

同济高数第五章笔记

5eqn

2023 年 2 月 2 日

1 定义

定积分按照求面积极限定义。

2 逼近

有几种逼近方法：

2.1 矩形法

不做线性插值。

2.2 梯形法

有线性插值，体现为削弱两头。

2.3 辛普森法

也叫抛物线法，每两格做一次抛物线插值。不仅削弱两头，而且奇数（抛物线中间）权值更高。

3 性质

3.1 线性

包括单位元、可常量乘和可加性。

3.2 有界判定

被积函数有界，就可以构造出定积分结果的上界和下界。只要能框住被积函数，积分结果也可以框住。

3.3 中值定理

用有界判定放缩之后，加上连续函数介值定理即可。

4 积分上限函数

就是从一个原函数 f 利用积分构造出一个求导后等于原函数的函数的方法。

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

要对 $\int_a^b f(x) dx$ 求值，使用牛顿-莱布尼兹公式找到原函数的 $C = F(a)$ 即可。

5 求值

注意按照实际变量的值域改积分符号上的值域即可。

6 反常积分

把反常的地方通过极限变成正常积分即可。

6.1 定义域无穷

对无界方向的定义域取极限。

6.2 值域无界

对瑕点取单向极限，本来要积到瑕点，现在只需要积到瑕点附近即可。注意可能要拆成多个积分段。

6.3 审敛

直接和反比例函数 $\frac{N}{x}$ 对比即可，注意 N 可以任意小。注意如果要判断收敛，即使等于也不够，因为积分出来是对数数量级，所以要使用极限思想找到 $p > 1$ 的幂次，使得 $\frac{N}{x^p}$ 满足要求。对无界函数，位移一下反比例函数即可。