TEORIA ELETROMAGNÉTICA - LISTA DE EXERCÍCIOS II

SÉRGIO CORDEIRO

Parte 1

1. A densidade volumétrica (ou volumar) de carga $\boldsymbol{\rho_v}$ da nuvem eletrônica de um átomo de hidrogênio pode ser representada por $\frac{\mathfrak{e}}{2^2 3^8 \pi a^7}\ r^4 e^{-\frac{2r}{3a}} \sin^4\theta$, onde a é uma constante (o raio de Bohr) e r é a coordenada radial esférica medida a partir do próton, cuja carga é $\mathfrak{e}$. Calcule a carga: a) da nuvem eletrônica; b) do átomo.

a)

$$
\begin{aligned}
Q_e &= \iiint \boldsymbol{\rho_v}\ dv \\
&= \iiint \frac{\mathfrak{e}}{2^2 3^8 \pi a^7}\ r^4 e^{-\frac{2r}{3a}} \sin^4\theta\ dv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} -\frac{\mathfrak{e}}{2^2 3^8 \pi a^7}\ r^4 e^{-\frac{2r}{3a}} \sin^4\theta\ r^2 \sin\theta\ dr\ d\theta\ d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} -\frac{\mathfrak{e}}{2^2 3^8 \pi a^7}\ r^6 e^{-\frac{2r}{3a}} \sin^5\theta\ dr\ d\theta\ d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} -\frac{\mathfrak{e}}{2^2 3^8 \pi}\ \left[\frac{r}{a}\right]^6 e^{-\frac{2}{3}\left[\frac{r}{a}\right]} \sin^5\theta\ d\left[\frac{r}{a}\right]\ d\theta\ d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} -\frac{\mathfrak{e}}{2^2 3^8 \pi}\ u^6 e^{-\frac{2}{3}u} \sin^5\theta\ du\ d\theta\ d\phi && \left(u = \frac{r}{a}\right) \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} A u^6 e^{-Bu} \sin^5\theta\ du\ d\theta\ d\phi && \left(A = -\frac{\mathfrak{e}}{2^2 3^8 \pi},\ B = \frac{2}{3}\right)
\end{aligned}
$$

$$\int_0^\infty Au^6 e^{-Bu} \sin^5\theta \, du = A \sin^5\theta \left[e^{-Bu} \left(\frac{u^6}{B} + \frac{6u^5}{B^2} + \frac{30u^4}{B^3} + \frac{120u^3}{B^4} + \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{360u^2}{B^5} + \frac{720u}{B^6} + \frac{720}{B^7} \right) \right] \Bigg|_\infty^0$$

$$= A \sin^5\theta \left[\frac{720}{B^7} - 0 \right]$$

$$= -\frac{\mathfrak{e}}{2^2 3^8 \pi} \sin^5\theta \left[720 \left(\frac{3}{2} \right)^7 \right]$$

$$= -\frac{15\mathfrak{e}}{32\pi} \sin^5\theta$$

$$= C \sin^5\theta \qquad \left(C = -\frac{15\mathfrak{e}}{32\pi} \right)$$

$$\int_0^\pi C \sin^5\theta d\theta = C \left[-\frac{5}{8}\cos\theta + \frac{5}{48}\cos 3\theta - \frac{1}{80}\cos 5\theta \right] \Bigg|_0^\pi$$

$$= C \left[-\frac{5}{8}\cos\pi + \frac{5}{48}\cos 3\pi - \frac{1}{80}\cos 5\pi + \frac{5}{8}\cos 0 - \frac{5}{48}\cos 0 + \frac{1}{80}\cos 0 \right]$$

$$= C \left[\frac{5}{8} - \frac{5}{48} + \frac{1}{80} + \frac{5}{8} - \frac{5}{48} + \frac{1}{80} \right]$$

$$= \frac{16}{15} C$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{16}{15} C \, d\phi = \frac{16}{15} C \, [\phi] \big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{16}{15} C \, [2\pi - 0]$$

$$= \frac{32}{15} \pi C$$

$$
\begin{aligned}
Q_e &= \frac{32}{15}\pi C \\
&= \frac{32}{15}\pi\left(-\frac{15\mathfrak{e}}{32\pi}\right) \\
&= -\mathfrak{e}
\end{aligned}
$$

---

b)

$$
\begin{aligned}
Q_t &= Q_e + Q_p \\
&= -\mathfrak{e} + N_H\,\mathfrak{e} \qquad \boxed{N_H\text{: número atômico do hidrogênio}} \\
&= -\mathfrak{e} + 1\cdot\mathfrak{e} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

---

2. Uma partícula puntiforme (ou pontual) de carga q encontra-se a uma distância h de um plano condutor ilimitado. A densidade superficial da carga induzida no plano por essa partícula é: $\boldsymbol{\rho_S} = -\frac{q}{2\pi}\frac{h}{(\rho^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$, onde ρ é a coordenada cilíndrica radial medida a partir da perpendicular que passa pela partícula. Determine a carga total induzida no plano.

$$
\begin{aligned}
Q &= \iint\limits_{S_z} \boldsymbol{\rho_S}\ dS_z \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} -\frac{q}{2\pi}\frac{h}{(\rho^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\ \rho\ d\rho\ d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} -\frac{qh}{4\pi}(u+h^2)^{-\frac{3}{2}}\ du\ d\phi \qquad \left(u=\rho^2\right) \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{qh}{4\pi}\ \left[-2(u+h^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\Big|_0^{\infty}\ d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{qh}{4\pi}[0-2h^{-1}]\ d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{q}{2\pi}\ d\phi \\
&= -\frac{q}{2\pi}\ [\phi]\big|_0^{2\pi} \\
&= -\frac{q}{2\pi}[2\pi-0] \\
&= -q
\end{aligned}
$$

3. Uma partícula puntiforme de carga q, distante h do centro de uma esfera condutora de raio a < h, induz, na superfície desta, uma distribuição de cargas cuja densidade é: $-\frac{q}{4\pi a^2}\frac{a}{h}\frac{1-\left(\frac{a}{h}\right)^2}{\left[1-2\left(\frac{a}{h}\right)\cos\theta+\left(\frac{a}{h}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$, onde θ é a coordenada esférica polar medida a partir do eixo que liga o centro da esfera à carga puntiforme. Calcule a carga total induzida na esfera.

$$
\begin{aligned}
Q &= \iint\limits_{S_r} \boldsymbol{\rho_S}\, dS_r \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -\frac{q}{4\pi a^2}\frac{a}{h}\frac{1-\left(\frac{a}{h}\right)^2}{\left[1-2\left(\frac{a}{h}\right)\cos\theta+\left(\frac{a}{h}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left[r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\right]\Big|_{r=a} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -\frac{q}{4\pi ah}\frac{h^2-a^2}{[h^2-2ah\cos\theta+a^2]^{\frac{3}{2}}}h[a^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi] \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -\frac{q}{8\pi h}\frac{h^2-a^2}{[h^2-2ah\cos\theta+a^2]^{\frac{3}{2}}}[2ah\sin\theta\, d\theta]\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-2ah}^{2ah} -\frac{q}{8\pi h}\frac{h^2-a^2}{[h^2+u+a^2]^{\frac{3}{2}}}\, du\, d\phi \qquad (u=-2ah\cos\theta) \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-2ah}^{2ah} -\frac{q[h^2-a^2]}{8\pi h}\left[h^2+u+a^2\right]^{-\frac{3}{2}}\, du\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{q[h^2-a^2]}{4\pi h}\left(\left[h^2+u+a^2\right]^{-\frac{1}{2}}\Big|_{2ah}^{-2ah}\right) d\phi \\
&= -\frac{q[h^2-a^2]}{4\pi h}\left(\left[h^2-2ah+a^2\right]^{-\frac{1}{2}}-\left[h^2+2ah+a^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right)\ \phi\Big|_0^{2\pi} \\
&= -\frac{q[h^2-a^2]}{4\pi h}\left([h-a]^{-1}-[h+a]^{-1}\right)\ (2\pi-0) \\
&= -\frac{q}{2h}\left([h+a]-[h-a]\right) \\
&= -\frac{a}{h}q
\end{aligned}
$$

4. Um fio circular de espessura desprezível e raio a está carregado com uma densidade linear dada por: $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{l}_0} \sin^3(n\phi)$, onde $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{l}_0}$ é uniforme, n é um inteiro e ϕ é o ângulo polar em coordenadas cilíndricas. Dê a carga total do fio.

$$
\begin{aligned}
Q &= \int\limits_{l_\phi} \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{l}}\; dl_\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{l}0} \sin^3(n\phi)\ [\rho\ d\phi]\big|_{\rho=a} \\
&= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{l}0} a \sin^3(n\phi)\ d\phi \\
&= \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{l}0} \frac{a}{12n}\ [\cos(3n\phi) - 9\cos(n\phi)]\big|_0^{2\pi} \\
&= \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{l}0} \frac{a}{12n}\ ([\cos(6n\pi) - 9\cos(2n\pi)] - [\cos(0) - 9\cos(0)]) \\
&= \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{l}0} \frac{a}{12n} (1 - 9 - 1 + 9) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

---

5. Em termos de delta de Dirac, exprima a densidade volumétrica das distribuições de cargas dos seguintes exercícios: a) 2), com o plano z = 0 sobre o plano carregado; b) 3); c) 4) em coordenadas cilíndricas; d) 4) em coordenadas esféricas.

a)

$$\boldsymbol{\rho_v}(\vec{r}) = \boldsymbol{\rho_S}(\rho)\delta(z)$$

---

b)

$$\boldsymbol{\rho_v}(\vec{r}) = \boldsymbol{\rho_S}(\theta)\delta(r-a)$$

---

c)

$$\boldsymbol{\rho_v}(\vec{r}) = \boldsymbol{\rho_l}(\phi)\delta(\rho-a)\delta(z)$$

---

d)

$$\boldsymbol{\rho_v}(\vec{r}) = \boldsymbol{\rho_l}(\phi)\ \frac{1}{r_l^2\sin\theta}\delta(r-r_l)\delta\left(\theta-\theta_l\right)\Big|_{r_l=a,\theta_l=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \boldsymbol{\rho_l}(\phi)\frac{1}{a^2}\delta(r-a)\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

ou, alternativamente,

$$\boldsymbol{\rho_v}(\vec{r}) = \boldsymbol{\rho_l}(\phi)\ \frac{1}{r_l^2}\delta(r-r_l)\delta\left(\cos\theta-\cos\theta_l\right)\Big|_{r_l=a,\theta_l=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \boldsymbol{\rho_l}(\phi)\frac{1}{a^2}\delta(r-a)\delta\left(\cos\theta\right)$$

---

6. Quatro partículas puntiformes, de mesma carga q, situam-se nos vértices de um quadrado do plano xy com centro na origem e com lados, de comprimento 2a, paralelos aos eixos desse plano. Determine: a) a expressão cartesiana da densidade volumétrica de cargas; b) a carga total, integrando a densidade de cargas.

