SISTEMAS E SINAIS - EXERCÍCIO IV

SÉRGIO CORDEIRO

1. Obter modelo no tempo para os sistemas:

a)

$$e(t) = 10\,\boldsymbol{u}\,(t)$$

$$y(t) = 6 + 9.22e^{-t}\cos(2t - 130.6°)$$

$$t \geq 0$$

b)

$$e(t) = 3e^{-5t}\,\boldsymbol{u}\,(t)$$

$$y(t) = -2e^{-5t} - e^{-2t} + 3e^{-3t}$$

$$t \geq 0$$

a)

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \implies \begin{aligned} y_h(t) &= 9.22e^{-t}\cos(2t - 130.6°) \\ y_p(t) &= 6 \end{aligned}$$

$$\lambda = -1 \pm \jmath 2 \implies \begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 &= (-1 - \jmath 2)(-1 + \jmath 2) \\ &= (-1)^2 - (\jmath 2)^2 \\ &= 5 \\ -(\lambda_1 + \lambda_2) &= (-1 - \jmath 2) + (-1 + \jmath 2) \\ &= 2 \\ \therefore \frac{d^2 y_h}{dt^2} &+ 2\frac{dy_h}{dt} + 5y_h = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2y_p}{dt^2} + 2\frac{dy_p}{dt} + 5y_p = \mathrm{B}e(t) \implies \qquad 5 \cdot 6 = 10\mathrm{B}$$

$$\therefore \mathrm{B} = 3$$

$$\begin{aligned}
y(0) &= 6 + 9.22e^0 \cos(0 - 130.6°) \\
&= 0 \\
\frac{dy}{dt} &= 9.22\Big[-e^{-t}\cos(2t - 130.6°) - 2e^{-t}\sin(2t - 130.6°)\Big] \\
&= -9.22e^{-t}\Big[\cos(2t - 130.6°) + 2\sin(2t - 130.6°)\Big] \\
\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} &= -9.22e^0\Big[\cos(0 - 130.6°) + 2\sin(0 - 130.6°)\Big] \\
&= 20
\end{aligned}$$

O modelo completo, portanto, é:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 3e$$

$$y(0) = 0 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 20$$

---

b)

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \implies \qquad y_h(t) = -e^{-2t} + 3e^{-3t}$$

$$y_p(t) = -2e^{-5t}$$

$$\lambda = \{-3, -2\} \implies \begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 &= -3 \cdot -2 \\ &= 6 \\ -(\lambda_1 + \lambda_2) &= -(-2-3) \\ &= 5 \\ &\therefore \frac{d^2y_h}{dt^2} + 5\frac{dy_h}{dt} + 6y_h = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2y_p}{dt^2} + 5\frac{dy_p}{dt} + 6y_p = \mathbf{B}e(t) \implies \begin{aligned} -50e^{-5t} + 5 \cdot 10e^{-5t} + 6 \cdot -2e^{-5t} &= 3\mathbf{B}e^{-5t} \\ \therefore \mathbf{B} &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= -e^0 + 3e^0 - 2e^0 \\ &= 0 \\ \frac{dy}{dt} &= 2e^{-2t} - 9e^{-3t} + 10e^{-5t} \\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} &= 2e^0 - 9e^0 + 10e^0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

O modelo completo, portanto, é:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = -4e$$

$$y(0) = 0 \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 3$$

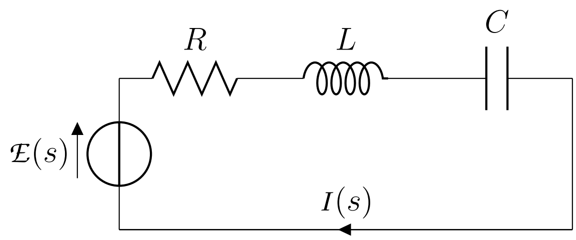
2. Dado $h(t) = 1.3969e^{-1.364t} - 1.3969e^{-58.63t}$, e $t \geq 0$, obter R, L e C para circuito RLC e saída v_c.

$$
\begin{aligned}
\lambda = \{-58.63, -1.364\} \implies \qquad \lambda_1\lambda_2 &= (-58.63)(-1.364) \\
&= 80 \\
-(\lambda_1 + \lambda_2) &= -(-58.63 - 1.364) \\
&= 60 \\
\therefore \frac{d^2y}{dt^2} &+ 60\frac{dy}{dt} + 80y = e
\end{aligned}
$$

No domínio da frequência complexa:

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{\mathcal{E}(s)}{s^2 + 60s + 80}$$

