MÉTODOS NUMÉRICOS - LISTA DE EXERCÍCIOS II

SÉRGIO CORDEIRO

SUMÁRIO

1. EXERCÍCIOS

Desenvolva algoritmos em C ou MATLAB (escolha livre) para:

1. Solução de SL de ordem nxn usando decomposição LU com pivotação parcial. Calcular o determinante.

O programa **`exercmat.c`**, em anexo, escrito em C, lê um sistema de equações gerado pelo MATLAB, resolve-o pelo método de decomposição LU com pivotação parcial, e calcula o determinante da matriz e a norma 2 da matriz-resultado, para conferência. Basta digitar:

`exercmat 4 n`

onde n é o tamanho do sistema (n x n+1). Ele também calcula o número de operações em ponto flutuante necessário para cada etapa. Os resultados obtidos estão tabelados a seguir. Foi usada apenas precisão simples, de forma a favorecer a ocorrência de erros de arredondamento.

n	**custo** [1]			**determinante**	**norma 2**
	solução	**determinante** [2]	**norma 2**		
3	63	3	6	-0.112721	4.464723
30	19701	30	60	26.168304	1.938657
300	18138546	300	600	*overflow*	25.915476

O sistema foi gerado pelo MATLAB na solução da primeira lista de exercícios.

---

[1] Número de operações de ponto flutuante necessárias.
[2] Adicional ao custo da solução.

2. Decomposição de Cholesky.

O programa **`exercmat.c`**, em anexo, escrito em C, lê um sistema de equações gerado pelo MATLAB, resolve-o pelo método de decomposição de Cholesky com pivotação parcial, e calcula o determinante da matriz e a norma 2 da matriz-resultado, para conferência. Basta digitar:

`exercmat 5 n`

onde n é o tamanho do sistema (n x n+1). Ele também calcula o número de operações em ponto flutuante necessário para cada etapa.
A matriz precisa ser simétrica e definida positiva para que esse método possa ser empregado. O programa abaixo gera, no MATLAB, um sistema adequado, grava os valores em disco, e calcula o determinante da matriz e a norma 2 do resultado, para conferência.

LISTING 1. gerachol.m

```
1  function gerachol(n)
2  %Gera um sistema a partir de valores aleatórios na faixa ]0 - 1[, grava-o em disco,
       resolve-o e calcula o determinante e a norma 2 do resultado.
3  %A matriz gerada é simétrica e definida positiva.
4    % Gera matriz não singular
5    test = 0;
6    while test == 0
7      A = rand(n);
8      test = det(A);
9    end
10   % Gera matriz simétrica definida positiva
11   S = A * A';
12   % Gera o sistema
13   b = rand(n,1);
14   C = [S, b];
15   save('C', 'C');
16   disp(sprintf("Sistema gerado e gravado."));
17   disp(sprintf("Determinante = %f", test^2));
18   % Resolve o sistema
19   INVS = S ^ (-1);
20   x = INVS * b;
21   disp(sprintf("Norma 2 do resultado = %f", norm(x, 2)));
22 end
```

De acordo com [WEISSTEIN 2016],

> *A real symmetric matrix* A *is positive definite iff there exists a real nonsingular matrix* M *such that*
> $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{M}^{(T)}$
> *where* $\mathbf{M}^{(T)}$ *is the transpose [...].*

por isso a matriz foi gerada como o quadrado de outra matriz que se garantiu não ser singular. Com isso, a condição mencionada é satisfeita. Os resultados obtidos estão tabelados a seguir. Foi usada apenas precisão simples, de forma a favorecer a ocorrência de erros de arredondamento.

n	**det. MATLAB**	**norma 2 MATLAB**	**custo** [3] **solução**	**det.** [4]	**det.**	**norma 2**
3	8.4343	6197.920598	116	4	0.000026	6191.667480
30	0.00002643	904.156803	12500	31	8.460002	901.309753
300	2.96×10^{148}	4121.211866	9278000	301	*overflow*	4364.376465

[3]Número de operações de ponto flutuante necessárias.
[4]Adicional ao custo da solução.

