TEORIA ELETROMAGNÉTICA - LISTA DE EXERCÍCIOS IV

SÉRGIO CORDEIRO

Parte 1

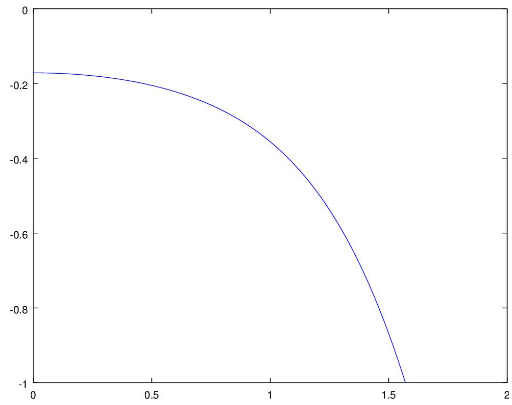
1. Para incidência interna e externa, meios 2 com perdas e sem perdas, polarizações perpendicular e paralela:
   a) Traçar o gráfico (amplitude e fase) dos coeficientes de transmissão e reflexão.
   b) Traça o gráfico da refletividade e transmissividade
   c) Apresentar os códigos
   d) Apresentar comentários detalhados

O programa de cálculo dos coeficientes e os gráficos resultantes estão listados a seguir.

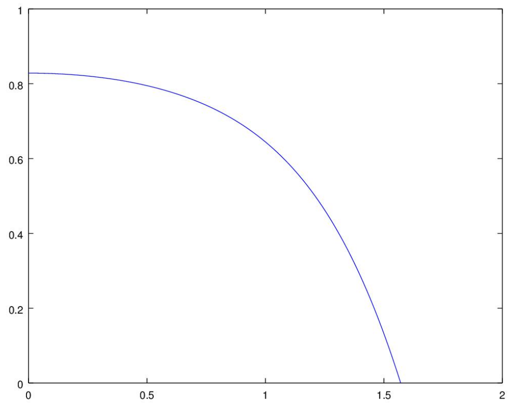
Listing 1. calcref.m

```
function [Gamma,tau]=calcref(modo, omega, thetai, er1, mur1, er2, mur2)
  % Constantes
  mu0 = 4 * pi * 1e-7;     % H/m
  ep0 = 8.854 * 1e-12;     % F/m
  % Cálculos
  mu = mu0 * [mur1 mur2];
  epsilon = ep0 * [er1 er2];
  k = omega * (mu .* epsilon).^0.5;
  eta = mu * omega ./ k;
  thetat = asin(k(1)/k(2).*sin(thetai));
  if modo == "n"
    aux = eta(2) .* cos(thetai) + eta(1) .* cos(thetat);
    Gamma = (eta(2) .* cos(thetai) - eta(1) .* cos(thetat))./aux;
  else
    aux = eta(1) .* cos(thetai) + eta(2) .* cos(thetat);
    Gamma = (eta(1) .* cos(thetai) - eta(2) .* cos(thetat))./aux;
  end
  tau = (2 * eta(2) .* cos(thetai))./aux;
end
```

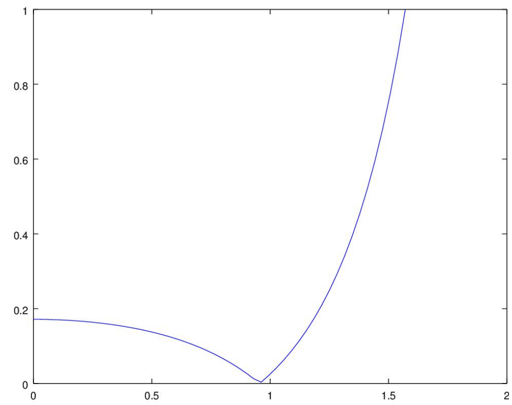
Para $\mu_1^{(r)} = \epsilon_1^{(r)} = \mu_2^{(r)} = 1$ e $\epsilon_2^{(r)} = 2$ (incidência externa) e $f = 1\ GHz$, os módulos dos coeficientes variam da seguinte maneira:



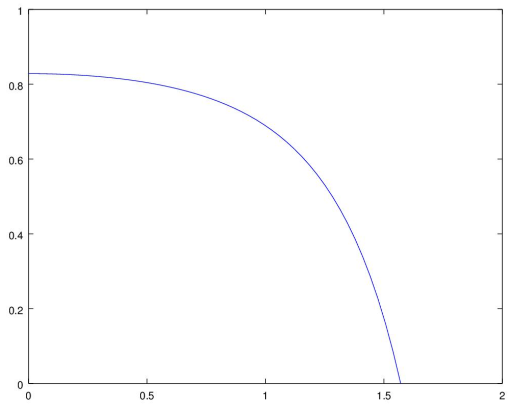
Coeficiente de reflexão $\Gamma_\perp$ em função do ângulo de incidência



Coeficiente de transmissão $\tau_\perp$ em função do ângulo de incidência

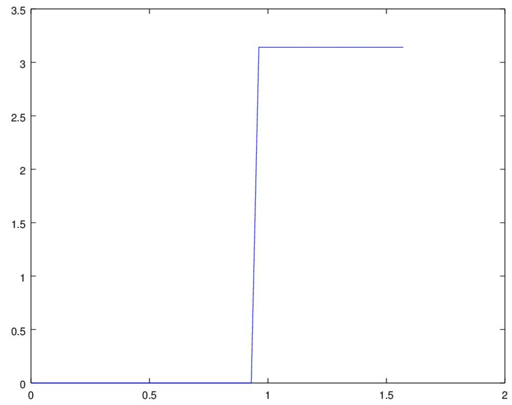


Coeficiente de reflexão $\Gamma_\parallel$ em função do ângulo de incidência



Coeficiente de transmissão $\tau_\parallel$ em função do ângulo de incidência

Os coeficientes $\Gamma_{\perp}$, $\tau_{\perp}$ e $\tau_{\parallel}$ são reais, pois foram considerados apenas meios sem perdas. Já o coeficiente $\Gamma_{\parallel}$ é real para ângulos de incidência pequenos e imaginário para ângulos grandes, como mostra a figura ao lado.

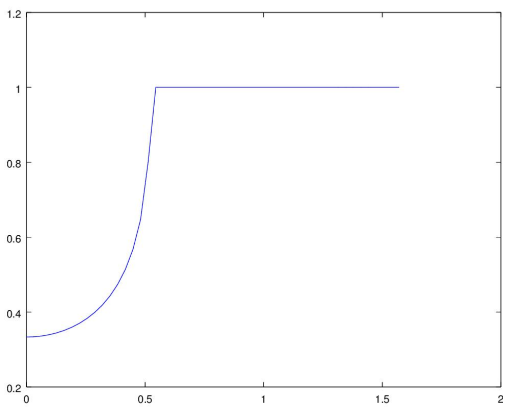


Ângulo de fase do coeficiente de transmissão $\Gamma_{\parallel}$ em função do ângulo de incidência

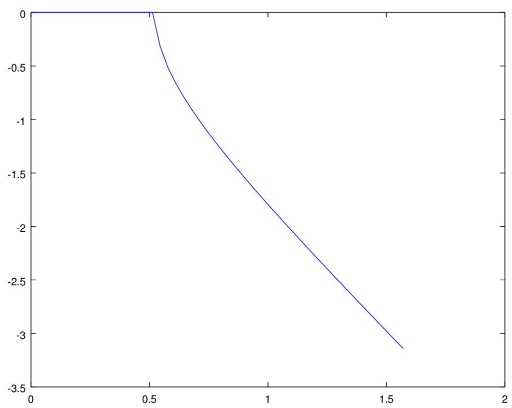
O ângulo em que ocorre essa transição é chamado o **ângulo de Brewster**.

