

SISTEMAS E SINAIS - EXERCÍCIO VI

SÉRGIO CORDEIRO

1. Verificar como calcular série de Fourier e transformada de Fourier no MATLAB (simbólica e numérica).

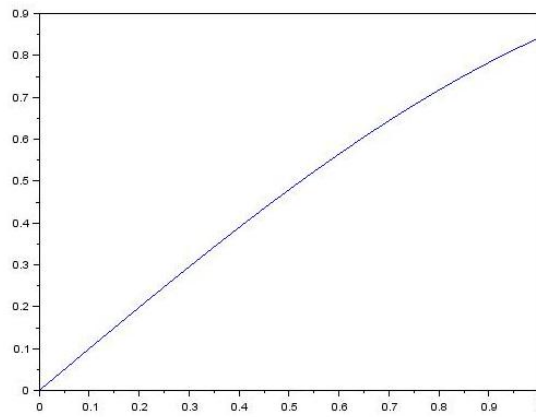
A função **fft** calcula a transformada discreta de Fourier (DFT) a partir de uma tabela de valores dada. A DFT é a versão discreta da série de Fourier. Exemplo:

```
dft = fft(y);
```

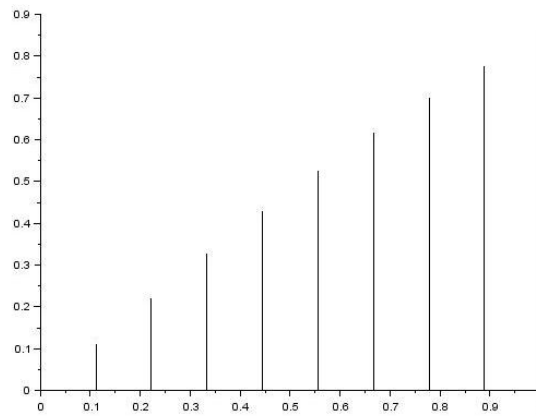
A saída é um espectro completo, portanto redundante. Para obter-se o espectro apenas para $\omega > 0$, seleciona-se a primeira metade dos valores. Exemplo:

```
len = size(dft, 2) / 2;  
espectro = dft(1:len);
```

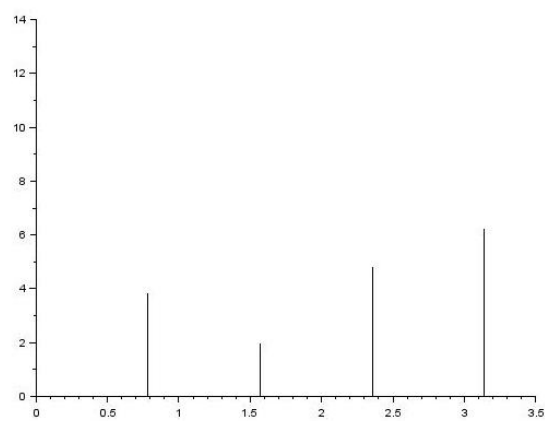
Os valores são complexos. Para plotar os gráficos de módulo e ângulo em função de ω , deve-se extrair a informação por meio de funções como **abs** e **arg**. O processo está ilustrado nos gráficos abaixo: Os gráficos de resposta em frequência são os seguintes:



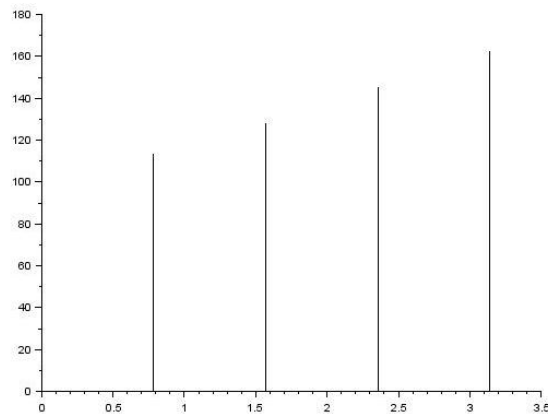
Função $y = \sin(t) \left[u(t) - u(t-1) \right]$



