MÉTODOS NUMÉRICOS - TRABALHO

SÉRGIO CORDEIRO

1. Resolver o problema da seção 3.7.1 do Livro: Numerical Techinique in Electromagnetics with Matlab (Matthew N. O. Sadiku).
Descrever detalhadamente o problema
Apresentar gráficos de equipotenciais e campo elétrico
Calcular a impedância característica
Realizar análise numérica detalhada
Comentar os resultados detalhadamente

Sumário

1. Descrição do problema

1.1. Resumo. O problema demonstra uma aplicação do método das diferenças finitas no cálulo da impedância característica de uma linha de transmissão do tipo *microstrip* aberta. Com as simplificações feitas, é possível chegar ao resultado por meio dos seguintes passos:

1. calcular o potencial em todos os pontos da região por meio da equação de Laplace: $\nabla^2 V = 0$.
2. calcular o campo elétrico em todos os pontos a partir do potencial a partir da expressão $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$.

3. calcular a carga elétrica na região por meio da lei de Gauss:
$$q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$
4. calcular a capacitância da linha por meio da expressão $C_0 = \dfrac{q}{V_0}$.
5. calcular a indutância da linha pela expressão $L = \dfrac{\ell^2}{c^2 C_0}$.
6. calcular a impedância da linha pela expressão $Z_0 = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

Esses passos são detalhados a seguir.

1.2. **Cálculo do potencial em cada ponto.** Uma linha do tipo *microstrip* é construída a partir de uma placa de circuito impresso de dupla face. A geometria está ilustrada nas figuras abaixo.

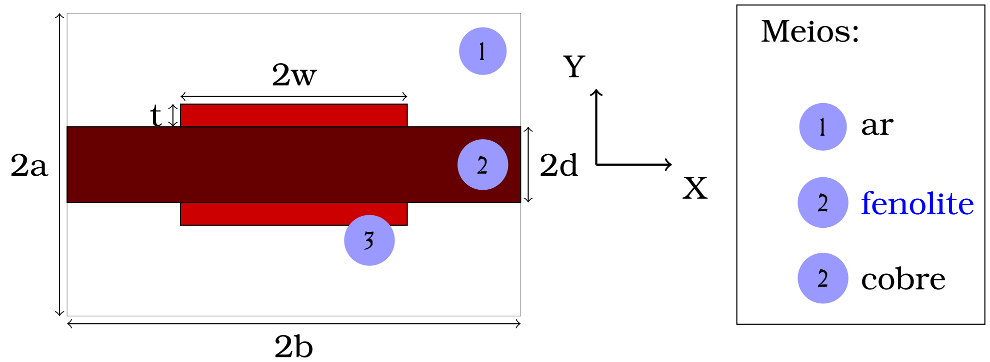

FIGURA 1. Seção transversal da linha de transmissão *microstrip*

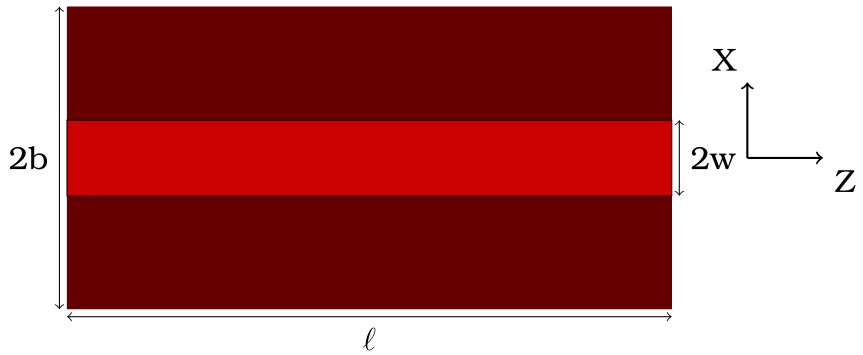

FIGURA 2. Vista superior da linha de transmissão *microstrip*

Para se calcular V em cada ponto, pode-se estabelecer um potencial V_0 em uma das superfícies condutoras e considerar que $V = 0$ a uma distância suficiente. Nesse caso, o campo magnético $\vec{H}$ será nulo e, uma vez que não há carga elétrica livre no interior dos meios dielétricos (1 e 2), o potencial deve obedecer à equação de Laplace:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 V &= 0 \\
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= 0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Esse caminho constitui uma simplificação valiosa, porque para $\vec{H}$ não nulo, seria preciso empregar a equação de onda, muito mais complexa, para resolver o problema.
Outra simplificação que se pode fazer é reconhecer que, devido à simetria do problema, só é necessário calcular o valor de V em um dos quadrantes, uma vez que $V(x, y) = V(-x, y) = V(y, -x) = V(-x, -y)$. Finalmente, uma simplificação adicional decorre de considerar todos os meios como diamagnéticos e sem perdas:

$$\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu^{(3)} = 0 \qquad (2)$$

$$\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} = 0 \qquad (3)$$

O cálculo do potencial pelo método das diferenças finitas se baseia na divisão da região de interesse por uma grade uniforme, cada célula possuindo largura h, como ilustrado nas figuras abaixo:

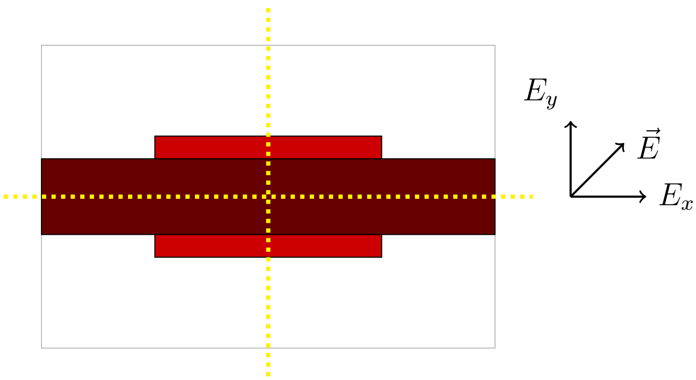

FIGURA 3. Eixos de simetria e vetor campo elétrico

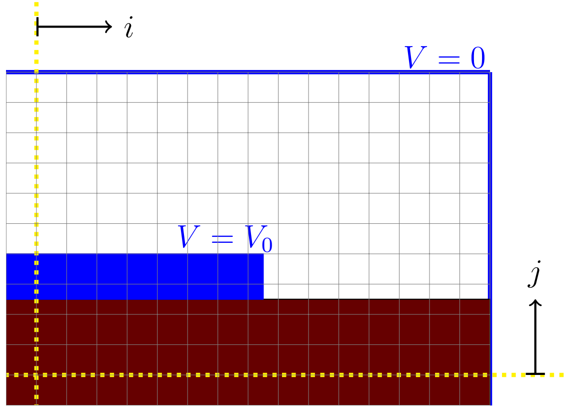

FIGURA 4. Região de trabalho e grade para integração

Em coordenadas retangulares, e utilizando a aproximação da derivada segunda pela fórmula central de segunda ordem, pode-se escrever a expressão 1 como:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{V(i+1,j) - 2V(i,j) + V(i-1,j)}{h^2} + \dots$$

$$\dots + \frac{V(i,j+1) - 2V(i,j) + V(i,j-1)}{h^2} = 0 \qquad \boxed{i,j \in \mathbb{N}}$$

$$\therefore 4V(i,j) = V(i+1,j) + V(i-1,j) + V(i,j+1) + V(i,j-1)$$

$$V(i,j) = \frac{1}{4}\Big[V(i+1,j) + V(i-1,j) + V(i,j+1) + V(i,j-1)\Big] \tag{4}$$

onde h é a largura da grade e i e j, os índices referentes aos eixos X e Y, respectivamente.

A fórmula 4 vale para todos os pontos onde a derivada segunda do potencial é contínua. Isso significa toda a região de interesse, com exceção das interfaces entre os meios. Nestes, há descontinuidade na derivada primeira de V na direção transversal à interface, e a derivada segunda não pode ser calculada. Para encontrar uma expressão para o potencial nas interfaces, aplica-se a lei de Gauss ao cubo de aresta infinitesimal $\delta\ell$ indicado na figura abaixo:

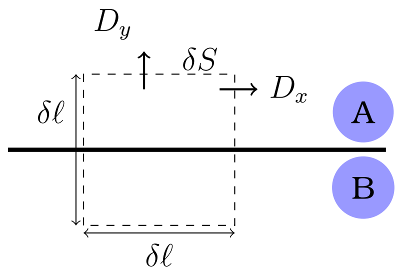

FIGURA 5. Superfície para aplicação da lei de Gauss na interface

As paredes desse cubo são sempre perpendiculares a uma das componentes do campo elétrico e paralelas à outra. Não há componentes de $\vec{D}$ na direção perpendicular ao plano da figura. Como $\delta\ell$ é infinitesimal, pode-se considerar que $\vec{D}$ é constante na direção paralela à interface. Assim:

$$\oint_{\delta S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\delta V} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{D} \right) d$$

$$\oint_{\delta S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\sum_m D_m \delta\ell \frac{\delta\ell}{2} = 0 \qquad \boxed{m \in (1,8)}$$

$$\sum_m D_m = 0$$

$$\therefore\ -D_x^{(x^-,y^+)} - D_x^{(x^-,y^-)} - D_y^{(x^-,y^-)} - D_y^{(x^+,y^-)} + D_x^{(x^+,y^-)} + \ldots$$
$$\ldots + D_x^{(x^+,y^+)} + D_y^{(x^+,y^+)} + D_y^{(x^-,y^+)} = 0$$

Como $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$:

$$\epsilon^{(A)} \left[-E_x^{(x^-,y^+)} + E_x^{(x^+,y^+)} + E_y^{(x^+,y^+)} + E_y^{(x^-,y^+)} \right] = \ldots$$
$$\ldots\ \epsilon^{(B)} \left[E_x^{(x^-,y^-)} + E_y^{(x^-,y^-)} + E_y^{(x^+,y^-)} - E_x^{(x^+,y^-)} \right] \tag{5}$$

onde A e B são os meios que interfaceiam e $\epsilon^{(A)}$ e $\epsilon^{(B)}$, suas respectivas permissividades elétricas.