Os coeficientes de reflexão e de transmissão tendem a baixar à medida que o ângulo de incidência se afasta da normal à superfície. Para ângulos superiores ao ângulo de Brewster, a reflexão da onda perpendicular apresenta o comportamento inverso, aumentando à medida que o ângulo cresce.

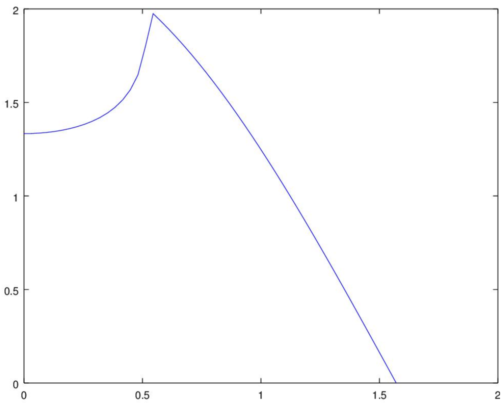
Para $\mu_2^{(r)} = \epsilon_2^{(r)} = \mu_2^{(r)} = 1$ e $\epsilon_1^{(r)} = 4$ (incidência interna) e $f = 1\ GHz$, os módulos e os ângulos de fase dos coeficientes variam da seguinte maneira:



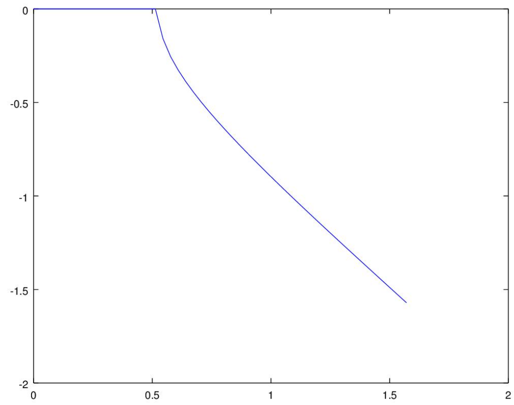
Módulo do coeficiente de reflexão $\Gamma_{\perp}$ em função do ângulo de incidência



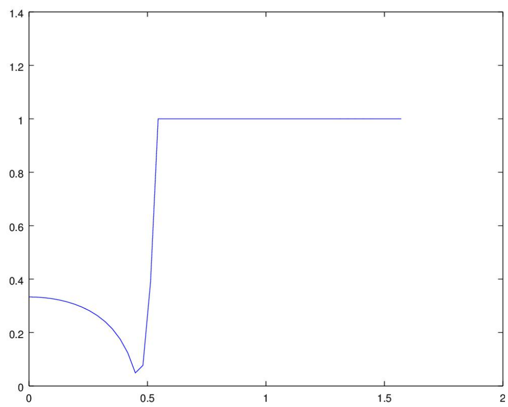
Ângulo do coeficiente de reflexão $\Gamma_{\perp}$ em função do ângulo de incidência



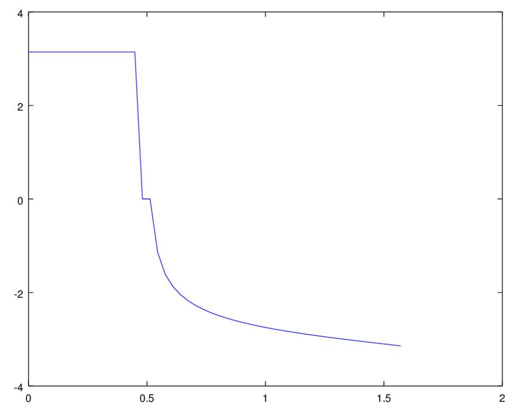
Módulo do coeficiente de transmissão $\tau_\perp$ em função do ângulo de incidência



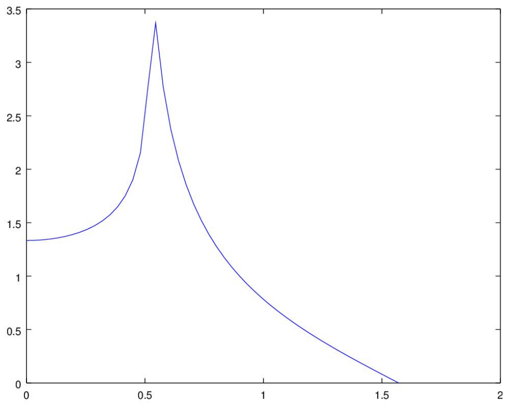
Ângulo do coeficiente de transmissão $\tau_\perp$ em função do ângulo de incidência



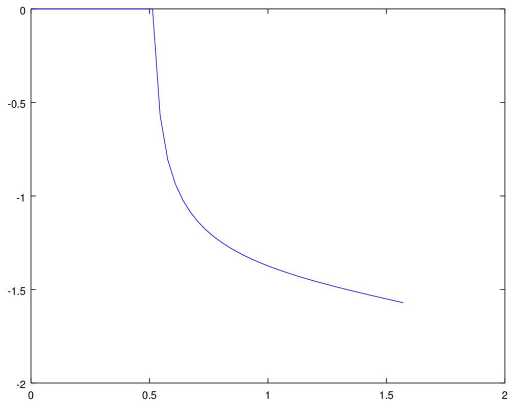
Módulo do coeficiente de reflexão $\Gamma_\parallel$ em função do ângulo de incidência



Ângulo do coeficiente de reflexão $\Gamma_\parallel$ em função do ângulo de incidência

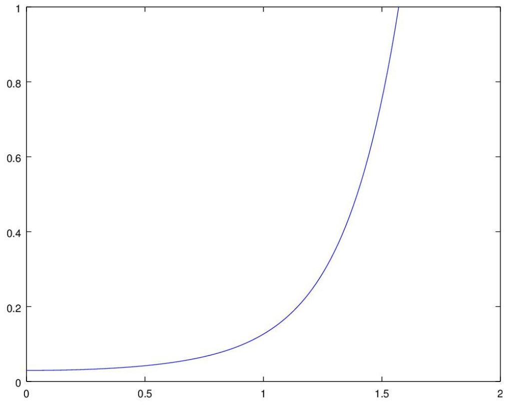


Módulo do coeficiente de transmissão $\tau_{\|}$ em função do ângulo de incidência

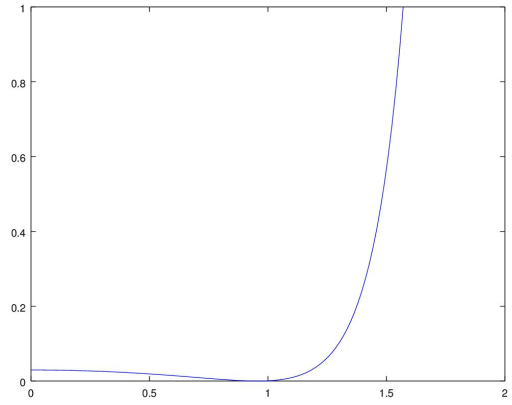


Ângulo do coeficiente de transmissão $\tau_{\|}$ em função do ângulo de incidência

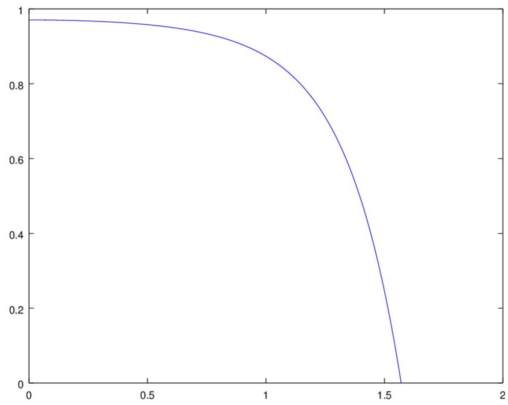
A primeira figura mostra claramente que, no caso da incidência interna, além do ângulo de Brewster existe o **ângulo crítico**, a partir do qual a reflexão é total.
Todos os coeficientes são complexos neste caso, o que implica alteração no ângulo de fase das ondas refletidas e transmitidas.
Os gráficos de refletividade e transmissividade são obtidos a partir da fórmula $R = |\Gamma|^2$ e $T = 1 - R$:



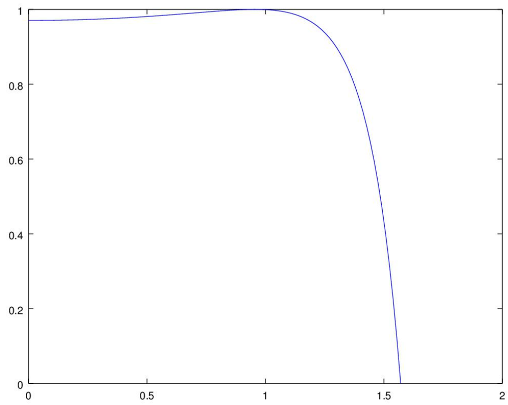
Refletividade da onda perpendicular em função do ângulo de incidência para incidência externa



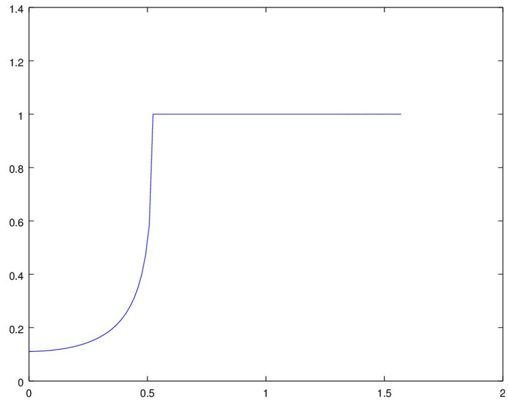
Refletividade da onda paralela em função do ângulo de incidência para incidência externa



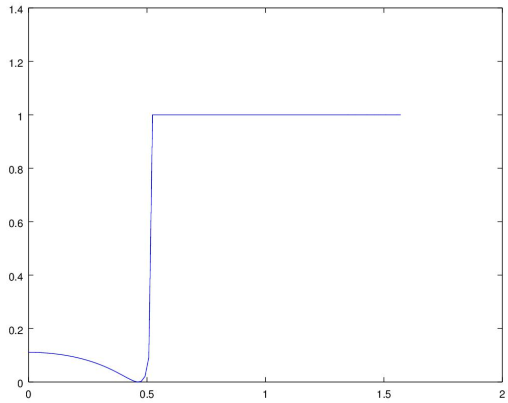
Transmissividade da onda perpendicular em função do ângulo de incidência para incidência externa



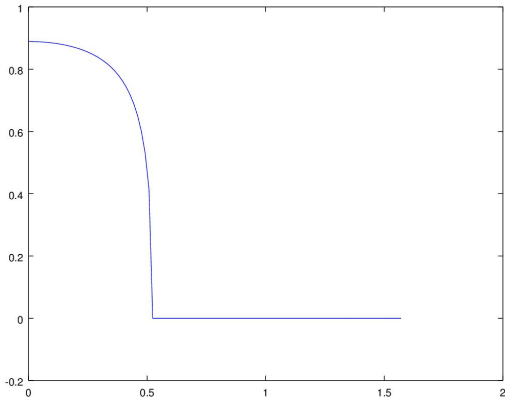
Transmissividade da onda paralela em função do ângulo de incidência para incidência externa



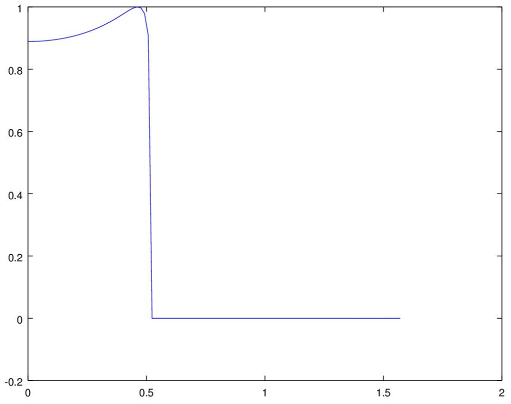
Refletividade da onda perpendicular em função do ângulo de incidência para incidência interna



Refletividade da onda paralela em função do ângulo de incidência para incidência interna



Transmissividade da onda perpendicular em função do ângulo de incidência para incidência interna



Transmissividade da onda paralela em função do ângulo de incidência para incidência interna

Parte 2

2. Resolve os problemas: 6.1 a 6.12, 6.13 a 6.17, 6.18 a 6.27 e 6.29 do pdf em anexo. Para os problemas a serem resolvidos no matlab, apresentar código, gráficos e comentários.

Equações dos problemas:

(6.10) $\nabla^2 \vec{E} = \jmath\omega\mu(\sigma + \jmath\omega\epsilon)\vec{E}$

(6.14) $\nabla^2 \vec{H} - k^2 \vec{H} = 0$

(6.29) $\vec{H} = (H_0 e^{\pm kz})\hat{a}_y$

(6.11) $\nabla^2 \vec{E} - k^2 \vec{E} = 0$

(6.15) $\vec{E}(z) = E(z)\hat{a}_x$

(6.41) $\vec{E} = (E_0 e^{\pm \jmath\beta z})\hat{a}_x$

(6.52) $\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1\right\}}$ $\qquad \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1\right\}}$

(6.54) $\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \qquad \beta \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon}$

Tabela 6.1

Material	σ **(S/m)**	$\epsilon^{(r,')}$	$\epsilon^{(r,'')}$
Cobre	5.8×10^7	1	0
Água do mar	5	72	12
Vidro	10^{-12}	10	0.010

No exercício 6.15 onde está escrito (6.25) considerar (6.52).
Para meios sem perdas o módulo do vetor de Pointing, que determina a densidade superficial de potência, é dado por:

$$P = \frac{E_0^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos\theta_\eta \approx \frac{E_0^2}{2|\eta|}$$

6.1)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \implies \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \vec{\nabla}^2 \vec{H} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{0} - \vec{\nabla}^2 \vec{H} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right)$$

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{H} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} [\mu \vec{H}] \right)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\vec{H}(r,t) = \vec{\mathscr{H}}(r) \implies \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{H}$$

$$\therefore \vec{\nabla}^2 \vec{H} + \omega^2 \epsilon \mu \vec{H} = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} - k^2 \vec{H} = \vec{0} \qquad \boxed{k^2 = -\omega^2 \epsilon \mu}$$

6.2)

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} = -\jmath\omega\mu\vec{\mathcal{H}} \implies \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}}) &= \vec{\nabla} \times \left(-\jmath\omega\mu\vec{\mathcal{H}}\right) \\
\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2\vec{E} &= -\jmath\omega\mu\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{H}} \\
\vec{0} - \vec{\nabla}^2\vec{E} &= -\jmath\omega\mu\left(\jmath\omega\epsilon\vec{\mathcal{E}}\right) \\
\vec{\nabla}^2\vec{E} &= -\omega^2\mu\epsilon\vec{\mathcal{E}} \\
&= -\omega^2\mu\left(\epsilon^{(\prime)} - \jmath\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{\mathcal{E}} \\
&= \jmath^2\omega^2\mu\epsilon^{(\prime)} + \jmath\omega\mu\sigma\vec{\mathcal{E}} \\
&= \jmath\omega\mu\left(\sigma + \jmath\omega\epsilon^{(\prime)}\right)\vec{\mathcal{E}}
\end{aligned}
$$