a)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho_v}(\vec{r}) &= \sum_{n=1}^{4} \boldsymbol{\rho_{v_n}} \\
&= \sum_{n=1}^{4} q_n \delta(x - x_n)\delta(y - y_n)\delta(z) \\
&= q_n[\delta(x-a)\delta(y-a) + \delta(x+a)\delta(y-a) + \delta(x+a)\delta(y+a) + ... \\
&\qquad + \delta(x-a)\delta(y+a)]\delta(z)
\end{aligned}$$

---

b)

$$Q_t = \iiint \boldsymbol{\rho_v} dv$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q_n[\delta(x-a)\delta(y-a) + \delta(x+a)\delta(y-a) + ... \\
&\qquad + \delta(x+a)\delta(y+a) + \delta(x-a)\delta(y+a)]\delta(z)\; dx\; dy\; dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q_n[\delta(x-a)\delta(y-a) + \delta(x+a)\delta(y-a) + ... \\
&\qquad + \delta(x+a)\delta(y+a) + \delta(x-a)\delta(y+a)]\; dx\; dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} q_n[\delta(x-a) + \delta(x+a) + \delta(x+a) + \delta(x-a)]\; dx \\
&= q_n[1 + 1 + 1 + 1] \\
&= 4q
\end{aligned}$$

---

7. Uma carga puntiforme q oscila ao longo do eixo cartesiano z segundo a equação $q(t) = a\cos\omega t$, onde a e ω são uniformes e constantes. Dê a expressão da densidade volumétrica instantânea da distribuição.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho_v}(\vec{r}) &= q\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_q)\\ &= q\delta(x)\delta(y)\delta(z - a\cos[\omega t])\end{aligned}$$

8. Uma distribuição superficial de cargas, com densidade uniforme $\boldsymbol{\rho_{l_0}}$, ocupa três planos ilimitados mutuamente ortogonais. Escolha o sistema de coordenadas mais adequado ao problema e: a) exprima em termos dele a densidade volumétrica de cargas; b) calcule, por integração, a carga total existente dentro de um cubo de aresta L, com centro na interseção dos planos e com faces paralelas e eles.

a)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho_v}(\vec{r}) &= \sum_{n=1}^{3} \boldsymbol{\rho_{v_n}} \\
&= \sum_{n=1}^{3} \boldsymbol{\rho_{S_n}} \delta(a_n) \\
&= \sum_{n=1}^{3} \boldsymbol{\rho_{S_0}} \delta(a_n) \\
&= \boldsymbol{\rho_{S_0}} [\delta(x) + \delta(y) + \delta(z)]
\end{aligned}$$

---

b)

$$
\begin{aligned}
Q_L &= \iiint\limits_L \boldsymbol{\rho_v}(\vec{r})\ dv \\
&= \iiint\limits_L \boldsymbol{\rho_{S_0}}[\delta(x)+\delta(y)+\delta(z)]\ dx\ dy\ dz \\
&= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}[\delta(x)+\delta(y)+\delta(z)]\ dx\ dy\ dz \\
&= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\delta(x)\ dx\ dy\ dz + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\delta(y)\ dx\ dy\ dz + ... \\
&\quad + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\delta(z)\ dx\ dy\ dz \\
&= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\delta(x)\ dy\ dz\ dx + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\delta(y)\ dz\ dx\ dy + ... \\
&\quad + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\delta(z)\ dx\ dy\ dz \\
&= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\cdot 1 \cdot\ dy\ dz + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\cdot 1 \cdot\ dz\ dx + ... \\
&\quad + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\cdot 1 \cdot\ dx\ dy \\
&= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\ dy\ \ z|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\ dz\ \ x|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\ dx\ \ y|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
&= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\ dy[\frac{L}{2}+\frac{L}{2}] + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\ dz[\frac{L}{2}+\frac{L}{2}] + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\ dx[\frac{L}{2}+\frac{L}{2}] \\
&= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\ L\ dy + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\ L\ dz + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \boldsymbol{\rho_{S_0}}\ L\ dx \\
&\quad \vdots
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
Q_L = \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{S_0}}\ L\ \ y|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} + \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{S_0}}\ L\ \ z|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} + \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{S_0}}\ L\ \ x|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
&= \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{S_0}}\ L^2 + \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{S_0}}\ L^2 + \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{S_0}}\ L^2 \\
&= 3\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{S_0}}\ L^2
\end{aligned}
$$

9. Uma superfície cônica carregada tem raio a, altura h e o vértice para baixo. Nesse sistema, a densidade superficial de carga é $\boldsymbol{\rho_{S_0}} \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right)$, onde $\boldsymbol{\rho_{S_0}}$ é uniforme. Determine: a) a equação cilíndrica da superfície cônica; b) o elemento de carga, em função da coordenada z; c) a carga total da distribuição.

a)

$$S : \begin{cases} \rho|_{z=0} = 0 \\ \rho|_{z=h} = a \\ \rho = Az + B \end{cases}$$

$$S : \rho - \frac{a}{h}\, z = 0$$

---

b)

$$\begin{aligned} dq &= \boldsymbol{\rho_S} dS \\ &= \boldsymbol{\rho_{S_0}} \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \sqrt{(d\rho)^2 + (dz)^2}\ \rho\ d\phi \\ &= \boldsymbol{\rho_{S_0}} \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \sqrt{\left(\frac{a}{h} dz\right)^2 + (dz)^2}\ \frac{a}{h} z\ \phi \\ &= \frac{a}{h}\ \boldsymbol{\rho_{S_0}} \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}\ z\ dz\ d\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta q} &= \int_0^{2\pi} dq \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a}{h}\ \boldsymbol{\rho_{S_0}} \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}\ z\ dz\ d\phi \\ &= \boldsymbol{\rho_{S_0}} \frac{a}{h}\ \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}\ z\ dz\ \ \phi|_0^{2\pi} \\ &= \frac{2\pi a}{h^2} \sqrt{a^2 + h^2} \boldsymbol{\rho_{S_0}} \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right)\ z\ dz \end{aligned}$$

---

c)

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_0^h \boldsymbol{\delta q} \\
&= \int_0^h \frac{2\pi a}{h^2}\sqrt{a^2+h^2}\boldsymbol{\rho_{S_0}} \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right)\; z\,dz \\
&= \frac{2\pi a}{h^2}\sqrt{a^2+h^2}\boldsymbol{\rho_{S_0}} \left(\frac{2h}{\pi}\right)^2 \left[\frac{\pi z}{2h}\sin\left(\frac{\pi z}{2h}\right)+\cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right)\right]\Bigg|_0^h \\
&= \frac{2\pi a}{h^2}\sqrt{a^2+h^2}\boldsymbol{\rho_{S_0}} \left(\frac{2h}{\pi}\right)^2 \left[\frac{\pi h}{2h}\sin\left(\frac{\pi h}{2h}\right)+\cos\left(\frac{\pi h}{2h}\right)-\frac{0}{2h}\sin\left(\frac{0}{2h}\right)-\cos\left(\frac{0}{2h}\right)\right] \\
&= \frac{8a}{\pi}\sqrt{a^2+h^2}\boldsymbol{\rho_{S_0}} \left[\frac{\pi}{2}+0-0-1\right] \\
&= \frac{4(\pi-2)}{\pi}\; a\sqrt{a^2+h^2}\; \boldsymbol{\rho_{S_0}}
\end{aligned}
$$

10. A superfície esférica carregada, de equação S: r = a, gira em torno do eixo z com velocidade angular ω . Determine a densidade superficial da corrente assim gerada, usando a: a) densidade volumétrica de cargas; b) densidade linear da corrente superficial.

a)

$$\vec{J} = \boldsymbol{\rho_v} \vec{u}_S \qquad \boxed{\vec{u}_S\text{: velocidade linear na superfície S}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{\delta q}}{dv} u_S \hat{a}_\phi$$

$$= \frac{\boldsymbol{\rho_S} dS}{dv} \omega \rho \hat{a}_\phi$$

$$= \boldsymbol{\rho_{S_0}} \delta(r-a) \omega a \sin\theta \hat{a}_\phi$$

---

b)

$$\vec{k} = \boldsymbol{\rho_S} \vec{u}_S$$

$$= \boldsymbol{\rho_{S_0}} \omega a \sin\theta \hat{a}_\phi$$

$$\vec{J} = \vec{k} \frac{dS}{dv}$$

$$= \boldsymbol{\rho_{S_0}} \omega a \sin\theta \hat{a}_\phi \delta(r-a)$$

---

11. Com a distribuição de correntes do exercício 10), determine a corrente que atravessa qualquer semiplano meridiano, usando a densidade: a) superficial de corrente; b) linear de corrente.

a)

$$
\begin{aligned}
i &= \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \\
&= \iint_S [\boldsymbol{\rho_{S_0}} \delta(r-a) \omega a \sin\theta \hat{a}_\phi] \cdot [r^2 \sin\theta \; d\theta \; d\phi \; \hat{a}_r + r \sin\theta \; dr \; d\phi \; \hat{a}_\theta + r \; dr \; d\theta \; \hat{a}_\phi] \\
&= \int_0^\pi \boldsymbol{\rho_{S_0}} \omega a \sin\theta \; a \; d\theta \\
&= \boldsymbol{\rho_{S_0}} \omega a^2 \; \cos\theta|_\pi^0 \\
&= \boldsymbol{\rho_{S_0}} \omega a^2 \; [1+1] \\
&= 2\omega a^2 \boldsymbol{\rho_{S_0}}
\end{aligned}
$$

---

b)

$$
i = \int_C \vec{k} \cdot (\hat{a}_N \times d\vec{l}_C) \qquad \boxed{\hat{a}_N\text{: vetor unitário normal à superfície S}}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_C [\boldsymbol{\rho_{S_0}} \omega a \sin\theta \hat{a}_\phi] \cdot [\hat{a}_r \times a \; d\theta \; \hat{a}_\theta] \\
&= \int_C [\boldsymbol{\rho_{S_0}} \omega a \sin\theta \hat{a}_\phi] \cdot [a \; d\theta \; \hat{a}_\phi] \\
&= \int_0^\pi \boldsymbol{\rho_{S_0}} \omega a^2 \sin\theta \; d\theta \\
&= 2\omega a^2 \boldsymbol{\rho_{S_0}}
\end{aligned}
$$

---

12. Num disco plano de espessura desprezível e raio a, distribui-se uniformemente uma carga q. O disco gira em torno do seu eixo de simetria com velocidade angular ω . Num sistema de coordenadas cilíndricas coaxiais e concêntricas ao disco, determine a: a) equação da superfície carregada; b) densidade linear de corrente; c) corrente elementar gerada pela rotação do elemento de carga situado entre ρ e $\rho + d\rho$; d) corrente gerada pela rotação do disco; e) corrente do item d) em termos do período T de rotação do disco.

a)

$$S : \begin{cases} \rho \leq a \\ z = 0 \end{cases}$$

---

b)

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \boldsymbol{\rho_S} \vec{u}_S \\ &= \frac{q}{S} \omega \rho \hat{a}_\phi \\ &= \frac{q}{\pi a^2} \omega \rho \hat{a}_\phi \end{aligned}$$

