

ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO POR UM CILINDRO CONDUTOR ELÉTRICO PERFEITO

SÉRGIO CORDEIRO

RESUMO. A configuração do campo eletromagnético em uma dada região do espaço, num intervalo de tempo determinado, precisa ser obtida, no caso geral, resolvendo-se as equações de Maxwell. O presente trabalho versa sobre a determinação dos campos no entorno de um cilindro condutor perfeito, localizado no espaço livre, sobre o qual incide uma onda eletromagnética viajante; sob essas condições ideais, soluções analíticas podem ser encontradas para as equações mencionadas. Para a geometria do problema, essas soluções envolvem funções transcendentais: as conhecidas funções de Bessel e funções de Hankel.

Os conceitos e derivações menos comuns são apresentados em detalhe; para os mais comuns remete-se à bibliografia de referência. Um programa para cálculo dos campos é apresentado, bem como alguns gráficos obtidos por meio dele.

SUMÁRIO

1. Introdução	3
2. Equações de Maxwell em coordenadas cilíndricas	4
2.1. Forma das equações para o problema proposto	4
2.2. Forma das equações em coordenadas cilíndricas	6
2.3. Solução da equação 25	7
3. Solução das equações de onda	11
3.1. Os potenciais vetores elétrico e magnético	11
3.2. Os modos transversais	13
3.3. Ondas refletidas	14
3.4. Onda plana em coordenadas cilíndricas	14
3.5. Onda espalhada	16
3.6. Corrente na superfície do cilindro	17
4. Implementação	17
Referências	24

1. INTRODUÇÃO

A configuração do campo eletromagnético em uma dada região do espaço, num intervalo de tempo determinado, precisa ser obtida, no caso geral, resolvendo-se as equações de Maxwell [BALANIS 2012 1]. A forma usual dessas equações, para aplicações de eletromagnetismo clássico, é a que emprega conceitos de cálculo vetorial:

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{M} - \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{P} + \rho \vec{v} + \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

No espaço livre, as equações 1 a 4 podem ser simplificadas, uma vez que não há campos externos ($\vec{M} = \vec{P} = \vec{0}$ e $\rho = 0$) e o meio é homogêneo, linear e isotrópico (portanto $\mu = \mu$, $\sigma = \sigma$ e $\epsilon = \epsilon$). Assim, chegamos ao que chamaremos de *equações canônicas*:

$$(5) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

$$(6) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(7) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$(8) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Estas, por sua vez, podem ser manipuladas de forma a obter-se um conjunto alternativo, usualmente chamado de *equações de onda vetoriais*¹:

$$(9) \quad \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$(10) \quad \vec{\nabla}^2 \vec{H} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

¹Para a derivação das equações de onda vetoriais a partir das equações canônicas, consultar [BALANIS 2012 1] .

Ambos os conjuntos consistem de equações diferenciais parciais, por isso a forma da solução é determinada também pelas *condições de contorno*, que variam de problema para problema. Em casos mais simples, pode-se obter uma solução analítica; nos demais, é necessário recorrer a métodos numéricos e, em consequência, a solução obtida estará em forma de sequências de valores. No presente trabalho, estudaremos a configuração dos campos no entorno de um cilindro condutor perfeito sobre o qual incide uma onda eletromagnética viajante, no espaço livre; sob essas condições ideais, soluções analíticas podem ser encontradas [BALANIS 2012 1] .

Tanto 5 a 8 quanto 9 a 10 são úteis em aplicações práticas. A opção entre os dois conjuntos é uma questão de conveniência, o que por sua vez depende das condições do problema específico a ser resolvido, como geometria, condições de contorno e parâmetros constitutivos. Para este trabalho, estabelecemos o seguinte roteiro:

- 1) Derivar as equações canônicas e as equações de onda vetoriais para as condições idealizadas do problema (ver 2.1 e 2.2);
- 2) Obter a solução dessas equações para as condições dadas (ver 2.3);
- 3) Obter a solução analítica dessas equações (ver ??);

Neste trabalho, os conceitos e derivações menos comuns são apresentados em detalhe; para os mais comuns remete-se à bibliografia de referência. A notação segue de perto a das principais referência, mas diverge em pontos onde buscamos maior clareza ou precisão.

2. EQUAÇÕES DE MAXWELL EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

2.1. Forma das equações para o problema proposto. No espaço livre, as perdas por polarização e magnetização são nulas; isso equivale a fazer $\varpi = 0$ nas equações 5 a 8 e 9 a 10. Além disso, como o meio é linear, todas essas equações são lineares e vale o teorema integral de Fourier:

$$(11) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$(12) \quad \text{onde } \mathbb{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Quando $f(t)$ é uma função periódica, com período τ , a integral 11 degenera na somatória discreta

$$(13) \quad f(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \mathbb{F}_{\omega} e^{j\omega t}$$

Podemos agora representar, nas equações do problema, o vetor genérico \vec{A} , que é uma função do tempo e da posição, como o produto $A(t)\vec{A}(x, y, z)$ ^{2 3}, e então substituir $A(t)$ por $\mathbb{A}(\omega)e^{j\omega t}$, uma vez que, encontrada a solução para o caso geral $\vec{A} = \mathbb{A}_\omega e^{j\omega t} \vec{A}(x, y, z)$, a solução específica consistirá na soma das soluções para cada \mathbb{A}_ω não-nulo, devido à linearidade das equações. Campos que podem ser representados dessa forma são chamados *campos harmônicos*.

Em condições de *regime permanente*, pode-se simplificar ainda mais o problema com a introdução da notação fasorial, substituindo $\mathbb{A}e^{j\omega t}$ pelo fasor $\mathcal{A} = \Re(\mathbb{A}e^{j\omega t})$. Podemos ainda, sem perda de generalidade, fazer todos os fasores unitários, o que equivale a considerar $A(t)$ como uma função cujo máximo é 1; com isso, o máximo de \vec{A} passa a ser dado pelo máximo de $\vec{A}(x, y, z)$. Com isso, chegamos a:

$$\vec{\nabla} \cdot (\mathcal{D}\vec{D}(x, y, z)) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\mathcal{B}\vec{B}(x, y, z)) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\mathcal{E}\vec{E}(x, y, z)) = -\mathbb{J} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{H}\vec{H}(x, y, z))$$

$$\vec{\nabla} \times (\mathcal{H}\vec{H}(x, y, z)) = \mathbb{E} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}\vec{E}(x, y, z))$$

$$\vec{\nabla}^2 (\mathcal{E}\vec{E}(x, y, z)) = \mathbb{J}\mathbb{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathcal{H}\vec{H}(x, y, z))$$

$$\vec{\nabla}^2 (\mathcal{H}\vec{H}(x, y, z)) = \mathbb{J}\mathbb{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathcal{E}\vec{E}(x, y, z))$$

mas, se

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

então

$$\frac{\partial A e^{j\omega t}}{\partial t} = (jA\omega)e^{j\omega t} = j\omega(Ae^{j\omega t})$$

e

$$\frac{\partial^2 A e^{j\omega t}}{\partial t^2} = (j\omega)^2(Ae^{j\omega t}) = -\omega^2(Ae^{j\omega t})$$

²Essa notação configura um certo abuso, uma vez que são duas funções distintas, uma do tempo e outra da posição. O mais correto seria escrever algo como $A_1(t)\vec{A}_2(x, y, z)$.