6.3)

a)

$$\begin{aligned} f_a &= \frac{c_a}{\lambda_a} \\ &= \frac{2,998 \times 10^8 \ m \ s^{-1}}{6.0 \ cm} \\ &= 5.0 \ GHz \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f_b &= f_a \\ &= 5.0 \ GHz \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_b}{\lambda_a} &= \frac{c_b}{c_a} \\ &= \sqrt{\frac{\mu_a \epsilon_a}{\mu_b \epsilon_b}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu_a^{(r)} \epsilon_a^{(r)}}{\mu_b^{(r)} \epsilon_b^{(r)}}} \implies \epsilon_b^{(r)} = \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_b}\right)^2 \frac{\mu_a^{(r)} \epsilon_a^{(r)}}{\mu_b^{(r)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_b^{(r)} &= \left(\frac{6.0}{1.0}\right)^2 \frac{1 \times 1}{1} \\ &= 36 \end{aligned}$$

6.4)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2\vec{H} &= \vec{\nabla}^2(\mathcal{H}(z)\hat{a}_y)\\ &= \nabla^2\ 0\ \hat{a}_x + \nabla^2\ \mathcal{H}(z)\ \hat{a}_y + \nabla^2\ 0\ \hat{a}_z\\ &= \vec{0} + \left(\frac{\partial^2\mathcal{H}(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathcal{H}(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathcal{H}(z)}{\partial z^2}\right)\hat{a}_y + \vec{0}\\ &= \left(0 + \frac{\partial^2\mathcal{H}(z)}{\partial z^2} + 0\right)\hat{a}_y\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{H} - k^2\vec{H} = \vec{0} \implies \left(\frac{\partial^2\mathcal{H}(z)}{\partial z^2}\right)\hat{a}_y = k^2\mathcal{H}(z)\hat{a}_y$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{H}(z)}{\partial z^2} = k^2\mathcal{H}(z) \implies \mathcal{H}(z) = \mathcal{H}_0 e^{\pm kz}$$

$$\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 e^{\pm kz}\hat{a}_y$$

6.5)

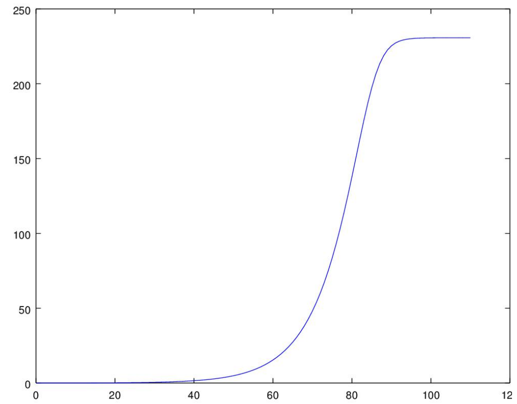
$$
\begin{aligned}
\gamma &= \omega\sqrt{\mu\left(\epsilon - \jmath\frac{\sigma}{\omega}\right)} \\
&= 2\pi f\sqrt{\mu^{(r)}\mu_0\left(\epsilon^{(r)}\epsilon_0 - \jmath\frac{\sigma}{2\pi f}\right)} \\
&= 2\pi \times 10\ MHz \times \Bigg[50 \times 4\pi \times 10^{-7}\ H\ m^{-1} \times \Bigg(2.0 \times 8,854 \times 10^{-12}\ F\ m^{-1} - \ ... \\
&\qquad -\jmath\frac{1.0 \times 10^{-5}\ S\ m^{-1}}{2\pi \times 10\ MHz}\Bigg)\Bigg]^{0.5} \\
&= (0.21 + \jmath 0.0094)\ m^{-1} \qquad \Longrightarrow \underline{\alpha = -9.4 \times 10{-}3\ m^{-1},\ \beta = 210 \times 10{-}3\ m^{-1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - \jmath\frac{\sigma}{\omega}}} \\
&= \sqrt{\frac{\mu^{(r)}\mu_0}{\epsilon^{(r)}\epsilon_0 - \jmath\frac{\sigma}{2\pi f}}} \\
&= \left[\frac{50 \times 4\pi \times 10^{-7}\ H\ m^{-1}}{2.0 \times 8,854 \times 10^{-12}\ F\ m^{-1} - \jmath\frac{1.0 \times 10^{-5}\ S\ m^{-1}}{2\pi \times 10\ MHz}}\right]^{0.5} \\
&= (1900 - \jmath 84)\ \Omega
\end{aligned}
$$

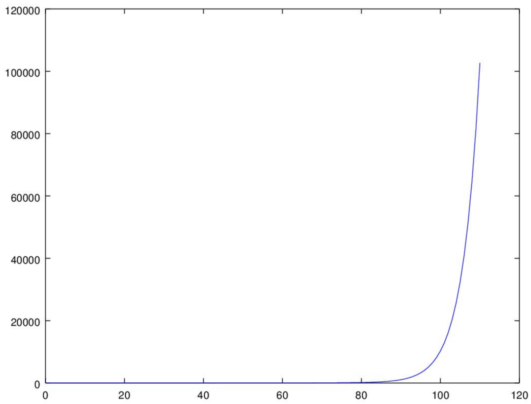
6.6) O programa e os gráficos resultantes são os seguintes (a escala do eixo de frequências é logarítmica):

LISTING 2. plotparms.m

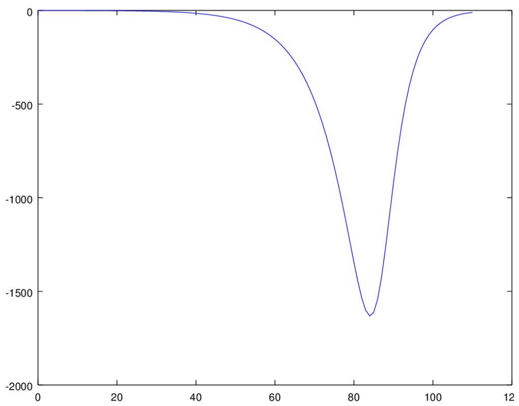
```
function plotparms()
  % Constantes
  mu = 4 * pi * 1e-7;    % H/m
  ep = 8.854 * 1e-12;    % F/m
  % Parâmetros fixos
  sigma = 0.1;         % H/m
  epr = 4.0;
  mur = 600.0;
  faixa = 0:110;       % log(1 Hz) a log(100 GHz)
  omega = 2 * pi * 10.^(faixa/10);
  k = omega .* (mur * mu * (epr * ep - j * sigma ./ omega)).^0.5;
  alpha = real(k);
  beta = imag(k);
  eta = j * mu * mur * omega ./ k;
  meta = abs(eta);
  teta = arg(eta);
  plot(faixa,alpha);
  plot(faixa,beta);
  plot(faixa,real(eta));
  plot(faixa,imag(eta));
  plot(faixa,meta);
  plot(faixa,teta);
end
```



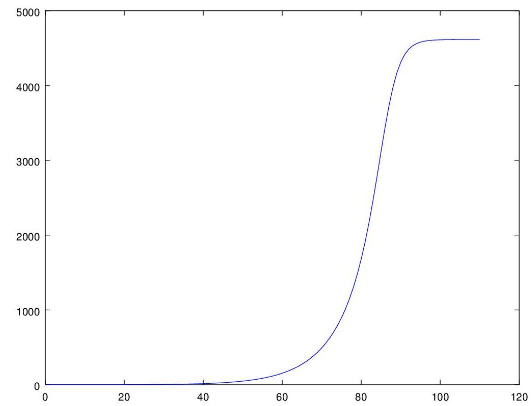
α em função da frequência



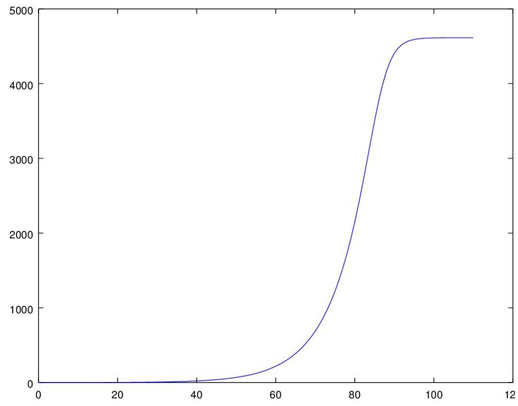
β em função da frequência



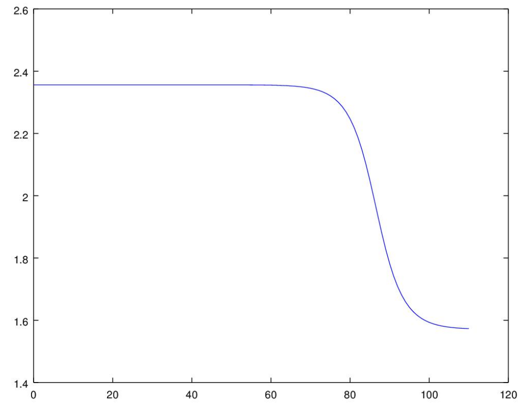
Parte real de η em função da frequência



Parte imaginária de η em função da frequência



Módulo de η em função da frequência



Ângulo de η em função da frequência

6.7)