Amostras de $y(t)$



$|H(\omega)|$



$$|H(\omega)$$

A função **fit** calcula os coeficientes da série trigonométrica de Fourier que melhor se ajusta a uma tabela de valores dada; deve-se informar ainda o número de termos a ser usado. Exemplo:

```
coef = fit(x, y, 'fourier8');
```

Os valores obtidos, neste caso são reais, se a função de entrada for real. Os primeiros valores são os coeficientes a_0 a a_n , e os últimos, os coeficientes b_n . Em todos os casos acima, os valores de entrada devem corresponder a exatamente um período do sinal.

Se se desejar uma expressão analítica para a transformada de Fourier, pode-se empregar a função **fourier**:

```
syms x;  
fourier(sin(x));
```

2. Reproduzir o exemplo M.6.2 (página 587).

O problema consiste em gerar um sinal contendo componentes sempre nas mesmas frequências ω_n , com amplitudes constantes, mas diferentes valores para os ângulos de fase θ_{a_n} . O sinal gerado terá formas diversas, dependendo da escolha dos ângulos de fase; por conseguinte, também variará a amplitude máxima atingida pelo sinal.

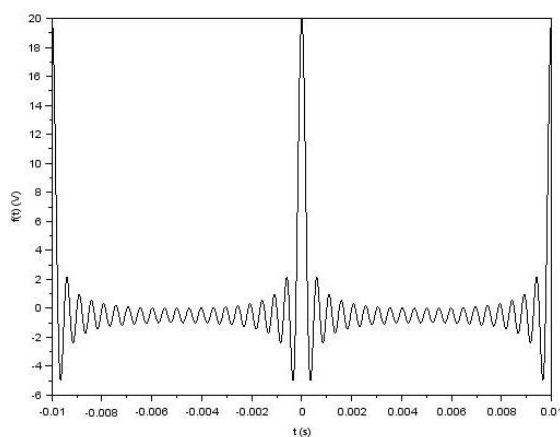
As situações simuladas foram as seguintes:

1. Ângulos nulos para todas as componentes ($\theta_{a_n} = 0$)
2. Ângulos aleatórios
3. Ângulos aleatórios, mas usando-se uma semente diferente para o gerador de números aleatórios
4. Ângulos otimizados

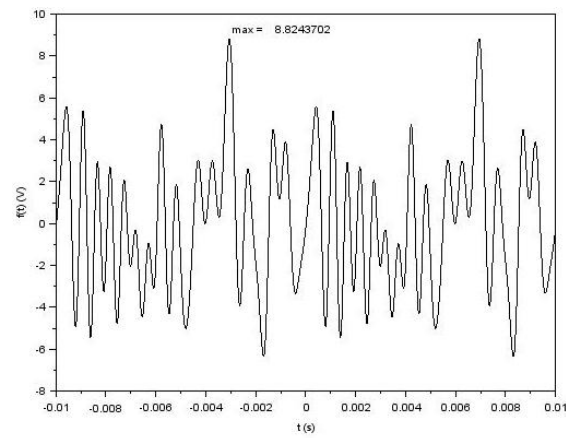
A otimização significa obter valores de θ_{a_n} que minimizem a amplitude máxima atingida pelo sinal. Essa situação é desejável para que se obtenha a melhor relação sinal-ruído possível para análise em todas as frequências.

Os sinais gerados podem ser prolongados no tempo por alguns segundos e então ouvidos; a diferença entre eles é facilmente perceptível.