3. Refinamento de solução de SL (nxn).

O programa **exercmat.c**, em anexo, escrito em C, lê um sistema de equações gerado pelo MATLAB, calcula a solução pelo método de decomposição LU e refina-a, se necessário, bem como calcula a norma 2 do resultado, para conferência. Basta digitar:

exercmat 11 ***n*** [***e***]

onde n é o tamanho do sistema (n x n+1) e e (opcional), é o erro tolerado. Ele também calcula o número de operações em ponto flutuante necessário para cada etapa.
No refinamento, foi empregada a norma infinita do resíduo

$$b - Ax$$

como critério de parada. Quando o procedimento diverge ou converge muito devagar, adota-se o melhor valor disponível até então.
Como o refinamento exige a solução sucessiva de diversos sistemas lineares com a mesma matriz, o mais recomendável é usar um método de decomposição, em lugar do de eliminação Gaussiana, por exemplo. Este é o mais eficiente na solução de um sistema único, mas o custo é muito alto para empregos sucessivos.
Os resultados obtidos estão tabelados a seguir. Foi usada apenas precisão simples, de forma a favorecer a ocorrência de erros de arredondamento.

n	**norma 2**	**custo** [5]	**iterações**	**erro**			**norma 2**
				tolerado	**inicial**	**final**	
3	4.464723	75	0	10^{-6}	0.000000	0.000000	4.464723
30	1.938658	20631	0	10^{-6}	0.000000	0.000000	1.938657
300	25.915637	18501847	1	10^{-5}	0.000054	0.000009	25.915562
300	25.915637	18774848	2 [6]	10^{-6}	0.000054	0.000009	25.915701

O sistema foi gerado pelo MATLAB na solução da primeira lista de exercícios.

[5] Número de operações de ponto flutuante necessárias.
[6] O método divergiu neste caso.

4. Calculo da inversa de uma matriz (nxn).

O programa **`exercmat.c`**, em anexo, escrito em C, lê um sistema de equações gerado pelo MATLAB e calcula a matriz inversa e o determinante pelo método de eliminação de Gauss com pivotação parcial, bem como a norma 2 do resultado, para conferência. Basta digitar:

`exercmat 9 n`

onde n é o tamanho do sistema (n x n+1). Ele também calcula o número de operações em ponto flutuante necessário para cada etapa.
Os resultados obtidos estão tabelados a seguir. Foi usada apenas precisão simples, de forma a favorecer a ocorrência de erros de arredondamento.

n	**custo** [7]			**determinante**	**norma 2**
	inversão [8]	**solução**	**norma 2**		
3	105	9	6	-0.112721	4.464724
30	74391	900	600	26.168293	1.938658
300	72226446	90000	600	*overflow*	25.915840

O sistema foi gerado pelo MATLAB na solução da primeira lista de exercícios.

[7] Número de operações de ponto flutuante necessárias.
[8] Cálculo do determinante incluído.

5. Solução de SL de ordem nxn usando o método iterativo de Jacobi.

O programa **`exercmat.c`**, em anexo, escrito em C, lê um sistema de equações gerado pelo MATLAB, resolve-o pelo método iterativo de Jacobi e calcula a norma 2 do resultado, para conferência. Basta digitar:

`exercmat 12 n`

onde n é o tamanho do sistema (n x n+1). Ele também calcula o número de operações em ponto flutuante necessário para cada etapa.
Como o sistema gerado pelo MATLAB na solução da primeira lista de exercícios é muito mal condicionado, o método falhou para todos os tamanhos testados. Por isso, desenvolveu-se uma função no MATLAB, listada abaixo, para gerar uma matriz diagonalmente dominante.