³A técnica de substituição de uma função $f(x, y)$ pelo produto $g(x)h(y)$ é chamada *técnica da substituição de variáveis*.

o que resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A} = j\omega \mathcal{A}$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{A} = -\omega^2 \mathcal{A}$$

Assim, temos [BALANIS 2012 2, BALANIS 2012 3]:

$$(14) \quad \vec{\nabla} \cdot (\mathcal{D}\vec{D}(x, y, z)) = 0$$

$$(15) \quad \vec{\nabla} \cdot (\mathcal{B}\vec{B}(x, y, z)) = 0$$

$$(16) \quad \vec{\nabla} \times (\mathcal{E}\vec{E}(x, y, z)) = -\mathbb{J}j\omega (\mathcal{H}\vec{H}(x, y, z))$$

$$(17) \quad \vec{\nabla} \times (\mathcal{H}\vec{H}(x, y, z)) = \mathbb{E}j\omega (\mathcal{E}\vec{E}(x, y, z))$$

$$(18) \quad \vec{\nabla}^2 (\mathcal{E}\vec{E}(x, y, z)) = -\mathbb{J}\mathbb{E}\omega^2 (\mathcal{H}\vec{H}(x, y, z))$$

$$(19) \quad \vec{\nabla}^2 (\mathcal{H}\vec{H}(x, y, z)) = -\mathbb{J}\mathbb{E}\omega^2 (\mathcal{E}\vec{E}(x, y, z))$$

2.2. Forma das equações em coordenadas cilíndricas. Obviamente, o sistema de coordenadas mais adequado ao problema proposto é o cilíndrico. As equações de onda vetoriais, 18 a 19, após todas as manipulações, são simples o suficiente para permitir uma solução analítica, e por isso são as mais indicadas, em lugar das demais. No sistema

escolhido [MACEDO 1988 1]:

$$(20) \quad \vec{A} = A_\rho \hat{a}_\rho + A_\phi \hat{a}_\phi + A_z \hat{a}_z$$

$$(21) \quad \begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{A} = & \left[\nabla^2 A_\rho - \frac{1}{\rho^2} \left(A_\rho + 2 \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \right] \hat{a}_\rho + \dots \\ & + \left[\nabla^2 A_\phi + \frac{1}{\rho^2} \left(2 \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} - A_\phi \right) \right] \hat{a}_\phi + \dots \\ & + \left[\nabla^2 A_z \right] \hat{a}_z \end{aligned}$$

$$(22) \quad \nabla^2 A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$$

Combinando 20 e 21 com 18 e 19, obtemos o sistema de equações a ser resolvido:

$$(23) \quad \nabla^2 A_\rho - \frac{1}{\rho^2} \left(A_\rho + 2 \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) = -\mu\epsilon\omega^2 A_\rho$$

$$(24) \quad \nabla^2 A_\phi + \frac{1}{\rho^2} \left(2 \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} - A_\phi \right) = -\mu\epsilon\omega^2 A_\phi$$

$$(25) \quad \nabla^2 A_z = -\mu\epsilon\omega^2 A_z$$

$\vec{A}: \vec{E} \text{ ou } \vec{H} \quad A_a = A_a(t, \rho, \phi, z) = \mathcal{A}_a A_a(\rho, \phi, z)$

As equações 23 e 24 estão *acopladas*, isto é, possuem termos tanto em ρ quanto em ϕ ; a equação 25, por sua vez, está *desacoplada*: possui apenas termos em z . Entretanto, em diversas situações práticas é possível escolher o sistema de coordenadas de forma a obter-se o que se chama **modo transversal elétrico (TE)** ou o **modo transversal magnético (TM)**, para os quais basta resolver a equação 25.

2.3. Solução da equação 25. Como 25 é a mais simples, comecemos por ela. De acordo com a técnica de separação de variáveis, façamos a substituição:

$$(26) \quad A(\rho, \phi, z) = A_1(\rho)A_2(\phi)A_3(z)$$

em 22 e 25. O que obtemos é:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \rho} &= A_2 A_3 \frac{\partial A_1}{\partial \rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A}{\partial \rho} \right) &= A_2 A_3 \left(\frac{\partial A_1}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 A_1}{\partial \rho^2} \right) \\ \frac{\partial A}{\partial \phi} &= A_1 A_3 \frac{\partial A_2}{\partial \phi} \\ \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} &= A_1 A_3 \frac{\partial^2 A_2}{\partial \phi^2} \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= A_1 A_2 \frac{\partial A_3}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} &= A_1 A_2 \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dots$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_z &= \frac{1}{\rho} A_2 A_3 \left(\frac{\partial A_1}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 A_1}{\partial \rho^2} \right) + \frac{1}{\rho^2} A_1 A_3 \frac{\partial^2 A_2}{\partial \phi^2} + A_1 A_2 \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} \\ &= \frac{A_2 A_3}{\rho} \frac{\partial A_1}{\partial \rho} + A_2 A_3 \frac{\partial^2 A_1}{\partial \rho^2} + \frac{A_1 A_3}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial \phi^2} + A_1 A_2 \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{A_2 A_3}{\rho} \frac{\partial A_1}{\partial \rho} + A_2 A_3 \frac{\partial^2 A_1}{\partial \rho^2} + \frac{A_1 A_3}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial \phi^2} + A_1 A_2 \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} = -\mathbb{P}\epsilon\omega^2 A_1 A_2 A_3$$

$$\frac{1}{A_1 \rho} \frac{\partial A_1}{\partial \rho} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{A_2 \rho^2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{A_3} \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} = -\mathbb{P}\epsilon\omega^2$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{A_1 \rho} \frac{\partial A_1}{\partial \rho} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{A_2 \rho^2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{A_3} \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial}{\partial z} [-\mathbb{P}\epsilon\omega^2]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{A_3} \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} \right] = 0$$

(27)

$$\therefore \quad \frac{1}{A_3} \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} = \text{constante}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\rho} \frac{\partial A_1}{\partial \rho} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 A_2}{\rho^2} \frac{\partial \phi^2} + \frac{1}{A_3} \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} \right] &= \frac{\partial}{\partial \phi} [-\mathbb{I}\epsilon\omega^2] \\
 \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial \phi^2} \right] &= 0 \\
 \therefore \frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial \phi^2} &= \text{constante}
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\rho} \frac{\partial A_1}{\partial \rho} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \mathbf{C}_\phi + \mathbf{C}_z &= -\mathbb{I}\epsilon\omega^2 \\
 \rho \frac{\partial A_1}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial \rho^2} + \mathbf{C}_\phi A_1 + \rho^2 A_1 (\mathbf{C}_z + \mathbb{I}\epsilon\omega^2) &= 0 \\
 \rho^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial A_1}{\partial \rho} + A_1 [\mathbf{C}_\phi + \rho^2 (\mathbf{C}_z + \mathbb{I}\epsilon\omega^2)] &= 0
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

$$\boxed{\mathbf{C}_z = \frac{1}{A_3} \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} \quad \mathbf{C}_\phi = \frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial \phi^2}}$$

Temos agora 3 equações diferenciais ordinárias desacopladas a resolver, o que detalharemos a seguir [BALANIS 2012 4].

