SISTEMAS E SINAIS - EXERCÍCIO II

SÉRGIO CORDEIRO

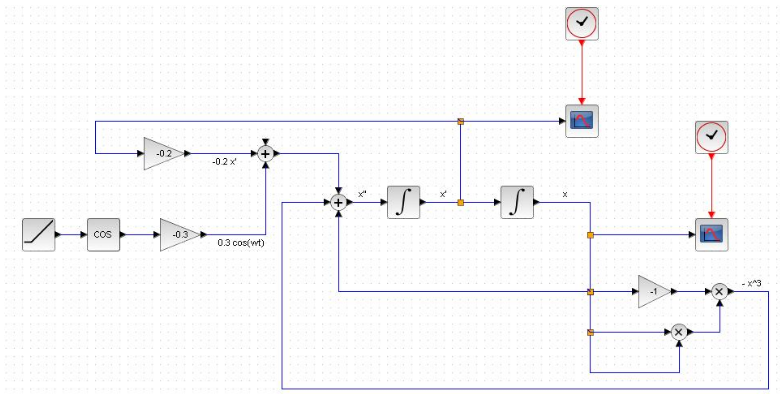
1. Simular o sistema descrito pela equação abaixo (oscilador de diferença dada), nas situações de entrada nula e de entrada forçada, e analisar os resultados:

(1) $$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.2\frac{dx}{dt} - x + x^3 = 0.3\cos(\omega t)$$

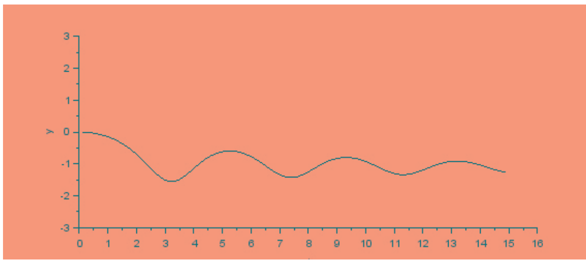
A equação 1 deve ser reescrita da seguinte maneira para simulação:

(2) $$\frac{d^2x}{dt^2} = 0.3\cos(\omega t) - 0.2\frac{dx}{dt} + x - x^3$$

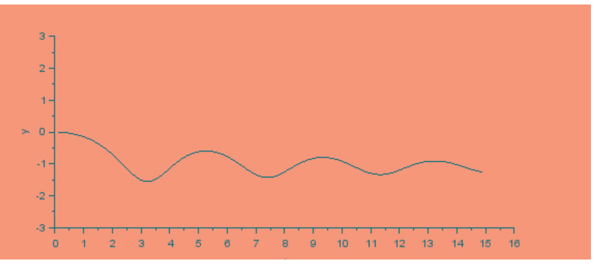
O diagrama correspondente à equação 2 é o seguinte:



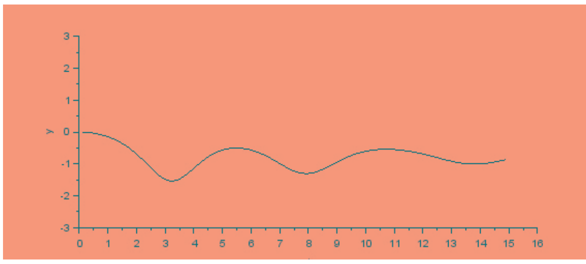
A resposta natural é obtida alterando-se para zero o multiplicador da fonte de sinal na entrada e estabelecendo valores não nulos para o estado inicial. Os gráficos da amplitude de x em função do tempo para os dois tipos de resposta são exibidos abaixo. Como mostram as figuras, a frequência do sinal de entrada influi pouco na forma da saída, que se torna mais estável com o aumento de ω. A resposta mostra uma característica fortemente oscilatória, mesmo na ausência de sinal de entrada e com estado inicial quase nulo.



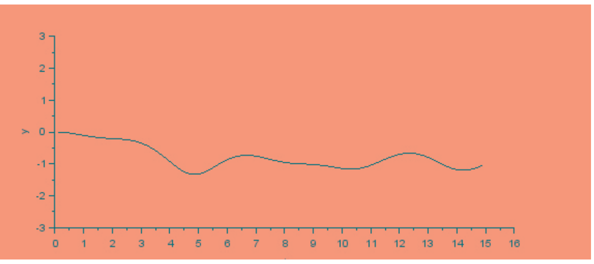
Resposta forçada do oscilador,
com $\omega = 2\ mHz$



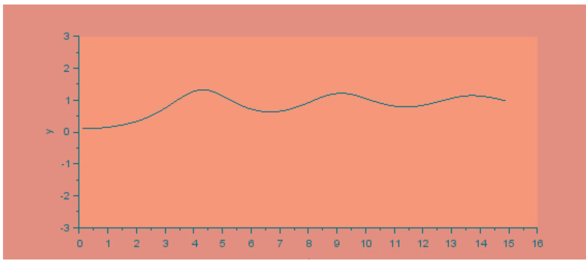
Resposta forçada do oscilador,
com $\omega = 20\ Hz$



