高等社线代第五章笔记

5eqn

2023 年 2 月 4 日

1 特征向量和特征值

找到一个一维的 Invariant Subspace, 子空间中的放缩倍率是特征值 λ, 空间中任意一个非零向量都是特征向量.

2 特征方程

构造一个方程, 使得其每个解都是一个特征值:

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

变形后可以得到

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A).$$

3 相似对角化

定义相似关系为

$$P^{-1}AP = B \iff A \sim B.$$

那么如果 A 是特征向量已知的矩阵, B 是对角矩阵, P 将基向量映射到 A 的特征向量, 由于

$$AP = PB.$$

容易看出可以通过这种方式, 由 A 构造出相似对角矩阵 B.

注意, A 进行 Polar Decomposition 之后得到的 Isometry 不能含有旋转元素, 这可以通过对矩阵减掉重根特征值之后算 Rank 来检验. 如果含有旋转元素, 会至少多出两个 Rank. 例如, 对于矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

容易发现 1 是一个特征值, 假设 1 有重根, 将矩阵减去单位阵之后, 假如 A 可以相似对角化, 应当得到 Rank 为 0 的矩阵. 实际情况是得到了 Rank 为 2 的矩阵, 因此 A 不能相似对角化.

4 谱定理

对于复正交矩阵或实对称矩阵, 存在由特征向量组成的规范正交基, 因此不同特征值对应的特征向量也相互平行. 对于复数的情况, 我们首先需要证明正交矩阵保持模:

$$\langle T^T T v, v\rangle = \langle T T^T v, v\rangle \implies |Tv| = |T^T v|.$$

容易知道 T 可以变成上三角矩阵, 并且 T 如果是上三角矩阵, 那么它只能是对角阵.

对于实对称矩阵, 容易发现不可分解的 $T^2 + bT + c$ 可逆, 但只通过不断应用可分解或不可分解的二次式, 在其可以分解为 $v, Tv, T^2v, \dots, T^n v$ 的形式后, 最终的结果一定不可逆. 因此, 不可逆的二次式一定可分解成这种形式:

$$(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I).$$

这样 T 必定有特征值.

同时, 容易发现 T 去掉不变子空间之后, 依然能保持对称性, 因此可以通过归纳推出需要的结论.

如果只想推出不同特征值对应的特征向量正交, 考虑采用以下思路, 虽然我并不清楚这个推导路径是怎么从指数复杂度的公式变形无向图中搜索

到的:

$$\begin{aligned}
A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 &\implies \alpha_1^T A = \lambda_1 \alpha_1^T \\
&\implies \alpha_1^T A \alpha_2 = \lambda_1 \alpha_1^T \alpha_2 \\
&\implies \lambda_2 \alpha_1^T \alpha_2 = \lambda_1 \alpha_1^T \alpha_2 \\
&\implies \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0.
\end{aligned}$$