. *Solução da equação 29*

29 tem a forma da *equação diferencial de Bessel na versão de Bowman*:

$$(30) \quad u^2 \frac{d^2 v}{du^2} + (2p+1)u \frac{dv}{du} + [a^2 u^{2c} + b^2]v = 0$$

$$\boxed{p = 0 \quad c = 1 \quad a^2 = (\mathbf{C}_z + \mathbb{I}\epsilon\omega^2) \quad b^2 = \mathbf{C}_\phi}$$

cuja solução é:

$$(31) \quad v = u^{-p} \left[\mathbf{C}_1 \mathbf{J}_{\frac{q}{c}} \left(\frac{a}{c} u^c \right) + \mathbf{C}_2 \mathbf{Y}_{\frac{q}{c}} \left(\frac{a}{c} u^c \right) \right]$$

$$\boxed{q = \sqrt{p^2 - b^2}}$$

onde J é uma *função de Bessel de primeira espécie*, Y é uma *função de Bessel de segunda espécie* e C₁ e C₂ são constantes, determinadas pelas

condições de contorno de cada problema [WEISSTEIN 2015 1]. Fazendo as devidas substituições em 29, chegamos a:

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \rho^0 \left[C_1 J_q \left(\sqrt{C_z + \mathbb{I}\mathbb{I}\epsilon\omega^2} \rho \right) + C_2 Y_q \left(\sqrt{C_z + \mathbb{I}\mathbb{I}\epsilon\omega^2} \rho \right) \right] \\ (32) \quad &= C_1 J_q \left(\sqrt{C_z + \mathbb{I}\mathbb{I}\epsilon\omega^2} \rho \right) + C_2 Y_q \left(\sqrt{C_z + \mathbb{I}\mathbb{I}\epsilon\omega^2} \rho \right) \end{aligned}$$

$$(33) \quad \boxed{q = \sqrt{-C_\phi}}$$

De acordo com 33, C_ϕ deve ser um valor negativo para que tal solução seja possível; de maneira similar, conforme 32, $C_z + \mathbb{I}\mathbb{I}\epsilon\omega^2$ deve ser positivo. Assim, definamos $C_\phi = -m^2$ e $C_z + \mathbb{I}\mathbb{I}\epsilon\omega^2 = \beta_\rho^2$. Com isso, 32 se torna

$$(34) \quad A_1 = C_1 J_m(\beta_\rho \rho) + C_2 Y_m(\beta_\rho \rho)$$

. Solução das equações 27 e 28

Essas equações são de fácil solução, uma vez que se trata de equações lineares na forma:

$$(35) \quad \frac{d^2 v}{du^2} + a \frac{dv}{du} + bv = 0$$

$$\boxed{a = 0 \quad b = -C_z}$$

cuja solução geral depende do sinal de $\Delta = a^2 - 4b$, que, no caso presente, é igual a $4C_z$. Como estamos interessados em soluções ondulatória, é preciso que $C_z < 0$. Escrevemos então:

$$\frac{d^2 A_2}{d\phi^2} = -m^2 A_2$$

$$\frac{d^2 A_3}{dz^2} = -\beta_z^2 A_3$$

e as soluções serão

$$(36) \quad A_2 = C_3 \cos(m\phi) + C_4 \sin(m\phi)$$

$$(37) \quad A_3 = C_5 \cos(\beta_z z) + C_6 \sin(\beta_z z)$$

As equações 34 a 37 podem ser reescritas em uma forma alternativa:

$$(38) \quad A_1 = C_7 H_m^{(1)}(\beta_\rho \rho) + C_8 H_m^{(2)}(\beta_\rho \rho)$$

$$(39) \quad A_2 = C_9 e^{-jm\phi} + C_{10} e^{jm\phi}$$

$$(40) \quad A_3 = C_{11} e^{-j\beta_z z} + C_{12} e^{j\beta_z z}$$

onde $H_m^{(n)}$ é a função de Hankel de espécie n , relacionada às funções de Bessel por [WEISSTEIN 2015 2, WEISSTEIN 2015 3]:

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + j Y_m(x)$$

$$H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - j Y_m(x)$$

O primeiro conjunto é mais apropriado ao tratamento de ondas estacionárias; o segundo, ao de ondas viajantes [BALANIS 2012 4].

3. SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ONDA

3.1. Os potenciais vetores elétrico e magnético. A solução da equação de onda em um problema prático pode ser obtida através de dois roteiros. O primeiro consiste na solução direta do conjunto de equações formuladas em termos das coordenadas escolhidas, cilíndricas no nosso caso. O segundo contempla um passo intermediário, que consiste na obtenção de duas quantidades auxiliares, os vetores potencial elétrico \vec{F} e potencial magnético \vec{A} ; esta alternativa normalmente é mais fácil e será a utilizada aqui.

a solução das equações:

$$(41) \quad \vec{D} = -\vec{\nabla} \times \vec{F} \quad / \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

$$(42) \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad / \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Substituindo essas equações em 17 e 16, respectivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\mathcal{H}\vec{H}) &= \epsilon j \omega \mathcal{E} \vec{E} \\ &= -j \omega \vec{\nabla} \times (\mathcal{F}\vec{F}) \implies \\ \vec{\nabla} \times (\mathcal{H}\vec{H} + j \omega \mathcal{F}\vec{F}) &= \vec{0} \implies \\ (43) \quad \mathcal{H}\vec{H} + j \omega \mathcal{F}\vec{F} &= -\vec{\nabla} V^{(m)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\mathcal{E}\vec{E}) &= -\mathbb{J}j\omega\mathcal{H}\vec{H} \\
&= -j\omega\vec{\nabla} \times (\mathcal{A}\vec{A}) \implies \\
\vec{\nabla} \times (\mathcal{E}\vec{E} + j\omega\mathcal{A}\vec{A}) &= \vec{0} \implies \\
(44) \quad \mathcal{E}\vec{E} + j\omega\mathcal{A}\vec{A} &= -\vec{\nabla}V^{(e)}
\end{aligned}$$

onde $V^{(m)}$ é uma função que representa o potencial magnético devido ao campo elétrico e $V^{(e)}$ é uma função que representa o potencial elétrico devido ao campo magnético. Definem-se então os divergentes de \vec{F} e \vec{A} como:

$$(45) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -j\omega\epsilon\mathbb{J}V^{(m)}$$

$$(46) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -j\omega\epsilon\mathbb{J}V^{(e)}$$

