (car les particules sont identiques)  $\implies \bar{E}_{\text{tot}} = N\bar{e}$

Hypothèse ergodique: Pour  $N$  très grand  $\bar{E}_{\text{tot}} = U(V, T)$  (énergie du macro état des  $N$  particules)

Variation relative d'énergie:  $E_{\text{tot}} = \sum_{j=1}^N e_j$  et l'indépendance des  $N$  particules

$$\implies (\sigma_{E_{\text{tot}}})^2 = \sum_{j=1}^N (\sigma_{e_j})^2 = N(\sigma_e)^2 \implies \sigma_{E_{\text{tot}}} = \sigma_e \sqrt{N} \implies \frac{\sigma_{E_{\text{tot}}}}{\bar{E}_{\text{tot}}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \frac{\sigma_e}{\bar{e}} \right)$$

CAPACITÉ THERMIQUE  $C_v$ :  $C_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{\partial \bar{E}_{\text{tot}}}{\partial T} = N \frac{\partial \bar{e}}{\partial T} = N \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial \bar{e}}{\partial \beta}$

$$\frac{\partial \beta}{\partial T} = -\frac{1}{k_B T^2} = -k_B \beta^2 \quad \text{et} \quad \bar{e} = -\frac{\partial(\ln Z)}{\partial \beta} \implies C_v = N k_B \beta^2 \frac{\partial^2(\ln Z)}{\partial \beta^2}$$

THÉORÈME DE FLUCTUATION-DISSIPATION:  $C_v = \frac{1}{k_B T^2} (\sigma_{E_{\text{tot}}})^2$

Démonstration (non exigible):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\ln Z)}{\partial\beta} = -\bar{e} = \sum_i -E_i \cdot g_i \cdot \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} &\Rightarrow \frac{\partial^2(\ln Z)}{\partial\beta^2} = \sum_i \left[ E_i^2 \cdot g_i \cdot \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} + E_i \cdot g_i \frac{e^{-\beta E_i}}{Z^2} \frac{\partial Z}{\partial\beta} \right] \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2(\ln Z)}{\partial\beta^2} = \left[ \sum_i E_i^2 \cdot p_i \right] + \left[ \sum_i E_i \cdot g_i \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} \right] \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial\beta} = \bar{e}^2 + \bar{e}(-\bar{e}) = \bar{e}^2 - \bar{e}^2 = (\sigma_e)^2 \\ &\Rightarrow C_v = Nk_B\beta^2 \frac{\partial^2(\ln Z)}{\partial\beta^2} = k_B\beta^2 N(\sigma_e)^2 = \frac{1}{k_B T^2} (\sigma_{E_{\text{tot}}})^2 \end{aligned}$$

SYSTÈME À 2 NIVEAUX NON DÉGÉNÉRÉS D'ÉNERGIES  $\pm\varepsilon$ : Posons  $\beta = \frac{1}{k_B T}$

Exemple: Paramagnétisme de Brillouin: dans un réseau cristallin de Li ou Al, plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ , les énergies potentielles des atomes (1  $e^-$  de valence) ne prennent que 2 valeurs d'énergie potentielle d'interaction avec  $\vec{B}$ :  $e_{\text{pot}} = -\vec{m} \cdot \vec{B} = \pm mB = \pm\varepsilon$

Calcul de Z:  $p_h + p_b = \frac{1}{Z}(e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}) = \frac{2\text{ch}(\beta\varepsilon)}{Z} \Rightarrow Z = 2\text{ch}(\beta\varepsilon)$

Énergie moyenne d'une particule:  $\bar{e} = \sum_i E_i \cdot p_i$  ou  $\bar{e} = -\frac{\partial(\ln Z)}{\partial\beta} \Rightarrow \bar{e} = -\varepsilon\text{th}(\beta\varepsilon)$

Énergie moyenne de  $N$  particules identiques indépendantes:  $\bar{E}_{\text{tot}} = N\bar{e}$

Aimantation moyenne (Brillouin):  $\bar{M}_z = -\frac{\bar{E}_{\text{tot}}}{B} = N \cdot m \cdot \text{th}(\beta\varepsilon) \xrightarrow[\beta\varepsilon \ll 1]{\varepsilon \ll k_B T} \bar{M}_z \approx Nm\beta\varepsilon = \left(\frac{Nm^2}{k_B T}\right) B$

Susceptibilité magnétique:  $\chi_{\text{magn}} = \frac{Nm^2}{kT}$

Capacité thermique de  $N$  particules identiques indépendantes:

$$C_v = N \frac{\partial\beta}{\partial T} \frac{\partial\bar{e}}{\partial\beta} \text{ ou } C_v = Nk_B\beta^2 \frac{\partial^2(\ln Z)}{\partial\beta^2} \Rightarrow C_v = \frac{Nk_B(\beta\varepsilon)^2}{\text{ch}^2(\beta\varepsilon)}$$

THÉORÈME D'ÉQUIPARTITION DE L'ÉNERGIE:

Dans un système en équilibre thermique à la température  $T$ , l'énergie moyenne par particule vaut  $\frac{1}{2}k_B T$  par degré de liberté indépendant quadratique.