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\hat{a}_z \qquad \begin{cases} E_0 &= 5.0\ V\ m^{-1} \\ \omega &= \pi \times 10^6\ rd\ s^{-1} \\ \vec{k} &= (3.0\hat{a}_x - 2.0\hat{a}_y)\ m^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_k &= \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \\ &= \frac{3.0\hat{a}_x - 2.0\hat{a}_y}{\sqrt{3.0^2 + 2.0^2}} \\ &= 0.60\hat{a}_x - 0.40\hat{a}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}} &= \frac{\vec{k}}{\jmath\omega\mu} \times \vec{\mathcal{E}} \\ &= \frac{(3.0\hat{a}_x - 2.0\hat{a}_y)\ m^{-1}}{\jmath\pi \times 10^6\ rd\ s^{-1} \times 4\pi \times 10^{-7}\ H\ m^{-1}} \times 5.0\mathcal{E}\hat{a}_z\ V\ m^{-1} \qquad \boxed{\mathcal{E} = \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ &= j6.3\mathcal{E}(0.60\hat{a}_y + 0.40\hat{a}_x)\ A\ m^{-1} \\ &= 6.3\mathcal{H}(0.60\hat{a}_y + 0.40\hat{a}_x)\ A\ m^{-1} \qquad \boxed{\mathcal{H} = \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned}$$

6.8)

$$\vec{H} = H_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)\hat{a}_z \qquad \begin{cases} H_0 & = & 100.0 \; mA \; m^{-1} \\ \omega & = & 2\pi \times 10^7 \; rd \; s^{-1} \\ \vec{k} & = & \beta \hat{a}_x \; m^{-1} \\ \phi & = & \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= -\frac{\vec{k}}{\sigma + \jmath\omega\epsilon} \times \vec{\mathcal{H}} \\ &= -\frac{\beta \hat{a}_x}{\jmath 2\pi \times 10^7 \; rd \; s^{-1} \times 8,854 \times 10^{-12} \; F \; m^{-1}} \times 0.1\mathcal{H}\hat{a}_z \; A \; m^{-1} \\ & \qquad \boxed{\mathcal{H} = \cos(\omega t - \beta x + \phi)} \\ &= -j180\beta\mathcal{H}\hat{a}_y \; V \; m^{-1} \\ &= 180\mathcal{E}\hat{a}_y \; V \; m^{-1} \qquad \boxed{\mathcal{E} = \cos(\omega t - \beta x - \phi)} \end{aligned}$$

6.9)

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2\vec{E} &= \vec{\nabla}^2(\mathcal{E}(z)\hat{a}_x) \\
&= \nabla^2\ 0\ \hat{a}_x + \nabla^2\ \mathcal{E}(z)\ \hat{a}_y + \nabla^2\ 0\ \hat{a}_z \\
&= \vec{0} + \left(\frac{\partial^2\mathcal{E}(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathcal{E}(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathcal{E}(z)}{\partial z^2}\right)\hat{a}_x + \vec{0} \\
&= \left(0 + \frac{\partial^2\mathcal{E}(z)}{\partial z^2} + 0\right)\hat{a}_x
\end{aligned}
$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} - k^2\vec{E} = \vec{0} \implies \left(\frac{\partial^2\mathcal{E}(z)}{\partial z^2}\right)\hat{a}_x = (\jmath\beta)^2\mathcal{E}(z)\hat{a}_x$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{E}(z)}{\partial z^2} = (\jmath\beta)^2\mathcal{E}(z) \implies \mathcal{E}(z) = \mathcal{E}_0 e^{\pm\jmath\beta z}$$

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e^{\pm\jmath\beta z}\hat{a}_x$$

6.10)

$$\left.\begin{array}{lcl} E_0 & = & 1.0\ V\ m^{-1} \\ f & = & 100\ MHz \\ \hat{a}_k & = & \hat{a}_y \\ \vec{\mathcal{E}} & = & \mathcal{E}_0 \hat{a}_z \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow\ \vec{\mathcal{E}} = E_0 \cos(2\pi f t - ky)\hat{a}_z$$

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f \\ &= 2\pi 100\ MHz \\ &= 2\times 10^8 \pi\ rd\ s^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= \omega\sqrt{\mu \times \epsilon} \\ &= 2\times 10^8\pi\ rd\ s^{-1}\sqrt{4\pi\times 10^{-7}\ H\ m^{-1} 8,854\times 10^{-12}\ F\ m^{-1}} \\ &= 2.1\ m^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}} &= -\jmath\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\ \hat{a}_k \times \vec{\mathcal{E}} \\ &= -\jmath\sqrt{\frac{8,854\times 10^{-12}\ F\ m^{-1}}{4\pi\times 10^{-7}\ H\ m^{-1}}}\ \hat{a}_y \times 1.0\mathcal{E}\hat{a}_z\ V\ m^{-1} \\ &= -\jmath\ 2.7\times 10^{-3}\cos(2\times 10^8\pi t - 2.1\ y)\ \hat{a}_x\ A\ m^{-1} \\ &= 2.7\cos\left(2\times 10^8\pi t - 2.1\ y - \frac{\pi}{2}\right)\ \hat{a}_x\ mA\ m^{-1} \end{aligned}$$

6.11)

$$\vec{H} = 100\cos(\omega t - 10y)\hat{a}_z \; mA \; m^{-1} \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} H_0 & = & 0.1 \; A \; m^{-1} \\ \vec{k} & = & 10\hat{a}_y \; m^{-1} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon^{(r)} \epsilon_0}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi \times 10^{-7} \; H \; m^{-1} \times 16 \times 8,854 \times 10^{-12} \; F \; m^{-1}}} \\ &= 7.5 \times 10^7 \; m \; s^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f \\ &= 2\pi \frac{v}{\lambda} \\ &= 2\pi v \frac{k}{2\pi} \\ &= vk \\ &= 7.5 \times 10^7 \; m \; s^{-1} \times 10 \; m^{-1} \\ &= 7.5 \times 10^8 \; rd \; s^{-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E &= \jmath\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}H \\
&= \jmath\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon^{(r)}\epsilon_0}}H \\
&= \jmath\sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}\ H\ m^{-1}}{16 \times 8,854 \times 10^{-12}\ F\ m^{-1}}} \times 0.1\mathcal{H}\ A\ m^{-1} \\
&= \jmath 9.4\cos(7.5 \times 10^8 t - 10y)\ A\ m^{-1} \\
&= 9.4\cos\left(7.5 \times 10^8 t - 10y + \frac{\pi}{2}\right)\ A\ m^{-1}
\end{aligned}
$$