Por outro lado, manipulando as equações 41 e ??, teremos:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{D} &= -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\vec{F}) \\
&= -\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + \vec{\nabla}^2(\mathcal{F}\vec{F})\epsilon\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + \vec{\nabla}^2(\mathcal{F}\vec{F}) \\
(47) \quad \epsilon(\vec{M} + j\omega\mathbb{J}\mathcal{H}\vec{H}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot (\mathcal{F}\vec{F})) - \vec{\nabla}^2(\mathcal{F}\vec{F})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\
&= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2(\mathcal{A}\vec{A}) \\
\mathbb{J}\vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2(\mathcal{A}\vec{A}) \\
(48) \quad \mathbb{J}(\vec{J} + j\omega\epsilon\mathcal{E}\vec{E}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2(\mathcal{A}\vec{A})
\end{aligned}$$

Combinando 43 com 45 e 47 por um lado e 44 com 46 e 48 por outro, e lembrando que $\vec{M} = \vec{J} = 0$ no nosso problema, chegaremos aos pares de equações:

$$(49) \quad \vec{\nabla}^2(\mathcal{F}\vec{F}) + \omega^2\mathbb{J}\epsilon\mathcal{F}\vec{F} = \vec{0}$$

$$(50) \quad j\frac{1}{\omega\mathbb{J}\epsilon}\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot (\mathcal{F}\vec{F})) + j\omega\mathcal{F}\vec{F} + \vec{H} = \vec{0}$$

e

$$(51) \quad \vec{\nabla}^2(\mathcal{A}\vec{A}) + \omega^2\mu\epsilon\mathcal{A}\vec{A} = \vec{0}$$

$$(52) \quad j\frac{1}{\omega\mu\epsilon}\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot (\mathcal{A}\vec{A})) + j\omega\mathcal{A}\vec{A} + \vec{E} = \vec{0}$$

As equações 49 e 51 são equações de onda, na forma das equações 18 e 19, e sua solução geral já foi derivada. Uma vez calculados os potenciais \vec{F} e \vec{A} , obtêm-se os respectivos \vec{E} e \vec{H} por meio da combinação das equações 41 e 42 com 50 e 52 ou, alternativamente, com 47 e 48. O campo total será dado pela soma de todas essas componentes. Para ondas planas, o segundo termo das equações 52 e 50 é desprezível, por isso essas equações são as mais recomendadas para os problemas a elas relacionados [BALANIS 2012 5].

3.2. Os modos transversais. Em um modo transversal, o sistema de coordenadas foi escolhido de forma a que os vetores \vec{E} e/ou \vec{H} sejam ortogonais à direção de propagação. Em tais configurações do campo eletromagnético, diversos componentes de \vec{E} , \vec{H} , \vec{A} e \vec{F} são nulos. No modo mais simples, chamado transversal eletromagnético (TEM), ambos o são; neste caso, teremos o máximo de componentes nulos. Os modos transversal elétrico (TE) e transversal magnético (TM) são um pouco mais complexos e menos componentes serão nulos em cada caso. Pode-se demonstrar, com o auxílio da teoria desenvolvida nas seções anteriores, que, em um sistema de coordenadas cartesianas, partindo das equações 52 e 50 e considerando os vetores na forma geral $\vec{\psi} = \psi_x\hat{a}_x + \psi_y\hat{a}_y + \psi_z\hat{a}_z$, com $\psi = \psi(x, y, z)$, para $\vec{E} = \mathcal{E}\hat{a}_x$ e $\vec{H} = \mathcal{H}\hat{a}_y$, teremos uma onda plana no

modo TEM^z e [BALANIS 2012 6]:

$$(53) \quad \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_x^+ e^{-j\beta z} + \mathcal{E}_x^- e^{j\beta z}$$

$$(54) \quad \mathcal{H}_y = \mathcal{H}_y^+ e^{-j\beta z} + \mathcal{H}_y^- e^{j\beta z}$$

$$(55) \quad \mathcal{E}_x^+ = -\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\partial \mathcal{A}_z^+}{\partial x} - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{F}_z^+}{\partial y}$$

$$(56) \quad \mathcal{E}_x^- = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\partial \mathcal{A}_z^-}{\partial x} - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{F}_z^-}{\partial y}$$

$$(57) \quad \mathcal{H}_y^+ = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathcal{E}_x^+$$

$$(58) \quad \mathcal{H}_y^- = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathcal{E}_x^-$$

3.3. Ondas refletidas. Nas proximidades do cilindro condutor, existirá uma onda refletida que interferirá com a onda incidente. A onda resultante será a somatória de ambas, uma vez que vale o princípio da superposição [BALANIS 2012 7]:

$$(59) \quad \vec{E} = \vec{E}^{(i)} + \vec{E}^{(r)}$$

$$(60) \quad \vec{H} = \vec{H}^{(i)} + \vec{H}^{(r)}$$

onde ^(r) e ⁽ⁱ⁾ identificam as ondas refletida e incidente, respectivamente. Se supusermos, como vimos fazendo, uma onda incidente plana, a onda refletida será uma onda cilíndrica. Para o modo TEM^ρ, com $\vec{E} = \mathcal{E} \hat{a}_z$ e $\vec{H} = \mathcal{H} \hat{a}_\phi$, e considerando apenas a propagação na direção positiva, que é a significativa para os nossos propósitos, teremos [BALANIS 2012 6]:

$$(61) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_z &= \mathcal{E}_z \mathbf{H}_1^{(2)}(\beta\rho) & \mathcal{E}_z &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \mathcal{A}_\rho) \right] + \frac{1}{\rho\epsilon} \frac{\partial \mathcal{F}_\rho}{\partial \phi} \\ \mathcal{H}_\phi &= \mathcal{H}_\phi \mathbf{H}_1^{(2)}(\beta\rho) & \mathcal{H}_\phi &= -j \frac{1}{\rho\omega\mu\epsilon} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \mathcal{F}_\rho) \right] + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathcal{A}_\rho}{\partial z} \end{aligned}$$

3.4. Onda plana em coordenadas cilíndricas. Como estamos trabalhando em coordenadas cilíndricas, será preciso reescrever as equações 53 a neste sistema. A melhor opção é decompor cada função exponencial como uma soma de funções de Bessel, que, como vimos anteriormente,

são as funções mais adequadas para representar ondas em coordenadas esféricas. Assim:

$$(62) \quad e^{-j\beta x} = e^{-j\beta\rho \cos\phi}$$

$$(63) \quad = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n J_n(\beta\rho)$$