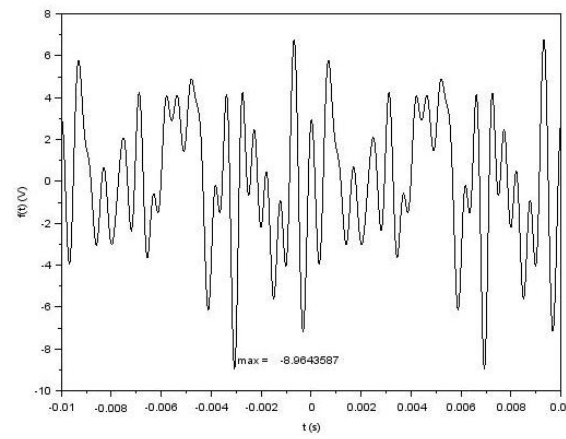
Os gráficos resultantes são os seguintes:



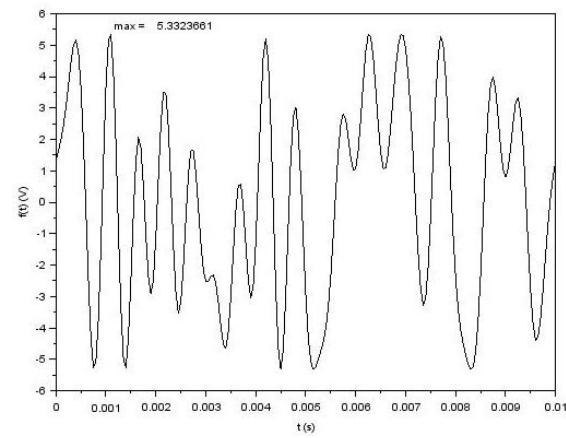
Para $\theta_n = 0$



Para θ_n aleatório (semente = 0)



Para θ_n aleatório (semente = 1)



Para θ_n otimizado

3. Resolver os exercícios 6.5.8 e 6.5.9.

a) O exercício 6.5.8 consiste em encontrar os dois primeiros coeficientes não nulos da série de Fourier baseada em polinômios de Legendre, bem como calcular a energia do erro na aproximação, para as duas funções:

$$(1) \quad f_A(t) = \begin{cases} 1 & -1 < t < 0 \\ -1 & 0 < t < 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad f_B(t) = \begin{cases} 1 & -\pi < t < 0 \\ -1 & 0 < t < \pi \end{cases}$$

O período de $f_A(t)$ é igual a 2. Como a função é ímpar, os coeficientes pares serão nulos. Os polinômios não constituem uma base ortonormal, pois a energia de cada um é igual a:

$$\begin{aligned} E_n &= \mathcal{E} \left\{ \mathbf{P}_L^{(n)} \right\} \\ &= \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

Os primeiros polinômios de Legendre ímpares são:

$$\mathbf{P}_L^{(1)}(t) = t$$

$$\mathbf{P}_L^{(3)}(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$$

Os coeficientes são, então:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{2 \cdot 1 + 1}{2} \int_{-1}^1 f_A(t) \mathbf{P}_L^{(1)}(t) dt \\
 &= \frac{3}{2} \left\{ \int_{-1}^0 1 \cdot t dt + \int_0^1 -1 \cdot t dt \right\} \\
 &= \frac{3}{2} \left\{ \left. \frac{t^2}{2} \right|_{-1}^0 - \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 \right\} \\
 &= \frac{3}{2} \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\} \\
 &= -\frac{3}{2} \\
 c_3 &= \frac{2 \cdot 3 + 1}{2} \int_{-1}^1 f_A(t) \mathbf{P}_L^{(3)}(t) dt \\
 &= \frac{7}{2} \left\{ \int_{-1}^0 1 \cdot \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) dt + \int_0^1 -1 \cdot \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) dt \right\} \\
 &= \frac{7}{4} \left\{ \left. \frac{5t^4}{4} \right|_{-1}^0 - \left. \frac{3t^2}{2} \right|_{-1}^0 - \left. \frac{5t^4}{4} \right|_0^1 + \left. \frac{3t^2}{2} \right|_0^1 \right\} \\
 &= \frac{7}{4} \left\{ -\frac{5}{4} + \frac{3}{2} - \frac{5}{4} + \frac{3}{2} \right\} \\
 &= \frac{7}{8}
 \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 f_A(t) &\approx \tilde{f}_A(t) \\
 &= c_1 \mathbf{P}_L^{(1)}(t) + c_3 \mathbf{P}_L^{(3)}(t) \\
 &= -\frac{3}{2} \cdot t + \frac{7}{8} \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \\
 &= \frac{1}{16}(35t^3 - 45t) \\
 &= \frac{5}{16}(7t^3 - 9t)
 \end{aligned}$$

