SISTEMAS E SINAIS - EXERCÍCIO IX

SÉRGIO CORDEIRO

1. Discutir a convergência das representações de Fourier para a função $\boldsymbol{sinc}(x)$, mostrando que ela não atende à condição:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |f[n]| < \infty$$

mas atende a:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty$$

Explicar o que significam convergência uniforme e convergência na média.

De maneira geral, podemos dizer que uma série $S(x,n)$ é convergente quando a função $f_n(x) = S(x,n)$ se aproxima de outra função $f(x)$ quando n aumenta, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{D} \tag{1}$$

onde $\mathbb{D}$ é o domínio de f e f_n.
A Análise Matemática define diversos tipos de convergência para séries infinitas. O mais intuitivo é o expresso pela equação 1, e é chamado de **convergência ponto-a-ponto**. Um tipo de convergência mais estrito é a **convergência uniforme**, descoberta por Weierstrass em 1841. Em resumo, uma série $S(x,n)$ converge uniformemente para uma função $f(x)$ quando a velocidade da convergência não depende de x. Formalmente, isso se expressa como:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left\{ |f_n(x) - f(x)| \right\} = 0 \ \forall x \in \mathbb{D} \tag{2}$$

onde $\sup\{g\}$ denota o *supremum* da função g. Quando essa condição é satisfeita, as seguintes propriedades são garantidas para $S(x,n)$:

1. a convergência é ponto-a-ponto
2. $f_n(x)$ é contínua se $f(x)$ for contínua
3. os operadores derivação $\mathcal{D}$ e integração $\mathcal{D}^{-1}$ são comutáveis entre si e com o operador limite $\mathcal{L}$

4. a convergência é incondicional, ou seja, independe da ordem em que os termos são somados

Essas propriedades são muito úteis na manipulação das séries, principalmente para demonstração de teoremas, e não são garantidas se apenas a convergência ponto-a-ponto se verifica, com exceção da última (**convergência incondicional**).
Existem testes para se verificar se uma série converge uniformemente. Um deles é o **teste M de Weierstrass**, que é expresso por:

$$|s_n(x)| \leq M_n < \infty \forall x \in \mathbb{D} \wedge n \in \mathbb{N}^+$$
$$\wedge$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \tag{3}$$

onde s_n são os termos da sequência. Ou seja, se cada termo da sequência tiver um limite superior, e a série desses limites convergir (não necessariamente de forma uniforme), então a série S convergirá uniformemente.
Um teste conhecido para convergência ponto-a-ponto é o **teste da razão**, expresso matematicamente por:

$$|s_n(x)| \leq M_n < \infty \forall x \in \mathbb{D} \wedge n \in \mathbb{N}^+$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = 0 \tag{4}$$

A propriedade já mencionada de convergência incondicional vale não apenas para séries convergentes ponto-a-oponto, e sim para todas as séries que possuem **convergência absoluta**, ou seja, séries que possuem a propriedade:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n| < \infty \tag{5}$$

A convergência absoluta garante outra propriedade para a série, além da convergência incondicional: o produto de uma série absolutamente convergente por outra, convergente mas não necessariamente de forma absoluta, é o produto das séries:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} r_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} s_k r_{n-k} \tag{6}$$

Infelizmente, algumas séries importantes não convergem absolutamente. Um outro tipo é a **convergência norma-p**, expressa por:

(7) $$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^p < \infty / 1 < p < \infty$$

é importante frisar que a convergência norma-p e a convergência ponto-a-ponto são dois tipos diferentes de convergência, não sendo uma mais forte que a outra. Existem séries que convergem em um sentido e divergem no outro. A convergência uniforme, por sua vez, é mais forte que ambas, pois uma série uniformemente convergente sempre convergirá tanto poonto-a-ponto quanto com relação à norma-p.
Um tipo mais fraco é a **convergência pela média**, introduzida por Ernesto Cesàro e expressa por:

(8) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k < \infty$$

A equação 8 claramente expressa a média aritmética dos primeiros n termos da sequência. Muitas séries divergentes possuem essa propriedade.

No contexto das representações de Fourier, existem vários testes para verificação da convergência. O mais antigo é apresentado por Peter Gustav Lejeune Dirichlet em 1823:

1. $f(x)$ deve ser uma função periódica com período T
2. $f(x)$ deve ser absolutamente integrável sobre um período:

(9) $$\int_T |f(x)|\, dx < \infty$$

3. $f(x)$ deve apresentar um número finito de máximos e mínimos no período
4. $f(x)$ deve apresentar um número finito de descontinuidades, todas de valor finito, no período

Para funções não-periódicas, considera-se um período $T \to \infty$.
As condições de Dirichlet garante convergência uniforme nos pontos onde $f(x)$ é contínua, e convergência (não-uniforme) para a média $\frac{f(x_{n^+} + f(x_{n^-}}{2}$ nas descontinuidades $x = x_n$.
Uma das consequências da convergência não-uniforme é o conhecido **efeito de Gibbs**.
Os critérios foram posteriormente aperfeiçoados por Ulisse Dini e Rudolf Lipschitz e o chamado teste de Dini:

(10) $$\int_0^{\pi} \frac{1}{t} \left| \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2} - \ell \right| < \infty$$

onde $f(x)$ é qualquer função com período 2π e com um número finito de descontinuidades nesse intervalo, garantem que $f(x_0) = \ell$ de forma uniforme. Esse teste é satisfeito por toda função cujos coeficientes $\hat{f}[n]$ decaem exponencialmente:

(11) $$\hat{f}[n] \leq \frac{M}{|n|^p} / p > 0$$

Algumas funções de grande interesse para o processamento de sinais, entretanto, não passam nos testes de Dirichlet e de Dini. O melhor exemplo é $f(x) = \boldsymbol{sinc}(x)$. Outro critério de convergência, mais fraco, é o seguinte:

(12) $$\hat{f}[n] \leq M$$

que garante convergência ponto-a-ponto.
A transformada de Laplace da função $\boldsymbol{sinc}(x)$ pode ser facilmente calculada por meio da propriedade:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \int_s^\infty F(p)\, dp \qquad \boxed{F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(x)}{x}\right\} &= \int_s^\infty \frac{1}{p^2+1}\, dp \\
&= \boldsymbol{atan}(p)\big|_s^\infty \\
&= \frac{\pi}{2} - \boldsymbol{atan}(s)
\end{aligned}$$

A região de convergência para essa transformada inclui o eixo imaginário, por isso podemos obter a transformada de Fourier fazendo $s = \jmath\omega$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(x)}{x}\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{\sin(x)}{x}\right\}\Bigg|_{s=\jmath\omega} \\
&= \frac{\pi}{2} - \boldsymbol{atan}(\jmath\omega) \\
&= \begin{cases} 0 & \omega \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \omega = 0 \end{cases} \\
&= \frac{\pi}{2}\boldsymbol{\delta}(\omega)
\end{aligned}$$

Os coeficientes são limitados, portanto a representação de Fourier converge ponto-a-ponto, de acordo com o critério 12. Como a convergência não é uniforme nesse caso, apesar de a função ser contínua, devemos esperar o aparecimento do efeito de Gibbs na reconstrução.

Um critério de convergência bastante útil para as representações de Fourier é o da norma $p = 2$; para $f(x)$ periódica, por exemplo:

$$\int_T |f(x)|^2 \, dx < \infty \tag{13}$$

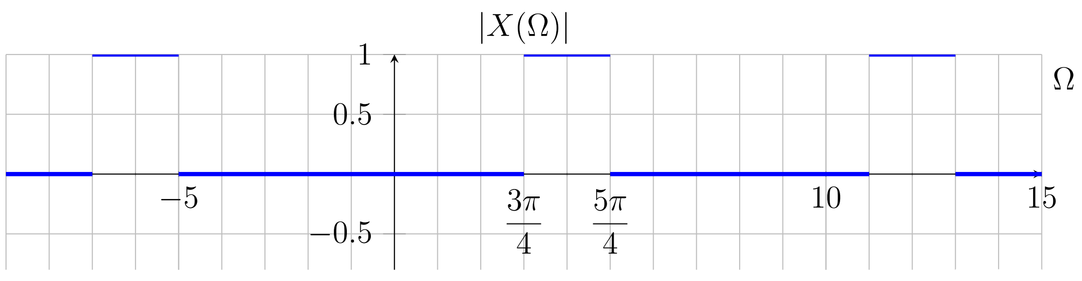
Tal teste é útil porque todo sinal físico o atende, uma vez que a integral é a medida da potência do sinal. Esse critério garante convergência (não-uniforme) nos pontos onde $f(x)$ é contínua, e para a média nas descontinuidades.
Uma função trivial, a função constante $f(x) = \mathrm{A}$ não atende nem ao teste de Dirichlet nem ao da norma-2; no entanto, sua transformada de Fourier existe, e é bastante útil. Para que ela faça sentido matematicamente, é preciso usar ainda outro critério de convergência, o de convergência pela média, expresso por 8, uma vez que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{A} e^{-\jmath\omega} \, dx \\
&= \begin{cases} \mathrm{A}\,\boldsymbol{\delta} & \omega = 0 \\ 0 & \omega \neq 0 \end{cases} \\
&= \mathrm{A}\,\boldsymbol{\delta}(\omega)
\end{aligned}$$

Para $\omega \neq 0$, considera-se que cada grupo de $\dfrac{\omega}{2\pi}$ valores consecutivos tem uma soma nula, o que justifica o resultado. Esse exemplo ilustra bem a conveniência de poder-se aplicar mais de um tipo de convergência para a representação de Fourier.