Démonstration: Soit  $e = \frac{a\alpha^2}{2} + e'$  l'énergie d'une particule, où le degré de liberté  $\alpha \in \mathbb{R}$  a été singularisé

$$dp = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{a\alpha^2}{2k_B T}\right) d\alpha = \frac{1}{Z} e^{-(\xi\alpha)^2} d\alpha \text{ avec } g_\alpha = 1 \text{ et } \xi^2 = \frac{a}{2k_B T}$$

$$1 = \int dp = \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi\alpha)^2} d\alpha = \frac{1}{Z\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\xi\alpha)^2} (\xi d\alpha) = \frac{1}{Z\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{Z\xi} \Rightarrow Z = \frac{\sqrt{\pi}}{\xi}$$

$$Z\bar{\alpha^2} = \int Z\alpha^2 dp = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2 e^{-(\xi\alpha)^2} d\alpha = \frac{1}{\xi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi\alpha)^2 e^{-(\xi\alpha)^2} (\xi d\alpha) = \frac{1}{\xi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\xi^3}$$

$$\frac{a}{2}\bar{\alpha^2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{Z} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\xi^3} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\xi^3} = \frac{a}{4} \frac{1}{\xi^2} = \frac{a}{4} \frac{2k_B T}{a} = \frac{1}{2}k_B T$$

CONSÉQUENCE POUR  $N$  PARTICULES IDENTIQUES INDÉPENDANTES:

$$\boxed{\bar{E}_{\text{tot}} = N\bar{e} = N \frac{k_B T}{2} + \bar{e}'} \xrightarrow{N=N_A} \boxed{U_m = \frac{RT}{2} + U'_m} \implies \boxed{C_{v,m} = \frac{R}{2} + \frac{dU'_m}{dT}}$$

$C_{v,m}$  DES GAZ PARFAITS CLASSIQUES:

Monoatomiques:  $\boxed{e = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} \implies \boxed{\bar{e} = \frac{3}{2}k_B T} \implies \boxed{u = \sqrt{\bar{e}^2} = \sqrt{\frac{2\bar{e}}{m}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}}$

$$\boxed{U_m = \frac{3}{2}RT} \quad \boxed{C_{v,m} = \frac{3}{2}R}$$

Diatomiques:  $\boxed{e = \frac{m}{2}v^2 + e_{\text{rotation}} + e_{\text{vibration}}} \quad \boxed{e_{\text{rotation}} = \frac{J}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)}$  (autour de 2 axes  $\perp$  molécule)

$$\boxed{\bar{e} = \frac{5}{2}k_B T + \bar{e}_{\text{vibration}}} \quad \boxed{U_m = \frac{5}{2}RT + N_A \cdot \bar{e}_{\text{vibration}}} \quad \boxed{C_{v,m} = \frac{5}{2}R + C_{v,\text{vibration}}}$$

$$\boxed{C_{v,m} = 3R + C_{v,\text{vibration}}}$$

EFFETS DE LA QUANTIFICATION: Notons  $\Delta$  l'écart entre deux niveaux d'énergie (toutes les énergies microscopiques sont en fait quantifiées)

$$\boxed{kT > \Delta \text{ et le système comporte un nombre très grand de particules}} \implies \boxed{\text{le caractère discret peut être ignoré}}$$

$$\boxed{kT \approx \Delta \text{ ou } kT < \Delta} \implies \boxed{\text{le théorème d'équipartition ne s'applique pas}}$$

LOI EMPIRIQUE DE DULONG ET PETIT POUR LES SOLIDES:

$$\boxed{C_{v,m} = 3R = 25JK^{-1}\text{mol}^{-1}} \text{ indépendamment de la nature du solide}$$

Justification: Chaque atome d'un solide est assez bien modélisé par l'expression

$$\boxed{e = \left(\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}k_xx^2\right) + \left(\frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}k_yy^2\right) + \left(\frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}k_zz^2\right)} \quad \text{3 OSCILLATEURS HARMONIQUES}$$