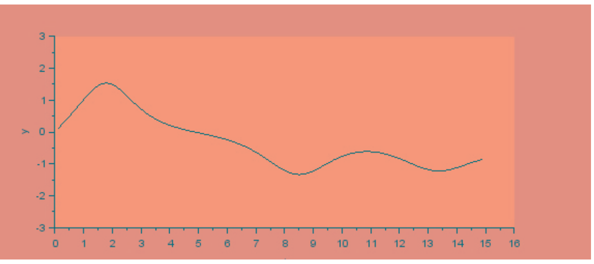
Resposta forçada do oscilador,
com $\omega = 0.2\ Hz$



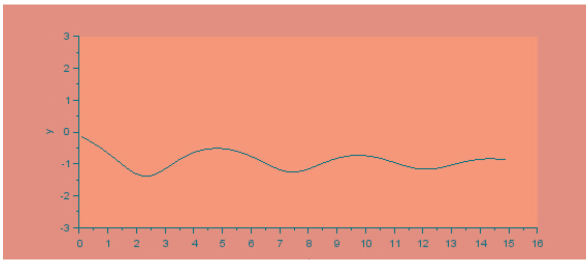
Resposta forçada do oscilador,
com $\omega = 2\ Hz$



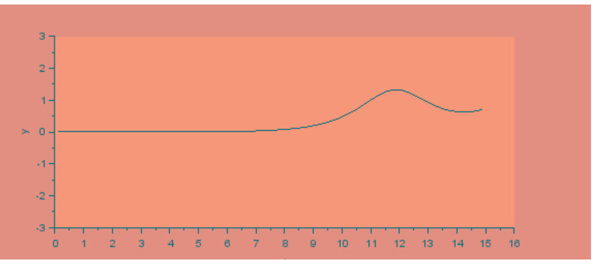
Resposta natural do oscilador,
com $x(0) = 0.1,\ x'(0) = 0$



Resposta natural do oscilador,
com $x(0) = 0,\ x'(0) = 1$

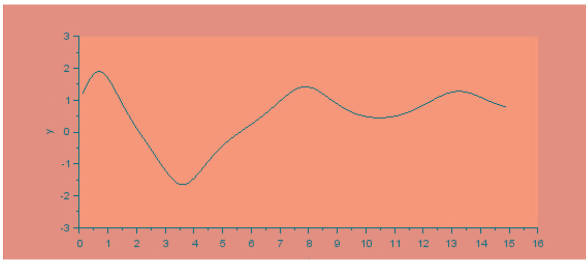


Resposta natural do oscilador,
com $x(0) = -0.1,\ x'(0) = -0.5$

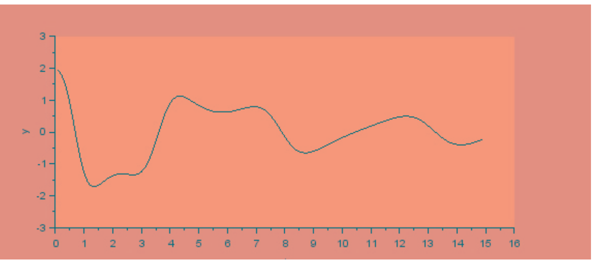


Resposta natural do oscilador,
com $x(0) = 1,\ x'(0) = 0$

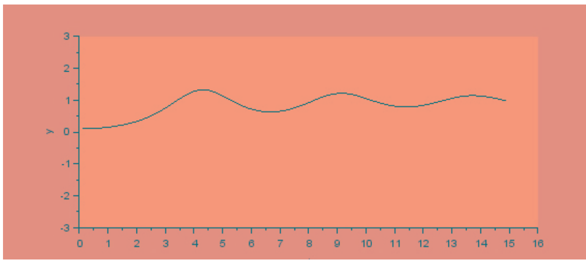
As figuras abaixo ilustram o comportamento de $\frac{dx}{dt}$ para resposta natural. Um fenômeno interessante ocorre quando $x'(0) = 0$ e $x(0) = 1$: as oscilações desaparecem; trata-se de um ponto de equilíbrio instável.



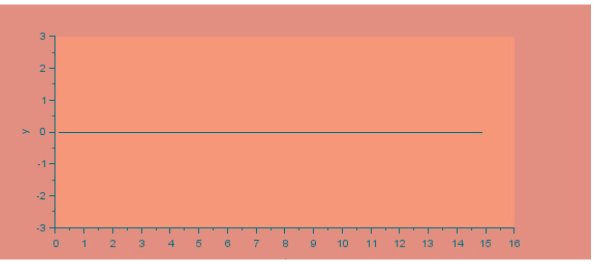
Resposta natural $x(t)$
com $x(0) = 1,\ x'(0) = 2$