---

c)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta i} &= \vec{k} \cdot \boldsymbol{\delta \vec{S}} \\ &= \frac{q}{\pi a^2} \omega \rho \hat{a}_\phi \cdot \boldsymbol{\delta S} \hat{a}_\phi \\ &= \frac{q}{\pi a^2} \omega \rho \hat{a}_\phi \cdot (d\rho \hat{a}_\phi) \\ &= \frac{q}{\pi a^2} \omega \rho \, d\rho \end{aligned}$$

---

d)

$$
\begin{aligned}
i &= \iiint\limits_S \boldsymbol{\delta i} \\
&= \int_0^a \frac{q}{\pi a^2}\omega\rho \, d\rho \\
&= \frac{q}{\pi a^2}\omega \left.\frac{1}{2}\rho^2\right|_0^a \\
&= \frac{q}{2\pi a^2}\omega a^2 \\
&= \frac{q\omega}{2\pi}
\end{aligned}
$$

---

e)

$$
\begin{aligned}
i &= \frac{q\omega}{2\pi} \\
&= \frac{q}{T}
\end{aligned}
$$

---

13. A superfície cônica do exercício 9) tem agora uma distribuição de cargas uniforme, com densidade $\boldsymbol{\rho_{S_0}}$, e gira em torno do seu eixo de simetria com velocidade angular ω . Determine a: a) expressão da densidade linear de corrente; b) corrente gerada pela rotação do cone.

a)

$$
\begin{aligned}
\vec{k} &= \boldsymbol{\rho_S}\vec{u}_S \\
&= \boldsymbol{\rho_{S_0}} u_S \hat{a}_\phi \\
&= \boldsymbol{\rho_{S_0}} \omega \rho \hat{a}_\phi \\
&= \boldsymbol{\rho_{S_0}} \omega \frac{a}{h} z \hat{a}_\phi
\end{aligned}
$$

---

b)

$$i = \int_C \vec{k} \cdot (\hat{a}_N \times \vec{dl}_C)$$

$$\hat{a}_N = \frac{\vec{\nabla} S}{|\vec{\nabla} S|}$$

$$\vec{\nabla} S = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \hat{a}_z \right) \left[\rho - \frac{a}{h} z \right]$$

$$= \hat{a}_\rho - \frac{a}{h} \hat{a}_z$$

$$\hat{a}_N = \frac{\vec{\nabla} S}{|\vec{\nabla} S|}$$

$$= \frac{\hat{a}_\rho - \frac{a}{h} \hat{a}_z}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2}}$$

$$= \frac{h\hat{a}_\rho - a\hat{a}_z}{\sqrt{h^2 + a^2}}$$

$$
\begin{aligned}
i &= \int\limits_C \vec{k} \cdot (\hat{a}_N \times \vec{dl}_C) \\
&= \int\limits_C \boldsymbol{\rho_{S_0}} \omega \frac{a}{h} z \hat{a}_\phi \cdot \left(\left[\frac{h\hat{a}_\rho - a\hat{a}_z}{\sqrt{h^2+a^2}} \right] \times [d\rho \hat{a}_\rho + dz \hat{a}_z] \right) \\
&= \int\limits_C \boldsymbol{\rho_{S_0}} \omega \frac{a}{h} z \hat{a}_\phi \cdot \left(- \left[\frac{h\ dz\hat{a}_\phi + a\ d\rho\hat{a}_\phi}{\sqrt{h^2+a^2}} \right] \right) \\
&= -\int\limits_C \boldsymbol{\rho_{S_0}} \omega \frac{a}{h} z \ \frac{h\ dz + a\ d\rho}{\sqrt{h^2+a^2}} \\
&= -\int\limits_C \boldsymbol{\rho_{S_0}} \omega \frac{a}{h} z \ \frac{h\ dz + a\frac{a}{h}dz}{\sqrt{h^2+a^2}} \\
&= -\int_0^h \boldsymbol{\rho_{S_0}} \omega \frac{a}{h^2} \frac{h^2+a^2}{\sqrt{h^2+a^2}} \ z\ dz \\
&= -\boldsymbol{\rho_{S_0}} \omega \frac{a}{h^2} \sqrt{h^2+a^2} \ \left. \frac{1}{2} z^2 \right|_0^h \\
&= -\boldsymbol{\rho_{S_0}} \omega \frac{a}{2h^2} \sqrt{h^2+a^2}\ h^2 \\
&= -\frac{a\omega \boldsymbol{\rho_{S_0}}}{2} \sqrt{h^2+a^2}
\end{aligned}
$$

---

14. Uma corrente superficial, com densidade linear uniforme de módulo K, escoa sobre o plano xy na direção ây. Determine a: a) expressão cartesiana da densidade superficial de corrente; b) corrente que atravessa um segmento de comprimento L da bissetriz do primeiro quadrante no plano xy.

a)

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \vec{k}\delta(z)\\ &= k\hat{a}_y\delta(z)\end{aligned}$$

---

b)

$$\begin{aligned}i &= \int\limits_C \vec{k}\cdot(\hat{a}_N \times \vec{dl})\\ &= \int\limits_C k\hat{a}_y\cdot([\hat{a}_z]\times[dx\ \hat{a}_x + dy\ \hat{a}_y])\\ &= \int\limits_C k\hat{a}_y\cdot(dx\ \hat{a}_y - dy\ \hat{a}_x])\\ &= \int_0^{\frac{L}{\sqrt{2}}} kdx\\ &= k\ \Big|_0^{\frac{L}{\sqrt{2}}}\\ &= \frac{kL}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

---

15. Com a carga oscilante do exercício 7), determine a: a) expressão cartesiana da densidade superficial de corrente; b) corrente instantânea que atravessa qualquer ponto do eixo z.

a)

$$\vec{J} = \boldsymbol{\rho_v}\vec{u} \qquad \boxed{\vec{u}\text{: velocidade da partícula}}$$

$$= q\delta(x)\delta(y)\delta(z - a\cos[\omega t])u\hat{a}_z$$

$$= q\delta(x)\delta(y)\delta(z - a\cos[\omega t])\frac{dz}{dt}\hat{a}_z$$

$$= q\delta(x)\delta(y)\delta(z - a\cos[\omega t])\frac{d}{dt}(a\cos[\omega t])\hat{a}_z$$

$$= q\delta(x)\delta(y)\delta(z - a\cos[\omega t])(-a\omega\sin[\omega t])\hat{a}_z$$

$$= -q\omega a\delta(x)\delta(y)\delta(z - a\cos[\omega t])\sin[\omega t]\hat{a}_z$$

---

b)

$$i = \iint\limits_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

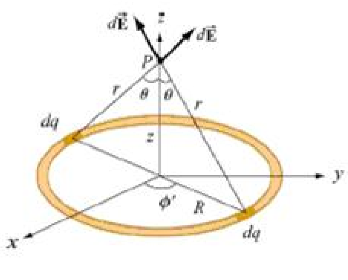
$$= \iint\limits_S (-q\omega a\delta(x)\delta(y)\delta(z - a\cos[\omega t])\sin[\omega t]\hat{a}_z)\cdot(dx\ dy\ \hat{a}_z)$$

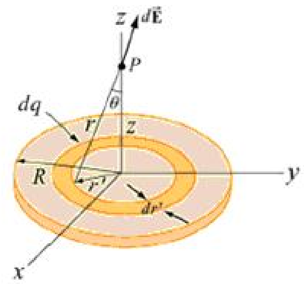
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(-q\omega a\delta(x)\delta(y)\delta(z - a\cos[\omega t])\sin[\omega t]\ dx\ dy$$

$$= -q\omega a\delta(z - a\cos[\omega t])\sin[\omega t]$$

PARTE 2

1. Para as distribuições de carga a seguir apresente o gráfico do campo elétrico ao longo do eixo z. Comente os resultados.



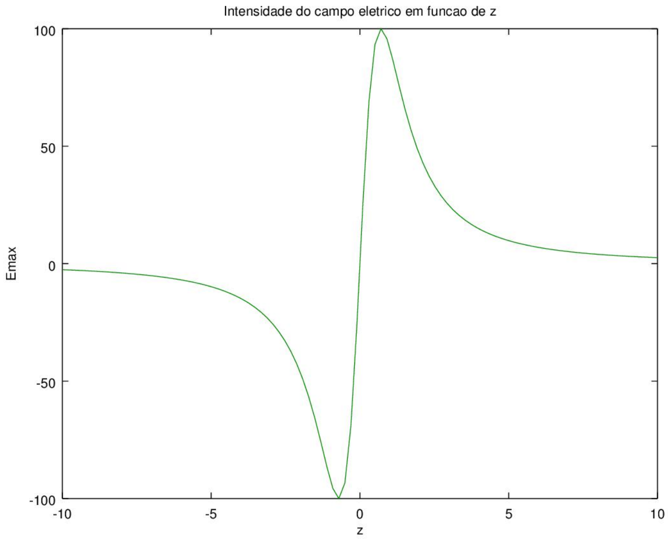


a)

$$
\begin{aligned}
d\vec{E} &= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\ \hat{a}_r \\
&= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)}\ \hat{a}_r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \int_C d\vec{E} && \boxed{C\text{: anel carregado}} \\
&= \int_C d\vec{E}_x + \int_C d\vec{E}_y + \int_C d\vec{E}_z \\
&= 0 + 0 + \int_C d\vec{E}_z && \boxed{\textit{devido à simetria do problema}} \\
&= \int_C \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)}\ cos(\theta)\ \hat{a}_z \\
&= \int_C \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)}\ \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\ \hat{a}_z \\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\ z\ (R^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\ \hat{a}_z && \boxed{Q\text{: carga total no anel}}
\end{aligned}
$$

O campo elétrico tem sempre a direção $\hat{a}_z$ e o sentido de acordo com o sinal de z . A intensidade varia conforme $\left(z\left(R^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)$: para z grande, diminui segundo z^{-2} , como se o anel carregado fosse uma carga puntual; para z pequeno, aumenta segundo z. A intensidade atinge o máximo para $z = R\sqrt{2}$, como se pode ver no gráfico a seguir.



b)

$$\vec{E} = \int_S d\vec{E} \qquad \boxed{S\text{: disco carregado}}$$

$$= \int_S \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\, z\, (\rho^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\, \hat{a}_z \qquad \boxed{\textit{conforme o anterior}}$$

$$dq = \boldsymbol{\rho_S}\, dS \qquad \boxed{\boldsymbol{\rho_S}\text{: densidade superficial de carga}}$$

$$= \frac{Q}{S}\, (2\pi\rho\, d\rho) \qquad \boxed{\textit{considerando } \boldsymbol{\rho_S} \text{ constante}}$$

$$= \frac{Q}{\pi R^2}\, (2\pi\rho\, d\rho) \qquad \boxed{Q\text{: carga total no disco}}$$

$$= \frac{2Q}{R^2}\, \rho\, d\rho$$

$$\vec{E} = \int_S \left(\frac{2Q}{R^2}\, \rho\, d\rho\right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\, z\, (\rho^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\, \hat{a}_z$$

