线代第六章笔记

5eqn

2023 年 2 月 10 日

1 实二次型及其标准形

1.1 二次型

定义 1 n 元函数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 每一项都是二次的时候, 便是二次型.

注意每个二次型都会代表一个二次曲面.

1.2 参数矩阵

可以看出存在平方数量级的自由参数. 具体地, 每一对数字都对应一个参数, 但是数字反转后, 例如 x_2x_4 和 x_4x_2 应该对应相等的参数. 这些参数组成矩阵 A, 将 x 视为向量, 那么 $f(X) = X^TAX$, 其中 $A^T = A$.

1.3 参数矩阵的线性变换

同理可以对参数向量进行线性变换, 注意这里是**将原有的变量视为从某些变量经过变换得到的**. 这是因为在很多时候我们倾向于将纷繁复杂的图像视为从某些简单图像变换得到的, 而不是反过来.

同时, 从这种视角看也比较容易进行运算: 令 $X = CY$, 那么

$$\begin{aligned} f(X) &= (CY)^T A (CY) \\ &= Y^T \left(C^TAC\right) Y. \end{aligned}$$

因此二次型的系数矩阵也变成了 C^TAC.

1.4 配方法

在比较容易看出的时候, 可以将二次型表示为类似于 $(x_1 + x_2)^2 - (x_2 - x_3)^2$ 的形式, 这样就等同于找到了逆向换元的方法.

1.5 合同

定义 2 如果存在可逆矩阵 C 使得 $B = C^TAC$, 那么认为 A 和 B 合同.

几何意义是, A 和 B 代表的二次型之间存在可逆线性变换.

1.6 标准形和规范形

定义 3 标准形是参数矩阵是对角矩阵的二次型.

几何意义上, 标准型对任何参数坐标轴都有对称性.

定义 4 规范形是参数矩阵是对角矩阵且每一项为 0 或 ± 1 的二次型.

可以认为, 规范形是标准形经过规范化之后的结果.

定义 5 标准形中正项项数 p 为正惯性指数, 负项项数 $r - p$ 为负惯性指数, 两项之差 $2p - r$ 为符号差.

1.7 正交变换

由于系数矩阵 A 是实对称矩阵, 存在正交变换 C 使得 $C^TAC = C^{-1}AC$ 为对角阵, 其元素为 A 的各个特征值.

这样, 可以将由二次型找标准形的问题, 映射到实对称矩阵找对角阵的问题.

2 正定二次型

定义 6 输入任何非零参数, 结果都为正的二次型是正定二次型.

换言之, 正定二次型的标准形系数全为正, 连 0 也不能包含.

容易看出, 这意味着参数矩阵特征值全部为正. 根据先前的定义, 正惯性指数一定为 n, 并且与 I 合同.

定义 7 一个矩阵右上角 $k \times k$ 的子矩阵行列式为其顺序主子式.

考虑到特征值和行列式的联系, 行列式为正限制了矩阵的负数特征值的个数必须为偶数, 因此全部顺序主子式为正能保证特征值全部为正.

定义 8 如果 $f(X) < 0$, 那么 $f(X)$ 是负定二次型. 如果 $f(X) \geq 0$, 那么 $f(X)$ 是半正定二次型. 如果 $f(X) \leq 0$, 那么 $f(X)$ 是半负定二次型.

对于负定二次型, 也有和正定二次型类似的定理.

3 曲面

3.1 柱面

方程中有一个变量缺失的一般是柱面, 例如双曲柱面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3.2 旋转面

通过 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的逆变换得到的通常是旋转面, 例如旋转抛物面

$$x^2 + y^2 = z.$$

4 空间曲线

4.1 方程

和空间直线的定义相仿, 两个曲面联立得到的是**一般式方程**, 也可以采用**参数方程**描述.

4.2 投影

理论上让被投影掉的那个变量被联立消掉就能求出, 因为投影本身就是形如 $z' = 0z$ 的变换. 也可以尝试使用立体几何手段.

5 二次曲面

考虑到二次型分为退化和不退化的情况, 即使是不退化的二次型, 根据参数维度的正负也可以分为 4 种情况, 其中两两对称, 例如令 $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ 等同于令 $y^2 + z^2 - x^2 = -1$, 因此最终需要考虑三种情况:

- 二次型退化形成的旋转抛物面

- 二次型正定或负定形成的椭球面或虚空
- 其他情况形成的旋转双曲面

5.1 抛物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2}.$$

考虑变换 $r^2 = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2}$, 那么在 y^2 系数为正的时候将会形成一个椭圆的冗余度, 否则形成一个双曲线的冗余度, 因此两种情况分别是**椭圆抛物面**和**双曲抛物面**.

也可以考虑采用将 x 和 y 坐标轴分开的角度看, 那么在每个坐标面上该二次曲面都会形成抛物线的形状.

5.2 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

这是二次型没有退化并且正定的情况. 如果负定, 那么没有任何一个点能满足要求.

5.3 双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1.$$

考虑变换 $r^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, 这可以将旋转双曲面映射到二维双曲线. 当右边为正时, $z = 0$ 的时候依然会形成一个椭圆, 因此单叶. 当右边为负时, $z = 0$ 的时候无解, 因此双叶.