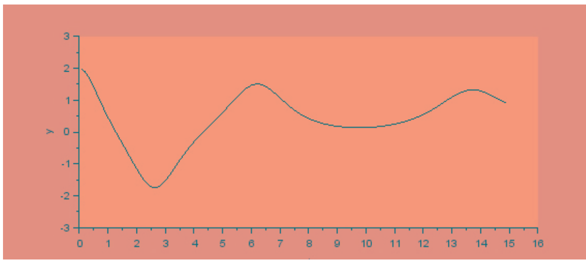
Resposta natural $x'(t)$
com $x(0) = 1,\ x'(0) = 2$



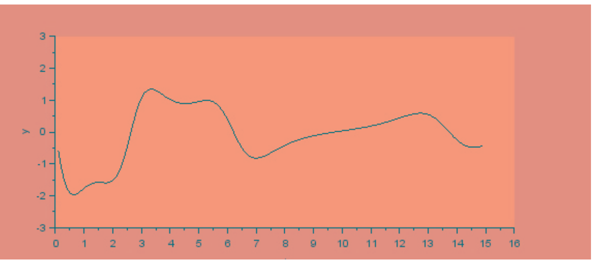
Resposta natural $x(t)$
com $x(0) = 1,\ x'(0) = 0$



Resposta natural $x'(t)$
com $x(0) = 1,\ x'(0) = 0$



Resposta natural $x(t)$
com $x(0) = 2,\ x'(0) = 0$



Resposta natural $x'(t)$
com $x(0) = 2,\ x'(0) = 0$

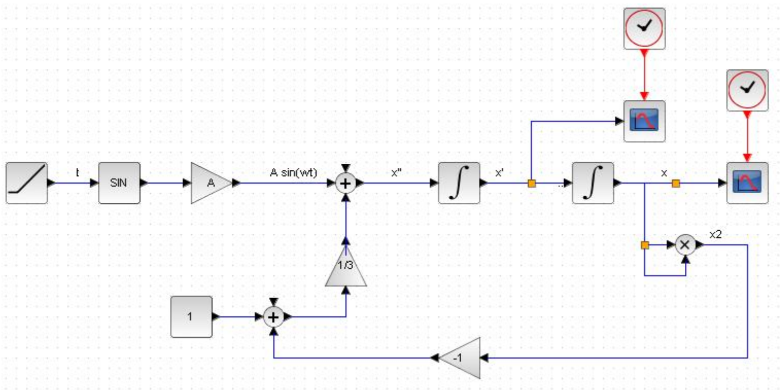
2. Simular o sistema descrito pela equação abaixo (oscilador de van der Pol), nas situações de entrada nula e de entrada forçada, e analisar os resultados:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{3}(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = A\sin(\omega t) \tag{3}$$

A equação 3 deve ser reescrita da seguinte maneira para simulação:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A\sin(\omega t) + \frac{1}{3}(1-x^2)\frac{dx}{dt} - x \tag{4}$$

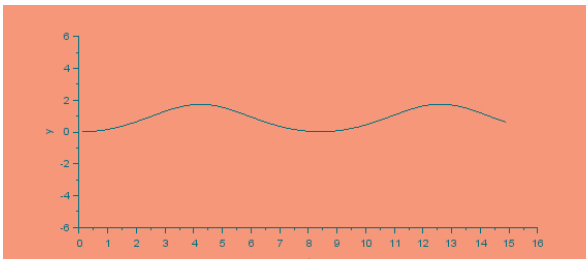
O diagrama correspondente à equação 4 é o seguinte:



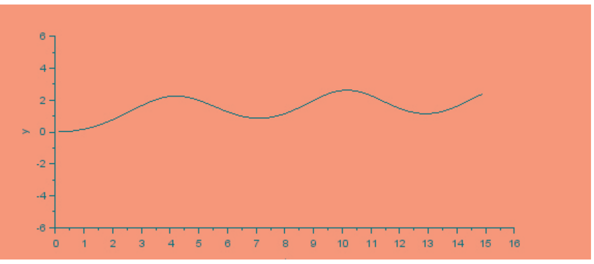
A resposta natural é obtida alterando-se para zero o valor de A e estabelecendo valores não nulos para o estado inicial. Os gráficos da amplitude de x em função do tempo para os dois tipos de resposta são exibidos abaixo. Como mostram as figuras, o oscilador possui basicamente 3 regiões de funcionamento:

i. uma onde a resposta é linear, ou próxima disso
ii. uma onde a resposta é oscilatória
iii. uma onde a resposta não é limitada (instável)

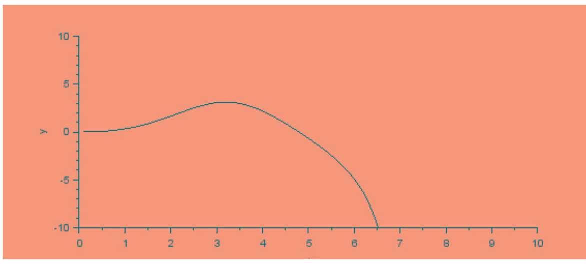
A frequência e a amplitude do sinal de entrada, bem como o estado inicial, determinam em que região o oscilador cairá. O aumento de A, ω, $x(0)$ e $x'(0)$ tornam o circuito menos estável.