MODÈLE D'EINSTEIN POUR LES SOLIDES:  $3N_A$  oscillateurs d'énergie de la forme  $\boxed{E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\nu, n \in \mathbb{N}}$

$$\boxed{\beta = \frac{1}{k_B T}} \quad \boxed{u = \frac{\beta h\nu}{2}} \implies \boxed{p_n = \frac{1}{Z}e^{-u(2n+1)}} \quad \boxed{Z = e^{-u} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2un} = \frac{e^{-u}}{1 - e^{-2u}} = \frac{1}{e^{-u} - e^{-u}} = \frac{1}{2\text{sh}(u)}}$$

$$\boxed{C_{v,m} = 3N_A k_B \beta^2 \frac{\partial^2(\ln Z)}{\partial \beta^2} = 3Ru^2 \frac{\partial^2(\ln Z)}{\partial u^2} = 3Ru^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left[ -\ln(2) - \ln(\text{sh}(u)) \right] = 3Ru^2 \frac{\partial}{\partial u} \left[ -\frac{\text{ch}(u)}{\text{sh}(u)} \right] = \frac{3Ru^2}{\text{sh}^2(u)}}$$

INTÉGRALE GAUSSIENNE:  $\boxed{\int_0^{+\infty} w^n e^{-w^2} dw = I_n = \frac{n-1}{2} I_{n-2}}$   $\boxed{I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$   $\boxed{I_1 = \frac{1}{2}}$

DENSITÉ DE PROBABILITÉ DE LA LOI NORMALE DE MOYENNE  $\mu$  ET DE VARIANCE  $\sigma^2$  (COMPLÉMENT):

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \text{ avec } \mu \text{ la moyenne et } \sigma \text{ l'écart type}}$$

DISTRIBUTION DES VITESSES D'ÉQUILIBRE THERMIQUE DE MAXWELL-BOLTZMANN (COMPLÉMENT):

$$dp_i = \frac{\xi}{\sqrt{\pi}} e^{-(\xi v_i)^2} dv_i \quad \text{avec } i \in \{x, y, z\} \text{ et } \xi^2 = \frac{m}{2k_B T}$$

$$\boxed{\text{indépendance} \implies \mathbb{P}(\vec{v} \in [\vec{v} + d\vec{v}]) = d^3 p = dp_x dp_y dp_z = \frac{\xi^3}{\pi \sqrt{\pi}} e^{-(\xi v)^2} dv_x dv_y dv_z}$$

LOI DE PROBABILITÉ DU MODULE (LOI DE RAYLEIGH) (COMPLÉMENT):

$$dv_x dv_y dv_z = d^3 v = dv_r dv_\theta dv_\varphi = v^2 \sin \theta dv d\theta d\varphi \implies d^3 p = \frac{\xi^3}{\pi \sqrt{\pi}} e^{-(\xi v)^2} v^2 \sin \theta dv d\theta d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{d\theta} \rightarrow dp = \frac{4}{\sqrt{\pi}} (\xi v)^2 e^{-(\xi v)^2} (\xi dv) \underset{w=\xi v}{=} K w^2 e^{-w^2} dw \quad \text{avec } K = \frac{4}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{I_2}$$

$$\text{Vitesse la plus probable: } f(w) = w^2 e^{-w^2} \implies f'(w) = 2w(1-w^2)e^{-w^2} \implies v_{\text{probable}} = \frac{w_{\max}}{\xi} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

$$\text{Vitesse moyenne: } \langle v \rangle = \int v dp = \int_0^{+\infty} \frac{w}{\xi} K w^2 e^{-w^2} dw = \frac{K}{\xi} I_3 = \frac{K}{\xi} \cdot \frac{3-1}{2} I_1 = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

Carré de la vitesse quadratique moyenne:

$$\langle v^2 \rangle = \int v^2 dp = \int_0^{+\infty} \left( \frac{w}{\xi} \right)^2 K w^2 e^{-w^2} dw = \frac{K}{\xi^2} I_4 = \frac{1}{\xi^2} \frac{I_4}{I_2} = \frac{2k_B T}{m} \cdot \frac{4-1}{2} = \frac{3k_B T}{m} \implies u = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

## 42 Compléments: Calculs d'incertitudes

CALCUL D'INCERTITUDES ABSOLUES: Soit  $f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  avec les  $x_i$  indépendants

$$\text{La différentielle exacte: } df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

$$\implies |df| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| |dx_i| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right|$$

$$\text{Incertitude absolue: } \Delta f = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \Delta x_n$$

$$\text{CALCUL D'INCERTITUDES RELATIVES: } f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} = x_1^{\alpha_1} \times x_2^{\alpha_2} \times \dots \times x_n^{\alpha_n}$$

$$\text{La différentielle logarithmique: } \frac{df}{f} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{dx_i}{x_i} = \alpha_1 \frac{dx_1}{x_1} + \alpha_2 \frac{dx_2}{x_2} + \dots + \alpha_n \frac{dx_n}{x_n}$$

$$\text{Incertitude relative: } \frac{\Delta f}{f} = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \frac{|\Delta x_i|}{|x_i|} = |\alpha_1| \frac{|\Delta x_1|}{|x_1|} + |\alpha_2| \frac{|\Delta x_2|}{|x_2|} + \dots + |\alpha_n| \frac{|\Delta x_n|}{|x_n|}$$

