不定积分笔记

5eqn

2023 年 2 月 18 日

定义 1 不定积分是求导的逆运算.

定理 1 不定积分满足线性.

1 不太有迹可循的积分路径

1.1 分式

根据 $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ 易得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

根据 $(\sin x)' = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ 易得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

运用拆分思想得到

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

换元使得 $x = a\sin t$, 可以求得

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - xs^2} + C.$$

换元使得 $x = a\tan t$ 或 $x = a\sec t$, 可以求得

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \int \sec t \mathrm{d}t \\
&= \ln|\sec t + \tan t| + C \\
&= \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C_1, \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,(x>a) &= \int \sec t \mathrm{d}t \\
&= \ln(\sec t + \tan t) + C \\
&= \ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) + C_1, \\
\int \frac{x^3}{\left(x^2-2x+2\right)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{(\tan t+1)^3}{\sec^4 t}\cdot \sec^2 t \mathrm{d}t \\
&= \int \left(\sin^3 t\cos^{-1} t + 3\sin^2 t + 3\sin t\cos t + \cos^2 t\right)\mathrm{d}t \\
&= -\ln\cos t - \cos^2 t + 2t - \sin t\cos t + C.
\end{aligned}$$

将复杂有理分式拆成多项式, $\frac{P_1(x)}{(x-a)^k}$ 和 $\frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^l}$, 即可采用上面的方法求出.

对于有根式的情况, 进行一个特别小以至于能去掉所有根式的换元即可, 例如题目中同时含有 $\sqrt[3]{x}$ 和 $\sqrt{x}$, 那么进行换元 $x = u^6$ 即可.

1.2 三角

根据三角函数求导规则, 易得

$$\begin{aligned}
\int \cos x\mathrm{d}x &= \sin x + C, \\
\int \sin x\mathrm{d}x &= -\cos x + C, \\
\int \sec^2 x\mathrm{d}x &= \tan x + C, \\
\int \csc^2 x\mathrm{d}x &= -\cot x + C, \\
\int \sec x\tan x\mathrm{d}x &= \sec x + C, \\
\int \csc x\cot x\mathrm{d}x &= -\csc x + C.
\end{aligned}$$

换元掉 $\sin x$ 或 $\cos x$, 能够求出 $\int \sin^{2k+1} x\cos^n x$ 或 $\int \sin^n x\cos^{2k+1} x$, 以及

$$\begin{aligned}
\int \tan x\mathrm{d}x &= -\ln|\cos x| + C, \\
\int \cot x\mathrm{d}x &= \ln|\sin x| + C.
\end{aligned}$$

对于 $\sin^{2k} x\cos^{2t} x$, 可以降幂后通过前面的方法求出.

换元掉 $\tan x$ 或 $\sec x$, 能够求出 $\int \tan^n x \sec^{2k} x$ 或 $\int \tan^{2k-1} x \sec^n x$, 以及

$$\begin{aligned}\int \csc x \mathrm{d}x &= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \\ &= \ln|\csc x - \cot x| + C, \\ \int \sec x \mathrm{d}x &= \ln|\sec x + \tan x| + C.\end{aligned}$$

对于复杂的三角函数组合, 可以利用

$$\begin{cases}\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \\ \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\end{cases}$$

进行换元 $u = \tan\frac{x}{2}$, 即可转化成有理分式的积分.

1.3 混合

分部积分具备积一边导一边的含义, 即:

$$\int uv\mathrm{d}x = u\int v\mathrm{d}x - \iint v\mathrm{d}x\mathrm{d}u.$$

因此, 只要有积分不影响整体性质的指数型变量, 另外一边求导后能变得更简单, 都可以不断导其它部分, 例如:

$$\begin{aligned}\int x\cos x\mathrm{d}x &= x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x \\ &= x\sin x + \cos x + C, \\ \int xe^x\mathrm{d}x &= xe^x - \int e^x\mathrm{d}x \\ &= e^x(x-1) + C.\end{aligned}$$

只要有求导后能明显让整体变得简单的变量, 另外一边积分后也不会让整体变得复杂, 就可以开导, 例如:

$$\begin{aligned}\int x\ln x\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\mathrm{d}(\ln x) \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C, \\ \int \arccos x\mathrm{d}x &= x\arccos x - \int x\mathrm{d}(\arccos x) \\ &= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

如果两边求导积分后可能同构, 可以利用这个性质列出方程后解出答案, 例如:

$$\begin{aligned}\int e^x\sin x\mathrm{d}x &= e^x\sin x - \int e^x\cos x\mathrm{d}x \\ &= e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\mathrm{d}x, \\ \int \sec^3 x\mathrm{d}x &= \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 x\mathrm{d}x \\ &= \sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

解得

$$\int e^x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x - \cos x\right) + C,$$

$$\int \sec^3 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(\sec x \tan x + \ln \left|\sec x + \tan x\right|\right) + C.$$