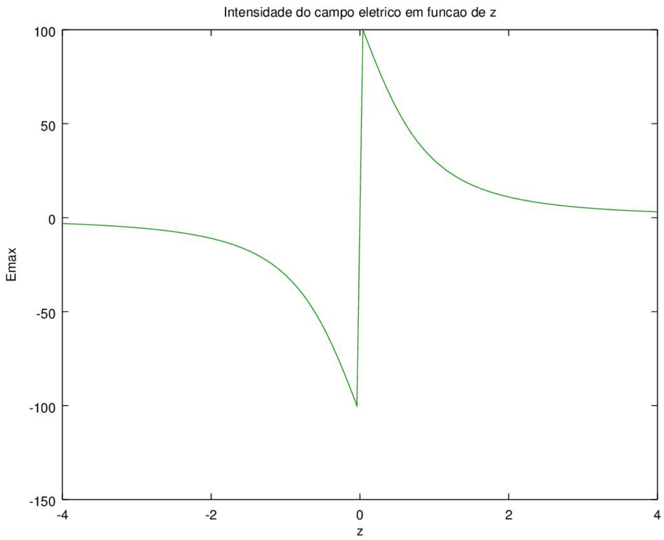
$$= \frac{Qz}{2\pi R^2 \epsilon_0} \int_0^R \rho\, (\rho^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\, d\rho\, \hat{a}_z$$

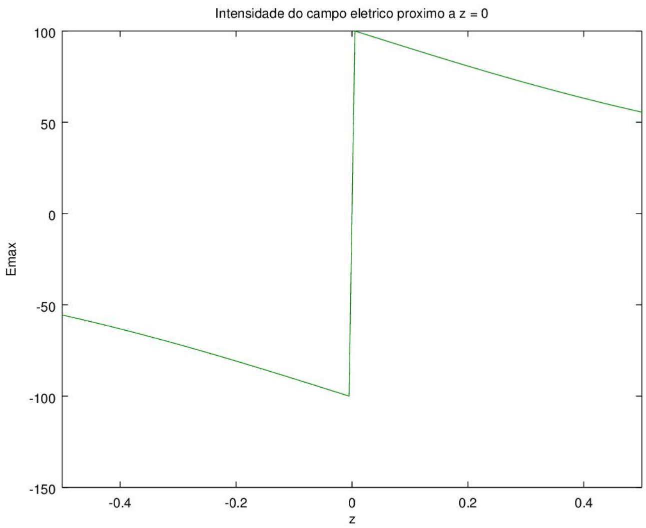
$$= \frac{Qz}{2\pi R^2 \epsilon_0} \left[(\rho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\Big|_R^0\, \hat{a}_z$$

$$= \frac{Qz}{2\pi R^2 \epsilon_0} \left[(z^2)^{-\frac{1}{2}} - (R^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\, \hat{a}_z$$

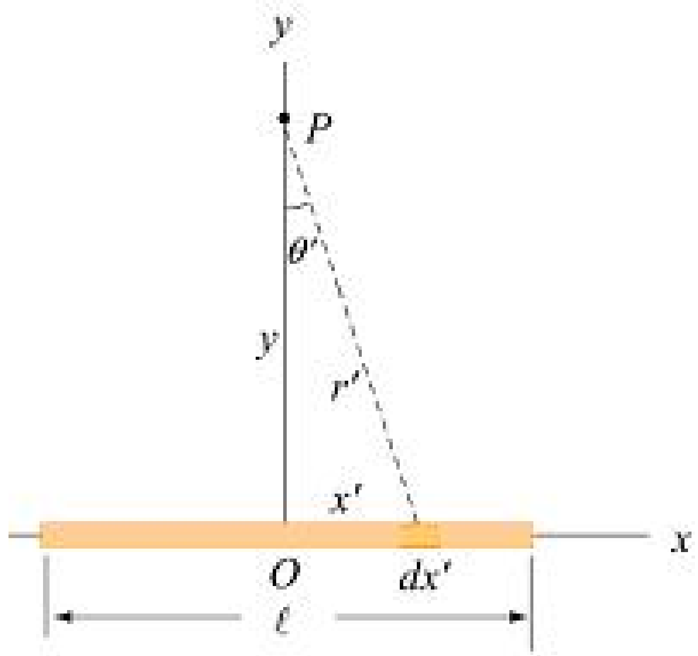
$$= \frac{Q}{2\pi R^2 \epsilon_0} \left[\mathbf{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right]\, \hat{a}_z$$

O campo elétrico tem sempre a direção $\hat{a}_z$ e sentido conforme o sinal de z . A intensidade varia conforme $\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$: para z grande, diminui segundo z^{-2} , como se o disco fosse uma carga puntual; para z muito pequeno, é praticamente constante, como se o disco fosse uma placa infinita. Em $z = 0$ há uma descontinuidade, como se pode ver nos gráficos abaixo.





2. Para a distribuição de carga a seguir apresente o gráfico do potencial elétrico ao longo do eixo y em função de y/L.



$$\vec{E} = \int_{\ell} dV$$

$$= \int_{\ell} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r'}$$

$$= \int_{\ell} \frac{\boldsymbol{\rho_l} dx}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{y^2 + x^2}} \qquad \boxed{\boldsymbol{\rho_l}\text{: densidade linear de carga}}$$

$$= \int_{\ell} \frac{Q}{\ell} \frac{dx}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{y^2 + x^2}} \qquad \boxed{\textit{considerando } \boldsymbol{\rho_l} \textit{ constante}}$$

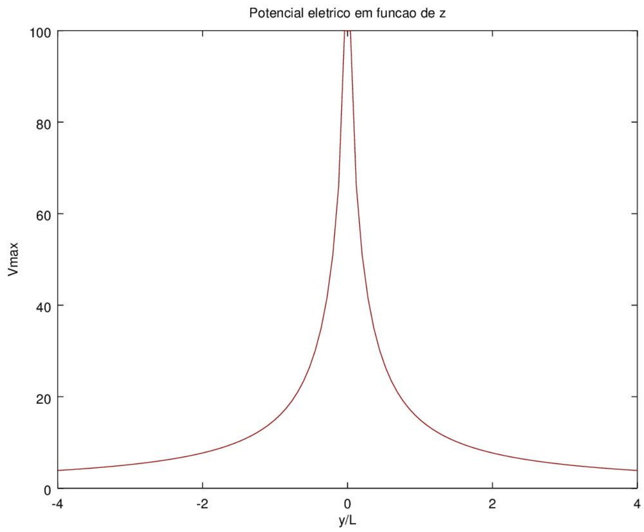
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \ell} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} (y^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \, dx$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \ell} \left[\ln \left((y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + x \right) \right] \Bigg|_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}}$$

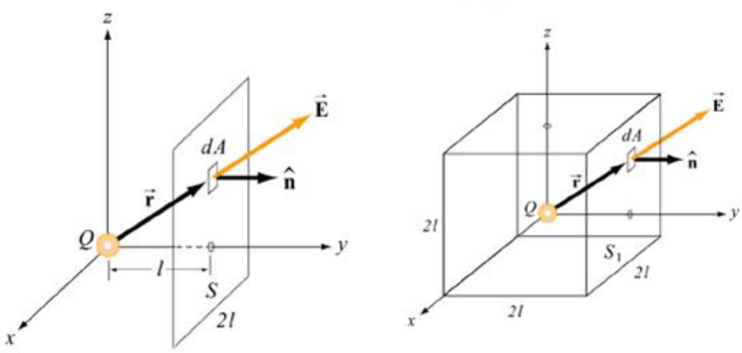
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \ell} \left[\ln \left(\sqrt{y^2 + \frac{\ell^2}{4}} + \frac{\ell}{2} \right) - \ln \left(\sqrt{y^2 + \frac{\ell^2}{4}} - \frac{\ell}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \ell} \ln \left(\frac{\sqrt{y^2 + \frac{\ell^2}{4}} + \frac{\ell}{2}}{\sqrt{y^2 + \frac{\ell^2}{4}} - \frac{\ell}{2}} \right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \ell} \ln \left(\frac{\sqrt{4u^2 + 1} + 1}{\sqrt{4u^2 + 1} - 1} \right) \qquad \boxed{u = \frac{y}{l}}$$


Potencial eletrico em funcao de z
Vmax
y/L
100
80
60
40
20
0
-4
-2
0
2
4

3. (a) calcule o fluxo elétrico através de uma superfície quadrada de lado 2L devido a uma carga +Q a uma distância perpendicular L do centro da superfície, como na figura. (b) Usando o resultado obtido em (b), se agora a carga está no centro de um cubo, qual é o fluxo saindo das seis faces das superfície fechada.



a)

$$\Psi = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \qquad \boxed{S\text{: placa quadrada}}$$

$$= \int_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot (dx\; dz\; \hat{a}_y)$$

$$= \int_S \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\; \hat{a}_r \right) \cdot (dx\; dz\; \hat{a}_y)$$

$$= \int_S \frac{Q}{4\pi r^2}\, \frac{\ell}{r}\, dx\; dz$$

$$= \int_{-\ell}^{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{Q\ell}{4\pi}\, (\ell^2 + x^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\; dx\; dz$$

$$= \int_{-\ell}^{\ell} \frac{Q\ell}{4\pi}\, dx\; \left[z(\ell^2 + x^2)^{-1} (\ell^2 + x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right]\Big|_{-\ell}^{\ell}$$

$$= \int_{-\ell}^{\ell} \frac{Q\ell}{4\pi}\, dx\; \left[\ell(\ell^2 + x^2)^{-1} (\ell^2 + x^2 + \ell^2)^{-\frac{1}{2}} + \ell(\ell^2 + x^2)^{-1} (\ell^2 + x^2 + \ell^2)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \int_{-\ell}^{\ell} \frac{Q\ell^2}{2\pi}\, (\ell^2 + x^2)^{-1} (2\ell^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}\; dx$$

$$= \frac{Q\ell^2}{2\pi}\, \frac{1}{\ell^2}\; \left[\mathbf{arctan} \left(x(2\ell^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \right]\Big|_{-\ell}^{\ell}$$

$$= \frac{Q}{2\pi}\; \left[\mathbf{arctan} \left(\ell(2\ell^2 + \ell^2)^{-\frac{1}{2}} \right) - \mathbf{arctan} \left(-\ell(2\ell^2 + \ell^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \right]$$

$$= \frac{Q}{2\pi}\; \left[\mathbf{arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \mathbf{arctan} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]$$

$$= \frac{Q}{2\pi}\; 2\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{Q}{6}$$

b)

$$\Psi_t = \sum_{i=1}^{6} \Psi_{S_i} \qquad \boxed{S_i\text{: faces do cubo}}$$

$$= \sum_{i=1}^{6} \frac{Q}{6}$$

$$= 6 * \frac{Q}{6}$$

$$= Q$$

Parte 3

1. Problema do Capacitor cilíndrico.

O problema de encontrar a capacitância de um capacitor cilíndrico coaxial foi resolvido da seguinte maneira por Maxwell [1] :