FORMULE DE PROPAGATION DES INCERTITUDES:  $f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  avec les  $x_i$  indépendants

$$(\Delta f)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 (\Delta x_i)^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 (\Delta x_1)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 (\Delta x_2)^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 (\Delta x_n)^2$$

## 43 Compléments: Rayonnement d'équilibre, corps noir

LOI DE PLANCK:

Densité spectrale en fréquence: 
$$u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} \langle E^2 \rangle + \frac{1}{2\mu_0} \langle B^2 \rangle = \int_0^{+\infty} u_\nu d\nu$$

$$du = u_\nu d\nu = u_\lambda |d\lambda| = u_\sigma d\sigma \text{ avec } d\lambda = -c \frac{d\nu}{\nu^2} \text{ et } d\sigma = \frac{d\nu}{c} \Rightarrow u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}$$

Cas limite:  $\lambda \ll \frac{hc}{kT} \Rightarrow u_\lambda \approx \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right)$      $\lambda \gg \frac{hc}{kT} \Rightarrow u_\lambda \approx \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$

LOI DU DÉPLACEMENT DE WIEN:  $\lambda_m \cdot T = Cte = 2898 \mu m \cdot K$  avec  $u_\lambda$  maximale pour  $\lambda_m$

Démonstration:  $x = \frac{hc}{\lambda kT}$  et  $f(x) = \frac{x^5}{e^x - 1} \Rightarrow dx = -\frac{hc}{kT\lambda^2} d\lambda$  (pas d'extremum supplémentaire)

ÉTENDUE SPECTRALE:  $\int_{\frac{\lambda_m}{2}}^{8\lambda_m} u_\lambda d\lambda = 98\%u$

DENSITÉ DE FLUX SPECTRAL\*:  $\varphi_\nu = \frac{c}{4} u_\nu$      $\varphi_\lambda = \frac{c}{4} u_\lambda$      $\varphi_\sigma = \frac{c}{4} u_\sigma$

FLUX INCIDENT SUR UNE PAROI:  $\phi = S \int_0^{+\infty} \varphi_\nu d\nu$

CORPS NOIR (ABSORBEUR INTÉGRAL):

Émittance spectrale:  $M_\lambda = \frac{d\phi}{dS d\lambda} = \varphi_\lambda$

LOI DE STEFAN-BOLTZMANN:

$$M = \frac{d\phi_{\text{rayonné}}}{dS} = \int_0^{+\infty} M_\lambda d\lambda = \sigma T^4 \text{ avec } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4} \text{ la constante de Stefan-Boltzmann}$$

## 44 Compléments

EFFET DOPPLER-FIZEAU GALILÉEN:  $f_{\text{rec}} = \frac{c - v_{\text{rec}}}{c - v_{\text{em}}} f_{\text{em}}$

FACTEUR DE LORENTZ:  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

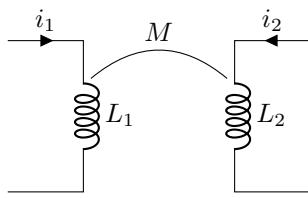
THÉORÈME DE NYQUIST-SHANON:

$$f_{\text{max}} \text{ la fréquence maximale du spectre d'un signal} \Rightarrow f_{\text{échantillonage}} \geq 2f_{\text{max}}$$

SENSIBILITÉ D'UN APPAREIL DE MESURE:  $\mathcal{S} = \frac{dI}{dG}$

avec  $I$  l'indication donnée par l'essai (valeur affichée par exemple) et  $G$  la quantité grandeur à mesurer

INDUCTANCE MUTUELLE:

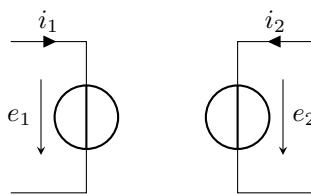


$i_1$  et  $i_2$  induit deux **générateurs** de tensions de f.é.m.  $e_1$  et  $e_2$ .

Les flux sont  $\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$  et  $\phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$

D'après la loi de Faraday, on a  $e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$  et  $e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$

Il suffit d'orienter  $e_1$  et  $e_2$  dans le même sens que les courants pour se placer en **convention générateur**



ÉQUATIONS DE LAGRANGE D'UN SYSTÈME CONSERVATIF:

Le lagrangien:

En mécanique newtonienne, le lagrangien d'un particule chargée qui n'est pas en interaction magnétique est:

$$\mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_p \text{ avec } \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(\{q_i\}, t) \text{ et } q_i \text{ les paramètres de position}$$

Le moment conjugué:  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$

Équations de Lagrange:  $\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$  ou bien  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$