Aplicando a derivada progressiva de primeira ordem, em lugar da derivada central de segunda ordem, tem-se:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{a}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{a}_y \qquad \Longrightarrow$$

(6)
$$E_x = \begin{cases} \dfrac{V(i,j) - V(i+1,j)}{h} & i > i_I \\ \\ \dfrac{V(i-1,j) - V(i,j)}{h} & i < i_I \end{cases}$$

$$E_y = \begin{cases} \dfrac{V(i,j) - V(i,j+1)}{h} & j > j_I \\ \\ \dfrac{V(i,j-1) - V(i,j)}{h} & j < j_I \end{cases}$$

onde i_I e j_I denotam a localização da superfície Gaussiana.

Para uma interface paralela ao eixo X, a aplicação de 6 a 5 resulta:

$$\epsilon^{(A)}\left[\frac{V(i,j) - V(i-1,j)}{h} + \frac{V(i,j) - V(i+1,j)}{h} + \frac{V(i,j) - V(i,j+1)}{h} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{V(i,j) - V(i,j+1)}{h}\right] = \epsilon^{(B)}\left[\frac{V(i-1,j) - V(i,j)}{h} + \frac{V(i,j-1) - V(i,j)}{h} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{V(i,j-1) - V(i,j)}{h} + \frac{V(i+1,j) - V(i,j)}{h}\right]$$

$$\begin{aligned}\left[4\epsilon^{(A)} + 4\epsilon^{(B)}\right] V(i,j) &= \epsilon^{(A)}\left[V(i-1,j) + V(i+1,j) + 2V(i,j+1)\right] + \ldots \\ &\ldots + \epsilon^{(B)}\left[V(i-1,j) + 2V(i,j-1) + V(i+1,j)\right] \\ &= \left[\epsilon^{(A)} + \epsilon^{(B)}\right]\left[V(i+1,j) + V(i-1,j)\right] + \ldots \\ &\ldots + 2\epsilon^{(A)}V(i,j+1) + 2\epsilon^{(B)}V(i,j-1)\end{aligned}$$

(7)
$$\therefore V(i,j) = \frac{1}{4}\left[V(i+1,j) + V(i-1,j)\right] + \frac{\epsilon^{(A)}V(i,j+1) + \epsilon^{(B)}V(i,j-1)}{2(\epsilon^{(A)} + \epsilon^{(B)})}$$

De forma similar, para uma interface paralela ao eixo Y:

(8)
$$V(i,j) = \frac{1}{4}\left[V(i,j+1) + V(i,j-1)\right] + \frac{\epsilon^{(A)}V(i+1,j) + \epsilon^{(B)}V(i-1,j)}{2(\epsilon^{(A)} + \epsilon^{(B)})}$$

As equações 7 e 8 se igualam a 4 para $\epsilon^{(A)} = \epsilon^{(B)})$, ou seja, quando não há interface no local.

Nos eixos de simetria, o campo elétrico deve se anular, pois o potencial em ambos os lados é igual. Assim, para $x = 0$, teremos:

(9) $$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \implies V(-1, j) = V(1, j)$$

E de forma similar, para $y = 0$:

(10) $$\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \implies V(i, -1) = V(i, j)$$

Essas expressões devem ser aplicadas à equação 4 sobre os eixos de simetria ($i = 0$ e $j = 0$), o que resulta:

(11) $$V(i,j) = \frac{1}{4}\left[V(i+1,j) + V(i-1,j) + 2V(i,j+1)\right] \qquad /j = 0 \land i > 0$$

(12) $$V(i,j) = \frac{1}{4}\left[2V(i+1,j) + V(i,j+1) + V(i,j-1)\right] \qquad /i = 0 \land j > 0$$

(13) $$V(i,j) = \frac{1}{4}\left[2V(i+1,j) + 2V(i,j+1)\right] \qquad /i = 0 \land j = 0$$

Resumindo: o potencial V deve ser calculado pelo método das diferenças finitas, subdividindo-se o quadrante superior direito da região em uma grade de largura h constante, considerando as expressões seguintes:

$$V(i,j) = \begin{cases} 0 & i,j \in \{\mathfrak{R}_1\} \\ V_0 & i,j \in \{\mathfrak{R}_2\} \\ \dfrac{V(i+1,j) + V(i-1,j) + V(i,j+1) + V(i,j-1)}{4} & i,j \in \{\mathfrak{R}_3 \cup \mathfrak{R}_6\} \\ \dfrac{V(i+1,j) + V(i-1,j)}{4} + \dfrac{\epsilon^{(A)}V(i,j+1) + \epsilon^{(B)}V(i,j-1)}{2(\epsilon^{(A)} + \epsilon^{(B)})} & i,j \in \{\mathfrak{R}_4\} \\ \dfrac{2V(1,j) + V(0,j+1) + V(0,j-1)}{4} & i,j \in \{\mathfrak{R}_5\} \\ \dfrac{2V(i,1) + V(i+1,0) + V(i-1,0)}{4} & i,j \in \{\mathfrak{R}_7\} \end{cases}$$

onde as subregiões $\mathfrak{R}_n$ são:

$$\mathfrak{R}_1 : \Big(i = N_i\Big) \vee \Big(j = N_j\Big)$$
$$\mathfrak{R}_2 : \Big(0 \leq i \leq i_w\Big) \wedge \Big(j_d \leq j \leq j_w\Big)$$
$$\mathfrak{R}_3 : \Big(0 \leq i \leq N_i\Big) \wedge \Big(0 \leq j \leq j_d\Big)$$
$$\mathfrak{R}_4 : \Big(i_w \leq i \leq N_i\Big) \wedge \Big(j = j_d\Big)$$
$$\mathfrak{R}_5 : \Big(0 \leq i \leq N_i\Big) \wedge \Big(j = 0\Big)$$
$$\mathfrak{R}_6 : \Big[\Big(i_1 \leq i \leq i_2\Big) \wedge \Big(i_w \leq i \leq N_i\Big)\Big] \vee \Big(j_w \leq j \leq N_j\Big)$$
$$\mathfrak{R}_7 : \Big(i = 0\Big) \wedge \Big(0 \leq j \leq N_j\Big)$$

onde N_i e N_j são os limites de i e j, e i_w, j_e e j_w são as posições das interfaces entre os meios; todos esses valores dependem das dimensões do problema e do valor de h escolhido. A figura abaixo mostra as subregiões existentes:

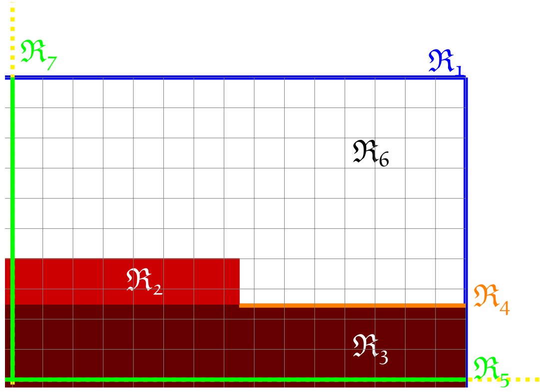

FIGURA 6. Subregiões para integração

1.3. **Cálculo do campo elétrico.** A partir do resultado, as componentes do campo elétrico em cada ponto podem ser calculadas pela aplicação da derivada primeira adequada. Essa derivada será a derivada central de segunda ordem nos pontos distantes das interfaces e dos limites da grade; nos demais pontos, será necessário usar uma derivada de primeira ordem, como nas equações 5.
O cálculo do campo elétrico não é estritamente necessário para o cálculo da impedância da linha, porque todos os valores relevantes podem

ser obtidos diretamente do potencial, como será mostrado em seguida (equação 14) .

