微分方程笔记

5eqn

2023年2月16日

1 可分离变量的微分方程

一阶微分方程通常可以分离变量变成

$$g(y) dy = f(x) dx.$$

例如对

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy,$$

可以变形为

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\mathrm{d}x,$$

解得

$$ln |y| = x^2 + C_1.$$

2 齐次方程

对于齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),\,$$

存在一种巧妙的换元方法把 $\frac{dy}{dx}$ 拆开, 即

$$y = ux$$
.

换元后, 方程变形为

$$u + x \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi\left(u\right),\,$$

便可以按照可分离变量的微分方程求解.

同时, 可以通过对 x 和 y 线性偏移, 例如令 u=x+1, 来实现齐次化. 例如对

$$(2x + y - 4) dx + (x + y - 1) dy = 0,$$

令

$$\begin{cases} x = X + h, \\ y = Y + k, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} h = 3, \\ k = -2, \end{cases}$$

因此原方程变为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = -\frac{2 + \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}},$$

$$X \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X} = -\frac{2 + u}{1 + u} - u,$$

$$-\frac{u + 1}{u^2 + 2u + 2} \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}X}{X},$$

$$2x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 2y = C$$

3 一阶线性微分方程

3.1 原本线性

对于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x),$$

Q(x)=0 的解 $y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 告诉我们若将 C 视为函数,则右侧部分能消掉 P(x)y 项.为了在通用的情况下也消除掉这一项,不妨作换元

$$y = ue^{-\int P(x)\mathrm{d}x},$$

那么首先 Q(x) = 0 时 u = C, 并且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - uP(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x},$$

代入原微分方程, 会发现 $uP(x)e^{-\int P(x)dx}$ 真的被消掉了, 因此

$$u'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x),$$

最终

$$\begin{split} u &= \int Q\left(x\right)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C,\\ y &= Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q\left(x\right)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x. \end{split}$$

为了方便记忆,可以考虑着重记忆 y 到 u 的换元方式 (这是为了消掉 P(x)y 项),以及换元后乘积求导只有 u' 项被保留的事实 (另一半用来消掉 P(x)y 项),就能较快推出最后的结果.

例如对

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}},$$

那么关键步骤为令

$$y = u\left(x+1\right)^2,$$

以及代入消除后

$$u' = \sqrt{x+1},$$

因此

$$y = (x+1)^2 \left(\frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + C\right).$$

3.2 伯努利方程

方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$$

是伯努利方程, 若要转化成线性方程, 考虑将右侧形式统一化, 变为

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y^{1-n} = Q(x),$$

再令 k = 1 - n 即可.

4 可降阶的高阶微分方程

4.1 单个高阶导

对于

$$y^{(n)} = f(x),$$

只要对右侧不断积分即可.

4.2 两项阶数相邻

对于

$$y'' = f\left(x, y'\right),\,$$

按照正常的思路解出 y' 后再算 y 即可.

5 高阶线性微分方程

对于线性微分方程,可以类比线性代数,得到齐次方程通解具备线性,非齐次方程的特解和 齐次方程解空间基底均正交,即设齐次方程解空间基底为 y_1, y_2 ,非齐次方程特解为 y^* ,那么

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^*$$
.

在求出齐次方程解空间基底后,依然可以采用常数变易法,例如对

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

已知齐次方程解空间基底为 $y_1 = e^x$, 那么令 $y = e^x u, y' = e^x (u' + u), y'' = e^x (u'' + 2u' + u)$, 由于保证消掉 y 的低阶导,我们得到

$$e^x u'' = \frac{1}{x} e^x,$$

因此 $u = C_1 + C_2 x + x \ln |x|$.

6 常系数齐次线性微分方程

对于

$$y'' + py' + qy = 0,$$

不妨令 $y = e^{rx}$, 那么

$$\left(r^2 + pr + q\right)e^{rx} = 0,$$

即

$$r^2 + pr + q = 0.$$

对于能解出两个根的情况,直接代入即可,其中如果是复数要运用公式

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

变形得到最终答案.

对于重根, 使用常数变易法设 $y = e^{rx}u(x)$, 那么

$$(u'' + 2ru' + r^2u) + p(u' + ru) + qu = 0,$$

由于重根, 化简得 u'' = 0, 而 u 不为常数, 则令 u = x 即可. 注意这里采用 u = x + 1 也可以, 而且可能更像 (但不是) 指数函数退化.

例如对于有阻尼振动, 我们有

$$x'' + 2nx' + k^2x = 0$$

特征方程根为

$$-n \pm \sqrt{n^2 - k^2},$$

那么在小阻尼 n < k 时, 令 $\omega = \sqrt{k^2 - n^2}$, 那么

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + nx_0}{\omega} \sin \omega t \right),$$

今

$$x_0 = A \sin \varphi$$
, $\frac{v_0 + nx_0}{\omega} = A \cos \varphi (0 \le \varphi \le 2\pi)$,

那么

$$x = Ae^{-nt}\sin\left(\omega t + \varphi\right),\,$$

其中

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x_0 + nx_0)^2}{\omega^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{x_0 \omega}{v_0 + nx_0}.$$

在临界阻尼 n = k 时, 特征方程重根, 因此结果为

$$x = e^{-nt} (x_0 + (v_0 + nx_0) t).$$

在大阻尼 n > k 时, 特征方程有两负根, 即

$$x = C_1 e^{-(n-\sqrt{n^2-k^2})t} + C_2 e^{-(n+\sqrt{n^2-k^2})t}.$$

对于更多元的情况,可能出现更多重根,这时堆叠x的幂即可.

7 常系数非齐次线性微分方程

正如前面所提到,采用常数变易法(但是教材上变成了待定系数法)即可.

8 欧拉方程

对于

$$x^{n}y^{(n)} + p_{1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}xy' + p_{n}y = f(x),$$

想办法令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, 即 $t = \ln x$ 即可.

注意到在此之后

$$x^{k}y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y.$$

9 常系数线性微分方程组

通过消元变成前面学过的即可.