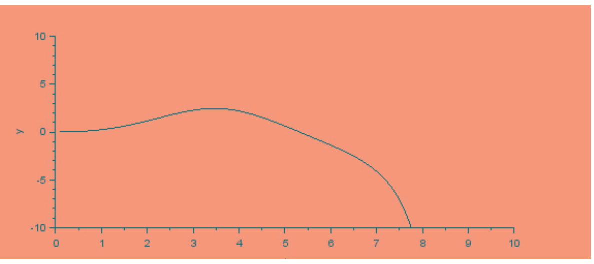
Resposta forçada do oscilador, com $A = 1,\ \omega = 1\ mHz$



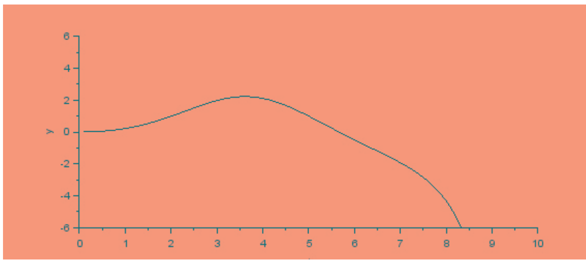
Resposta forçada do oscilador, com $A = 1,\ \omega = 0.1\ Hz$



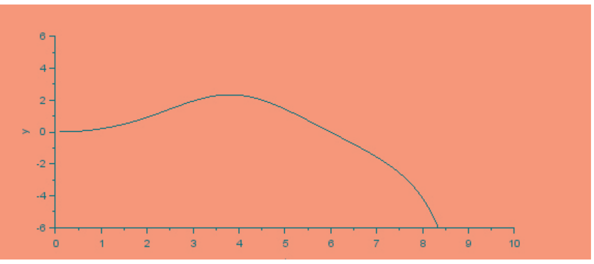
Resposta forçada do oscilador, com $A = 1,\ \omega = 1\ Hz$



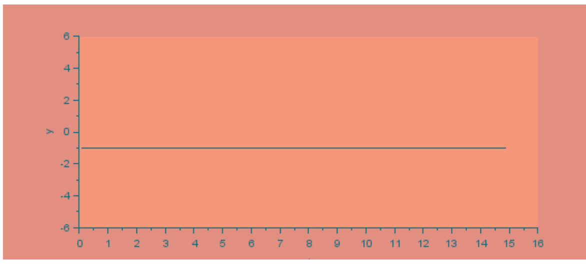
Resposta forçada do oscilador, com $A = 0.5,\ \omega = 1\ Hz$



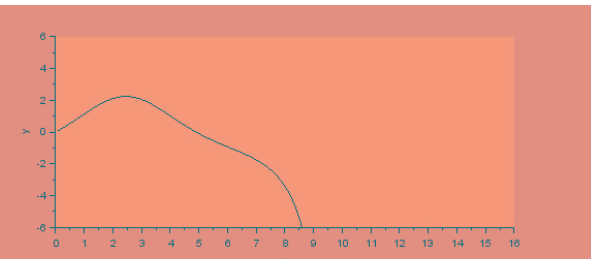
Resposta forçada do oscilador, com $A = 0.33,\ \omega = 1\ Hz$



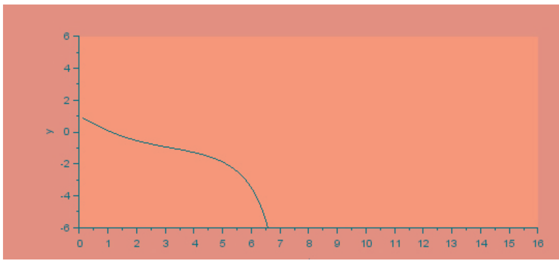
Resposta forçada do oscilador, com $A = 0.33,\ \omega = 0.75\ Hz$



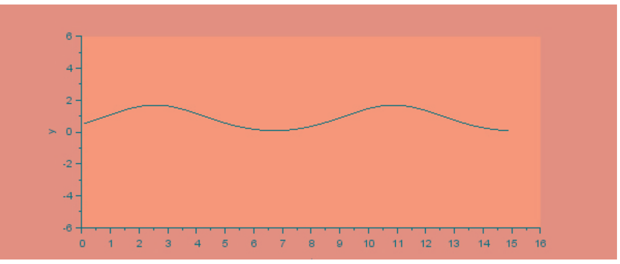
Resposta natural do oscilador, com $x(0) = -1,\ x'(0) = 0$