1.4. **Cálculo da carga elétrica na região.** Pode-se obter a carga total q existente na região aplicando-se a lei de Gauss a um entorno da superfície condutora, conforme mostram as figuras abaixo:

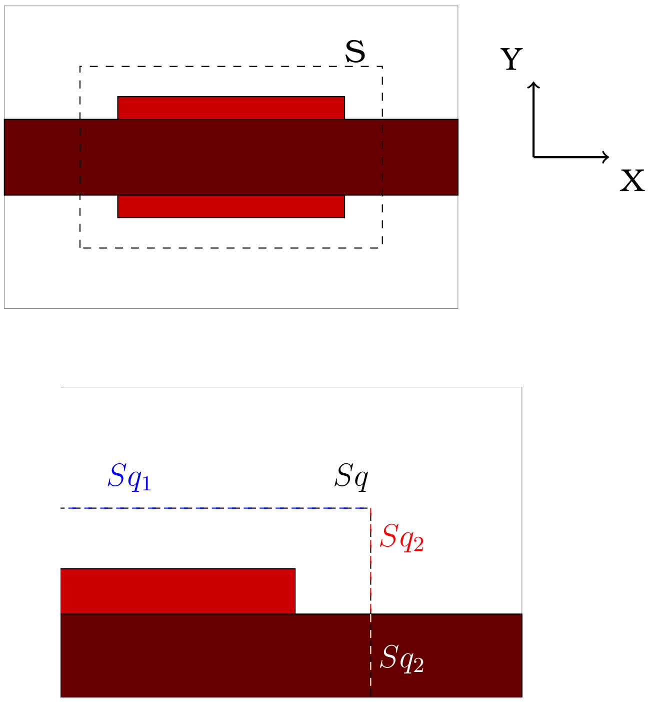

FIGURA 7. Superfícies para aplicação da lei de Gauss

$$q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Podem-se usar os valores de $\vec{E}$ encontrados anteriormente para calcular $\vec{D}$, mas também podem-se empregar diretamente os valores do potencial:

$$\begin{aligned}
q &= \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \\
&= \oint_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} \\
&= 4 \int_{Sq} \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} \\
&= 4 \left\{ \int_{Sq_1} \epsilon^{(A)} E_y \, dS + \int_{Sq_2} \epsilon^{(A)} E_x \, dS + \int_{Sq_3} \epsilon^{(B)} E_x \, dS \right\}
\end{aligned}$$

Empregando a derivada central de segunda ordem para calcular $\vec{E}$:

$$\begin{aligned}
q &= 4 \left\{ \sum_{Sq_1} \epsilon^{(A)} \frac{V(i+1,j) + V(i-1,j)}{2h} h\ell + \sum_{Sq_2} \epsilon^{(A)} \frac{V(i,j+1) + V(i,j-1)}{2h} h\ell + \ldots \right. \\
&\qquad \left. \ldots + \sum_{Sq_3} \epsilon^{(B)} \frac{V(i,j+1) + V(i,j-1)}{2h} h\ell \right\} \\
&= 2\ell \left\{ \epsilon^{(A)} \sum_{Sq_1} V(i+1,j) + V(i-1,j) + \epsilon^{(A)} \sum_{Sq_2} V(i,j+1) + V(i,j-1) + \ldots \right. \\
&\qquad \left. \ldots + \epsilon^{(B)} \sum_{Sq_3} V(i,j+1) + V(i,j-1) \right\} \qquad (14)
\end{aligned}$$

A carga também poderia ser calculada a partir do Laplaciano, pois:

$$\nabla^2 V = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\epsilon} \qquad (15)$$

e

$$q = \int_V \boldsymbol{\rho} \, dV \qquad (16)$$

Esse cálculo alternativo não foi feito, pois o objetivo do trabalho é comparar métodos para encontrar-se o potencial, não a carga.

1.5. **Cálculo dos parâmetros da linha.** A capacitância da linha pode ser calculada pela expressão:

$$C = \frac{q}{V_0} \qquad (17)$$

A indutância da linha pode ser calculada pela expressão:

$$L = \frac{\ell^2}{c^2 C_0} \tag{18}$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo e C_0 é a capacitância da linha quando todo o dielétrico for substituído pelo vácuo.
A impedância característica da linha, finalmente, é dada por:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{\frac{L}{C}} \\ &= \sqrt{\frac{\ell^2}{c^2 C_0 C}} \qquad (19) \\ &= \frac{1}{c\sqrt{\frac{C_0}{\ell}\frac{C}{\ell}}} \qquad (20) \end{aligned}$$

Percebe-se, pelas equações 20, 17 e 14, que o valor de ℓ não precisa ser dado para que o problema seja resolvido.

2. Solução computacional

O problema foi resolvido através MATLAB, por isso os índices i e j variaram no intervalo $(1, N_a + 1)$ em lugar de no intervalo $(0, N_a)$, como ocorreu na seção anterior. Os valores de permissividade elétrica relativa usados foram:

$$\epsilon_r^{(1)} = 1$$
$$\epsilon_r^{(2)} = 2.35$$

Os parâmetros da linha escolhidos foram os seguintes:

$$\begin{aligned} 2a &= 5.0\ cm \\ 2b &= 5.0\ cm \\ 2d &= 1.0\ cm \\ 2w &= 2.0\ cm \\ t &= 0.001\ cm \end{aligned}$$

que são os valores usados por [SADIKU 2009]. O uso desses parâmetros permitiu a comparação dos resultados obtidos com os listados no livro. O programa listado considera que $t << h$ sempre, o que simplifica o cálculo. Esse programa contém pequenos erros: não calcula o potencial na origem ($x = y = 0$), por exemplo; além disso, ele usa um método iterativo que não leva em conta a precisão obtida em cada iteração como critério de parada. Mesmo assim, para viabilizar a comparação dos resultados obtidos, implementamos o método iterativo com características similares. Além disso, implementamos também o método alternativo de solução do sistema linear:

$$\mathbf{AV} = \mathbf{b}$$

onde **A** é a matriz dos coeficientes, que expressa o valor do potencial em um ponto p em função do potencial dos outros pontos, e **b** é um vetor que expressa a contribuição dos pontos fixos para o potencial em p.
O código para cálculo do potencial está listado abaixo.

LISTING 1. CalcVS.m

```
function V = CalcVS(nx, ny, jd, iw, epsilonr)
% Calcula o potencial elétrico, por meio da solução de um sistema linear, na região limitada por 0 <= i <= 'nx' e 0 <= j <= 'ny', com dielátrico de permissividade 'epsilonr' na posição (0 <= i <= 'nx', 0 <= j <= 'jd') e placa condutora na posição (0 <= i <= 'iw', j = 'jd').
  % Criação dos mapas direto e inverso dos pontos
  nA = (nx - 1) * (ny - 1) - iw;
  nb = nx + ny + iw - 1;
  map = zeros(nA + nb, 3);
  imap = zeros(nx, ny);
  idx = [1, 1 + nA];
  for i = 1:nx
    for j = 1:ny
      if (j == jd) && (i <= iw)
        % placa condutora
        parms = [2 1];
      elseif (i == nx) || (j == ny)
        % entorno
        parms = [2 0];
      elseif (j == jd)
        % interface entre o substrato e o ar
        parms = [1 2];
      elseif (i == 1) || (j == 1)
        % eixos X e Y
        parms = [1 3];
      else
        % ar ou substrato
        parms = [1 4];
      end
      point = idx(parms(1));
      idx(parms(1)) = idx(parms(1)) + 1;
      map(point,:) = [i, j, parms(2)];
      imap(i,j) = point;
    end
  end
  % Montagem da matriz de coeficientes e do vetor de contribuição dos pontos fixos
  global epsilon0;
  epsilon = [1 epsilonr];
  p = epsilon / (2 * sum(epsilon));
  A = zeros(nA, nA);
  b = zeros(nA,1);
  for point = 1:nA
```

```
    parms = num2cell(map(point,:));
    [i, j, type] = deal(parms{:});
    A(point,point) = 4;
    near = [0, imap(i+1,j), 0, imap(i,j+1)];
    if (i > 1)
      near(1) = imap(i-1,j);
    else
      near(1) = near(2);
    end
    if (j > 1)
      near(3) = imap(i,j-1);
    else
      near(3) = near(4);
    end
    for l = 1:4
      pos = near(l);
      if pos <= nA
        if type == 2 && l == 3
          factor = - 4 * p(2);
        elseif type == 2 && l == 4
          factor = - 4 * p(1);
        else
          factor = - 1;
        end
        A(point,pos) = A(point,pos) + factor;
      else
        b(point) = b(point) + map(pos,3);
      end
    end
  end
  % Resolve o sistema
  x = A \ b;
  % Combina os pontos fixos e os livres
  V = zeros(nx,ny);
  for i = 1:nx
    for j = 1:ny
      point = imap(i,j);
      type = map(point, 3);
      if type == 1
        V(i,j) = 1;
      elseif point <= nA
        V(i,j) = x(point);
      end
    end
  end
  % Calcula o Lapalaciano, para testar a solução
  %{
  lap = zeros(anx-2,any-2);
  for i = 2:anx-1
    for j = 2:any-1
      lap(i,j) = V(i,j) - 0.25 * (V(i+1,j) + V(i-1,j) + V(i,j+1) + V(i,j-1));
    end
  end
  imagesc(lap), colorbar;
  %}
end
```

LISTING 2. CalcVI.m

```
function V = CalcVI(nx, ny, jd, iw, epsilonr, nt)
% Calcula o potencial elétrico, por um processo iterativo, na região limitada por 0 <= i <= 'nx' e 0 <= j <= 'ny', com dielátrico de permissividade 'epsilonr' na posição (0 <= i <= 'nx', 0 <= j <= 'jd') e placa condutora na posição (0 <= i <= 'iw', j = 'jd').
  % Inicializa o potencial
  V = zeros(nx, ny);
  V(1:iw, jd) = 1;
  epsilon = [1 epsilonr];
  p = 2 * epsilon / (sum(epsilon));
  % Recalcula o potencial 'nt' vezes
  for k=1:nt
    for i=1:(nx - 1)
      for j=1:(ny - 1)
        if ( (j == jd) && (i <= iw) )
          % placa condutora; não é preciso recalcular V
        elseif (j == jd)
          % interface entre o substrato e o ar
          V(i,j) = 0.25 * (V(i+1,j) + V(i-1,j) + p(1)* V(i,j+1) + p(2)* V(i,j-1));
        elseif ((i == 1) && (j == 1))
          % origem
          V(i,j) = 0.25 * (2 * V(i+1,j) + 2 * V(i,j+1));
        elseif (i == 1)
          % eixo Y
          V(i,j) = 0.25 * (2 * V(i+1,j) + V(i,j+1) + V(i,j-1));
        elseif (j == 1)
          % eixo X
          V(i,j) = 0.25 * (V(i+1,j) + V(i-1,j) + 2 * V(i,j+1));
        else
          % ar ou substrato
          V(i,j) = 0.25 * (V(i+1,j) + V(i-1,j) + V(i,j+1) + V(i,j-1));
        end
      end
    end
    % remover os comentários da linha abaixo para plotagem dos resultados parciais
    %figure(1), imagesc(flipud(V')), colorbar, title([num2str(k), '/', num2str(nt)]); drawnow;
  end
end
```