> "Seja a o raio da superfície externa de um cilindro condutor e b o raio da superfície interna de um cilindro oco coaxial ao primeiro [2]. Sejam seus potenciais A e B, respectivamente. Então, desde que o potencial V neste caso é uma função de r, a distância ao eixo, a equação de Laplace se torna
>
> $$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$
>
> daí $V = C_1 + C_2 \log r$.
> Como $V = A$ quando $r = a$, e $V = B$ quando $r = b$,
>
> $$V = \frac{A \log \frac{b}{r} + B \log \frac{r}{a}}{\log \frac{b}{a}}.$$
>
> Se σ_1, σ_2 são as densidades superficiais das superfícies interna e externa,
>
> $$4\pi\sigma_1 = \frac{A - B}{a \log \frac{b}{a}}, \qquad 4\pi\sigma_2 = \frac{B - A}{b \log \frac{b}{a}}$$
>
> Se E_1 e E_2 são as cargas em um pedaço de comprimento l, medido ao longo do eixo, dos dois cilindros,
>
> $$E_1 = 2\pi a l \sigma_1 = \frac{1}{2}\frac{A - B}{\log \frac{b}{a}} l = -E_2.$$
>
> A capacitância de um comprimento l do cilindro interior é portanto
>
> $$\frac{1}{2}\frac{l}{\log \frac{b}{a}}.$$
>
> Se o espaço entre os cilindros for ocupado por um dielétrico de capacitância específica [3] K em vez de ar, então a capacitância do

[1] No material que segue, $\log$ indica o logaritmo natural ($\ln$).
[2] Na verdade, b deve ser o raio do cilindro externo e a, o do interno
[3] Hoje se diz "constante dielétrica".

cilindro interno será

$$\frac{1}{2}\frac{lK}{\log\frac{b}{a}}.$$

A energia da distribuição elétrica na parte indicada do cilindro infinito será

$$\frac{1}{2}\frac{lK(A-B)^2}{\log\frac{b}{a}}.$$ [4] ”

Hoje usamos um sistema normalizado, por isso os valores encontrados devem ser multiplicados por $4\pi\epsilon_0$, resultando em:

$$C = \frac{2\pi l\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$W_E = \frac{2\pi l\epsilon(A-B)^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

O problema pode ser resolvido de outra forma: assumindo uma carga arbitrária nas superfícies e a partir daí calculando a diferença de potencial gerada, para depois encontrar a capacitância resultante [**?**]. Considerando o cilindro interior carregado com a carga q, teremos:

$$\begin{aligned} q &= \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} \\ &= D\ S \\ &= D\ 2\pi\rho l \implies D = \frac{q}{2\pi\rho l} \end{aligned}$$

[4] [**?**]

$$\begin{aligned}
V_{ab} &= -\int_b^a \vec{E} \cdot \vec{dl} \\
&= -\int_b^a E \; d\rho \\
&= -\int_b^a \frac{1}{\epsilon} D \; d\rho \\
&= -\int_b^a \frac{1}{\epsilon} \frac{q}{2\pi\rho l} \; d\rho \\
&= \frac{q}{2\pi\epsilon l} \; \left[\; \ln(\rho) \right] \Big|_a^b \\
&= \frac{q}{2\pi\epsilon l} \; \ln\left(\frac{b}{a}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \frac{q}{V_a - V_b} \\
&= \frac{q}{V_{ab}} \\
&= \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_E &= \frac{1}{2} \; q \; V_{ab} \\
&= \frac{1}{2} \; q \; \frac{q}{2\pi\epsilon l} \; \ln\left(\frac{b}{a}\right) \\
&= \frac{q^2}{4\pi\epsilon l} \; \ln\left(\frac{b}{a}\right)
\end{aligned}$$

Se o cilindro não for infinito, não se pode usar este segundo método de solução, uma vez que o problema não é simétrico o bastante para permitir supor a distribuição de carga nas superfícies como uniforme.

O primeiro método, por sua vez, exige a solução da equação de Laplace para uma geometrica desfavorável. Uma opção neste caso é recorrer a técnicas numéricas, como ilustrado em [**?**], que emprega um esquema de diferenças finitas onde as soluções são obtidas pelo método da relaxação sucessiva. Este é um método do tipo **explícito**, e como tal, iterativo; segundo [**?**], métodos explícitos são os mais usados quando se empregam diferenças finitas. . Para maior generalidade, o comprimento das placas pode ser diferente; o exemplo, no entanto, restringiu sua análise ao caso em que os cilindros estão centrados também em relação à direção $\hat{a}_z$.
Seja o capacitor composto por dois cilindros concêntricos de comprimentos L_{int} e L_{ext} e raios R_{int} e R_{ext}, onde os subscritos se referem às superfícies interna e externa, respectivamente. Escolhendo-se o sistema de coordenadas cilíndricas e situando a origem no centro geométrico dos cilindro, teremos simetria suficiente para poder resolver o problema apenas em um quadrante ($0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, por exemplo) e assumir o mesmo para os demais; no caso mais geral de as superfícies não estarem centradas em relação à direção $\hat{a}_z$, será preciso resolver a equação nos quatro quadrantes. Escolhemos resolver o problema em dois quadrantes ($0 \leq \phi \leq \pi$), por motivos que serão expostos mais à frente.
[**?**] afirma que é preciso exigir uma precisão da ordem de 10 $^{-5}$ para que o resultado possa ser considerado satisfatório. Nossa experiência não confirmou isso. Não obtivemos resultados satisfatórios nem mesmo com uma precisão de 10 $^{-6}$; não chegamos a tentar com 10 $^{-7}$, que incorre em esforço computacional proibitivo. O melhor que obtivemos foi um erro da ordem de 30% na estimativa da capacitância. Além disso, o resultado final é influenciado pela escolha das condições iniciais.

As aproximações discretas empregadas para derivadas parciais em uma dimensão são as seguintes [5]:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial q} &\approx \frac{V_{n+i} - V_{n-1}}{2\Delta q} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} &\approx \frac{V_{n+i} - 2V_n + V_{n-1}}{\Delta^2 q} \\
q &\approx i\Delta q
\end{aligned}
$$

onde q é uma coordenada generalizada e n identifica uma região do espaço. Em duas dimensões, isso resulta em:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \rho} &\approx \frac{V_{i+i,k} - V_{i-1,k}}{2\Delta \rho} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} &\approx \frac{V_{i+i,k} - 2V_{i,k} + V_{i-1,k}}{\Delta^2 \rho} \\
\frac{\partial V}{\partial z} &\approx \frac{V_{i,k+1} - V_{i,k-1}}{2\Delta z} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &\approx \frac{V_{i,k+1} - 2V_{i,k} + V_{i,k-1}}{\Delta^2 z} \\
\rho &\approx i\Delta \rho \\
z &\approx k\Delta z
\end{aligned}
$$

onde os subscritos i e k se referem às subregiões retangulares (*células*) conforme as direções $\hat{a}_\rho$ e $\hat{a}_z$; esses subscritos variarão uniformemente de 0 a N_i e N_k, portanto $\Delta\rho = \frac{R_{ext}}{2N_i}$ e $\Delta z = \frac{L_{max}}{2N_k}$, onde L_{max} é o maior entre os comprimentos L_{int} e L_{ext}. A equação de Laplace pode ser escrita então

[5] Essas expressões produzem um erro de segunda ordem quando não há descontinuidades em V [**?**].

como:

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial V}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial V}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}\right) + 0 + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{i\Delta\rho}\left(\frac{V_{i+i,k} - V_{i-1,k}}{2\Delta\rho} + (i\Delta\rho)\,\frac{V_{i+i,k} - 2V_{i,k} + V_{i-1,k}}{\Delta^2\rho}\right) + ...$$

$$+\frac{V_{i,k+1} - 2V_{i,k} + V_{i,k-1}}{\Delta^2 z} = \epsilon_{i,k}$$

$$V_{i+i,k}\left(\frac{1}{2i\Delta^2\rho} + \frac{1}{\Delta^2\rho}\right) - 2V_{i,k}\left(\frac{1}{\Delta^2\rho} + \frac{1}{\Delta^2 z}\right) + ...$$

$$+V_{i-1,k}\left(-\frac{1}{2i\Delta^2\rho} + \frac{1}{\Delta^2\rho}\right) + V_{i,k+1}\frac{1}{\Delta^2 z} + V_{i,k-1}\frac{1}{\Delta^2 z} = \epsilon_{i,k}$$

$$V_{i+i,k}\left(1 + \frac{1}{2i}\right) - 2V_{i,k}\left(1 + \frac{\Delta^2\rho}{\Delta^2 z}\right) + ...$$

$$+V_{i-1,k}\left(1 - \frac{1}{2i}\right) + (V_{i,k+1} + V_{i,k-1})\,\frac{\Delta^2\rho}{\Delta^2 z} = \epsilon_{i,k}$$

onde $\epsilon_{i,k}$ é o erro de aproximação. As condições de contorno de Dirichlet

$$V(\rho,\phi,z) = \begin{cases} V_{int}\ /\rho = R_{int} \wedge \forall z < \dfrac{L_{int}}{2} \\ \\ V_{ext}\ /\rho = R_{ext} \wedge \forall z < \dfrac{L_{ext}}{2} \end{cases}$$

podem ser escritas como

$$V_{i,k} = \begin{cases} V_{int}\ /i \approx \dfrac{R_{int}}{\Delta\rho} \wedge \forall k < \dfrac{L_{int}}{2\Delta z} \\ \\ V_{ext}\ /i \approx \dfrac{R_{ext}}{\Delta\rho} \wedge \forall k < \dfrac{L_{ext}}{2\Delta z} \end{cases}$$

Devido à simetria do problema, valem também as seguintes condições de contorno de von Neumann [6]:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} V(\rho, \phi, z) = 0 \; / \rho = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} V(\rho, \phi, z) = 0 \; / z = 0$$

As condições de contorno de von Neumann podem ser escritas como

$$V_{0,k} = V_{1,k} \; \forall k$$

$$V_{i,0} = V_{i,1} \; \forall i$$

A solução da equação é obtida da seguinte maneira:

1. Calcular a primeira aproximação (por exemplo, $V = \frac{V_{ext}+V_{int}}{2}$ entre os cilindros e $V = 0$ dentro do cilindro interno);
2. Impor condições de contorno de Dirichlet;
3. Impor condições de contorno de von Neumann;
4. Calcular o Laplaciano, que conterá um erro ϵ na aproximação;
5. Se o erro for menor do que o tolerável, obteve-se sucesso;
6. Caso contrário, calcular uma nova aproximação e repetir a partir do passo 3;