O circuito modelo é o seguinte:



$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_c(s) &= \frac{1}{Cs}\ I(s) \\
&= \frac{1}{Cs}\ \frac{\mathcal{E}(s)}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} \\
&= \frac{\mathcal{E}(s)}{LCs^2 + RCs + 1} \\
&= \frac{\mathcal{E}(s)}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}
\end{aligned}
$$

Portanto:

$$\frac{1}{LC} = 80 \qquad \text{e} \qquad \frac{R}{L} = 60$$

Para $C = 100\ \mu F$, teremos

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{80C} \\ &= \frac{1}{80 \times 100 \times 10^{-6}} \\ &= 125\ H \\ R &= 60L \\ &= 60 \times 125 \\ &= 7.5\ k\Omega \end{aligned}$$

---

3. Para $\mathcal{G}(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3}$, aproximar para modelo de primeira ordem e discutir validade da aproximação.

A transformada inversa exata é $g(t) = t^2 e^{-t}$. Uma aproximação de primeira ordem estaria na forma $g_a(t) = e^{-at}$. Evidentemente, para t pequeno, $g_a(t)$ é uma má aproximação; para t grande, $g_a(t)$ coincide com $g(t)$ para $a = -1$.

Analisando no domínio da frequência real, para f baixo, a aproximação é boa; para f acima da frequência de corte, a amplitude cai e o ângulo de fase cresce muito mais devagar em $\hat{g}_a$ do que em $\hat{g}$.

---

4. Modelar na frequência $\mathcal{G}(s) = \dfrac{80}{s^2 + 60s + 80}$, graficamente e por meio de equações. Simular com entrada *chirp* e indicar como obter resposta em frequência a partir de simulação.

Como visto no problema 2, $\lambda = \{-58.63, -1.364\}$. O sistema é de segunda ordem sobreamortecido. Um dos polos é claramente dominante, por isso o sistema também poderia ser aproximado razoavelmente bem por um de primeira ordem.
Alternativamente, poderíamos obter a resposta em frequência por meio da Transformada de Fourier:

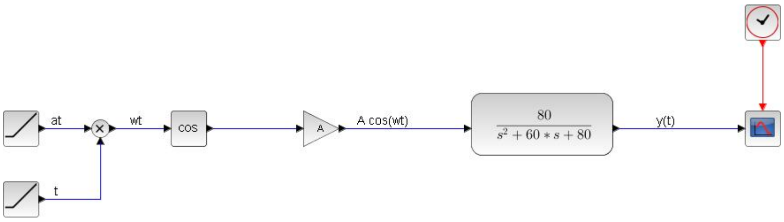
$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{G}}(\omega) &= \mathcal{G}(s)|_{s=\jmath\omega} \\
&= \frac{80}{(\jmath\omega)^2 + 60(\jmath\omega) + 80} \\
&= \frac{80}{80 - \omega^2 + \jmath 60\omega} \\
&= \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + \jmath\frac{60}{\omega_c}\frac{\omega}{\omega_c}} && \boxed{\omega_c^2 = 80} \\
&= \frac{1}{1 - \omega_r^2 + \jmath 3\sqrt{5}\omega_r} && \boxed{\omega_r = \frac{\omega}{\omega_c}}
\end{aligned}$$

Em coordenadas polares:

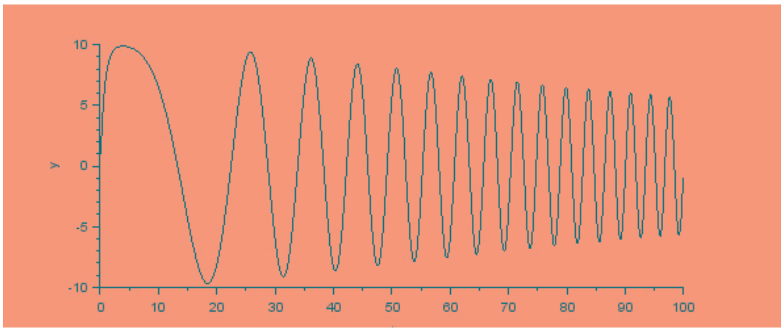
$$\begin{aligned}
|\hat{\mathcal{G}}(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{(1-\omega_r^2)^2 + (3\sqrt{5}\omega_r)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - 2\omega_r^2 + \omega_r^4 + 45\omega_r^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + 43\omega_r^2 + \omega_r^4}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\arg\{\hat{\mathcal{G}}(\omega)\} &= -\arg\{1 - \omega_r^2 + \jmath 3\sqrt{5}\omega_r\} \\
&= \boldsymbol{atan}\left(\frac{3\sqrt{5}\omega_r}{\omega_r^2 - 1}\right)
\end{aligned}$$