O código para cálculo do campo elétrico e plotagem dos gráficos é o seguinte:

LISTING 3. Grad.m

```
function v = Grad(f, h)
% Calcula o gradiente do campo escalar 'f' em cada ponto da grade de largura 'h'. Usa diferenças progressivas de primeira ordem; nos limites superiores, repete o valor calculado para a penúltima linha/coluna.
  numxy = size(f);
  vx = zeros(numxy);
  vy = vx;
  vx(1:(numxy(1) - 1), 1:(numxy(2) - 1)) = (f(2:(numxy(1)), 1:(numxy(2) - 1)) - f(1:(numxy(1) - 1), 1:(numxy(2) - 1))) / h;
  vy(1:(numxy(1) - 1), 1:(numxy(2) - 1)) = (f(1:(numxy(1) - 1), 2:(numxy(2))) - f(1:(numxy(1) - 1), 1:(numxy(2) - 1))) / h;
  vx(1:(numxy(1) - 1), end) = vx(1:(numxy(1) - 1), end - 1);
  vy(1:(numxy(1) - 1), end) = vy(1:(numxy(1) - 1), end - 1);
  vx(end,:) = vx(end-1,:);
  vy(end,:) = vy(end-1,:);
  v = {vx, vy};
end
```

LISTING 4. plotVE.m

```
function plotVE(V, E, fig)
% Plota o gráfico do potencial 'V' e do campo elétrico 'E' na figura 'fig'.
  feature('DefaultCharacterSet', 'UTF8');
  % Equipotenciais
  n = size(V, 1);
  idx = linspace(1, n, n);
  [X, Y] = meshgrid(idx, idx);
  hf = figure(fig);
  contour(X, Y, V'), colorbar;
  % Vetores do campo elétrico
  % ... seleciona apenas 20 linhas e 20 colunas, para melhor apresentação
  [Ex, Ey] = E{:};
  n = size(Ex);
  tam = min(n, [20 20]);
  idx = round(linspace(1, n(1), tam(1)));
  idy = round(linspace(1, n(2), tam(2)));
  [X, Y] = meshgrid(idx, idy);
  selx = - Ex(idx, idy);
  sely = - Ey(idx, idy);
  figure(fig), hold on, quiver(Y, X, selx, sely), title('Campo elétrico');
  hold off;
  saveas(hf, strcat('plotVE', num2str(fig), '.jpg'));
end
```

Finalmente, o código para cálculo da carga e da impedância da linha e controle geral da execução está listado abaixo:

LISTING 5. CalcQ.m

```
function q = CalcQ(V, iout, jout, jd, epsilon)
% Calcula a carga por meio da lei de Gauss a partir do potencial 'V'
  % Parâmetros para o cálculo
  % ... intervalos a considerar
  interval = [
    1, 1, jout + 1, jout + 1;
    1, 1, jout, jout;
    2, iout, jout + 1, jout + 1;
    2, iout, jout, jout;
    iout + 1, iout + 1, jd + 1, jout;
    iout, iout, jd + 1, jout;
    iout + 1, iout + 1, 2, jd - 1;
    iout, iout, 2, jd - 1;
    iout + 1, iout + 1, 1, jd - 1;
    iout, iout, 1, jd - 1;
    iout + 1, iout + 1, jd, jd;
    iout, iout, jd, jd;
    iout + 1, iout + 1, jd, jd;
    iout, iout, jd, jd;
    ];
  % ... pesos e permissividades em cada intervalo
  mult = epsilon([1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 1 1 2 2]) .* [-0.5 0.5 -1 1 -1 1 -1 1 -0.5 0.5
      -0.5 0.5 -0.5 0.5];
  % Cálculo pela lei de Gauss
  q = 0;
  for k = 1:14
    q = q + sum(V(interval(k,1):interval(k,2), interval(k,3):interval(k,4))) * mult(k);
  end
end
```

LISTING 6. CalcZ0.m

```
function Z0 = CalcZ0(h, nt)
% Resolve o exemplo 3.6 do livro "Numerical Techniques in Electromagnetic with MATLAB", de Matthew N. O. Sadiku, terceira edição, pp. 132 a 159}.
% 'h' é o tamanho da malha usada para o cálculo do potencial pelo método das diferenças finitas, e 'nt' é o número de iterações para o método iterativo. Quando 'nt' = 0, usa-se o método de solução de um sistema linear.
  % Inicialização
  % ... constantes físicas:
  global epsilon0 c;
  [epsilon0, c] = deal(8.81e-12, 3e8);
  % ... parâmetros do problema:
  % ...... dimensões em cm
  [a, b, d, w, epsilonr] = deal(2.5, 2.5, 0.5, 1.0, 2.35);
  % ... posições fixas
  pos = num2cell(round([a b d w]/h));
  [nx, ny, jd, iw] = deal(pos{:});
  % Cálculos
  % ... calcula o potencial duas vezes, uma com e a outra sem o dielétrico
  if nt > 0
    V0 = CalcVI(nx, ny, jd, iw, 1, nt);
    Vd = CalcVI(nx, ny, jd, iw, epsilonr, nt);
  else
    V0 = CalcVS(nx, ny, jd, iw, 1);
    Vd = CalcVS(nx, ny, jd, iw, epsilonr);
  end
  % ... calcula o campo elétrico para cada distribuição de potencial
  E0 = Grad(V0, h * 0.01);
  Ed = Grad(Vd, h * 0.01);
  % ... plota os gráficos de V e E
  plotVE(V0, E0, 2);
  plotVE(Vd, Ed, 4);
  % ... calcula a carga elétrica e a capacitância, considerando que a diferença de potencial aplicada foi 1 Volt
  % ...... a superfície Gaussiana pode estar em qualquer lugar
  out = round(([iw jd] + [nx ny]) / 2);
  %out = [iw jd] + 3;
  %out = [100 100];
  C0 = 4 * CalcQ(V0, out(1), out(2), jd, [1 1] * epsilon0);
  Cd = 4 * CalcQ(Vd, out(1), out(2), jd, [1 epsilonr] * epsilon0);
  % ... calcula a impedância da linha
  Z0 = 1 / (c * sqrt(C0 * Cd));
end
```

3. ANÁLISE NUMÉRICA

Os valores obtidos e os listados por [SADIKU 2009] estão tabelados abaixo:

h	**iterações**	Z_0 (Ω)		
		bibliografia	**I: iterativo**	**II: sistema linear**
0.25	700	49.05	77.2752	77.2752
0.1	500	58.07	61.9011	61.8511
	500	65.82	64.3315	
0.05	700	63.10	61.1018	58.1798
	1000	61.53	59.2266	
	1000		102.8709	
0.02	2000	-	69.6871	56.2993
	3000		62.6227	
	4000		59.7201	
	5000		56.2993	

O texto não indica qual seria o valor correto. O método iterativo não reproduziu os resultados que constam da bibliografia, apesar de o programa ser praticamente idêntico. Os resultados obtidos com o método II também foram bem diferentes. Aplicamos o método I a grades bem finas e pudemos observar que o número de iterações precisa também ser aumentado para que o cálculo seja coerente.

De acordo com o programa listado, a superfície Gaussiana para cálculo da carga elétrica situou-se a meio caminho entre a superfície condutora e o entorno do espaço considerado; essa localização é arbitrária, e o valor calculado para a carga, e por conseguinte a impedância calculada para a linha, deveria ser a mesma qualquer que fosse a escolha. Nossos testes, no entanto, mostraram que não é assim. Isso indica que a distribuição do potencial obtida com grades e número de iterações pequenos não é suficientemente acurada. A tabela abaixo mostra, para h = 0.02 cm e 5000 iterações, a impedância característica obtida a partir de diversos valores para a posição da superfície Gaussiana.

i	**j**	Z_0 (Ω)	
		I: iterativo	**II: sistema linear**
88	75	58.2421	56.2993
53	28	50.3515	54.3069
100	100	63.0335	56.6847

A tabela mostra que os resultados do método I não são perfeitamente coerentes, mesmo para grades finas e muitas iterações. Os resultados do método II são mais consistente, mas a grade usada também não foi suficientemente fina para eliminar todas as discrepâncias.