---

2. Calcular a resposta ao impulso de um filtro passa-altas ideal com $\Omega_c = \dfrac{\pi}{4}$:



usando a propriedade:

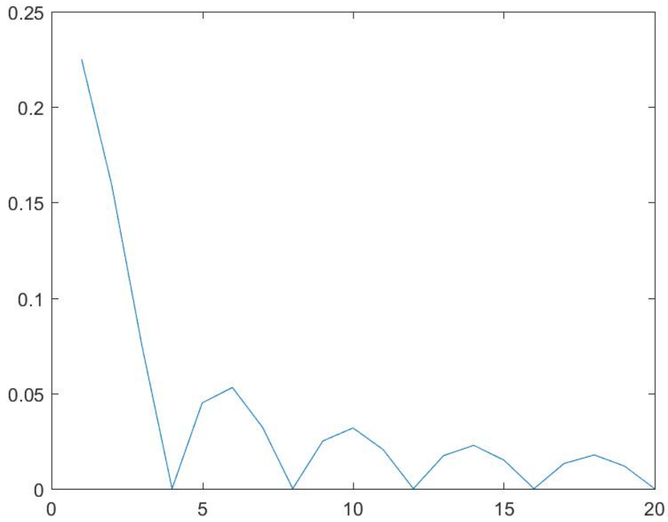
$$x[n]e^{-\jmath\Omega_c n} \iff X(\Omega + \Omega_c)$$

Simular no MATLAB: obter 20 amostras da resposta ao impulso e voltar para o domínio da frequência.

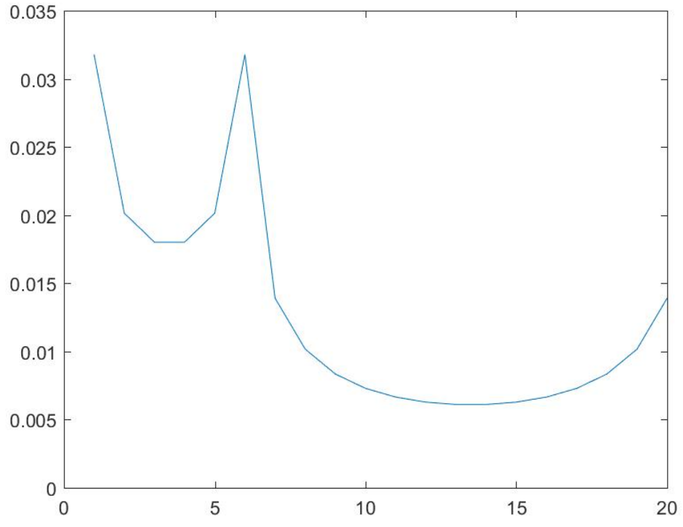
A resposta do filtro passa-altas ideal é idêntica à do passa-baixa ideal, apenas com o espectro deslocado de forma a ter seu centro em $\Omega = \pi$ em vez de em $\Omega = 0$. De acordo com a propriedade citada, tal deslocamento resulta de uma multiplicação da sequência original por uma exponencial com frequência $n\pi$. Essa multiplicação corresponde a uma modulação em amplitude de uma onda senoidal de alta frequência pelo sinal original. Sua resposta ao impulso será:

$$\begin{aligned} h[n] &= \mathcal{F}-1\{H(\Omega)\} \\ &= \mathcal{F}-1\left\{\boldsymbol{rect}\left(\frac{2*(\Omega+\pi)}{\pi}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{4}\boldsymbol{sinc}\left(\frac{\pi}{4}\Omega\right)e^{-\jmath\pi n} \end{aligned}$$

O gráfico dessa resposta é o seguiinte:



A transformada inversa, obtida através da função `ifft`, tem o seguinte gráfico:



Referências

[GRIGORYAN] Viktor GRIGORYAN, **Convergence of Fourier series**. Disponível em `http://www.math.ucsb.edu/~grigoryan/124B/lecs/lec5.pdf`, acesso em
.

[MARTÍN] Raúl Martín MARTÍN, **Convergencia de las series de Fourier**. Disponível em `http://www.uclm.es/PROFESORADO/raulmmartin/AmpliacionMatematicas/SeriesFourier.pdf`, acesso em
.

[WIKIPEDIA 1] WIKIPEDIA, **Convergence tests**. Disponível em `https://en.wikipedia.org/wiki/Convergence_tests`, acesso em
.

[WIKIPEDIA 2] WIKIPEDIA, **Dini's theorem**. Disponível em `https://en.wikipedia.org/wiki/Dini's_theorem`, acesso em
.

[WIKIPEDIA 3] WIKIPEDIA, **Dirichlet's test**. Disponível em `https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet's_test`, acesso em
.

[WIKIPEDIA 4] WIKIPEDIA, **Pointwise convergence**. Disponível em `https://en.wikipedia.org/wiki/Pointwise_convergence`, acesso em
.

[WIKIPEDIA 5] WIKIPEDIA, **Uniform convergence**. Disponível em `https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_convergence`, acesso em
.

Simulação realizada com **MATLAB** R2016a
`https://www.mathworks.com`
Texto formatado com **pdflatex** em ambiente **MiKTeX** 2.9:
`http://miktex.org/download/`