6.12)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{E} = 120\pi\cos(6\pi\times 10^6 t - 0.080\pi y)\hat{a}_z\ V\ m^{-1}\\ \vec{H} = 2.00\cos(6\pi\times 10^6 t - 0.080\pi y)\hat{a}_x\ A\ m^{-1}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} E_0 & = & 120\pi\ V\ m^{-1}\\ H_0 & = & 2.00\ A\ m^{-1}\\ \vec{k} & = & 0.080\pi\hat{a}_y\ m^{-1}\\ \omega & = & 6\pi\times 10^6\ rd\ s^{-1}\end{array}\right.$$

$$\frac{\mu}{\epsilon} = \left(\frac{E_0}{H_0}\right)^2 \qquad \Longrightarrow \mu = \epsilon\left(\frac{E_0}{H_0}\right)^2$$

$$\begin{aligned} k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \Longrightarrow \mu\epsilon &= \frac{k^2}{\omega^2}\\ \left[\epsilon\left(\frac{E_0}{H_0}\right)^2\right]\epsilon &= \frac{k^2}{\omega^2}\\ \epsilon^2 &= \left(\frac{kH_0}{\omega E_0}\right)^2\\ \epsilon^{(r)}\epsilon_0 &= \frac{kH_0}{\omega E_0}\\ \epsilon^{(r)} &= \frac{kH_0}{\epsilon_0\omega E_0}\\ \epsilon^{(r)} &= \frac{0.080\pi\ m^{-1}\times 2.00\ A\ m^{-1}}{8,854\times 10^{-12}\ F\ m^{-1}\times 6\pi\times 10^6\ rd\ s^{-1}\times 120\pi\ V\ m^{-1}}\\ &= 8.0\end{aligned}$$

$$\mu = \epsilon \left(\frac{E_0}{H_0}\right)^2$$

$$\mu_0 \mu^{(r)} = \epsilon_0 \epsilon^{(r)} \left(\frac{E_0}{H_0}\right)^2$$

$$\mu^{(r)} = \frac{\epsilon_0 \epsilon^{(r)}}{\mu_0} \left(\frac{E_0}{H_0}\right)^2$$

$$= \frac{8,854 \times 10^{-12}\ F\ m^{-1} \times 8.0}{4\pi \times 10^{-7}\ H\ m^{-1}} \left(\frac{120\pi\ V\ m^{-1}}{2.00\ A\ m^{-1}}\right)^2$$

$$= 2.0$$

6.13)

$$k^2 = \jmath\omega\mu(\sigma + \jmath\omega\epsilon)$$

$$= \omega\mu(\jmath\sigma - \omega\epsilon) \quad \Longrightarrow \begin{cases} |k^2| &= \omega\mu\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\epsilon^2} \\ \arg(k^2) &= \arg(-\omega\epsilon + \jmath\sigma) \\ & \left(\frac{\pi}{2} \leq \arg(k^2) \leq \pi\right) \end{cases}$$

$$|k| = \sqrt{|k^2|}$$

$$= \sqrt{\omega\mu\sqrt{\sigma^2 + \omega^2\epsilon^2}}$$

$$\arg(k) = \frac{1}{2}\arg(k^2) \Longrightarrow \begin{cases} \cos(\arg(k)) &= \sqrt{\frac{1+\cos(\arg(k^2))}{2}} \\ \sin(\arg(k)) &= \sqrt{\frac{1-\cos(\arg(k^2))}{2}} \\ & \left(0 \leq \arg(k^2) \leq \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \Re(k) \\
&= |k|\cos(\arg(k)) \\
&= \sqrt{\omega\mu\sqrt{\sigma^2+\omega^2\epsilon^2}}\sqrt{\frac{1+\cos(\arg(k^2))}{2}} \\
&= \sqrt{\omega\mu\sqrt{\sigma^2+\omega^2\epsilon^2}}\sqrt{\frac{1-\dfrac{\omega\epsilon}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2\epsilon^2}}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{\omega\mu}{2}\left(\sqrt{\sigma^2+\omega^2\epsilon^2}-\omega\epsilon\right)} \\
&= \sqrt{\frac{\omega^2\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{\left[\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right]^2+1}-1\right)} \\
&= \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left[\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right]^2}-1\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta &= \Im(k) \\
&= |k|\sin(\arg(k)) \\
&= \sqrt{\omega\mu\sqrt{\sigma^2+\omega^2\epsilon^2}}\sqrt{\frac{1-\cos(\arg(k^2))}{2}} \\
&= \sqrt{\omega\mu\sqrt{\sigma^2+\omega^2\epsilon^2}}\sqrt{\frac{1+\dfrac{\omega\epsilon}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2\epsilon^2}}}{2}} \\
&= \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left[\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right]^2}+1\right)}
\end{aligned}
$$

6.14) O programa é o seguinte:

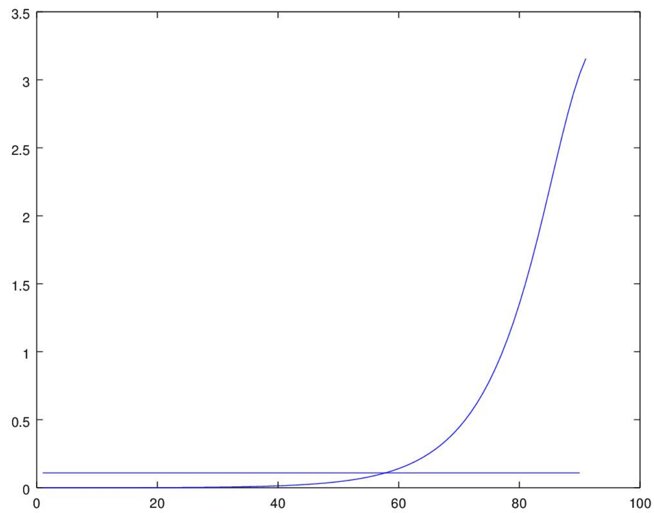
LISTING 3. calcparms.m

```
%{
Calcula a parte real e a parte imaginária da constante de propagação (k) em função da
    frequência e das propriedades do meio.
Aceita que a permissividade e a permeabilidade sejam complexas.
Aceita um vetor de frequências na entrada.
%}
function [alpha,beta] = calcparms(omega, sigma, mur, er)
  % Constantes
  mu0 = 4 * pi * 1e-7;      % H/m
  ep0 = 8.854 * 1e-12;      % F/m
  % Cálculos
  epsilon = er * ep0;
  mu = mur * mu0;
  aux = (1 + (sigma./(omega * epsilon).^2)).^0.5;
  alpha = omega .* (mu * epsilon / 2 .* (aux - 1)).^0.5;
  beta = omega .* (mu * epsilon / 2 .* (aux + 1)).^0.5;
end
```

6.15)

$$
\begin{aligned}
\alpha &\approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \\
&= \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon^{(r)}\epsilon_0}} \\
&= \frac{1.0 \times 10^{-3}\ S\ m^{-1}}{2}\sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}\ H\ m^{-1}}{(3.0 - \jmath 0.015) \times 8,854 \times 10^{-12}\ F\ m^{-1}}} \\
&= (0.11 + \jmath 0.00027)\ m^{-1}
\end{aligned}
$$

O gráfico é o seguinte (a escala do eixo de frequências é logarítmica):



Módulo de α em função da frequência

A condutividade é muito elevada para que a aproximação seja satisfatória. Apenas por volta de 600 kHz o erro de aproximação se encontra na faixa de $\pm 2\%$.