Os gráficos de V (equipotenciais) e $\vec{E}$ obtidos foram os seguintes:

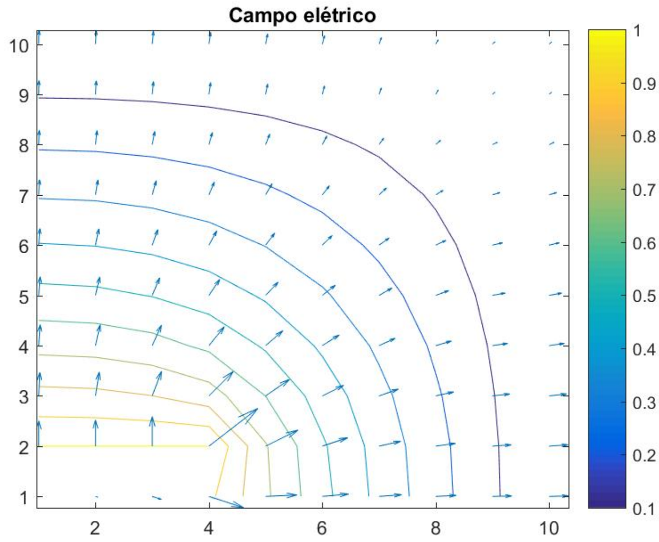

FIGURA 8. V e $\vec{E}$ sem o dielétrico, método II, $h = 0.25\ cm$

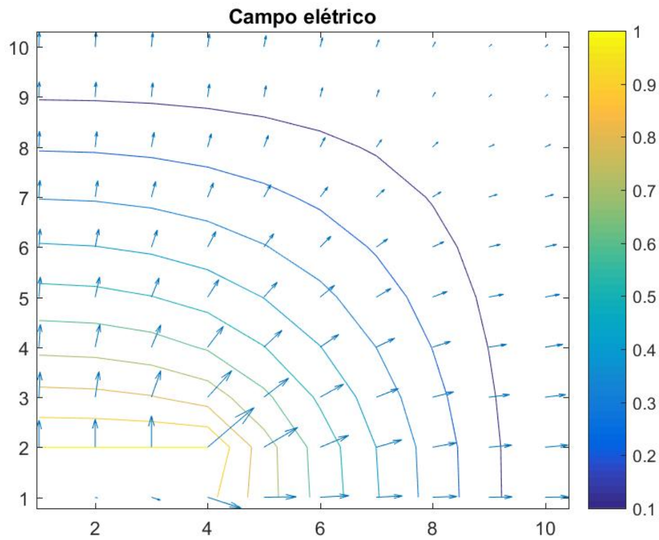

FIGURA 9. V e $\vec{E}$ com o dielétrico, método II, $h = 0.25\ cm$

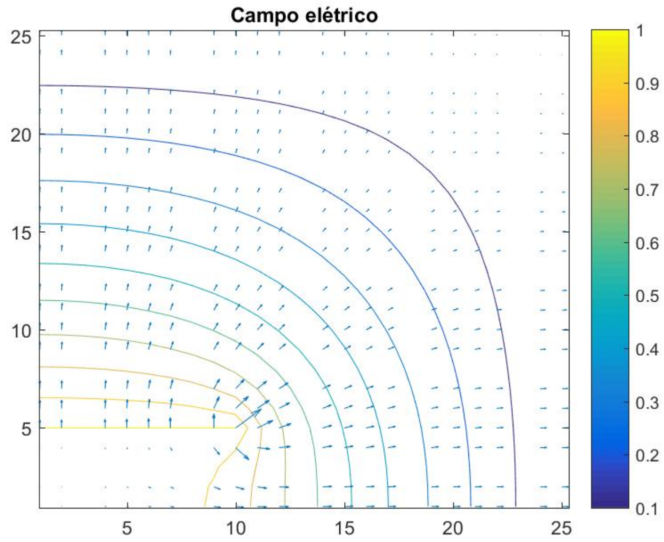

FIGURA 10. V e $\vec{E}$ sem o dielétrico, método II, $h = 0.1\ cm$

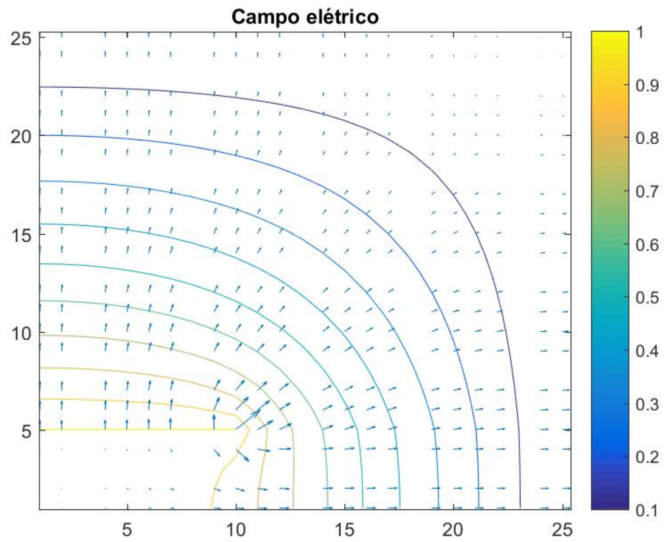

FIGURA 11. V e $\vec{E}$ com o dielétrico, método II, $h = 0.1\ cm$

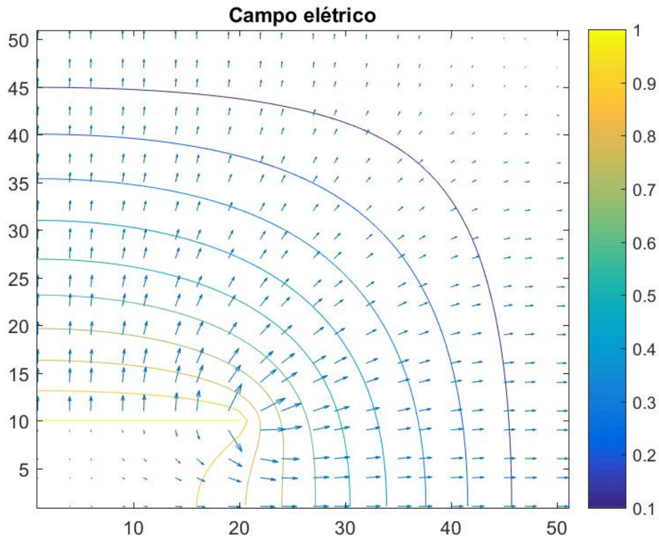

FIGURA 12. V e $\vec{E}$ sem o dielétrico, método II, $h = 0.05\ cm$

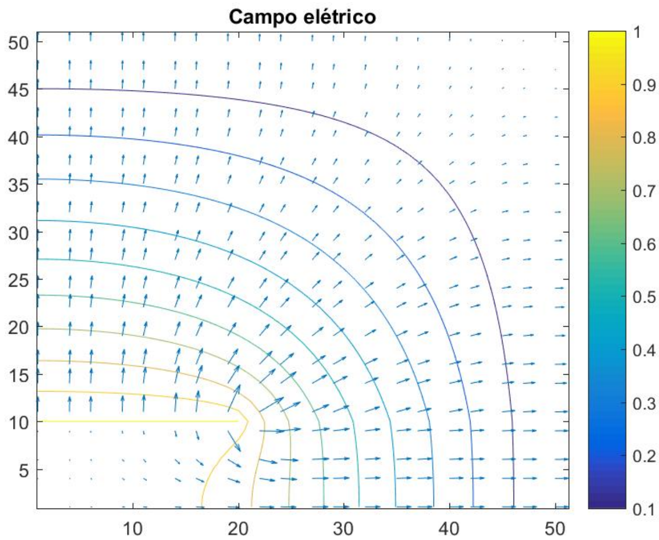

FIGURA 13. V e $\vec{E}$ com o dielétrico, método II, $h = 0.05\ cm$

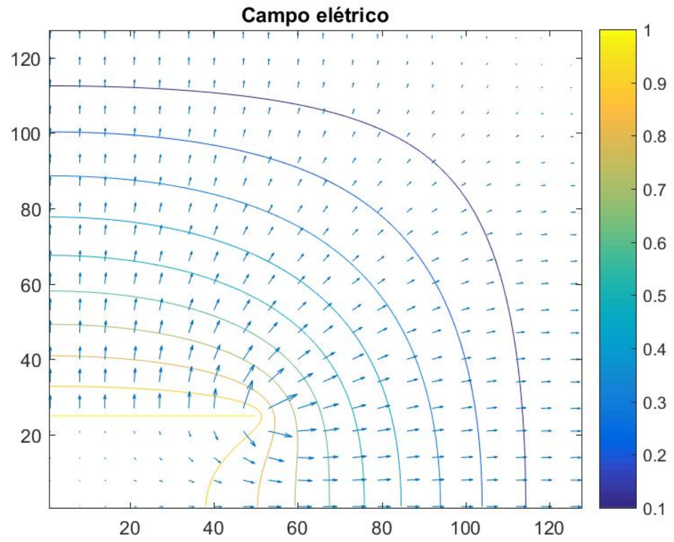

FIGURA 14. V e $\vec{E}$ sem o dielétrico, método II, $h = 0.02\ cm$

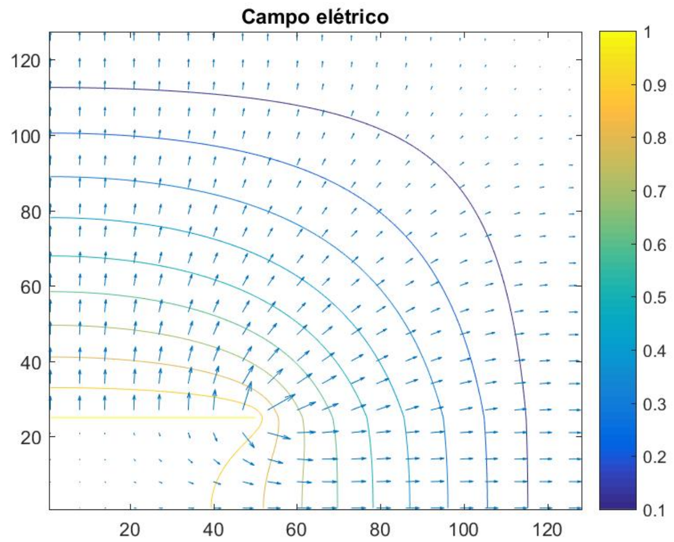