LISTING 2. geradsis.m

```
1  function geradsis(n)
2  % Gera um sistema 'n' x 'n' diagonalmente dominante a partir de valores aleatórios,
       grava-a em disco, resolve-o e calcula a norma 2 do resultado.
3    A = rand(n);
4    for i = 1:n
5      A(i,i) = 10 + A(i,i) * 10;
6    end
7    b = rand(n,1);
8    S = [A, b];
9    save('D', 'S');
10   disp(sprintf("Sistema gerado e gravado."));
11   INVA = A^(-1);
12   X = INVA * b;
13   disp(sprintf("Norma 2 da solução = %f", norm(X, 2)));
14 end
```

Os resultados obtidos estão tabelados a seguir. Foi usada apenas precisão simples, de forma a favorecer a ocorrência de erros de arredondamento.

n	**norma 2**	**custo** [9]	**iterações**	**norma 2**	**tolerância**
3	0.606234	204	8	0.606233	10^{-5}
		225	9	0.606234	10^{-6}
30	0.166238	1831980	1000	0.166224	10^{-5}
		2318760	1266	0.166236	10^{-6}
300	0.389537	- [10]			10^{-5}

[9] Número de operações de ponto flutuante necessárias.
[10] O método divergiu neste caso.

6. Solução de SL de ordem nxn usando o método iterativo de Gauss Seidel.

O programa **`exercmat.c`**, em anexo, escrito em C, lê um sistema de equações gerado pelo MATLAB, resolve-o pelo método iterativo de Gauss-Seidel e calcula a norma 2 do rtado, para conferência. Basta digitar:

`exercmat 13 n`

onde n é o tamanho do sistema (n x n+1). Ele também calcula o número de operações em ponto flutuante necessário para cada etapa.
Foram usados os mesmos sistemas gerados para o problema anterior.
Os resultados obtidos estão tabelados a seguir. Foi usada apenas precisão simples, de forma a favorecer a ocorrência de erros de arredondamento.

n	**norma 2**	**custo** [11]	**iterações**	**tolerância**	**norma 2**
3	0.606234	99	3	10^{-5}	0.606234
		120	4	10^{-6}	0.606234
30	0.166238	14790	7	10^{-5}	0.166238
		16620	8	10^{-6}	0.166237
300	0.389537	12802800	70	10^{-5}	0.389532
		16228500	89	10^{-6}	0.389537

[11] Número de operações de ponto flutuante necessárias.

7. Determinação do maior e do menor auto-valor de uma matriz e cálculo do numero de condicionamento.

O programa **`exercmat.c`**, em anexo, escrito em C, lê uma matriz gerada pelo MATLAB e calcula seus autovalores extremos pelo método das potências (direta e inversa). Basta digitar:

```
exercmat 14 n
```

onde n é o tamanho da matriz (n x n). Ele também calcula o número de operações em ponto flutuante necessário para cada etapa.
Foram usadas matrizes geradas para a lista de exercícios anterior.
Os resultados obtidos estão tabelados a seguir. Foi usada apenas precisão simples, de forma a favorecer a ocorrência de erros de arredondamento.

n	**Autovalores**		**custo** [12]		**iterações**		**tolerância**
	menor	**maior**	**menor**	**maior**	**menor**	**maior**	
3	0.000022	2.248022	2359032	262	3	8	10^{-5}
3	0.000022	2.248020	2359032	292	3	9	10^{-5}
30	0.000249	227.683487	2359032	5029	1 [13]	4	10^{-5}
30	0.000249	227.683487	2359032	5029	1 [13]	4	10^{-6}
300	0.000122	22499.882812	2359032	363640	1 [13]	3	10^{-5}
300	0.000122	22499.884766	2359032	454849	1 [13]	4	10^{-6}

n	**Número de condição**	**tolerância**
3	103355	10^{-5}
30	895948	10^{-5}
300	194748459	10^{-5}
300	194748452	10^{-6}

[12] Número de operações de ponto flutuante necessárias.
[13] O método divergiu nestes casos.