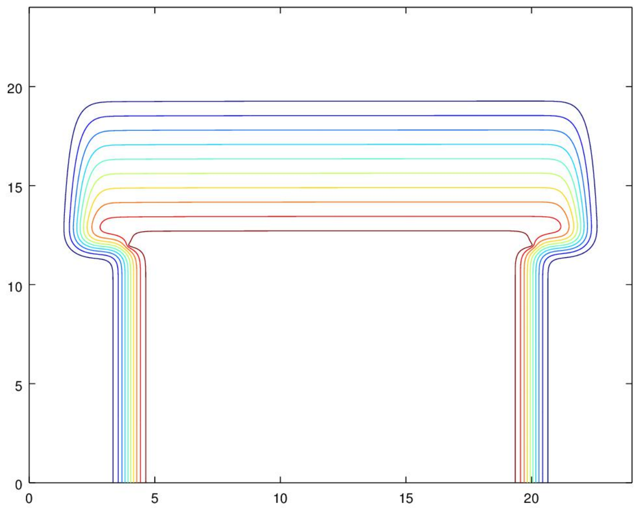
O método escolhido por [**?**] para o cálculo da nova aproximação, como já dito, foi o da relaxação sucessiva, que é o mais simples, embora não o mais eficiente. Ele apresenta código de exemplo escrito em C++, com emprego de templates; para agilizar a convergência, foi introduzido um fator de relaxação, cujo valor deve estar entre 1 e 2 e ser obtido por meio de tentativa e erro. De acordo com [**?**], o valor ótimo estaria próximo de $2 - \frac{\pi}{N_\rho}$, mas a geometria e o método empregado ali não são exatamente os mesmos; em nossas experiências, algumas vezes tivemos que usar um valor inclusive inferior a 1, conforme a geometria usada, de forma a evitar divergência causada por erros de arredondamento.
O modelo assume que os cilindros são tampados. Decidimos remover a tampa dos cilindros, de forma a poder comparar melhor o caso com o do cilindro infinito analisado teoricamente acima, e também permitiria analisar os casos onde $L_{ext} < L_{int}$. Com isso, fomos obrigados a introduzir uma condição de contorno adicional:

$$V = 0 / \rho = \infty \vee z = \infty$$

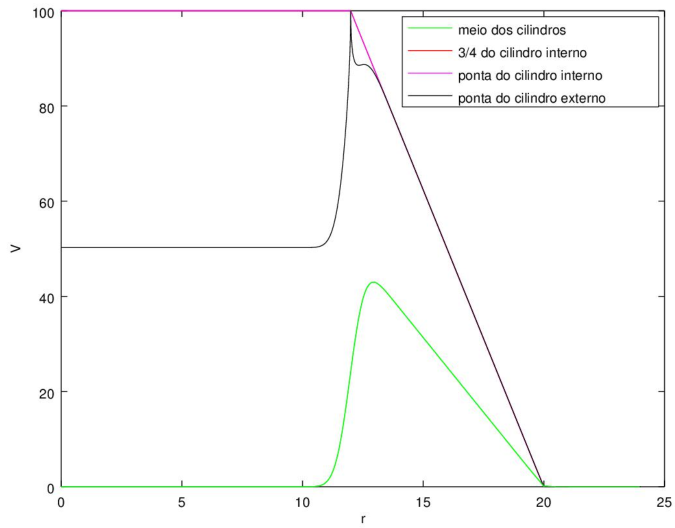
[6]Como resolvemos o problema em dois quadrantes, em lugar de apenas um, a condição de contorno para $z = 0$ não foi aplicada.

As figuras seguintes ilustram o resultado do cálculo de V para a seguinte geometria:

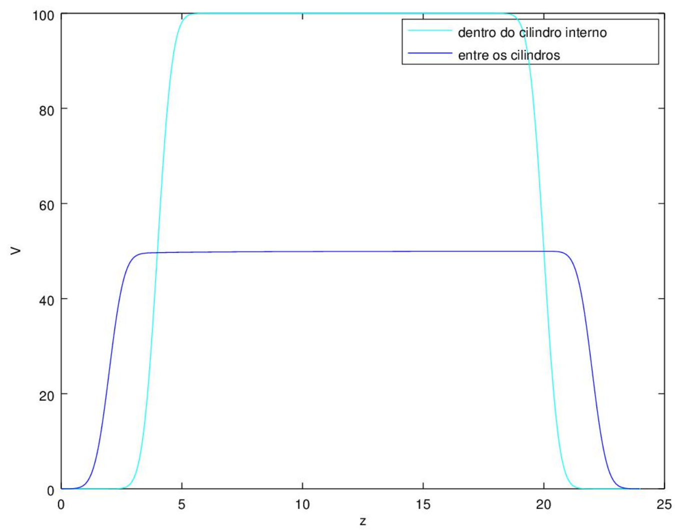
$$
\begin{array}{cc}
N_{rho} = N_z = 4000 & \epsilon = 2 \times 10^{-5} \\
R_{ext} = 20\ mm & R_{int} = 12\ mm \\
L_{ext} = 20\ mm & L_{int} = 16\ mm \\
V_{ext} = 0\ V & Vint = 100\ V
\end{array}
$$



Linhas equipotenciais



Potencial elétrico para quatro valores de z



Potencial elétrico para dois valores de ρ

Para atingir tal precisão foram necessárias pouco mais de 13000 iterações do algoritmo, e um fator de relaxação de 1; o "infinito"foi localizado em $|z| = 12mm$ e em $\rho = 24mm$. Como condição inicial, usuou-se o potencial correspondente aos cilindros infinitos concêntricos, o que permitiu empregar uma precisão relativamente baixa. Segue a listagem do código responsável pelo cálculo e pela plotagem do resultado.

LISTING 1. solvegrid.m

```
function [V,w,erro,iter]=solvegrid(Rext,Rint,Lext,Lint,rlim,zlim,Vext,Vint,RhoNint,RhoNext,ZNint,ZNext,perc,maxiter,Nrho,Nz,wmax,wmin)
% Calcula o potencial 'V' para a geometria ('Rext','Rint','Lext','Lint','rlim','zlim') e as condições ('perc','maxiter','Nrho','Nz','wmax','wmin') dadas.
% Chamada pela função principal ('probcil').
% Retorna também o maior fator de relaxação 'w' para o qual o cálculo foi bem sucedido, o 'erro' incorrido e o número de iterações 'iter' necessário. Se o cálculo não for bem sucedido para nenhum 'w' na faixa indicada, retorna 0 em 'w' e NaN para as demais saídas.
  % Tenta calcular o potencial com valores sucessivamente menores do fator de relaxação até ser bem sucedido.
  prec = perc * abs(Vext - Vint)/100;  % precisão absoluta
  step = (wmin - wmax)/9;          % negativo
  for w=wmax:step:wmin
    [V,erro,iter] = calcv(Rext,Rint,Lext,Lint,rlim,zlim,Vext,Vint,RhoNint,RhoNext,ZNint,ZNext,prec,maxiter,Nrho,Nz,w);
    if erro <= prec
      % Cálculo convergiu
      return
    end
    % Cálculo não convergiu. Tentar com outro fator de relaxação menor.
    disp(sprintf("w = %f, erro = %f, iter = %d",w,erro,iter));
  end
  % Cálculo não convergiu para nenhum 'w' na faixa.
  w = 0;
  V = erro = iter = NaN;
  return
end
```

LISTING 2. calcv.m

```
function [V,erro,i]=calcv(Rext,Rint,Lext,Lint,rlim,zlim,Vext,Vint,RhoNint,RhoNext,ZNint,ZNext,prec,maxiter,Nrho,Nz,w)
% Tenta calcular o potencial 'V' para a geometria ('Rext','Rint','Lext','Lint','rlim','zlim','RhoNint','RhoNext','ZNint','ZNext') e as condições ('prec','maxiter','Nrho','Nz','w').
% Retorna o potencial calculado, o 'erro' incorrido e o número de iterações 'i' que foi necessário.
% Chamada pela função 'solvegrid'.
  % Inicializa 'V'
  [V,calc]=initv(Rext,Rint,Lext,Lint,rlim,zlim,Vext,Vint,RhoNint,RhoNext,ZNint,ZNext,Nrho,Nz);
  % Inicializa as variáveis auxiliares
  last = 1e9;
  rdelta = ( rlim * Nz ) / ( zlim * Nrho ) ;
  % Aplica as condições de contorno de Dirichlet
  V(RhoNext,ZNext(1):ZNext(2)) = Vext;  % Vext no cilindro externo
  V(RhoNint,ZNint(1):ZNint(2)) = Vint;  % Vint no clindro interno
  V(Nrho,:) = 0; V(:,Nz) = 0;        % 0 no "infinito"
  for i=1:maxiter
    % Aplica as condições de contorno de von Neumann
    V(Nrho-1,:) = 0; V(:,Nz-1) = 0;    % "infinito"
    V(1,:) = V(2,:) ;              % simetria radial
    % Calcula o Laplaciano e o erro
```

```
    e = calc .* (0.5 * laplacianoc(V,rdelta)/(1 + rdelta^2));
    erro = max(max(abs(e)));
    if erro <= prec
      return
    end
    % Se o erro aumentou, para, pois o cálculo não vai convergir.
    if erro > last
      return
    end
    % Corrige os valores estimados e continua
    V = V + w * e;
    last = erro;
  end
end
```

LISTING 3. initv.m

```
function [V,calc]=initv(Rext,Rint,Lext,Lint,rlim,zlim,Vext,Vint,RhoNint,RhoNext,ZNint,ZNext,Nrho,Nz);
% Inicializa o potencial 'V' para o cálculo iterativo.
% Retorna a grade inicializada e a posição dos cilindros nela.
% Chamada pela função 'calcv'.
  % Cria a grade
  V = zeros(Nrho,Nz);
  % Calcula a aproximação inicial.
  % Teoricamente, a aproximação inicial pode ser qualquer; no etantom para tentar auxiliar a convergência, foram escolhidas as condições seguintes:
  % ... Vint dentro do cilindro interno
  V(1:RhoNint,ZNint(1):ZNint(2)) = Vint;
  % ... queda exponencial até Vext no cilindro externo
  a = (Vint - Vext) / (RhoNint - RhoNext);
  for i = RhoNint:RhoNext
    V(i,ZNext(1):ZNext(2)) = Vint * log(RhoNext/i);
  end
  % Onde não calcular o Laplaciano
  calc = ones(Nrho,Nz);
  calc(RhoNext,ZNext(1):ZNext(2)) = 0 ;   % no cilindro externo
  calc(RhoNint,ZNint(1):ZNint(2)) = 0;    % no cilindro interno
end
```

LISTING 4. laplacianoc.m

```
function e=laplacianoc(V,rdelta)
% Calcula o Laplaciano de 'V' em coordenadas cilíndricas. 'rdelta' é a razão entre Delta rho e Delta z escolhida.
% Os melhores resultados são obtidos quando rdelta = 1.
% Chamada pela função 'calcv'.
  [nrow,ncol] = size(V);
  e = zeros(nrow,ncol);
  m = 0.5 * [2:nrow-1].^(-1);
  % e(i,k) = V(i+1,k)*(1 + 1/(2*i)) + V(i-1,k)*(1-1/(2i)) + ((V(i,k+1) + V(i,k-1))*(rdelta^2) - V(i,k)*2*(1+rdelta^2);
  e(2:nrow-1,2:ncol-1) = V(3:nrow,2:ncol-1) .* (1+m) + V(1:nrow-2,2:ncol-1) .* (1-m) + (V(2:nrow-1,3:ncol) + V(2:nrow-1,1:ncol-2))*(rdelta^2) - V(2:nrow-1,2:ncol-1)*2*(1+rdelta^2);
end
```