FIGURA 15. V e $\vec{E}$ com o dielétrico, método II, $h = 0.02\ cm$

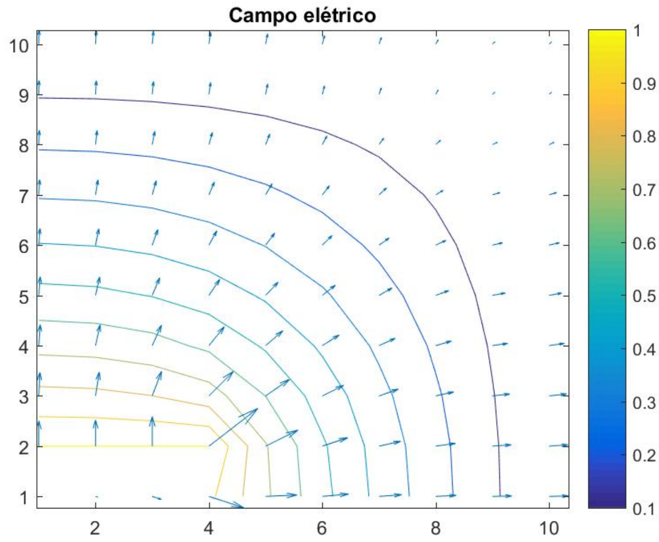

FIGURA 16. V e $\vec{E}$ sem o dielétrico, método I, $h = 0.25\ cm$ e $nt = 700$

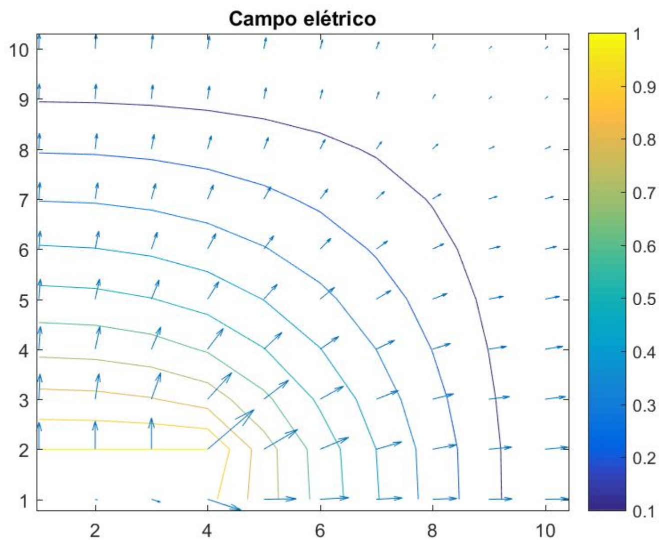

FIGURA 17. V e $\vec{E}$ com o dielétrico, método I, $h = 0.25\ cm$ e $nt = 700$

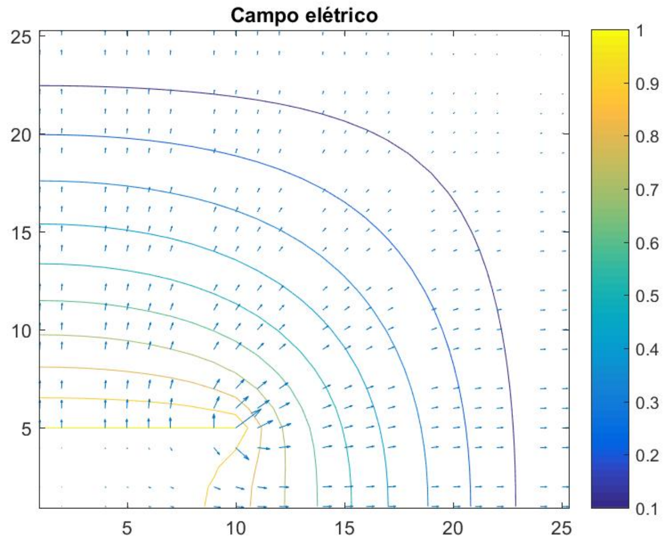

FIGURA 18. V e $\vec{E}$ sem o dielétrico, método I, $h = 0.1\ cm$ e $nt = 500$

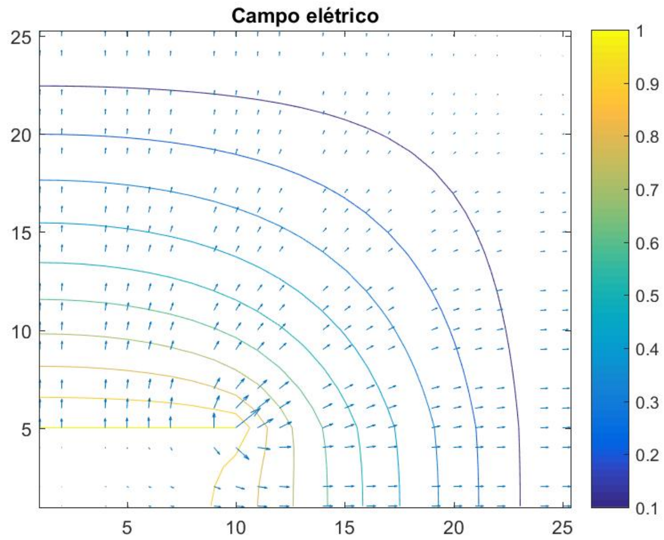

FIGURA 19. V e $\vec{E}$ com o dielétrico, método I, $h = 0.1\ cm$ e $nt = 500$

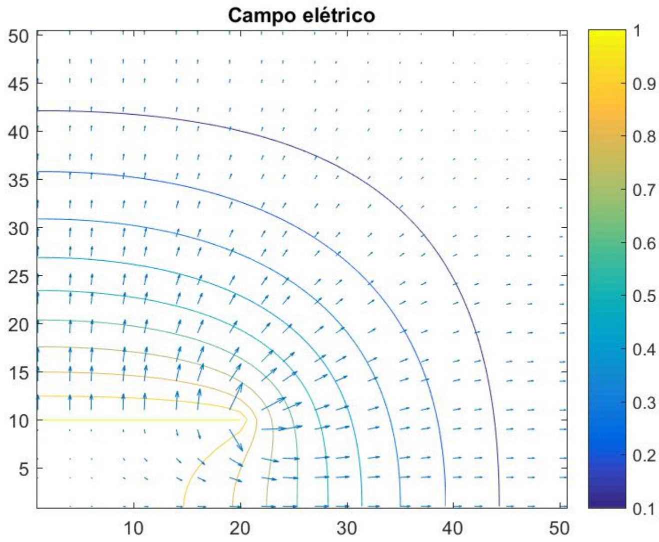

FIGURA 20. V e $\vec{E}$ sem o dielétrico, método I, $h = 0.05\ cm$ e $nt = 500$

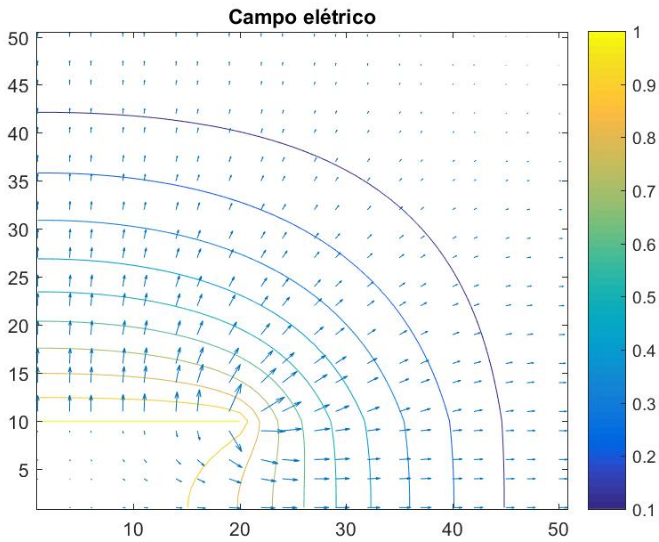

FIGURA 21. V e $\vec{E}$ com o dielétrico, método I, $h = 0.05\ cm$ e $nt = 500$

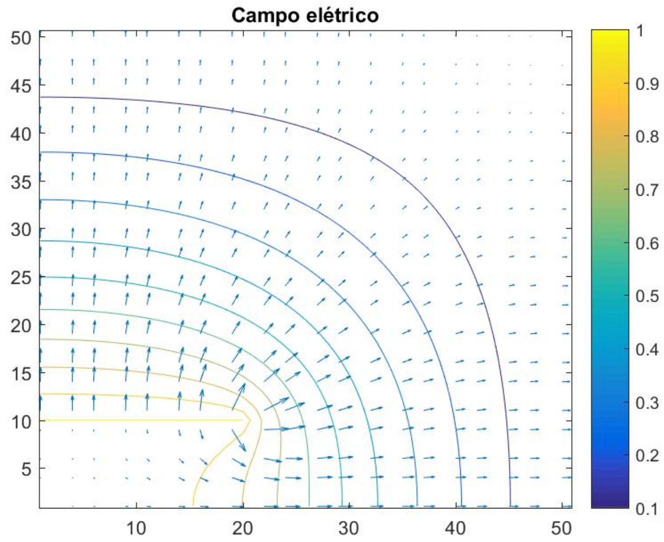

FIGURA 22. V e $\vec{E}$ sem o dielétrico, método I, $h = 0.05\ cm$ e $nt = 700$