É possível demonstrar, aplicando as condições de contorno, que os coeficientes a_n são dados por

$$(64) \quad a_n = j^{-n} e^{jn\phi}$$

Assim, considerando o modo TM^z , a onda incidente sobre o cilindro pode ser escrita como:

$$\vec{E}^i = E_z^+ \hat{a}_z$$

$$(65) \quad E_z^+ = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(\beta\rho) e^{jn\phi}$$

e

$$\vec{H}^i = \mathcal{H}_\rho \hat{a}_\rho + \mathcal{H}_\phi \hat{a}_\phi$$

$$(66) \quad \mathcal{H}_\rho = -\frac{E_0}{j\omega\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nj^{1-n} J_n(\beta\rho) e^{jn\phi}$$

$$(67) \quad \mathcal{H}_\phi = -\frac{\beta E_0}{j\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} \left[\frac{\partial}{\partial(\beta\rho)} J_n(\beta\rho) \right] e^{jn\phi}$$

Para TE^z , por sua vez, teremos:

$$\vec{H}^i = \mathcal{H}_z \hat{a}_z$$

$$(68) \quad \mathcal{H}_z = H_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} e^{-jn\phi} J_n(\beta\rho)$$

e [BALANIS 2012 8]

$$\vec{E}^i = E_\rho^i \hat{a}_\rho + E_\phi^i \hat{a}_\phi$$

$$(69) \quad E_\rho = \frac{H_0}{j\omega\epsilon\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nj^{1-n} e^{-jn\phi} J_n(\beta\rho)$$

$$(70) \quad E_\phi = \frac{j\beta H_0}{\omega\epsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} e^{-jn\phi} \frac{\partial}{\partial(\beta\rho)} J_n(\beta\rho)$$

3.5. Onda espalhada. De forma similar, a onda espalhada deve ser escrita como uma composição de funções de Hankel de segunda espécie, uma vez que se trata de uma onda viajante. Para o modo TM^z :

$$\vec{E}^s = \mathcal{E}_z^s \hat{a}_z$$

$$(71) \quad \mathcal{E}_z^s = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \mathbf{H}_n^{(2)}(\beta\rho)$$

onde os coeficientes \mathbf{c}_n são dados por:

$$(72) \quad \mathbf{c}_n = (-j)^{-n} \frac{\mathbf{J}_n(\beta R)}{\mathbf{H}_n^{(2)}(\beta R)} e^{m\phi}$$

sendo R o raio do cilindro. Combinando 72 com 71 e aplicando as equações 66 e 67 ao resultado, chegamos a:

$$(73) \quad \mathcal{H}_\rho^{(s)} = \frac{E_0}{j\mathbb{W}\omega\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nj^{1-n} \frac{\mathbf{J}_n(\beta R)}{\mathbf{H}_n^{(2)}(\beta R)} \mathbf{H}_n^{(2)}(\beta\rho) e^{m\phi}$$

$$(74) \quad \mathcal{H}_\phi = -\frac{\beta E_0}{j\mathbb{W}\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} \frac{\mathbf{J}_n(\beta R)}{\mathbf{H}_n^{(2)}(\beta R)} \left[\frac{\partial}{\partial(\beta\rho)} \mathbf{H}_n^{(2)}(\beta\rho) \right] e^{m\phi}$$

Para o modo TE^z , por sua vez, teremos [BALANIS 2012 8]:

$$\vec{H}^s = \mathcal{H}_z^s \hat{a}_z$$

$$(75) \quad \mathcal{H}_z^s = H_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{d}_n \mathbf{H}_n^{(2)}(\beta\rho)$$

$$(76) \quad \mathbf{d}_n = -(j)^{-n} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial(\beta\rho)} \mathbf{J}_n(\beta\rho)}{\frac{\partial}{\partial(\beta\rho)} \mathbf{H}_n^{(2)}(\beta\rho)} \right] \bigg|_{\rho=R} e^{m\phi}$$

$$(77) \quad \mathcal{E}_\rho^{(s)} = \frac{jH_0}{\mathbb{E}\omega\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nj^{1-n} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial(\beta\rho)} \mathbf{J}_n(\beta\rho)}{\frac{\partial}{\partial(\beta\rho)} \mathbf{H}_n^{(2)}(\beta\rho)} \right] \bigg|_{\rho=R} \mathbf{H}_n^{(2)}(\beta\rho) e^{m\phi}$$

$$(78) \quad \mathcal{E}_\phi = \frac{\beta H_0}{j\mathbb{E}\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial(\beta\rho)} \mathbf{J}_n(\beta\rho)}{\frac{\partial}{\partial(\beta\rho)} \mathbf{H}_n^{(2)}(\beta\rho)} \right] \bigg|_{\rho=R} \left[\frac{\partial}{\partial(\beta\rho)} \mathbf{H}_n^{(2)}(\beta\rho) \right] e^{m\phi}$$

3.6. Corrente na superfície do cilindro. A densidade de corrente J na superfície do cilindro é igual à componente tangencial do campo magnético no local ($\rho = R$). Assim [BALANIS 2012 8]:

$$(79) \quad J = H_{\phi}^{(t)}(\beta R)$$

4. IMPLEMENTAÇÃO

As equações 65 a 79 foram implementadas no Matlab conforme a listagem seguinte:

LISTING 1. probcyl.m

```

1 % Parâmetros do problema (em metros)
2 R = 1; % raio do cilindro
3 lambda = [0.3 1 3]; % comprimento de onda
4 % Outros valores
5 infy = 20; % controla quantas componentes serão integradas
6 step = 10; % resolução angular
7 prec = 10; % resolução radial
8 scale = pi()/step; % conversão de unidades
9 Eo = 1; % intensidade do campo incidente
10
11 % Funções auxiliares
12 function [b,c] = Calc_bc(m, alpha)
13 % Calcula os coeficientes an, bn e cn, com 0 <= n <= m
14 b = c = zeros(m,1);
15 for n = 1:m
16     a = j^(-n) * (2 * n + 1) / (n * (n + 1) );
17     b(n) = - a * Jotalinha(n, alpha) / Haga2linha(n, alpha);
18     c(n) = - a * Jota(n, alpha) / Haga2(n, alpha);
19 end
20 end
21
22 function [Jlinha] = Jotalinha(n, alpha)
23 % Calcula a derivada da função de Bessel de primeira espécie esférica modificada
24 Jlinha = Jota(n - 1, alpha) - n / alpha * Jota(n, alpha);
25 end
26
27 function [H2linha] = Haga2linha(n, alpha)
28 % Calcula a derivada da função de Hankel de segunda espécie esférica modificada
29 H2linha = Haga2(n - 1, alpha) - n / alpha * Haga2(n, alpha);
30 end
31
32 function [H2linhalinha] = Haga2linhalinha(n, alpha)
33 % Calcula a derivada segunda da função de Hankel de segunda espécie esférica modificada
34 H2linhalinha = alpha * Haga2(n - 2, alpha) + 2 / alpha * Haga2(n - 1, alpha) + n ^2 /
    alpha * Haga2(n, alpha);
35 end
36
37 function [Hn2] = Haga2(n, alpha)
38 % Calcula a função de Hankel de segunda espécie esférica modificada
39 Hn2 = sqrt(pi/2 * alpha) * besselh(n + 1/2, 2, alpha, 0);
40 end
41