Resposta natural do oscilador, com $x(0) = 0,\ x'(0) = 1$

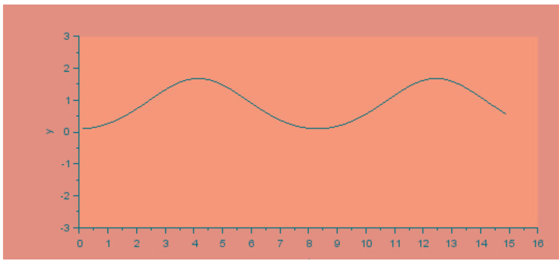


Resposta natural do oscilador,
com $x(0) = 1,\ x'(0) = -1$

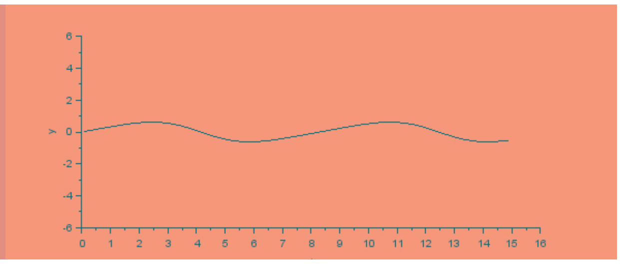


Resposta natural do oscilador,
com $x(0) = 0.5,\ x'(0) = 0.5$

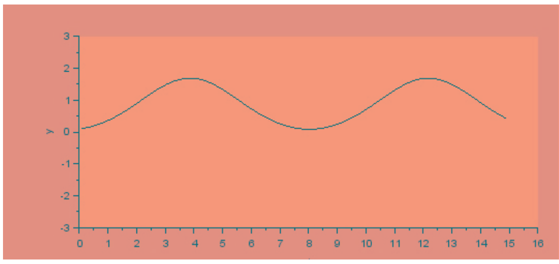
As figuras abaixo ilustram o comportamento de $\frac{dx}{dt}$ para resposta natural. Verifica-se que a resposta é limitada para os casos em que $x(t)$ também o é.



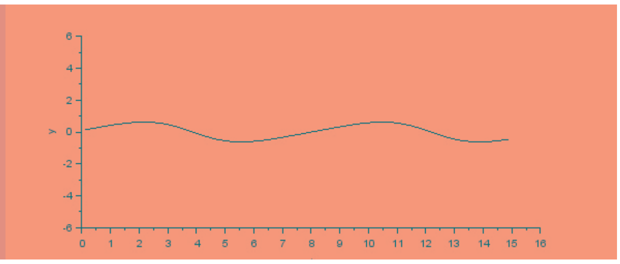
Resposta natural $x(t)$
com $x(0) = 0.1,\ x'(0) = 0$



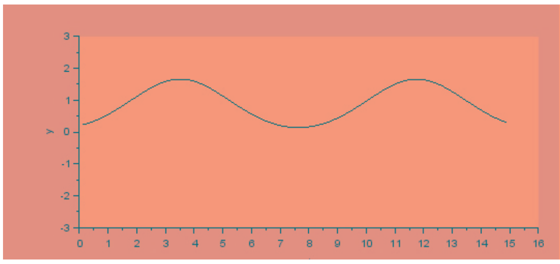
Resposta natural $x'(t)$
com $x(0) = 0.1,\ x'(0) = 0$



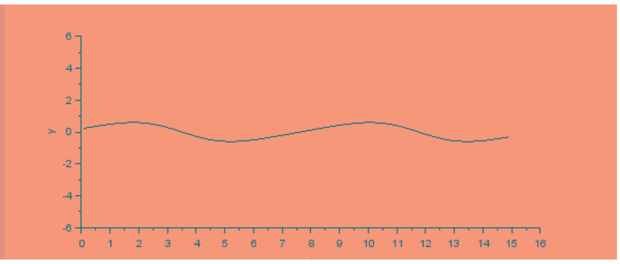
Resposta natural $x(t)$
com $x(0) = 0.1,\ x'(0) = 0.1$



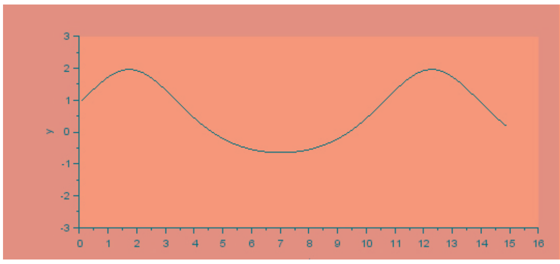
Resposta natural $x'(t)$
com $x(0) = 0.1,\ x'(0) = 0.1$



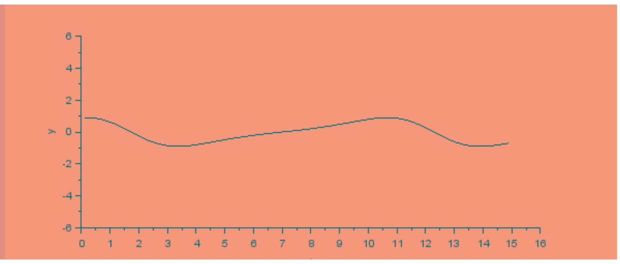
Resposta natural $x(t)$
com $x(0) = 0.2,\ x'(0) = 0.2$