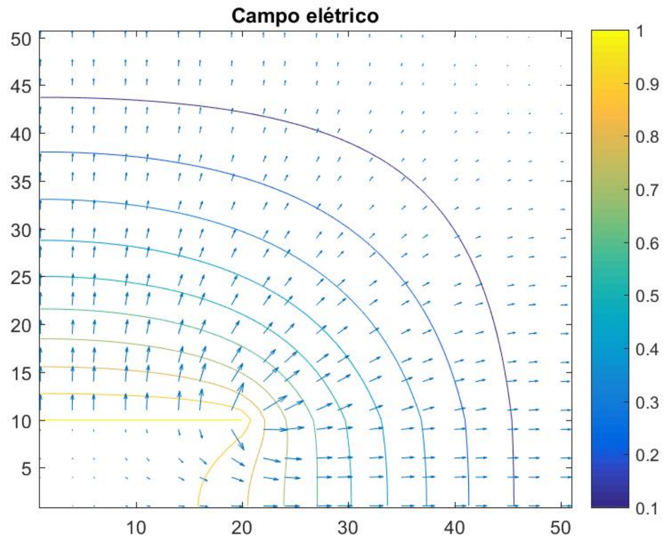

FIGURA 23. V e $\vec{E}$ com o dielétrico, método I, $h = 0.05\ cm$ e $nt = 700$

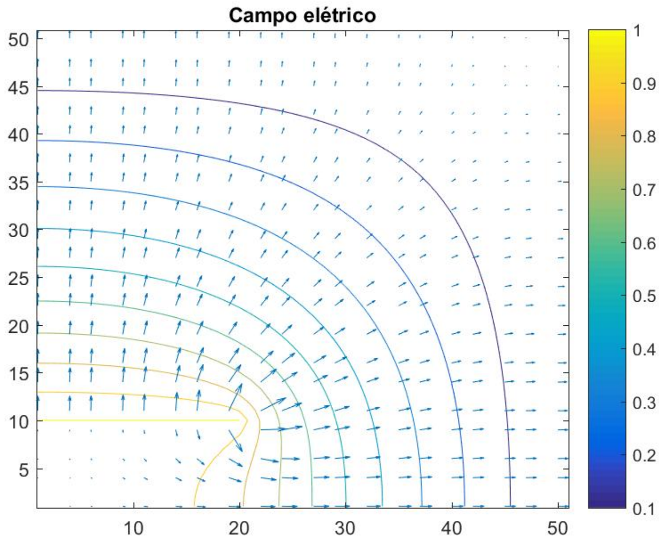

FIGURA 24. V e $\vec{E}$ sem o dielétrico, método I, $h = 0.05\ cm$ e $nt = 1000$

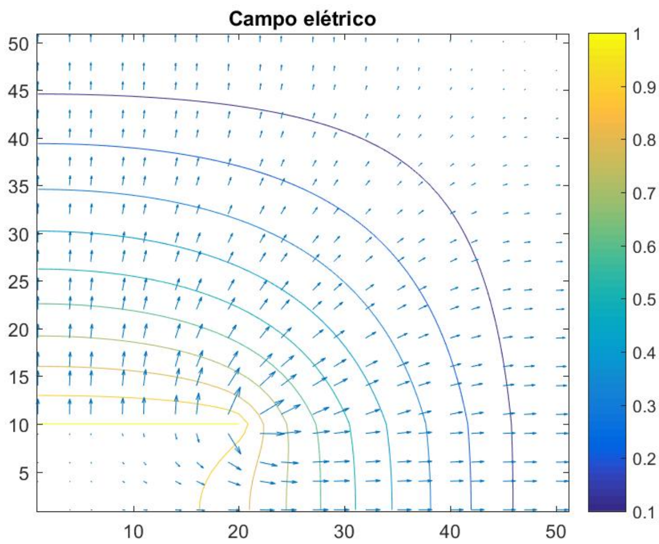

FIGURA 25. V e $\vec{E}$ com o dielétrico, método I, $h = 0.05\ cm$ e $nt = 1000$

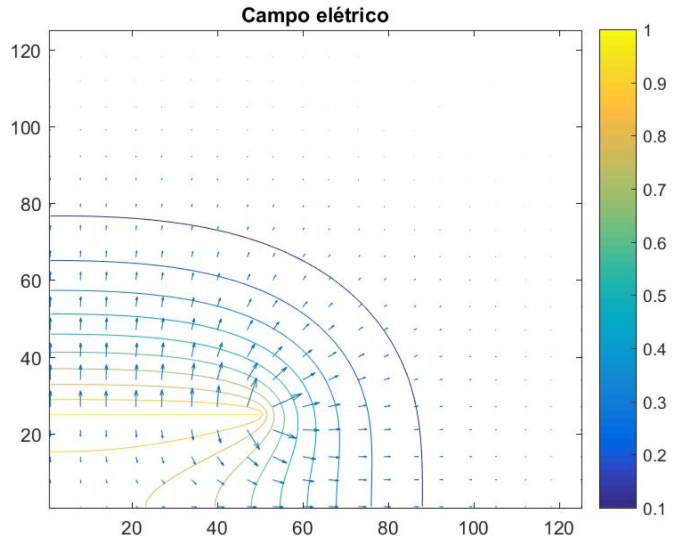

FIGURA 26. V e $\vec{E}$ sem o dielétrico, método I, $h = 0.02\ cm$ e $nt = 1000$

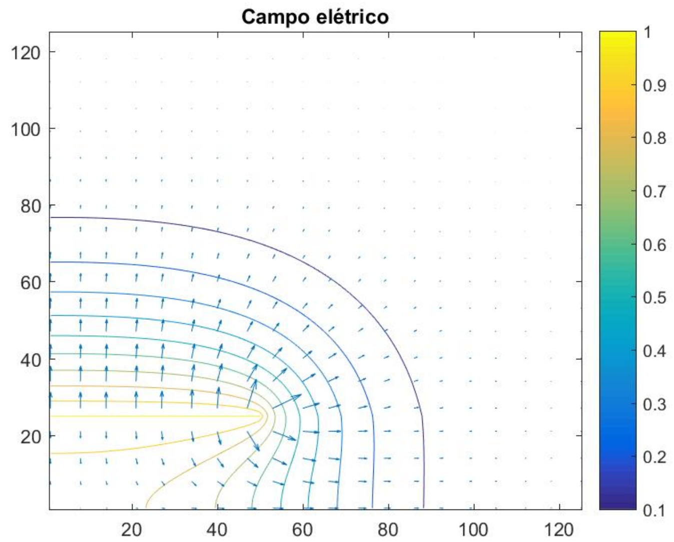

FIGURA 27. V e $\vec{E}$ com o dielétrico, método I, $h = 0.02\ cm$ e $nt = 1000$

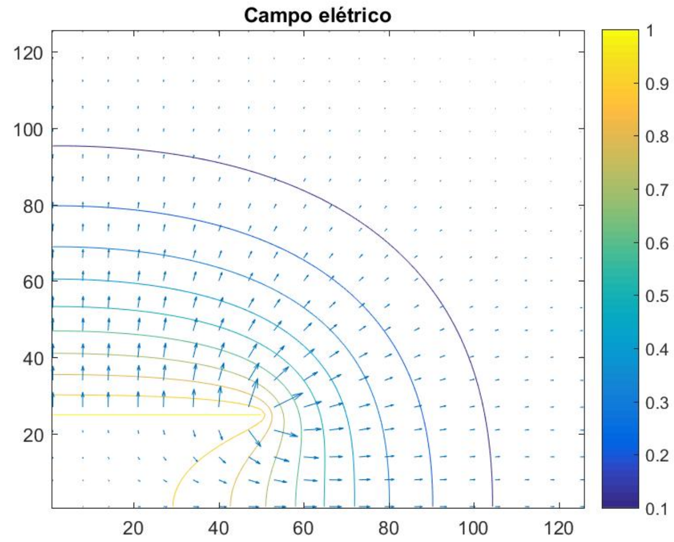

FIGURA 28. V e $\vec{E}$ sem o dielétrico, método I, $h = 0.02\ cm$ e $nt = 2000$

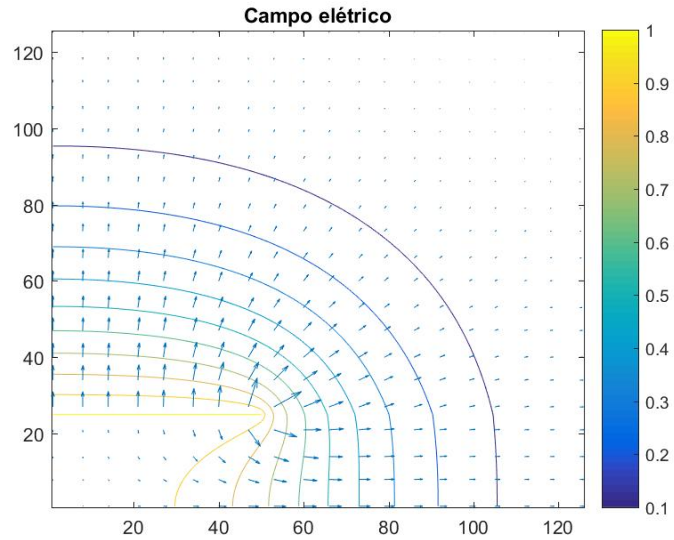

FIGURA 29. V e $\vec{E}$ com o dielétrico, método I, $h = 0.02\ cm$ e $nt = 2000$