```

```

42 function [Jn] = Jota(n, alpha)
43 % Calcula a função de Bessel de primeira espécie esférica modificada
44 Jn = sqrt(pi/2 * alpha) * besselj(n + 1/2, alpha, 0);
45 end
46
47 function [p1] = Pl(n, theta)
48 % Calcula a função de Legendre associada
49 if n <= 0
50     p1 = 0;
51 else
52     Pn = legendre(n, cos(theta));
53     p1 = Pn(end);
54 end
55 end
56
57 function [p1] = Pel(n, theta)
58 % Calcula a função de Legendre associada
59 p1 = n / (theta^2 - 1) * (theta * Pl(n, theta) - Pl(n - 1, theta));
60 end
61
62 function [p1] = Pelinhal(n, theta)
63 % Calcula a função de Legendre associada
64 theta2 = theta^2;
65 c1 = (n - 1) * theta2 - 1;
66 c2 = 2 * (n + 1) * theta;
67 p1 = n / sin(theta) / (theta2 - 1)^2 * (c1 * Pl(n, theta) + c2 * Pl(n - 1, theta) + n
    * Pl(n - 2, theta));
68 end
69
70 function [E] = Calc_E(m, alpha, theta, phi, b, c)
71 % Calcula o campo elétrico espalhado na posição dada
72 costheta = cos(theta);
73 sentheta = sin(theta);
74 cosphi = cos(phi);
75 senphi = sin(phi);
76 sEr = sEphi1 = sEphi2 = sEtheta1 = sEtheta2 = 0;
77 for n = 1:m
78     sEr = sEr + b(n) * (Haga2linhalinha(n, alpha) + Haga2(n, alpha)) * Pel(n, theta);
79     if sentheta != 0
80         sEtheta1 = sEtheta1 + j * b(n) * Haga2linha(n, alpha) * Pelinhal(n, theta);
81         sEtheta2 = sEtheta2 + c(n) * Haga2(n, alpha) * Pel(n, theta);
82         sEphi1 = sEphi1 + j * b(n) * Haga2linha(n, alpha) * Pel(n, theta);
83         sEphi2 = sEphi2 + c(n) * Haga2(n, alpha) * Pelinhal(n, theta);
84     end
85 end
86 Er = -j * cosphi * sEr;
87 if sentheta != 0
88     Etheta = cosphi / alpha * (sentheta * sEtheta1 - sEtheta2 / sentheta);
89     Ephi = senphi / alpha * (sEphi1 / sentheta - sEphi2 * sentheta);
90 else
91     Etheta = Ephi = 0;
92 end
93 E = [Er, Etheta, Ephi];
94 end
95
96 function [Er,Etheta,Ephi] = Calc_Esfera(l, prec, step, scale, m)
97 % Calcula as componentes do campo elétrico em cada ponto do espaço, para a geometria
    dada
98 Er=zeros(prec,step,step);

```

```

99  Etheta=zeros(prec,step,step);
100  Ephi=zeros(prec,step,step);
101  for qr = 1:prec
102      alpha = 2 * pi * qr * l ;
103      for qphi = 1:step
104          phi = qphi * 2 * scale;
105          for qtheta = 1:step
106              theta = qtheta * scale;
107              [b,c] = Calc_bc(m, alpha);
108              E = Calc_E(m, alpha, theta, phi, b, c) ;
109              Er(qr, qphi, qtheta) = E(1);
110              Etheta(qr, qphi, qtheta) = E(2);
111              Ephi(qr, qphi, qtheta) = E(3);
112          end
113      end
114  end
115 end
116
117 for i=1:3
118     [Er,Etheta,Ephi] = Calc_Esfera(R / lambda(i), prec, step, scale, infty);
119 end
    
```

Foram simuladas situações onde o comprimento da onda λ assume os valores de $0.01R$ (onda curta), R (onda média) e $100R$ (onda longa). O valor de n pôde variar de -5 a 5 , apenas, com resultados satisfatórios, e o incremento a ser usado para ρ e para ϕ para os quais se calcularam os campos) foram fixadas em 1 m e 1° , respectivamente. Essas constantes podem ser alteradas facilmente com a edição do programa.

Para as derivadas das funções de Bessel e de Hankel que aparecem nas equações, utilizaram-se as identidades [WOLFRAM 2015 1, WEISSTEIN 2015 3]:

$$(80) \quad \frac{\partial J_n(z)}{\partial(z)} = J_{n-1}(z) - \frac{n}{z} J_n(z)$$

$$(81) \quad \frac{\partial H_n^{(2)}(z)}{\partial(z)} = \frac{1}{2} [H_{n-1}^{(2)}(z) - H_{n+1}^{(2)}(z)]$$

Para expressar as equações em função de λ , substituímos $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ e:

$$\begin{aligned}
 \omega &= 2\pi f \\
 &= \frac{2\pi c}{\lambda} \\
 (82) \quad &= \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{\mu\epsilon}}
 \end{aligned}$$

Assim,

$$(83) \quad \omega_{\mathbb{P}} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\mathbb{P}}{\epsilon}} = \frac{2\pi\mathfrak{N}}{\lambda}$$

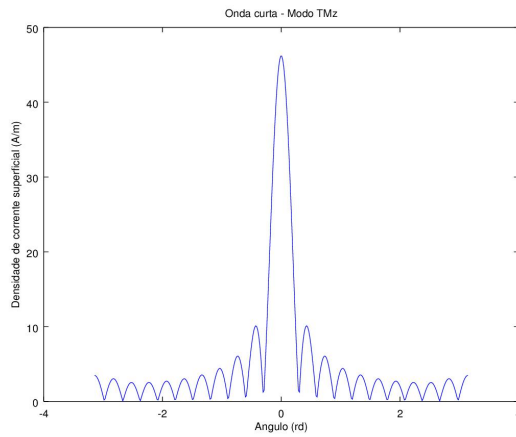
$$(84) \quad \omega_{\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mathbb{P}}} = \frac{2\pi}{\mathfrak{N}\lambda}$$

$$(85) \quad \frac{\beta}{\omega_{\mathbb{P}}} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2\pi\mathfrak{N}} = \frac{1}{\mathfrak{N}}$$

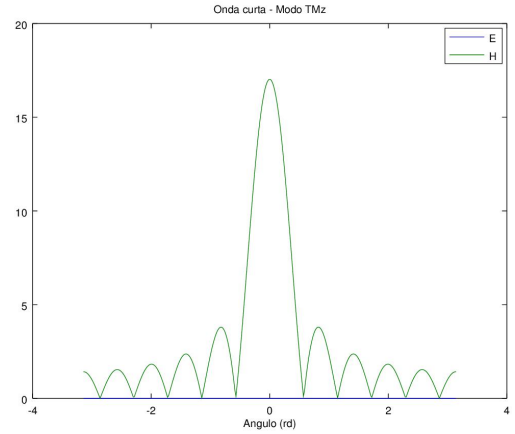
$$(86) \quad \frac{\beta}{\omega_{\epsilon}} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\mathfrak{N}\lambda}{2\pi} = \mathfrak{N}$$

onde \mathfrak{N} é a impedância do meio.