LISTING 5. plotv.m

```
function plotv(V,RhoNext,RhoNint,ZNext,ZNint,rlim,zlim,Nrho,Nz)
% Plota e grava os gráficos que ilustram o potencial 'V' para a geometria dada ('RhoNext','RhoNint','ZNext','ZNint','rlim','zlim','Nrho','Nz').
% Chamada pela função principal ('probcil').
  txV = linspace (0,rlim,Nrho);
  tyV = linspace (0,zlim,Nz);
  % Contorno
  figure(1); clf; hold on;
    contour(txV,tyV,V);
    ab = colorbar();
    set(ab,'title','V');
    print -djpg probcilv1.jpg;
  % Heatmap
  figure(2); clf; hold on;
    pcolor(txV,tyV,V);
    shading interp;
    ab = colorbar();
    set(ab,'title','V');
    print -djpg probcilv2.jpg;
  % 3D
  figure(3); clf; hold on;
    meshc(tyV,txV,V);
    ab = colorbar();
    set(ab,'title','V');
    print -djpg probcilv3.jpg;
  % 2D
  % Potencial para 4 valores diferentes de z
  figure(4); clf; hold on;
    plot(txV,V(:,floor(Nz/2)),'r');
    plot(txV,V(:,floor(Nz/2 + ZNint(2)/4)),'m');
    plot(txV,V(:,ZNint(2)),'k');
    plot(txV,V(:,ZNext(2)),'g');
    legend('meio dos cilindros','3/4 do cilindro interno','ponta do cilindro interno','ponta do cilindro externo');
    xlabel('r'); ylabel('V');
    print -djpg probcilv4.jpg;
  % Potencial para 2 valores diferentes de rho
  figure(5); clf; hold on;
    plot(tyV,V(floor(RhoNint/2),:),'c');
    plot(tyV,V(floor((RhoNint+RhoNext)/2),:),'b');
    legend('dentro do cilindro interno','entre os cilindros');
    xlabel('z'); ylabel('V');
    print -djpg probcilv5.jpg;
end
```

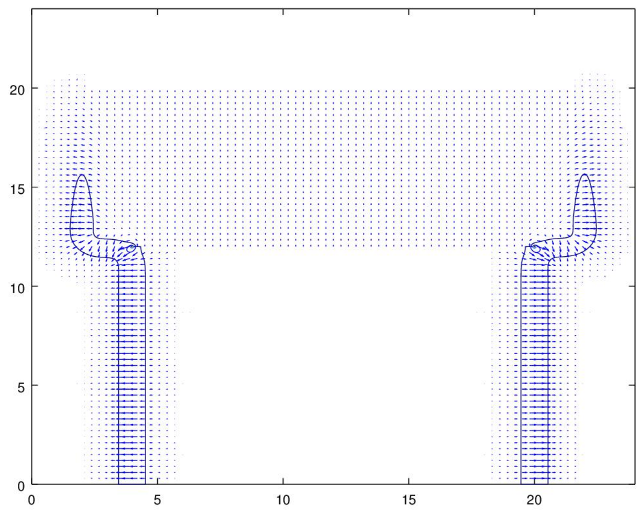
Calculado o potencial, obtém-se o campo elétrico através da expressão:

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{a}_\phi + \frac{\partial}{\partial z}\hat{a}_z V$$

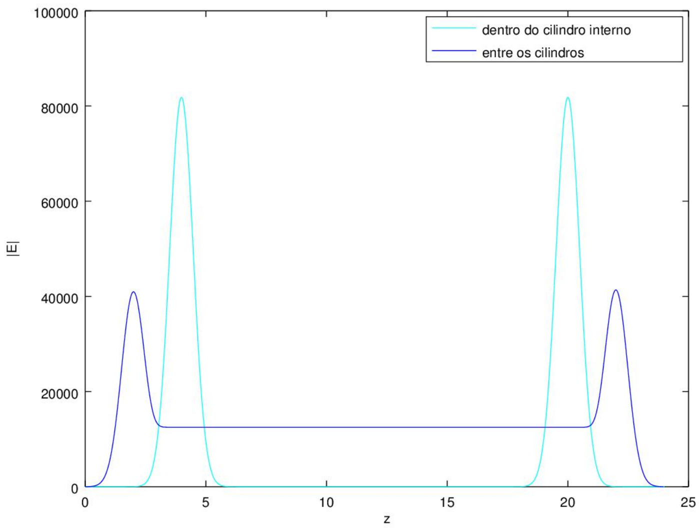
que pode ser escrita em forma discreta como:

$$\vec{E} = -\left(\frac{V_{i+1,k} - V_{i-1,k}}{\Delta\rho}\right)\hat{a}_\rho - \left(\frac{V_{i,k+1} - V_{i,k-1}}{\Delta z}\right)\hat{a}_z$$

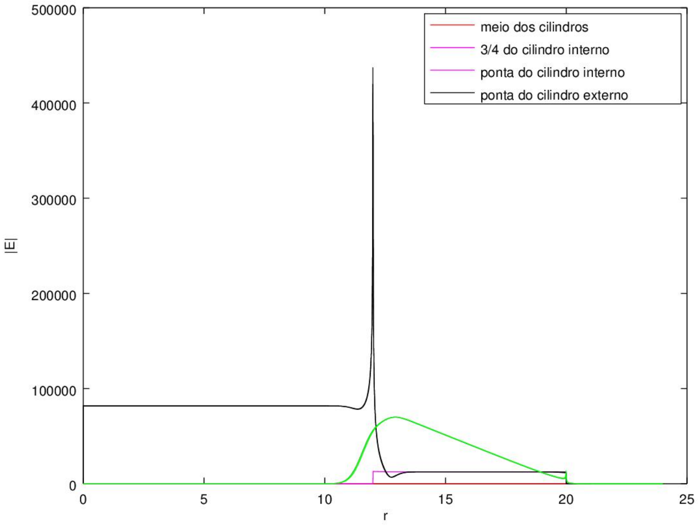
O campo elétrico na região está ilustrado nas figuras seguintes:



Linhas equipotenciais e intensidade do campo elétrico



Intensidade do campo elétrico para dois valores de ρ



Intensidade do campo elétrico para quatro valores de z

A densidade superficial de carga em cada ponto do cilindro interno será dada por $\boldsymbol{\rho_S} = \vec{D} \cdot \hat{a}_\rho = \epsilon_0 E_\rho$. Basta integrar numericamente essa densidade para encontrar a carga total; a partir daí calcula-se a capacitância da configuração. Uma maneira de conferir a correção dos resultados é calcular a carga nas superfícies externa e externa; os valores devem ser iguais.

Para a geometria listada anteriormente, o resultado encontrado foi $q = 162\ pC$ na superfície interna e $q = 130\ pC$ na externa, o que corresponde a um erro de cerca de 19%. A capacitância estimada está por volta de $14\ pF$. Segue a listagem do código responsável pelo cálculo de $\vec{E}$, q e C, pelos gráficos complementares e o script que executa as funções listadas para as condições do exemplo:

LISTING 6. calce.m

```
function [Erho,Ez]=calce(V,rlim,zlim)
% Calcula o campo elétrico a partir do potencial, para a grade indicada ('rlim','zlim').
% Considera 'rlim' e 'zlim' em mm.
% Chamada pela função principal ('probcil.m').
  [nrow,ncol] = size(V);
  Erho = Ez = zeros(nrow,ncol);
  mrho = - 500 * nrow / rlim;
  mz = - 500 * ncol / zlim;
  Erho(2:nrow-1,2:ncol-1) = mrho * (V(3:nrow,2:ncol-1) - V(1:nrow-2,2:ncol-1));
  Ez(2:nrow-1,2:ncol-1) = mz * (V(2:nrow-1,3:ncol) - V(2:nrow-1,1:ncol-2));
end
```

LISTING 7. plote.m

```
function plote(Erho,Ez,rlim,zlim,Nrho,Nz)
% Plota e grava os gráficos que ilustram o campo elétrico 'E' para a grade dada ('rlim','zlim','Nrho','Nz').
% Chamada pela função principal ('probcil').
  Eabs = (Erho.^2 + Ez.^2).^0.5;
  txV = linspace (0,rlim,Nrho);
  tyV = linspace (0,zlim,Nz);
  txE = txV(1:50:Nrho);
  tyE = tyV(1:50:Nz);
  Ey = Erho(1:50:Nrho,1:50:Nz);
  Ex = Ez(1:50:Nrho,1:50:Nz);
  % Contorno
  figure(1); clf; hold on;
    contour(txV,tyV,Eabs);
    quiver(txE,tyE,Ex,Ey);
    ab = colorbar();
    set(ab,'title','V/m');
    print -djpg probcile1.jpg;
  % Heatmap
  figure(2); clf; hold on;
    pcolor(txV,tyV,Eabs);
    shading interp;
    ab = colorbar();
    set(ab,'title','V/m');
    print -djpg probcile2.jpg;
  % 3D
  figure(3); clf; hold on;
    meshc(tyV,txV,Eabs);
    ab = colorbar();
    set(ab,'title','V/m');
    print -djpg probcile3.jpg;
  % 2D
  % Intensidade do campo para 4 valores diferentes de z
  figure(4); clf; hold on;
    plot(txV,Eabs(:,1),'r');
    plot(txV,Eabs(:,floor(ZNint/2)),'m');
    plot(txV,Eabs(:,ZNint),'k');
    plot(txV,Eabs(:,ZNext),'g');
    legend('meio dos cilindros','3/4 do cilindro interno','ponta do cilindro interno','ponta do cilindro externo');
    xlabel('r'); ylabel('|E|');
    print -djpg probcile4.jpg;
  % Intensidade do campo para 2 valores diferentes de rho
  figure(5); clf; hold on;
    plot(tyV,Eabs(floor(RhoNint/2),:),'c');
    plot(tyV,Eabs(floor((RhoNint+RhoNext)/2),:),'b');
    legend('dentro do cilindro interno','entre os cilindros');
    xlabel('z'); ylabel('|E|');
    print -djpg probcile5.jpg;
end
```