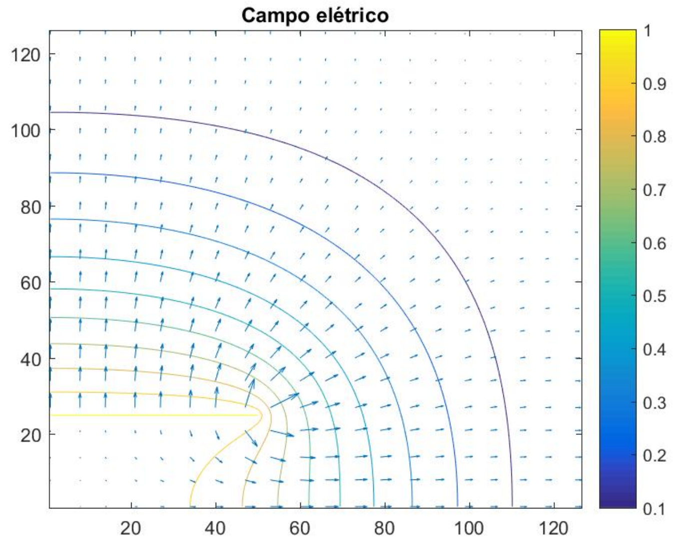

FIGURA 30. V e $\vec{E}$ sem o dielétrico, método I, $h = 0.02\ cm$ e $nt = 3000$

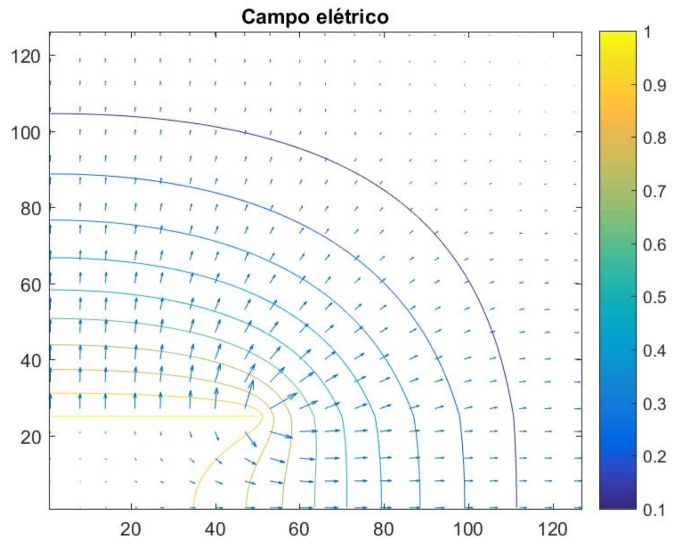

FIGURA 31. V e $\vec{E}$ com o dielétrico, método I, $h = 0.02\ cm$ e $nt = 3000$

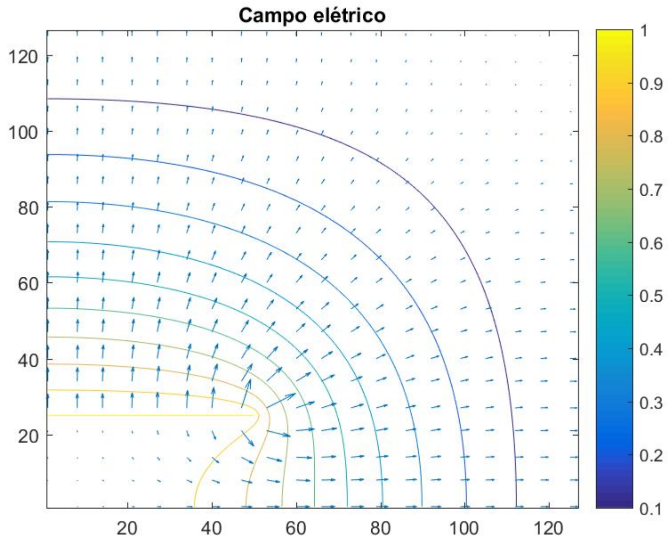

FIGURA 32. V e $\vec{E}$ sem o dielétrico, método I, $h = 0.02\ cm$ e $nt = 4000$

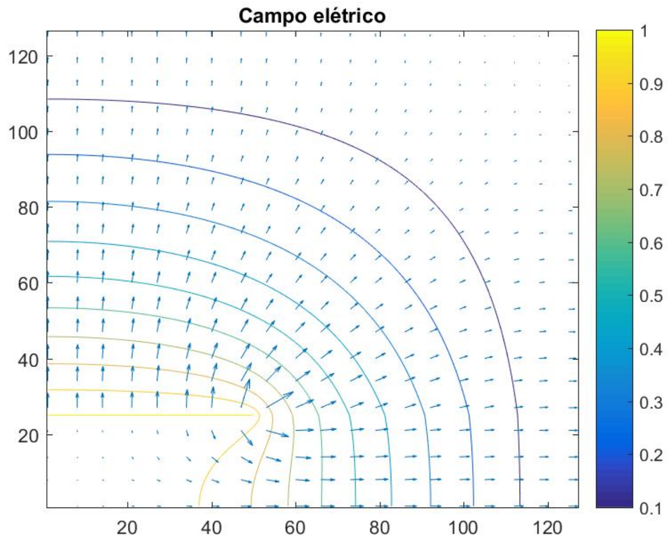

FIGURA 33. V e $\vec{E}$ com o dielétrico, método I, $h = 0.02\ cm$ e $nt = 4000$

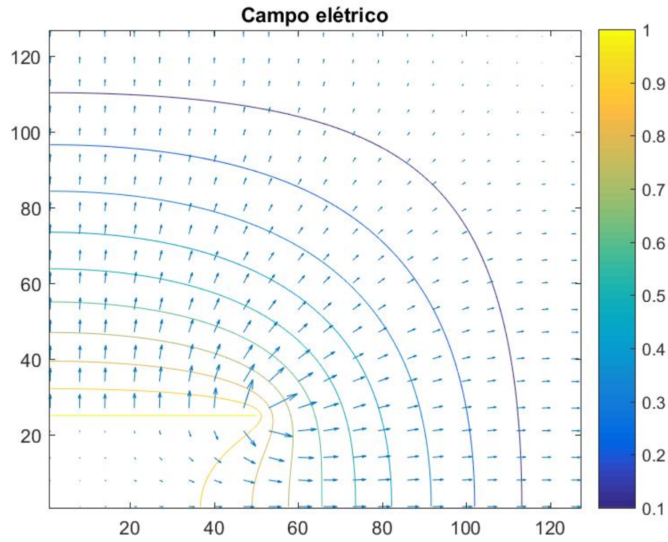

FIGURA 34. V e $\vec{E}$ sem o dielétrico, método I, $h = 0.02\ cm$ e $nt = 5000$

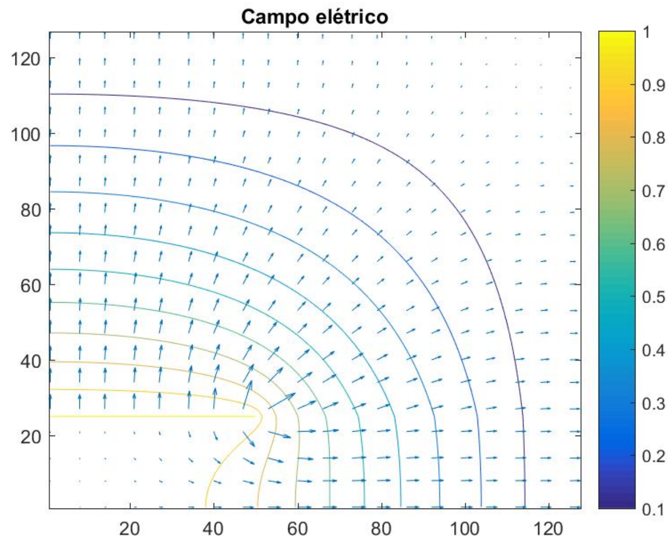

FIGURA 35. V e $\vec{E}$ com o dielétrico, método I, $h = 0.02\ cm$ e $nt = 5000$

A permissividade relativa do dielétrico é pequena, por isso a diferença entre os campos com e sem ele é discreta, mas ainda assim perceptível. A diferença entre o número de iterações usadas no método I, por outro lado, é bastante expressiva. Também se pode notar que o número de iterações necessário para que a precisão do método I alcance a do método II é grande; por outro lado, o método I consegue trabalhar com malhas mais finas que o método II.

4. Conclusão

Comparado com o método iterativo, o método de solução do sistema linear é mais preciso, mas é mais lento e o tamanho da matriz de coeficientes limita a precisão que pode ser obtida, pois para valores de h muito pequenos o MATLAB não aceita criar a matriz resultante. Além disso, o tempo de cálculo aumenta muito rápido à medida que h diminui.

A precisão obtida não foi suficiente para tornar o resultado independente do valor escolhido para o tamanho da superfície Gaussiana usada no cálculo da carga elétrica livre na superfície condutora. Infelizmente, como se acabou de mencionar, os recursos computacionais necessários para aumentar a precisão a um ponto adequado são muito grandes. Seria preciso usar outra ferramenta que não o MATLAB.

Neste trabalho, optamos por implementar o método de solução iterativo exatamente da forma proposta por [SADIKU 2009], de forma a poder conferir os resultados obtidos. Ambos os métodos, contudo, poderiam ser otimizados. O método iterativo, por exemplo, usa um fator de relaxação muito baixo. O método de solução do sistema linear, por sua vez, poderia usar matrizes esparsas, de forma a ocupar menos memória.

Referências

[SADIKU 2009] Matthew N. O. SADIKU, **Numerical Techniques in Electromagnetic with MATLAB**, 3rd Ed., CRC, 2009, Chap. 3, pp. 132 a 159.

Todo o código consta do anexo (arquivo `trabalho.zip`).
Programas testados com **MATLAB** R2016a
`https://www.mathworks.com`
Texto formatado com **pdflatex** em ambiente **MiKTeX** 2.9:
`http://miktex.org/download/`