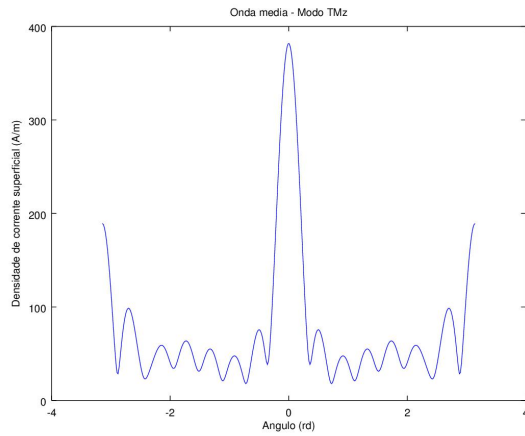
Os gráficos traçados pelo programa foram os seguintes:



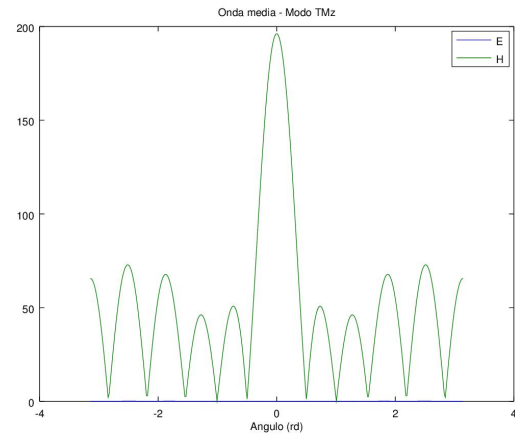
Corrente na superfície do cilindro
para $\lambda = 0.01 R$, modo TM^z



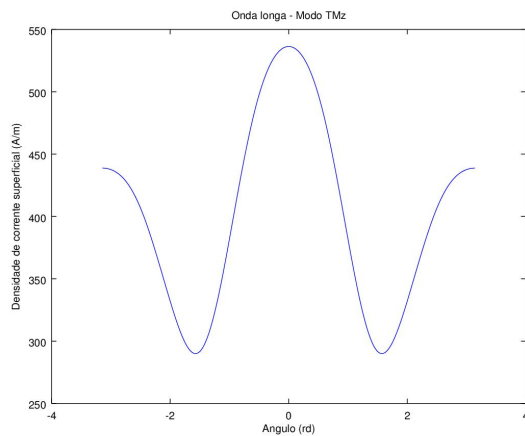
Intensidade dos campos na
superfície do cilindro para
 $\lambda = 0.01 R$, modo TM^z



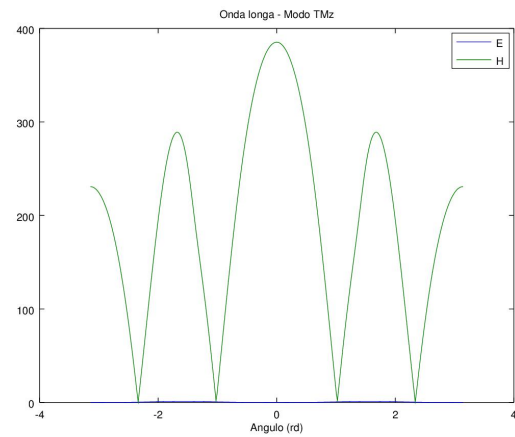
Corrente na superfície do cilindro para $\lambda = R$, modo TM^z



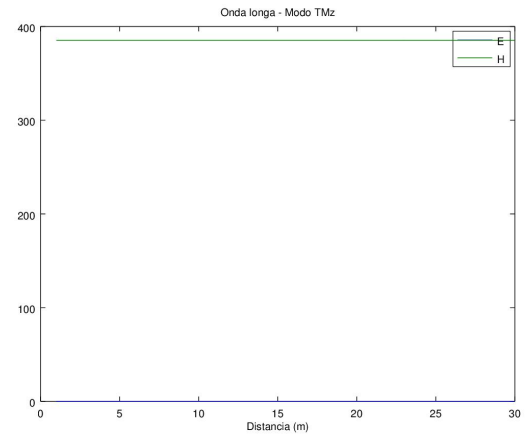
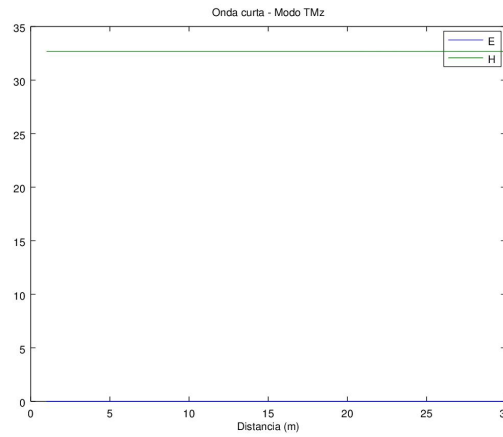
Intensidade dos campos na superfície do cilindro para $\lambda = R$, modo TM^z



Corrente na superfície do cilindro para $\lambda = 100 R$, modo TM^z

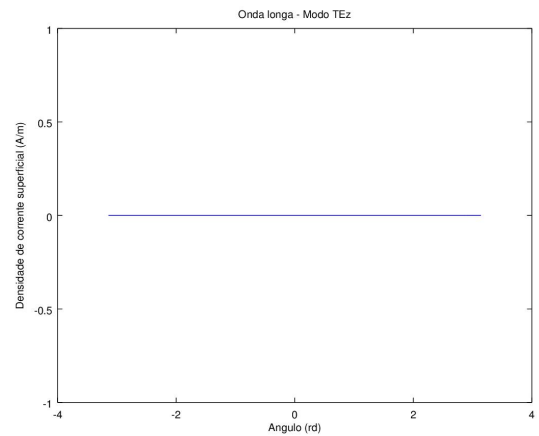
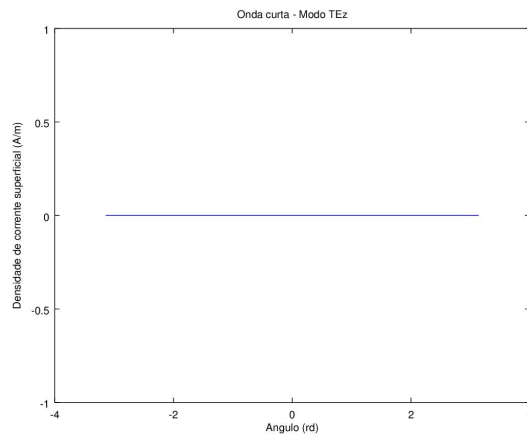