6.16)

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha & = & 61\ m^{-1} \\ \beta & = & 64\ m^{-1} \end{array}\right\} \quad \boxed{\textit{Calculado pelo programa-solução da questão 6.14}}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - \jmath\frac{\sigma}{\omega}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu^{(r)}\mu_0}{\epsilon^{(r)}\epsilon_0 - \jmath\frac{\sigma}{2\pi f}}}$$

$$= \sqrt{\frac{100.0 \times 4\pi \times 10^{-7}\ H\ m^{-1}}{1.0 \times 8,854 \times 10^{-12}\ F\ m^{-1} - \jmath\frac{0.00964\ S\ m^{-1}}{2\pi \times 100\ MHz}}}$$

$$= (2300 + j1300)\ \Omega$$

$$= 2700\underline{/30}^\circ\ \Omega$$

$$\mathcal{E} = \eta\mathcal{H}$$

$$= \eta H_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)$$

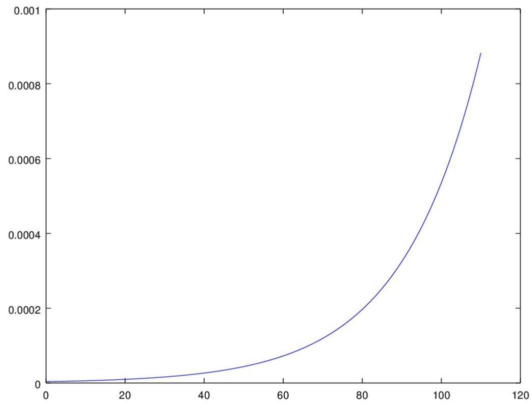
$$= 2700\underline{/30}^\circ\ \Omega \times 1.0\ mA\ m^{-1} e^{-61\ m{-1}\ z}\cos(2\pi \times 10^8 t - 64\ m^{-1}\ z)$$

$$= 2.7e^{-61z}\cos\left(2\pi \times 10^8 t - 64z + \frac{\pi}{6}\right)\ V\ m^{-1}$$

6.17) O programa apenas calcula os valores, e a plotagem deve ser feita manualmente e individualmente para cada material. Isso é necessário porque as características de cada um são muito diferentes. O programa e os gráficos são os seguintes (a escala de frequências é logarítmica):

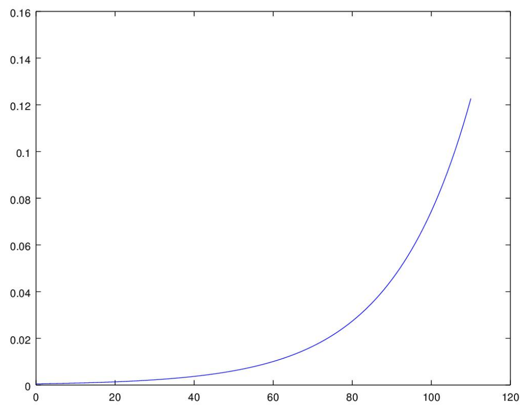
LISTING 4. ploteta.m

```
function [meta,teta]=ploteta(omega, sigma, er, mur)
% Calcula a impedância em função da frequêmcia para diversos materiais.
% A frequência de entrada pode ser um vetor.
% As características consideradas dos materiais são a condutividade e a permissividade,
    que pode ser complexa.
% Retorna as impedâncias em forma polar.
  % Constantes
  mu0 = 4 * pi * 1e-7;      % H/m
  ep0 = 8.854 * 1e-12;      % F/m
  % Cálculos
  mu = mu0 * mur;
  epsilon = ep0 * er;
  n = size(sigma, 2);
  m = size(omega, 2);
  eta = zeros(n, m);
  for i = 1:n
    k = omega .* (mu(i) * (epsilon(i) + j * sigma(i) ./ omega)).^0.5;
    eta(i, :) = j * mu(i) * omega ./ k;
  end
  meta = abs(eta);
  teta = arg(eta);
end
```



O ângulo de η do cobre é igual a 45° em toda a faixa

Módulo de η do cobre em função da frequência



O ângulo de η da água do mar é igual a 90° em toda a faixa

Módulo de η da água do mar em função da frequência

O módulo de η do vidro é igual a 120 Ω em toda a faixa

O ângulo de η do vidro é igual a 90° em toda a faixa

6.18)

$$
\begin{aligned}
\lim_{\sigma\to\infty}\alpha &= \lim_{\sigma\to\infty}\left[\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}-1\right\}}\right] \\
&= \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left\{\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right\}} \\
&= \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\sigma\to\infty}\beta &= \lim_{\sigma\to\infty}\left[\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}+1\right\}}\right] \\
&= \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left\{\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right\}} \\
&= \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}
\end{aligned}
$$

6.19)

$$\left.\begin{array}{rcl}\alpha & = & 6.0 \times 10^{-5}\ m^{-1} \\ \beta & = & 0.066\ m^{-1}\end{array}\right\}$$ $\boxed{\textit{Calculado pelo programa-solução da questão 6.14}}$

$\eta = 120\underline{/90^\circ}\ \Omega$ $\boxed{\textit{Calculado pelo programa-solução da questão 6.17}}$

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= \frac{1}{\eta}\vec{E} \\
&= \frac{1}{\eta}\eta E_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)(\hat{a}_k \times \hat{a}_E) \\
&= \frac{1}{120\underline{/90^\circ}\ \Omega} \times 20.0\ V\ m^{-1} e^{6.0\times10^{-5}\ m{-1}\ z}\cos(2\pi \times 10^6 t - 0.066\ m^{-1}\ z)(\hat{a}_y \times \hat{a}_z \\
&= -3.4 e^{6.0\times10^{-5}\ z}\cos\left(2\pi \times 10^6 t - 0.066 z - \frac{\pi}{2}\right)\ V\ m{-}1\hat{a}_x
\end{aligned}$$

6.20)

$$\begin{aligned}
\delta_{Cu} &= \sqrt{\frac{1}{\alpha_{Cu}}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_{Cu} \sigma_{Cu}}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{\pi \times 1\ GHz\ \ \times 4\pi \times 10^{-7}\ H\ m^{-1} \times 59.6 \times 10^{6}\ S\ m{-}1}} \\
&= 2.06 \times 10^{-6}\ m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{Au} &= \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_{Au} \sigma_{Au}}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{\pi \times 1\ GHz\ \ \times 4\pi \times 10^{-7}\ H\ m^{-1} \times 45.2 \times 10^{6}\ S\ m{-}1}} \\
&= 2.44 \times 10^{-6}\ m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{Ag} &= \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_{Au} \sigma_{Ag}}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{\pi \times 1\ GHz\ \ \times 4\pi \times 10^{-7}\ H\ m^{-1} \times 63.0 \times 10^{6}\ S\ m{-}1}} \\
&= 2.01 \times 10^{-6}\ m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{Ni} &= \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_{Au} \sigma_{Ni}}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{\pi \times 1\ GHz\ \ \times 600 \times mu] \times 10^{-10}\ H\ m^{-1}\ \ \times 14.5 \times 10^{6}\ S\ m{-}1}} \\
&= 1.71 \times 10^{-7}\ m
\end{aligned}$$

6.21)

f	α **(m-1)**	β **(m-1)**	η Ω	$\mathbf{u_p}$	δ
1 Hz	1.20	1.2	$1.81 \times 10^{-5}\angle 45°$		83.3 cm
1 kHz	38.9	38.9	$5.72 \times 10^{-4}\angle 45°$		25.7 mm
1 MHz	1200	1200	$1.81 \times 10^{-2}\angle 45°$		0.833 mm
1 GHz	38900	38900	$5.72 \times 10^{-1}\angle 45°$		25.7 μm

Os valores da tabela foram calculados pelos programas-solução das questões 6.14 e 6.15.