O erro é dado por:

$$\begin{aligned} e(t) &= f_A(t) - \tilde{f}_A(t) \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{5}{16}(7t^3 - 9t) & -1 < t < 0 \\ -1 - \frac{5}{16}(7t^3 - 9t) & 0 < t < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

e sua energia, por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left\{ e(t) \right\} &= \int_{-\infty}^{-\infty} |e(t)|^2 dt \\ &= \int_{-1}^1 e(t)^2 dt \\ &= \int_{-1}^0 \left(1 - \frac{5}{16}(7t^3 - 9t) \right)^2 dt + \int_0^1 \left(-1 - \frac{5}{16}(7t^3 - 9t) \right)^2 dt \\ &= \int_{-1}^0 \left(1 - \frac{5}{8}(7t^3 - 9t) + \frac{25}{256}(7t^3 - 9t)^2 \right) dt + \dots \\ &\quad \dots + \int_0^1 \left(1 + \frac{5}{8}(7t^3 - 9t) + \frac{25}{256}(7t^3 - 9t)^2 \right) dt \\ &= \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{25}{256}(7t^3 - 9t)^2 \right) dt - \int_{-1}^0 \frac{5}{8}(7t^3 - 9t) dt + \int_0^1 \frac{5}{8}(7t^3 - 9t) dt \\ &= \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{25}{256}(49t^6 - 126t^4 + 81t^2) \right) dt - \int_{-1}^0 \frac{5}{8}(7t^3 - 9t) dt + \dots \\ &\quad \dots + \int_0^1 \frac{5}{8}(7t^3 - 9t) dt \\ &= t \Big|_{-1}^1 + \frac{25}{256} \left(7t^7 - \frac{126t^5}{5} + 27t^3 \right) \Big|_{-1}^1 - \frac{5}{8} \left(\frac{7t^4}{4} - \frac{9t^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{5}{8} \left(\frac{7t^4}{4} - \frac{9t^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left\{e(t)\right\} &= 1 + 1 + \frac{25}{256} \left(7 + 7 - \frac{126}{5} - \frac{126}{5} + 27 + 27\right) - \frac{5}{8} \left(-\frac{7}{4} + \frac{9}{2}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{5}{8} \left(\frac{7}{4} - \frac{9}{2}\right) \\ &= 2 + \frac{25}{256} \frac{88}{5} - \frac{5}{8} \frac{11}{2} \\ &= 2 + \frac{55}{32} - \frac{55}{16} \\ &= \frac{9}{32}\end{aligned}$$

Uma maneira alternativa de calcular a energia do erro é pela fórmula:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left\{e(t)\right\} &= \mathcal{E}\left\{f_A(t)\right\} - \mathcal{E}\left\{\tilde{f}_A(t)\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{-\infty} |f_A(t)|^2 dt - \sum_n c_n^2 E_n \\ &= \int_{-1}^1 f_A(t)^2 dt - c_1^2 E_1 - c_2^2 E_2 \\ &= \int_{-1}^1 1 dt - \left[\frac{3}{2}\right]^2 \frac{2}{3} - \left[\frac{7}{8}\right]^2 \frac{2}{7} \\ &= 2 - \frac{3}{2} - \frac{7}{32} \\ &= \frac{9}{32}\end{aligned}$$

A função $f_B(t)$ pode ser escrita como $f_A\left(\frac{t}{\pi}\right)$. Sua aproximação, portanto, será:

$$\begin{aligned}f_B(t) &\frac{5}{16} \left(7 \left[\frac{t}{\pi}\right]^3 - 9 \left[\frac{t}{\pi}\right]\right) \\ &= \frac{5}{16\pi^3} (7t^3 - 9\pi^2 t)\end{aligned}$$

b) O exercício 6.5.9 consiste em encontrar os quatro primeiros coeficientes da série de Fourier baseada em funções de Walsh, bem como calcular a energia do erro na aproximação, para a função:

$$(3) \quad f(t) = t \quad 0 < t < 1$$

O período da função é igual a 1 e as funções são ortonormais; portanto, os coeficientes são:

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^1 f(t) \mathbf{W}^{(1)}(t) dt \\ &= \int_0^1 t \cdot 1 dt \\ &= \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \int_0^1 f(t) \mathbf{W}^{(2)}(t) dt \\ &= \int_0^{0.5} t \cdot 1 dt + \int_{0.5}^1 t \cdot -1 dt \\ &= \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{0.5} - \left. \frac{t^2}{2} \right|_{0.5}^1 \\ &= \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_3 &= \int_0^1 f(t) \mathbf{W}^{(3)}(t) dt \\
&= \int_0^{0.25} t dt - \int_{0.25}^{0.75} t dt + \int_{0.75}^1 t dt \\
&= \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{0.25} - \left. \frac{t^2}{2} \right|_{0.25}^{0.75} + \left. \frac{t^2}{2} \right|_{0.75}^1 \\
&= \frac{1}{32} - \frac{9}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{2} - \frac{9}{32} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_4 &= \int_0^1 f(t) \mathbf{W}^{(4)}(t) dt \\
&= \int_0^{0.25} t dt - \int_{0.25}^{0.5} t dt + \int_{0.5}^{0.75} t dt - \int_{0.75}^1 t dt \\
&= \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{0.25} - \left. \frac{t^2}{2} \right|_{0.25}^{0.5} + \left. \frac{t^2}{2} \right|_{0.5}^{0.75} - \left. \frac{t^2}{2} \right|_{0.75}^1 \\
&= \frac{1}{32} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{9}{32} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{9}{32} \\
&= -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
f(t) &\approx \tilde{f}(t) \\
&= c_1 \mathbf{W}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{W}^{(2)}(t) + c_3 \mathbf{W}^{(3)}(t) + c_4 \mathbf{W}^{(4)}(t) \\
&= \begin{cases} c_1 + c_2 + c_4 & 0 < t < 0.25 \\ c_1 + c_2 - c_4 & 0.25 < t < 0.5 \\ c_1 - c_2 + c_4 & 0.5 < t < 0.75 \\ c_1 - c_2 - c_4 & 0.75 < t < 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{8} & 0 < t < 0.25 \\ \frac{3}{8} & 0.25 < t < 0.5 \\ \frac{5}{8} & 0.5 < t < 0.75 \\ \frac{7}{8} & 0.75 < t < 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

A energia do erro é dada por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} \left\{ e(t) \right\} &= \mathcal{E} \left\{ f(t) \right\} - \mathcal{E} \left\{ \tilde{f}(t) \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^{-\infty} |f(t)|^2 dt - \int_{-\infty}^{-\infty} |\tilde{f}(t)|^2 dt \\
 &= \int_0^1 f_A(t)^2 dt - \int_0^1 \tilde{f}(t)^2 dt \\
 &= \int_0^1 t^2 dt - \int_0^{0.25} \left(\frac{1}{8}\right)^2 dt - \int_{0.25}^{0.5} \left(\frac{3}{8}\right)^2 dt - \int_{0.5}^{0.75} \left(\frac{5}{8}\right)^2 dt - \int_{0.75}^1 \left(\frac{7}{8}\right)^2 dt \\
 &= \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 - \left. \frac{t}{64} \right|_0^{0.25} - \left. \frac{9t}{64} \right|_{0.25}^{0.5} - \left. \frac{25t}{64} \right|_{0.25}^{0.5} - \left. \frac{49t}{64} \right|_{0.75}^1 \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{256} - \frac{9}{256} - \frac{25}{256} - \frac{49}{256} \\
 &= \frac{1}{192}
 \end{aligned}$$

Simulação realizada com **Scilab** 5.5.2:

<https://www.scilab.org>

Texto formatado com **pdflatex** em ambiente **MiKTeX** 2.9:

<http://miktex.org/download/>