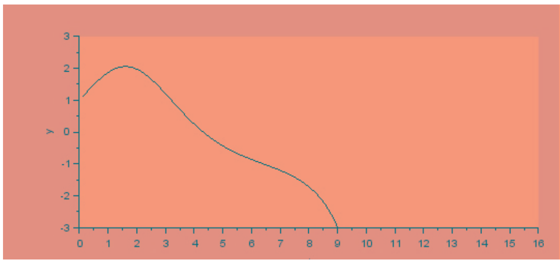
Resposta natural $x'(t)$
com $x(0) = 0.2,\ x'(0) = 0.2$



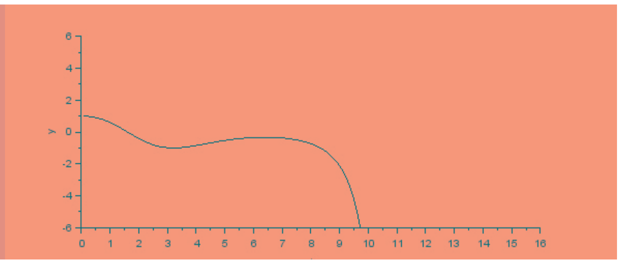
Resposta natural $x(t)$
com $x(0) = 0.9,\ x'(0) = 0.9$



Resposta natural $x'(t)$
com $x(0) = 0.9,\ x'(0) = 0.9$



Resposta natural $x(t)$
com $x(0) = 1.0,\ x'(0) = 1.0$



Resposta natural $x'(t)$
com $x(0) = 1.0,\ x'(0) = 1.0$

3. Considerando o processo de modulação em amplitude (AM), interpretar a alteração do espectro de frequências do sinal original:

Na modulação em amplitude tradicional, o sinal $f(t)$ é multiplicado por uma portadora $g(t)$ cuja forma geral é $g(t) = A\cos(\omega_c t)$, com $\omega_c >> \omega_u$, onde ω_u é a maior das frequências presentes em $f(t)$. O sinal modulado $h(t)$ pode ser escrito, então, como $h(t) = f(t)\ g(t)$.
No domínio da frequência, a multiplicação no domínio do tempo corresponde a uma convolução, assim $H(s) = F(s) * G(s)$. Como $\omega_c >> \omega_u$, podemos ignorar a resposta transitória e considerar apenas a frequência real. Nesse caso, $H(\omega) = F(\omega) * G(\omega)$; o espectro original de frequências $F(\omega)$ é, assim, transformado no espectro $H(\omega)$.
Como $g(t)$ é, conhecido, podemos calcular $G(\omega)$. Como a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{g(t)\}$ só é definida se $\Re s > 0]$ no caso de funções senoidais, é melhor usar a transformada de Fourier [1]:

$$
\begin{aligned}
G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\ e^{-\jmath\omega t}\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A\cos(\omega_c t)\ e^{-\jmath\omega t}\ dt \\
&= A\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left(e^{\jmath\omega_c t} + e^{-\jmath\omega_c t}\right)\ e^{-\jmath\omega t}\ dt \\
&= A\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\jmath(\omega-\omega_c)t}\ dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\jmath(\omega+\omega_c)t}\ dt\right] \\
&= \begin{cases} 0 & \omega \neq \pm\omega_c \\ \pi A\,\boldsymbol{\delta}(\omega) & \omega = \pm\omega_c \end{cases} \\
&= \pi A\left[\ \boldsymbol{\delta}(\omega-\omega_c) + \boldsymbol{\delta}(\omega+\omega_c)\right]
\end{aligned}
$$

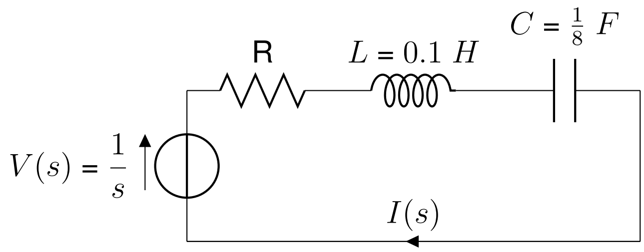
e então calcular $H(\omega)$, observando a propriedade da convolução com o impulso:

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= F(\omega) * G(\omega) \\
&= F(\omega) * \pi A\left[\ \boldsymbol{\delta}(\omega-\omega_c) + \boldsymbol{\delta}(\omega+\omega_c)\right] \\
&= \pi A\left[\ F(\omega-\omega_c) + F(\omega+\omega_c)\right]
\end{aligned}
$$

[1] Aqui foi adotada como convenção a transformada não normalizada.