6.22)

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha & = & 5.85\ m^{-1} \\ \beta & = & 5.85\ m^{-1} \end{array}\right\} \quad \boxed{\textit{Calculado pelo programa-solução da questão 6.14}}$$

$$\eta = 0.115\angle 45°\ \Omega \qquad \boxed{\textit{Calculado pelo programa-solução da questão 6.17}}$$

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{\eta}\vec{E} \\ &= \frac{1}{\eta}E_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)(\hat{a}_k \times \hat{a}_E) \\ &= \frac{1}{0.115\angle 45°\ \Omega} \times 1.0\ V\ m^{-1} e^{-5.85\ m{-1}\ z}\cos(\pi \times 10^6 t - 5.85\ m^{-1}\ z)(\hat{a}_z \times \hat{a}_x) \\ &= 8.70 e^{5.85\ z}\cos\left(\pi \times 10^6 t - 5.85 z - \frac{\pi}{4}\right)\ V\ m^{-1}\hat{a}_y \end{aligned}$$

6.23)

$$\vec{E} = 10e^{-200z}\cos(2\pi\times 10^9\ t - 200z)\hat{a}_x\ mV\ m{-}1\ \hat{a}_x \qquad \left\{\begin{array}{lcl} E_0 & = & 10\ mV\ m^{-1} \\ f & = & \times 10^9\ Hz \\ \vec{k} & = & (200+\jmath 200)\hat{a}_z\ m^{-1} \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\jmath\mu\omega}{k} \\ &= \frac{\jmath 4\pi\times 10^{-7}\ H\ m^{-1}\times 2\pi\times 10^9\ rd\ s^{-1}}{200+\jmath 200} \\ &= 28\angle 45^\circ\ \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{\eta}\vec{E} \\ &= \frac{1}{\eta}E_0 e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)(\hat{a}_k\times\hat{a}_E) \\ &= \frac{1}{28\angle 45^\circ\ \Omega}\times 10\ mV\ m^{-1}e^{-200\ m{-}1\ z}\cos(\pi\times 10^6 t - 5.85\ m^{-1}\ z)(\hat{a}_z\times\hat{a}_x) \\ &= 0.36e^{-200\ z}\cos\left(2\pi\times 10^9 t - 200z - \frac{\pi}{4}\right)\ mV\ m^{-1}\hat{a}_y \end{aligned}$$

6.24)

$$\alpha_{Cu} = \sqrt{\pi f \mu_{Cu} \sigma_{Cu}}$$
$$= \sqrt{\pi \times 1\ GHz\ \times 4\pi \times 10^{-7}\ H\ m^{-1} \times 59.6 \times 10^{6}\ S\ m{-1}}$$
$$= 4.85 \times 10^{5}\ m^{-1}$$

$$\alpha_{Ni} = \sqrt{\pi \times 1\ GHz\ \times 600 \times mu] \times 10^{-10}\ H\ m^{-1}\ \times 14.5 \times 10^{6}\ S\ m{-1}}$$
$$= 5.84 \times 10^{6}\ m^{-1}$$

$$\alpha z = \alpha_{Cu}\ell + \alpha_{Ni}(z-\ell) \implies \alpha\delta = \alpha_{Cu}\ell + \alpha_{Ni}(\delta-\ell)$$
$$1 = \alpha_{Cu}\ell + \alpha_{Ni}\delta - \alpha_{Ni}\ell)$$
$$1 = (\alpha_{Cu} - \alpha_{Ni})\ell + \alpha_{Ni}\delta$$
$$\therefore \delta = \frac{1 - (\alpha_{Cu} - \alpha_{Ni})\ell}{\alpha_{Ni}}$$
$$= \frac{1 - (4.85 \times 10^{5}\ m^{-1} - 5.84 \times 10^{6}\ m^{-1}) \times 1.0 \times 10^{-6}\ m}{5.84 \times 10^{6}\ m^{-1}}$$
$$= 1.09 \times 10^{-6}\ m$$

$\delta = 2.06 \times 10^{-6}\ m$ $\boxed{\textit{Calculado na questão 6.20)}}$

$$\alpha z = \alpha_{Cu}\ell + \alpha_0(z-\ell) \implies \alpha\delta = \alpha_{Cu}\ell + \alpha_0(\delta-\ell)$$
$$1 = \alpha_{Cu}\ell + 0$$ $\boxed{\textit{Não existe solução neste caso.}}$

6.25)

$$R^{(cc)} = \frac{\ell}{\varpi S} \implies \frac{R^{(cc)}}{\ell} = \frac{1}{\varpi S}$$

$$= \frac{4}{\varpi \pi d^2}$$

$$= \frac{4}{5.96 \times 10^7 \ S \ m^{-1} * \pi (4 \ mm)^2}$$

$$= 1.34 \ m\Omega \ m^{-1}$$

$$R^{(s)} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\varpi}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi \times 10^9 \ Hz \times 4\pi \times 10^{-7} \ H \ m^{-1}}{5.96 \times 10^7 \ S \ m^{-1}}}$$

$$= 8.14 \ m\Omega \ m^{-2}$$

6.26)

$$H = 12.0 \cos\left(\pi \times 10^6\, t - \beta z + \frac{\pi}{6}\right)\; A\; m{-}1\; \hat{a}_x \qquad \begin{cases} H_0 &= 12.0\; A\; m^{-1} \\ \omega &= \pi \times 10^6\; rd\; s^{-1} \\ \hat{a}_k &= \hat{a}_z \\ \alpha &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}\; H\; m^{-1}}{8{,}854 \times 10^{-12}\; F\; m^{-1}}} \\ &= 377\; \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{E_0^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos\theta_\eta \\ &= \frac{(\eta H_0)^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos\theta_\eta \\ &= \frac{|\eta| H_0^2}{2} e^{-2\alpha z} \cos\theta_\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= PS \\ &= \frac{|\eta| H_0^2}{2} e^{-2\alpha z} \cos\theta_\eta\; S \\ &= \frac{377 \times (12.0)^2}{2} e^0 \cos(0)\; S \\ &= 27.1\; kW \end{aligned}$$

6.27)

$$\left.\begin{array}{rcl}\alpha & = & 0 \\ \beta & = & 18\ m^{-1}\end{array}\right\}$$ $\boxed{\textit{Calculado pelo programa-solução da questão 6.14}}$

$$\eta = 260\angle 90°\ \Omega$$ $\boxed{\textit{Calculado pelo programa-solução da questão 6.17}}$

$$\begin{aligned} vecE &= E_0 \mathcal{E} \hat{a}_E \\ &= E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)\hat{a}_y \\ &= 1.0\ V\ m^{-1}\ e^0 \cos(2\pi \times 600\ MHz\ t - 260\ m^{-1} z)\hat{a}_y{}^{pi * 1.2} \\ &= 1.0 \cos(1.8 \times 10^9\ t - 18z)\hat{a}_y\ V\ m^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{\eta}\vec{E} \\ &= \frac{1}{260\angle 90°} \times 1.0\cos(1.8 \times 10^9\ t - 18z)(\hat{a}_z \times \hat{a}_y) \\ &= -3.9\cos\left(1.8 \times 10^9 t - 18z - \frac{\pi}{2}\right)\ mA\ m^{-1}\hat{a}_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \vec{E} \times \vec{H} \\ &= \left[1.0\cos(1.8 \times 10^9\ t - 18z)\hat{a}_y\ V\ m^{-1}\right] \times ... \\ &\quad \times \left[-3.9\cos\left(1.8 \times 10^9 t - 18z - \frac{\pi}{2}\right)\ mA\ m^{-1}\hat{a}_x\right] \\ &= 3.9\cos\left(1.8 \times 10^9\ t - 18z\right)\cos\left(1.8 \times 10^9 t - 18z - \frac{\pi}{2}\right)\ mW\ m^{-2}\hat{a}_z \end{aligned}$$

6.29)

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \frac{P}{S}\, S\ \cos\theta \\ &= \frac{P}{S}\, \ell_1\, \ell_2\ \cos\theta \\ &= 150\ W\ m^{-2} \times 0.6\ m \times 1.6\ m \times 1 \\ &= 144\ W\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \frac{P}{S}\, \ell_1\, \ell_2\ \cos\theta \\ &= 150\ W\ m^{-2} \times 0.6\ m \times 1.6\ m \times \cos 45^\circ \\ &= 125\ W\end{aligned}$$