LISTING 8. probcil.m

```
%function [V]=probcil(Rext,Rint,Lext,Lint,rlim,zlim,Vext,Vint,prec,maxiter,Nrho,Nz,wmax,wmin)
```

```
% Calcula o perfil do potencial elétrico, do campo elétrico, a distribuição de carga e a capacitância para o problema de dois cilindros finitos concêntricos de raios 'Rext' e 'Rint', comprimentos 'Lext' e 'Lint' (dimensões em milímetros).
% Assume os potenciais 'Vext' e 'Vint' nas superfícies.
% Assume o potencial nulo no infinito ('rlim' e 'zlim').
% Usa uma grade de 'Nrho' linhas e 'Nz' colunas. Exige precisão mínima percentual 'prec'. Limita o número de iterações em 'maxiter', por segurança.
% Tenta fatores de relaxação na faixa 'wmin' <= 'w' <= 'wmax'.
% Exemplo de uso:
%   probcil(20,18,20,16,50,50,200,100,1,500,200,200,1.2,0.1)
  % Calcula as coordenadas das extremidades dos cilindros na grade escolhida
  RhoNint = floor(Nrho * Rint / rlim);    % Posição radial do cilindro interno
  RhoNext = floor(Nrho * Rext / rlim);    % Posição radial do cilindro externo
  TNint= Nz * Lint / zlim;           % Comprimento do cilindro interno
  TNext= Nz * Lext / zlim;           % Comprimento do cilindro externo
  ZNint= floor(Nz/2 + TNint * [-0.5 0.5]); % Posição das extremidades do cilindro interno
  ZNext= floor(Nz/2 + TNext * [-0.5 0.5]); % Posição das extremidades do cilindro externo
  % Tenta calcular o potencial 'V' (apenas em dois quadrantes, por simetria)
  [V,w,erro,iter]=solvegrid(Rext,Rint,Lext,Lint,rlim,zlim,Vext,Vint,RhoNint,RhoNext,ZNint,ZNext,prec,maxiter,Nrho,Nz,wmax,wmin);
  if w == 0
    disp("O cálculo não convergiu para nenhum fator de relaxação na faixa indicada.");
    return
  end
  disp(sprintf("O cálculo convergiu com fator de relaxação %f após %d iterações", w, iter));
  % Plota 'V' (em apenas dois quadrantes)
  %plotv(V,RhoNext,RhoNint,ZNext,ZNint,rlim,zlim,Nrho,Nz);
  % Calcula e plota o campo elétrico 'E' (em apenas dois quadrantes)
  [Erho,Ez]=calce(V,rlim,zlim);
  %plote(Erho,Ez,rlim,zlim,Nrho,Nz);
  % Calcula a carga (em nC) e a capacitância (em nF)
  qint = 2 * pi * Rint * 8.854e-9 * sum(Erho(RhoNint+1,ZNint(1):ZNint(2))) * zlim/Nz;
  qext = 2 * pi * Rext * 8.854e-9 * sum(Erho(RhoNext,ZNext(1):ZNext(2))) * zlim/Nz;
  erro = 100 * abs(1 - qext/qint);
  disp(sprintf("Carga nas superfícies: externa = %f nC, interna = %f nC. Erro = %f ", qext, qint, erro));
  % rho = 0.5 * laplacianoc(V,rdelta)/(1 + rdelta^2) ;
  % q = 2 * pi * Rint * 8.854e-12 * sum(rho(RhoNint,ZNint(1):ZNint(2))) * zlim/Nz * rlim/Nrho;
  C = abs(qint/(Vext - Vint));
  disp(sprintf("Capacitância estimada: %f nF", C));
%end
```

Listing 9. solvecil.m

```
% Inicialização dos parâmetros
% Parâmetros
Nrho = Nz = 4000; % divisões da grade
prec = 0.002;   % precisão percentual a obter
maxiter= 40000;   % máximo de iterações tolerado
rlim = zlim = 24; % posição do "infinito"
% Geometria dos cilindros (em mm)
Rext = 20;
Rint = 12;
Lext = 20;
Lint = 16;
```

```
% Outros dados do problema
Vext = 0;
Vint = 100;        % V
wmax = 1;
wmin = 0.1;
% Solução
V = probcil(Rext,Rint,Lext,Lint,rlim,zlim,Vext,Vint,prec,maxiter,Nrho,Nz,wmax,wmin);
```

2. Problema de Linha de Tranamissão.

a) Seja L um fio condutor reto, de diâmetro $2a$ e comprimento infinito, suspenso a uma altura h do chão, considerado uma superfície equipotencial. Supondo um segmento de comprimento l carregado uniformemente com uma carga q , pelo método das imagens devemos considerar a existência de uma linha L' com densidade linear de carga $-\frac{q}{l}$ a uma profundidade $-h$, perfeitamente paralela ao fio. O campo elétrico em um ponto qualquer $P = \{x, y, z\}$ será dado por [**?**]:

$$z \leq 0 \implies \vec{E} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq (h-a) \implies \vec{E} &= \vec{E}_L + \vec{E}_{L'} \\ &= \frac{q}{2\pi l \epsilon_0 r_L^2}\vec{r_L} - \frac{q}{2\pi l \epsilon_0 r_{L'}^2}\vec{r_{L'}} \\ &= \frac{q}{2\pi l \epsilon}\left(\frac{x\hat{a}_x + (z-h)\hat{a}_z}{x^2+(z-h)^2} - \frac{x\hat{a}_x + (z+h)\hat{a}_z}{x^2+(z+h)^2}\right) \end{aligned}$$

$\boxed{\textit{Por simetria, } E_y = 0}$

$$(h-a) \leq z \leq (h+a) \implies \vec{E} = \vec{0}$$

$$z \geq (h+a) \implies \vec{E} = \frac{q}{2\pi l \epsilon}\left(\frac{x\hat{a}_x + (z-h)\hat{a}_z}{x^2+(z-h)^2} - \frac{x\hat{a}_x + (z+h)\hat{a}_z}{x^2+(z+h)^2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
z \leq 0 \implies V_P &= 0 \\
0 \leq z \leq (h-a) \implies V_P &= -\int_{\ell} \vec{E}\cdot\vec{d\ell} \\
&= -\int_0^z \frac{q}{2\pi l\epsilon}\left(\frac{x\hat{a}_x + (z-h)\hat{a}_z}{x^2+(z-h)^2} - \ldots\right. \\
&\qquad \left. -\frac{x\hat{a}_x + (z+h)\hat{a}_z}{x^2+(z+h)^2}\right)\cdot(dz\ \hat{a}_z) \\
&= -\frac{q}{2\pi l\epsilon}\int_0^z \left(\frac{z-h}{x^2+(z-h)^2} - \frac{z+h}{x^2+(z+h)^2}\right)\ dz \\
&= -\frac{q}{2\pi l\epsilon}\left\{\int_0^z \frac{z-h}{x^2+(z-h)^2}\ dz - \int_0^z \frac{z+h}{x^2+(z+h)^2}\ dz\right\} \\
&= -\frac{q}{2\pi l\epsilon}\left\{\int_{-h}^{z-h} \frac{u}{x^2+u^2}\ du - \int_{h}^{z+h} \frac{v}{x^2+v^2}\ dv\right\} \\
&\qquad \boxed{u = z-h, v = z+h} \\
&= -\frac{q}{2\pi l\epsilon}\left\{\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+u^2)\right]\Big|_{-h}^{z-h} - \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+v^2)\right]\Big|_{h}^{z+h}\right\} \\
&= -\frac{q}{4\pi l\epsilon}\left\{\ln\left(\frac{x^2+(z-h)^2}{x^2+h^2}\right) - \ln\left(\frac{x^2+(z+h)^2}{x^2+h^2}\right)\right\} \\
&= \frac{q}{4\pi l\epsilon}\ln\left(\frac{x^2+(z+h)^2}{x^2+(z-h)^2}\right) \\
(h-a) \leq z \leq (h+a) \implies V_P &= 0 \\
z \geq (h+a) \implies V_P &= \frac{q}{4\pi l\epsilon}\ln\left(\frac{x^2+(z+h)^2}{x^2+(z-h)^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$V_L = V_{\{0,0,h-a\}}$$

$$= \frac{q}{4\pi l\epsilon} \ln\left(\frac{0^2 + (h-a+h)^2}{0^2 + (h-a-h)^2}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi l\epsilon} \ln\left(\frac{(2h-a)^2}{a^2}\right)$$

$$= \frac{q}{2\pi l\epsilon} \ln\left(\frac{2h-a}{a}\right)$$

$$C = \frac{q}{V_L}$$

$$= \frac{2\pi l\epsilon}{\ln\left(\frac{2h-a}{a}\right)}$$

$$W = \frac{1}{2}qV$$

$$= \frac{1}{2}q\,\frac{q}{2\pi l\epsilon} \ln\left(\frac{2h-a}{a}\right)$$

$$= \frac{q^2}{4\pi l\epsilon} \ln\left(\frac{2h-a}{a}\right)$$

---

b) Seja L um fio condutor reto, de comprimento infinito, paralelo a outro fio idêntico L' a uma distância d. O resultado do item anterior permite dizer que a capacitância e a energia acumulada são dados pelas mesmas expressões, com a mera substituição de h por $\frac{d}{2}$. Assim,

$$V_L = \frac{q}{2\pi l\epsilon} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$

$$C = \frac{2\pi l\epsilon}{\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)}$$

$$W = \frac{q^2}{4\pi l\epsilon} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$

---

c) Para configurações mais complexas, basta combinar o resultado dos itens anteriores para encontrar expressões para C e W, uma vez que a linearidade do problema permite empregar o princípio de superposição e somar os potenciais gerados por cada fio sobre os demais para encontrar o potencial total.
Por exemplo, no caso de uma linha de transmissão trifásica, composta por 3 condutores paralelos de diâmetro $2a$, distantes d e a uma altura h do solo, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
V_{L_1} &= V_{L_1L_1} + V_{L_1L_2} + V_{L_1L_3} \\
&= V\{0, 0, h-a\} + V\{d, 0, h-a\} + V\{2d, 0, h-a\} \\
&= \frac{q}{4\pi l\epsilon}\left[\ln\left(\frac{(2h-a)^2}{a^2}\right) + \ln\left(\frac{d^2+(2h-a)^2}{d^2+a^2}\right) + \ln\left(\frac{4d^2+(2h+a)^2}{4d^2+a^2}\right)\right] \\
&= \frac{q}{4\pi l\epsilon}\ln\left(\frac{(2h-a)^2[d^2+(2h-a)^2][4d^2+(2h+a)^2]}{a^2[d^2+a^2][4d^2+a^2]}\right)
\end{aligned}
$$

Referências

[IDA 2000] Nathan IDA, **Engineering Electromagnetics**, New York, Springer, 2000, ISBN 978-1-4757-3287-0, Cap. 6.3, pp. 356 a 367.

[MACEDO 1988 1] Annita MACEDO, **Eletromagnetismo**, Guanabara, 1988, Cap. 2, pp. 30 a 44.

[MACEDO 1988 2] Annita MACEDO, *op. cit.*, Formulário, pp. 619 a 628.

[MAXWELL 1873 1] James C. MAXWELL, **A Treatise On Electricity And Magnetism**, Vol. I, Clarendon Press, 1873, Chapter VIII, it. 126, pp. 154 a 155.

[SADIKU 2000 1] Matthew N. O. SADIKU, **Elements of Electromagnetics**, Oxford University Press, 3 rd Ed., 2000, Chapter 6.5, p. 227.

[SADIKU 2000 2] Matthew N. O. SADIKU, *op. cit.*, Chapter 6.6, pp. 242 a 243.

[XAVIER 2007] Ademir L. XAVIER Jr., **Modelagem computacional em problemas de eletrostática: efeito de campos de borda em capacitores cilíndricos finitos**, *in* Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 29, n. 2, pp. 241-249, (2007).

[RYLANDER et. al. 2010] Thomas RYLANDER et. al., **Computational Electromagnetics**, 2 nd Ed., Springer, 2010, ISBN 978-1-4614-5351-2, Chapter 3, pp. 19-26.

A solução de algumas integrais indefinidas foi obtida no site **Wolfram Alpha**: `http://www.wolframalpha.com/widget/widgetPopup.jsp?p=v&id=7d800d10b8bfcd949b17866c0679e786`.

Os gráficos foram preparados pelo **Octave** 4.0.0:
`https://www.gnu.org/software/octave/`

O texto foi formatado com **pdflatex** em ambiente MiKTeX 2.9
`http://miktex.org/download/`