O espectro do sinal modulado, $H(\omega)$, possui duas componentes, cada uma delas com a mesma forma do espectro do sinal original, e centradas em $\xi = \pm\omega_c$. O sinal original possui frequências na faixa $-\omega_u \leq \omega \leq \omega_u$, portanto a largura de banda $\mathrm{BW}_f = 2\omega_u = 4\pi f_u$, com $f_u = \frac{\omega_u}{2\pi}$. Se considerarmos um limite inferior ω_l para $|\omega|$, então $\mathrm{BW}_s = 2(\omega_u - \omega_l)$. Neste caso, pode-se falar de duas bandas separadas, uma banda inferior onde $-\omega_u \leq \omega \leq -\omega_l$ e uma superior onde $\omega_s \leq \omega \leq \omega_u$. Evidentemente, a largura de banda total permanece a mesma; na saída, $\mathrm{BW}_h = 2\mathrm{BW}_f$ em todos os casos.
Como $\omega_c > \omega_u$, apenas a componente centrada em ω_c é fisicamente real. Ademais, as componentes $\omega < 0$ carregam informação redundante com relação às componentes $\omega > 0$. Isso torna vantajoso suprimir uma delas antes da transmissão, de forma a economizar energia e diminuir a necessidade de largura de banda do transmissor. Essa alternativa é conhecida como *single sideband* (SSB), em oposição à tradicional, conhecida como *double sideband* (DSB).
Em adição às bandas laterais, aparece em $H(\omega)$ uma componente $\xi = \omega_c$ correspondente aos momentos de silêncio, em que o sinal f(t) não está presente e assim pode-se dizer que $\omega = 0$. Essa componente também não carrega informação nenhuma e, portanto, pode ser suprimida; tal alternativa é conhecida como *supressed carrier* (SC) [**?**].

4. Considerando o circuito elétrico abaixo e entrada de sinal em degrau:



a) Traçar a curva de tensão no capacitor em função do tempo para diversos valores de R.
b) Justificar, analisando a situação no domínio da frequência, por que a subida da tensão fica mais lenta com o aumento de R.
c) Traçar a curva de tensão no indutor em função do tempo para diversos valores de R.
d) Analisar o comportamento da tensão no indutor no domínio da frequência.

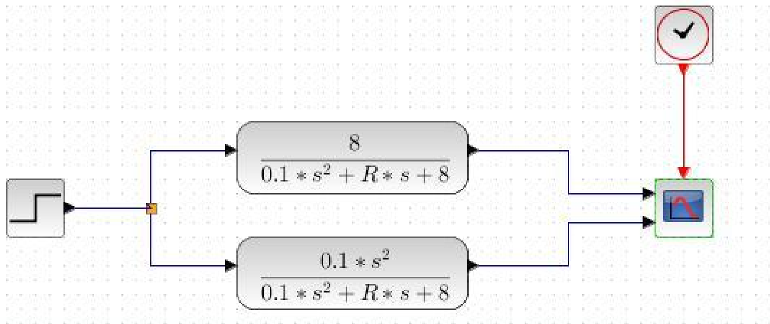
As funções de transferência do circuito são as seguintes:

$$G_C(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{\frac{1}{C}}{Rs + Ls^2 + \frac{1}{C}} = \frac{8}{0.1s^2 + Rs + 8} \tag{5}$$

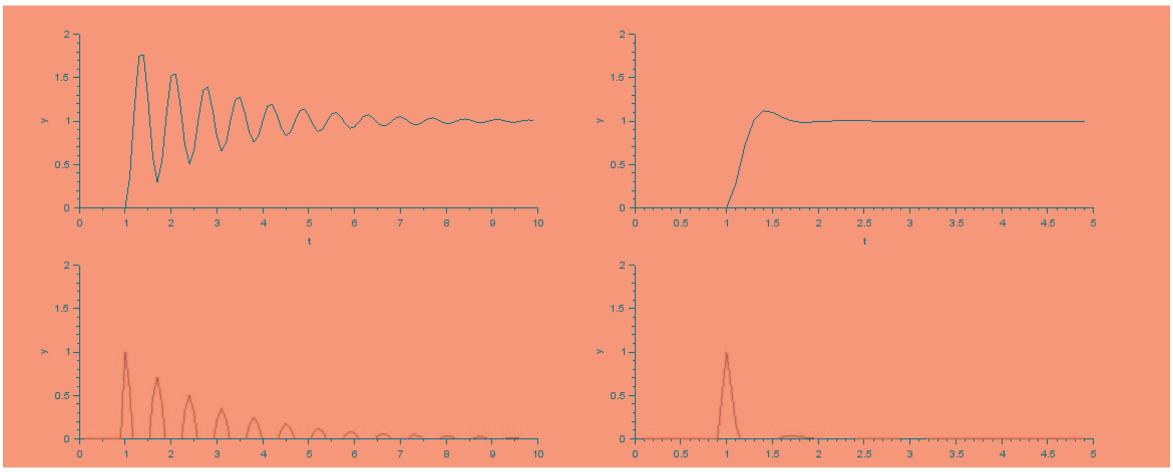
e

$$G_L(s) = \frac{V_L(s)}{V(s)} = \frac{Ls}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{Ls^2}{Rs + Ls^2 + \frac{1}{C}} = \frac{0.1s^2}{0.1s^2 + Rs + 8} \tag{6}$$