Intensidade dos campos na superfície do cilindro para $\lambda = 100 R$, modo TM^z



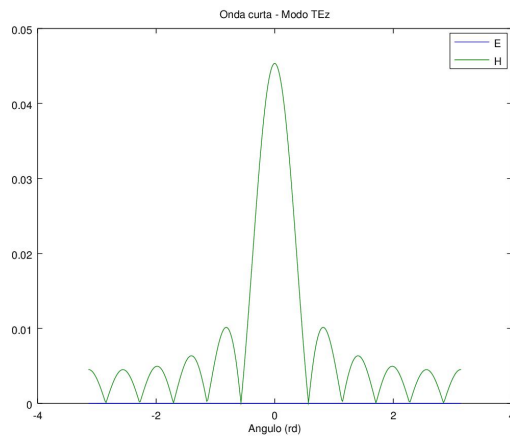
Intensidade dos campos em função da distância em $\phi = 0$ para $\lambda = 0.01 R$, modo TM^z

Intensidade dos campos em função da distância em $\phi = 0$ para $\lambda = 100 R$, modo TM^z

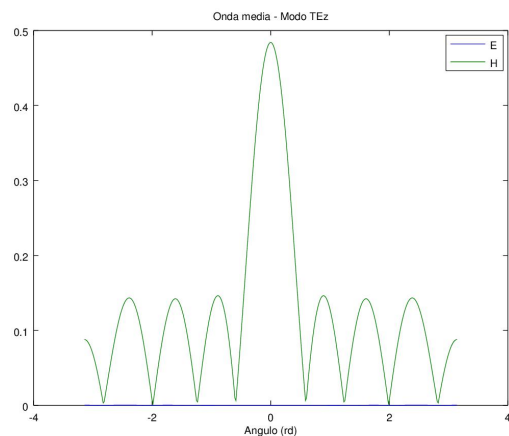


Corrente na superfície do cilindro para $\lambda = 0.01 R$, modo TE^z

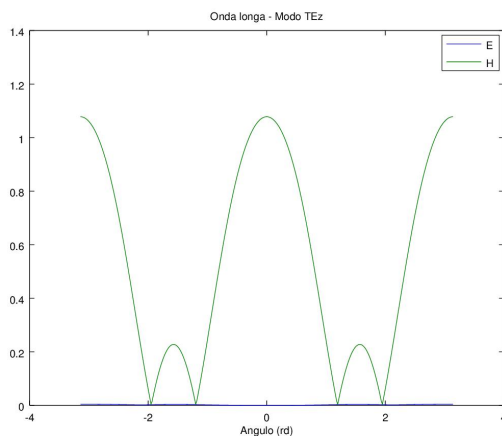
Corrente na superfície do cilindro para $\lambda = 100 R$, modo TE^z



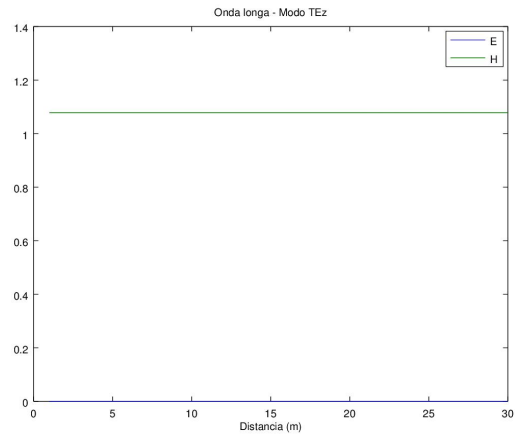
Intensidade dos campos na superfície do cilindro para $\lambda = 0.01 R$, modo TE^z



Intensidade dos campos na superfície do cilindro para $\lambda = R$, modo TE^z



Intensidade dos campos na superfície do cilindro para $\lambda = 100 R$, modo TE^z



Intensidade dos campos em função da distância em $\phi = 0$ para $\lambda = 100 R$, modo TE^z

As figuras mostram que, em cada caso, os campos elétrico e magnético variam da mesma forma. Pode-se notar que, como não há perdas, a intensidade do campo eletromagnético não varia com a distância ao cilindro. Além disso, só aparece corrente na superfície do cilindro no modo TM^z .

REFERÊNCIAS

- [BALANIS 2012 1] Constantine A. BALANIS, **Advanced Engineering Electromagnetics**, 2nd edition, Wiley, 2012, ISBN 978-0-470-58948-9, itens 3.1 e 3.2, pp. 99 a 101.
- [BALANIS 2012 2] Constantine BALANIS, *op. cit.*, item 1.7, pp. 21 a 22.
- [BALANIS 2012 3] Constantine BALANIS, *op. cit.*, item 3.3, pp. 101 a 102.
- [BALANIS 2012 4] Constantine BALANIS, *op. cit.*, item 3.4.2 pp. 110 a 114.
- [BALANIS 2012 5] Constantine BALANIS, *op. cit.*, itens 6.1 a 6.4, pp. 259 a 265.
- [BALANIS 2012 6] Constantine BALANIS, *op. cit.*, item 6.5.1, pp. 265 a 272.
- [BALANIS 2012 7] Constantine BALANIS, *op. cit.*, item 11, pag. 575.
- [BALANIS 2012 8] Constantine BALANIS, *op. cit.*, itens 11.4 a 11.5.2, pp. 599 a 614.
- [MACEDO 1988 1] Annita MACEDO, **Eletromagnetismo**, Guanabara, 1988, Formulário, pp. 619 a 628.
- [WEISSTEIN 2015 1] Eric WEISSTEIN, **WolframMathWorld** : Bessel Differential Equation. Disponível em <http://mathworld.wolfram.com/BesselDifferentialEquation.html>, acesso em 11/09/2015.
- [WEISSTEIN 2015 2] Eric WEISSTEIN, **WolframMathWorld** : Hankel Function of the First Kind. Disponível em <http://mathworld.wolfram.com/HankelFunctionoftheFirstKind.html>, acesso em 12/09/2015.
- [WEISSTEIN 2015 3] Eric WEISSTEIN, **WolframMathWorld** : Hankel Function of the Second Kind. Disponível em <http://mathworld.wolfram.com/HankelFunctionoftheSecondKind.html>, acesso em 12/09/2015.
- [WOLFRAM 2015 1] Stephen WOLFRAM, **WolframResearch** : Bessel function of the first kind: Differentiation. Disponível em <http://functions.wolfram.com/Bessel-TypeFunctions/BesselJ/20/01/02/>, acesso em 27/11/2015.

A solução de algumas integrais indefinidas foi obtida no site **Wolfram Alpha**:

(<http://www.wolframalpha.com/widget/widgetPopup.jsp?p=v&id=7d800d10b8bfcd949b17866c0679e786>)

Os gráficos foram preparados pelo **Octave 4.0.0**

(<https://www.gnu.org/software/octave/>)

O texto foi formatado com **pdflatex** em ambiente MiKTeX 2.9

(<http://miktex.org/download/>)