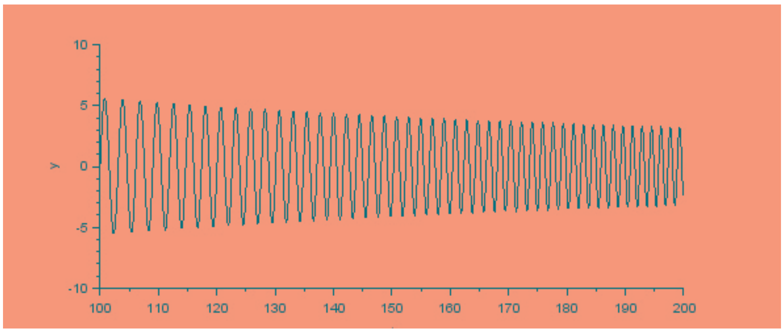
O diagrama de simulação correspondente é mostrado abaixo:



O sinal de entrada é da forma $e(t) = A\cos(\omega t)$, com $\omega = at$, $a \in \mathbb{R}$. Ou seja, a frequência cresce linearmente com o tempo. A saída simulada é um sinal idêntico à entrada, apenas com a amplitude variando de acordo com a frequência. Os gráficos seguintes ilustram esse fenômeno. Os parãmetros usados foram $A = 10$ e $a = 0.01$.



$0 \leq t \leq 100\ s$



$100 \leq t \leq 200\ s$

A aplicação do sinal de frequência variável permite o levantamento da resposta em frequência do circuito, contanto que a não seja muito grande.

5. Discutir como podemos obter resposta em frequência de modo experimental.

A resposta em frequência de um sistema linear é a Transformada de Fourier de sua resposta ao impulso $h(t)$. Assim, ocorrem naturalmente ao pensamento duas formas de levantá-la experimentalmente:

1. Aplicar um impulso ao sistema, medir $h(t)$ e calcular sua Transformada de Fourier
2. Aplicar entradas senoidais de frequências diversas e medir a resposta do sistema em termos de amplitude e ângulo de fase.

O primeiro método tem a vantagem de ser mais rápido, envolvendo apenas um ensaio experimental, seguido da aplicação, por exemplo, da FFT ao resultado. As dificuldades são duas: primeiro, que o sistema pode apresentar instabilidade quando submetido a uma entrada impulsiva, levando a uma resposta com suporte infinito no tempo, ao qual não é possível aplicar a transformada; segundo, que o número de amostras e a frequência de amostragem escolhidos limitarão a resolução do resultado. Além disso, para frequências muito altas, a atenuação será muito grande, o que prejudica a precisão do ensaio. O segundo método não possui essas desvantagens, mas o tempo de levantamento será maior. Pode-se, como feito no problema anterior, aplicar um sinal cuja frequência varie lentamente para levantar a resposta do sistema.

6. Para x_1 com tamanho N e x_2 com tamanho M, qual é o tamanho da convolução $x_1 * x_2$?

A convolução funciona como uma amostragem da primeira sequência feita pela segunda, que é invertida e deslocada no tempo. Para que a convolução dê um resultado não nulo, é preciso que haja pelo menos uma amostra comum a x_1 e x_2 . Assim, o comprimento será $M+N-1$ amostras.

---

7. Para
a) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} e[k]$
b) $y[n] = e[k] - e[k-1]$
Achar $h[n]$ tal que $y[n] = h[n] * e[n]$.

a)

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{n} 1 \cdot x[k] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{n} h[k-n] \cdot x[k] \qquad \boxed{h[n] = \boldsymbol{u}\,[n]} \\
&= h[k] * x[k]
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] - x[n-1] \\
&= \sum_{k=0}^{0} x[n-k] - \sum_{k=1}^{1} x[n-k] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{u}\,[n-k]x[n-k] - \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{u}\,[n-k+1]x[n-k] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{u}\,[n-k]x[n-k] - \boldsymbol{u}\,[n-k+1]x[n-k] \\
&= (\boldsymbol{u}\,[0] + \boldsymbol{u}\,[1]) * x[n]
\end{aligned}
$$

Simulação realizada com **Scilab** 5.5.2:
`https://www.scilab.org`
Texto formatado com **pdflatex** em ambiente **MiKTeX** 2.9:
`http://miktex.org/download/`