8. Determinação de todos os autovalores e autovetores de uma matriz.

O programa **`exercmat.c`**, em anexo, escrito em C, lê uma matriz gerada pelo MATLAB e calcula seus autovalores pelo método de Jacobi. Basta digitar:

`exercmat 15 n`

onde n é o tamanho da matriz (n x n). Ele também calcula o número de operações em ponto flutuante necessário para cada etapa.
Foram usadas matrizes geradas para a lista de exercícios anterior.
Os resultados obtidos estão tabelados a seguir. Foi usada apenas precisão simples, de forma a favorecer a ocorrência de erros de arredondamento.

n	**custo** [14]		**iterações**	**tolerância**
	autovalores	**autovetores**		
3	135	207	1	10^{-6}
30	19575	781695	19	10^{-6}
300	2018250	8048646450	191	10^{-6}

[14] Número de operações de ponto flutuante necessárias.

2. Análise e conclusões

Os métodos iterativos, mesmo para matrizes densas como as que foram usadas aqui, apresentam menor esforço computacional que os métodos diretos para sistemas grandes. O método de Gauss-Seidel mostrou desempenho um pouco melhor que o de Jacobi.
Dentre os métodos diretos, a decomposição LU parace ser superior, apesar de o algoritmo não ser tão simples. A forma fechada da decomposição de Cholesky se presta mais à demostração de teoremas, não a aplicações práticas de solução de sistemas lineares. A decomposição Gaussiana com pivotação, estudada na lista anterior, ainda é a de menor custo, a não ser que haja vários sistemas a resolver com a mesma matriz, quando então a decomposição LU deve ser a preferida.
O custo de inversão de uma matriz grande é proibitivo. A solução de um sistema linear por essa abordagem não é econômicamente viável.
Com relação ao cálculo de autovalores, também se trata de operação de alto custo. Os algoritmos testados apresentam convergância lenta e instabilidade. O cálculo de autovetores pelo método de rotações de Jacobi é ainda mais caro; para matrizes grandes, é melhor usar os autovalores calculados para resolver n sistemas lineares da forma $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathrm{b} = 0$ por decomposição LU.
Alguns algoritmos utilizam extração de raiz quadrada e divisões, que têm um custo computacional dependente da arquitetura do processador usado. Aqui adotaram-se os valores recomendados por [VANDENBERGHE 2012], [FAH 2013] e [INTEL 2016].

3. PESQUISAS

9. Pesquise sobre sistemas tridiagonais e desenvolva um método para sua solução.

Um sistema linear tridiagonal é aquele em que a matriz dos coeficientes A é tridiagonal. Uma matriz tridiagonal é uma matriz quadrada em que os coeficientes $a_{i,j}$ são nulos para $|j - i| > 1$; em outras palavras, apenas coeficientes na diagonal principal e nas diagonais adjacentes não são nulos.
Uma matriz tridiagonal genérica pode ter seus coeficientes expressos da forma usual:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n_n} \end{bmatrix}$$

ou da forma alternativa:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

Esta última possibilita o armazenamento eficaz de grandes matrizes, pois é preciso gravar apenas os 3 vetores a, b e c, todos com comprimento n. Note-se que sempre $a_1 = c_n = 0$.
Lançando-se mão da forma alternativa, o sistema tridiagonal $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$, cuja equação genérica é:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = d_i$$

pode ser escrito simplesmente como:

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$$

o que faculta a solução por meio de uma modificação da eliminação Gaussiana conhecida como **algoritmo de Thomas**. O custo computacional deste método é linear em n: $\mathcal{O}(n)$, mas a matriz precisa ser também diagonalmente dominante.

O algoritmo pode ser escrito na forma matricial como:

```
M = a[2:n] ./ b[1:n-1];
b[2:n] -= M .* c[1:n-1];
d[2:n] -= M .* d[1:n-1];
a[2:n] = 0;
```

Após essas operações, a matriz se torna triangular superior, e pode ser resolvida pelos meios tradicionais.
A matriz inversa V pode ser obtida por meio das expressões seguintes:

$$v_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j} \, \dfrac{\theta_{i-1}\phi_{j+1}}{\theta_n} \prod_{i}^{j-1} c_k & i \leq j \\ (-1)^{i+j} \, \dfrac{\theta_{j-1}\phi_{i+1}}{\theta_n} \prod_{j}^{i-1} a_k & i > j \end{cases}$$

$$\theta_i = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ b_1 & i = 1 \\ b_i\theta_{i-1} - a_{i-1}c_{i-1}\theta_{i-2} & 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$\phi_i = \begin{cases} 1 & i = n+1 \\ b_n & i = n \\ b_i\phi_{i+1} - a_i c_i \phi_{i+2} & n-1 \geq i \geq 1 \end{cases}$$