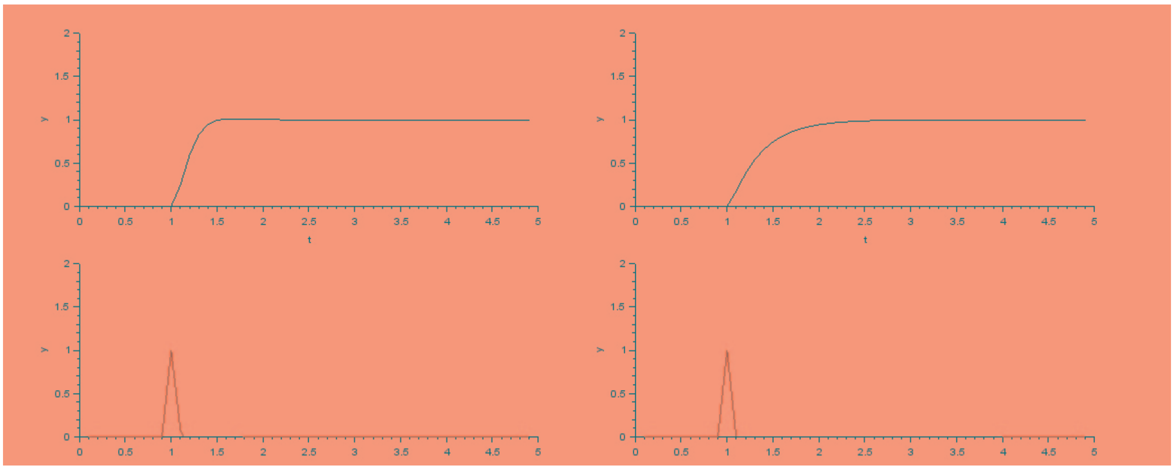
O diagrama de simulação correspondente ao circuito é o seguinte:



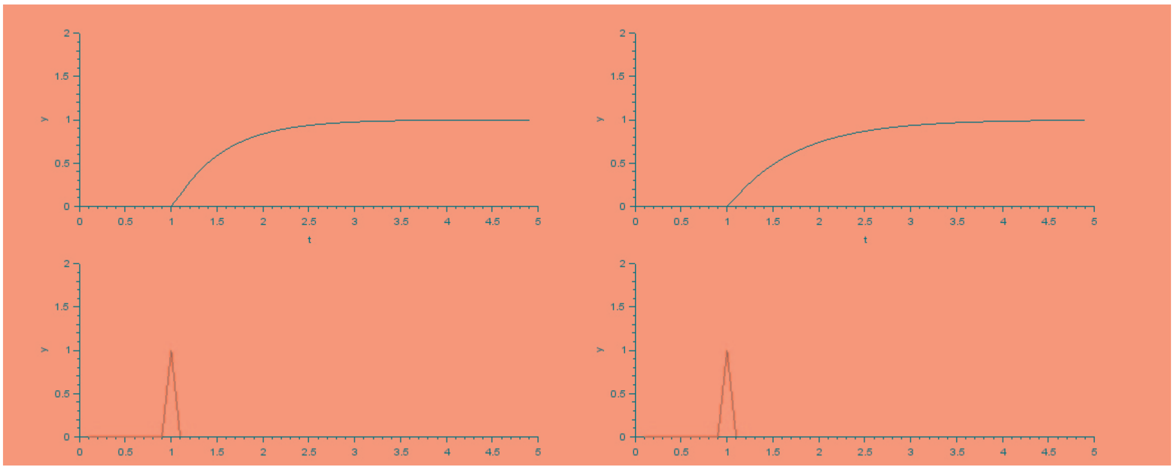
Os resultados obtidos para diversos valores de R, entrada em degrau e estado inicial nulo estão ilustrados nas figuras abaixo. À medida que R aumenta, a resposta vai ficando mais estável e mais lenta.



$R = 0.1\ \Omega$ $\qquad$ $R = 1\ \Omega$



$R = 1.5\ \Omega$ $R = 3\ \Omega$



$R = 4.5\ \Omega$ $R = 6\ \Omega$

Analisando a situação no domínio da frequência, pode-se dizer que o aumento de R provoca uma diminuição da frequência de ressonância do circuito. Como a função de transferência $G_C(s)$ é a de um filtro passa-baixas, o resultado é que as altas frequências vão sendo cada vez mais suprimidas, o que explica a subida mais lenta de $V_C(t)$. Já a função de $G_L(s)$ é a de um filtro passa-altas, por isso a diminuição da frequência de ressonância do circuito não afeta muito o espectro de $V_L(\omega)$, a não ser para valores muito baixos de R, que fazem com que o circuito apresente oscilações.

Referências

[LATHI 1998] Bhagawandas Pannalai LATHI, **Signal Processing and Linear Systems**, Cambridge Berkeley Press, Carmichael, 1998, ISBN 0-941413-35-7, Chap. 4.7, pp. 277 a 289.

Simulação realizada com **Scilab** 5.5.2:
`https://www.scilab.org`
Texto formatado com **pdflatex** em ambiente **MiKTeX** 2.9:
`http://miktex.org/download/`