V é sempre uma matriz semi-separável.
O cálculo do determinante de uma matriz tridiagonal possui custo da ordem n: $\mathcal{O}(n)$; para uma matriz densa, esse custo é da ordem n: $\mathcal{O}(n^3)$.
Toda matriz tridiagonal é um tipo de matriz de Hessenberg, por isso pode ser reduzida a uma matriz triangular por meio de processos iterativos, como a decomposição QR. Esses processos são muito estáveis numericamente.
Existem algoritmos para semidiagonalizar matrizes genéricas. Por exemplo, os refletores de Householder são ferramentas robustas para transformar qualquer matriz para a forma de Hessenberg; o algoritmo de Gram-Schmidt é outra, menos estável, mas que possui a vantagem de oferecer resultado mesmo quando executado de forma parcial.
Uma matriz tridiagonal simétrica é chamada de **Matriz de Jacobi** ou, melhor, **Matriz Tridiagonal de Jacobi**, para evitar confusão com a matriz de operadores diferenciais conhecida também como **Jacobiano** [USMANI 1994, VANDEBRIL 2004].

10. Pesquisa sobre a técnica de solução de SL chamada GMRES.

O algoritmo GMRES (*Generalized Minimal Residual Method*)é um método iterativo para solução de sistemas lineares genéricos que, em oposição aos chamados métodos estacionários, não utiliza uma matriz fixa para refinar o resultado, e sim técnicas de otimização para minimizar a norma Euclidiana do resíduo:

$$\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$$

Ele foi desenvolvido por Saad e Schultz em 1986, a partir dos algoritmos *Minimal Residual* (MINRES) e *Direct Inversion in the Iterative Subspace* (DIIS), e seu custo computacional está entre $\mathcal{O}(pn^2 + p^2n)$ para matrizes densas e $\mathcal{O}(p^2 + pn)$ para matrizes muito esparsas, onde p é o número de iterações necessárias.
A convergência é garantidamente monotônica e $p < n$; em geral, $p \ll n$, o que torna o custo muito atrativo. Outra característica do método é que a velocidade da convergência não depende do número de condição, e sim do valor absoluto do menor autovalor.
Outra grande vantagem do algoritmo é que ele não exige que **A** seja diagonalmente dominante nem definida positiva.
A minimização do resíduo, que consiste na solução de um problema de otimização pela técnica dos mínimos quadrados, baseia-se não na **A** e sim na matriz **H**, que é uma matriz de Hessenberg de dimensão (p+1 x p), obtida por meio de **Iterações de Arnoldi**. Este método é uma variação do divisado por Lanczos, de montar uma base ortogonal a partir do conjunto $\mathbb{K} = \{\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}...\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\}$, conhecido como **espaço de Krylov**.
O algoritmo de Arnoldi é mais estável do que o de Lanczos e, ao contrário deste, funciona também para matrizes não-simétricas. Ele utiliza o algoritmo de Gram-Schmidt em lugar dos refletores de Householder para a semidiagonalização.
As matrizes **A** e **H** estão relacionadas pela expressão:

$$(1) \qquad \mathbf{A} = \mathbf{QHQ}^{(T)} \implies \qquad \mathbf{A} = \mathbf{Q}^{(T)}\mathbf{HQ}$$

A matriz $\mathbf{Q}$ é composta pelas matrizes-coluna, ou vetores, $\mathbf{q}$. Os vetores $\mathbf{q}_k$ e os coeficientes $h_{i,j}$ são obtidos iterativamente por meio das fórmulas:

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{a} \tag{2}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{q}_k \tag{3}$$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \frac{1}{h_{k+1,k}} \left[\mathbf{v} - \sum_{i=1}^{k} h_{i,k}\mathbf{q}_i \right] \tag{4}$$

$$h_{j,k} = \mathbf{q}_j^{(T)}\mathbf{v} \tag{5}$$

$$h_{k+1,k} = \|\mathbf{v}\|_2 \tag{6}$$

onde a é um vetor unitário arbitrário. A cada iteração, deve-se resolver o sistema linear

$$\mathbf{H}\mathbf{y} = |\mathbf{b}|\mathbf{q}_1 \tag{7}$$

e então calcular o novo vetor solução:

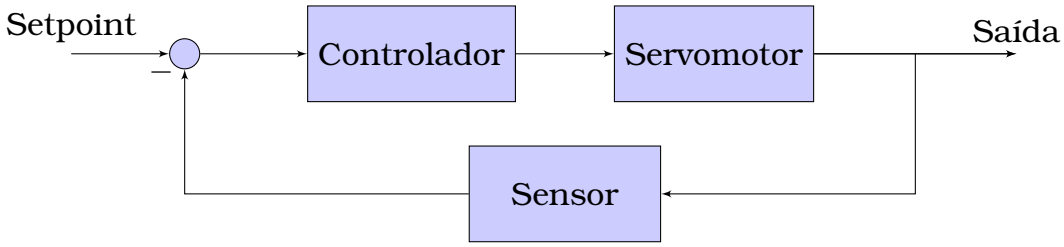
$$\mathbf{x}_k = \mathbf{Q}_k\mathbf{y} \tag{8}$$

A matriz $\mathbf{H}$ obtida é a projeção de $\mathbf{A}$ em $\mathbb{K}$, e tem dimensão em geral bem menor que a de $\mathbf{A}$.

Todos os métodos iterativos baseados no espaço de Krylov possuem a grande virtude de produzir bons resultados mesmo quando as iterações não são levadas até o final. No entanto, o espaço necessário para armazenar $\mathbb{K}$ é um ponto fraco do método [FASSHAUER 2006, TERAN 2013].

11. Estude a resposta dinâmica (estável/não estável (encontrar e avaliar os autovalores)) de um sistema real (o aluno deverá propor e descrever completamente o sistema).

A seguir apresenta-se uma visão simplificada do funcionamento de um sistema de posicionamento de antena terrestre para comunicação com satélite, seguindo o apresentado por [PHILLIPS 1995] Modelos mais sofisticados podem ser encontrados em [KAWAKAMI 1989] e [NASA 1980]. Um sistema de posicionamento de antena de satélite consiste de um controlador digital, um sensor de posição e um servomotor de potência, como ilustrado no diagrama de blocos abaixo.



O servomotor em geral é um motor C.C., com corrente de campo constante, que apresenta resposta linear dentro da faixa de operação. A equação diferencial que o modela é a seguinte:

$$J\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{BR_a + K_T K_b}{R_a}\frac{dy}{dt} - \frac{K_T}{R_a}V_a = 0 \tag{9}$$

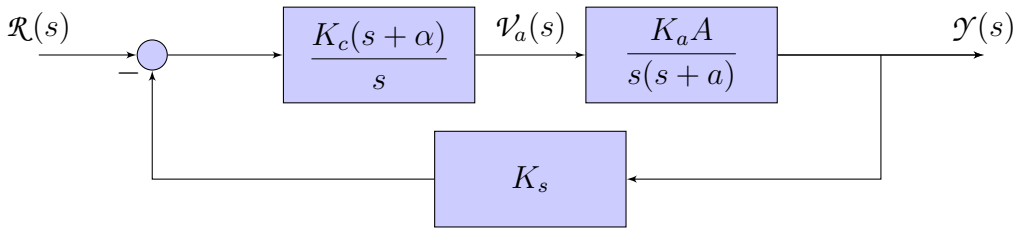
onde y é o deslocamento angular em relação à posição de repouso, V_a é a tensão aplicada à armadura, J é o momento de inércia total do conjunto, B é o amortecimento total devido a fricção, R_a é a resistência elétrica da armadura, K_T é a relação de torque do motor, dada por $\frac{\tau}{i}$, onde τ é o torque e i, a corrente na armadura, e K_b é a relação de velocidade do servomotor, dada por $\frac{\epsilon}{\omega}$, onde ϵ é a força eletromotriz e ω, a velocidade angular. Todos os parâmetros são constantes e independentes do tempo e a indutância da armadura, L_a, em geral pode ser desprezada.
Assim, a função de transferência do servomotor pode ser expressa por:

$$\mathcal{G}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{V}_a(s)} = \frac{A}{s(s+a)} \tag{10}$$

com $A = \frac{K_T}{JR_a}$ e $a = \frac{BR_a + K_T K_b}{JR_a}$.
Note-se que tanto A quanto a são sempre positivos, porque o servomotor é um sistema fisicamente estável.

Segundo [KAWAKAMI 1989], o erro máximo tolerado para y é de 0.015 graus, devido à pequena largura do feixe de ondas a ser transmitido e recebido. [NASA 1980] limita o erro de posicionamento a 3'.
O sensor normalmente é do tipo *encoder* de posição, e apresenta resposta linear e baixo ganho. Sua função de transferência $\mathcal{H}(s)$, portanto, pode ser expressa como uma constante K_s, menor que 1. Além disso, um amplificador de potência, de ganho K_a, é sempre colocado para alimentar o motor, para aumentar a sensibilidade e melhorar a resposta.
Para um satélite não-geoestacionário o motor gira continuamente, dando uma volta a cada 24 h. Assim, a função $\mathcal{D}(s)$ deve prover pelo menos mais um polo em $s = 0$ de forma a zerar o erro em regime estacionário. Vamos assumir, por simplicidade, uma função proporcional + integral ideal: $\mathcal{D}(s) = \frac{K_c(s+\alpha)}{s}$.

A partir desses dados, podemos redesenhar o diagrama de blocos:



Os dados de placa do servomotor TSM3304 da Tamagawa são os seguintes [TAMAGAWA 2016]:

Tensão	V_a	$200\ V$
Potência	P	$750\ W$
Torque	τ	$2.39\ N \cdot m$
Velocidade	ω	$3000\ min^{-1}$

Servomotores de mercado com essa potência são normalmente motores C.A., não C.C. Esses dispositivos são construídos de forma a apresentar resposta linear, o que não acontece com os motores de indução usuais; [TAMAGAWA 2016] traz gráficos que demonstram essa característica. Neste trabalho continuaremos usando as equações e os termos empregados para motores C.C., apesar de não se aplicarem estritamente a essa classe de servomecanismos.
Com esses dados, podemos calcular os parâmetros do motor, de acordo com o roteiro apontado por [NASA 1980], e considerando uma perda de

5% na resistência da armadura:

$$
\begin{aligned}
i_a &= \frac{P + \Delta P}{V_a} \\
&= \frac{750\ W \times 1.05}{200\ V} \\
&= 3.94\ A \\
R_a &= \frac{\Delta P}{i_a^2} \\
&= \frac{750\ W \times 0.05}{3.94\ A)^2} \\
&= 2.42\ \Omega \\
K_T &= \frac{\tau}{i_a} \\
&= 2.39\ N \cdot m 3.94\ A \\
&= 0.607\ V \\
\epsilon &= V - R_a i_a \\
&= 200\ V - 2.42\ \Omega \times 3.94\ A \\
&= 190\ V \\
\omega &= 3000\ min^{-1} \\
&= \frac{3000}{60\ s} \\
&= 50.0 s^{-1} \\
K_b &= \frac{\epsilon}{\omega} \\
&= \frac{190\ V}{50\ s^{-1}} \\
&= 3.80\ V \cdot s
\end{aligned}
$$

O momento de inércia da antena é dado aproximadamente por $J = \frac{mR^2}{4}$, onde R é o raio do disco, se a considerarmos como um disco plano e sua espessura for desprezada [MOON 2008]. Para uma antena típica [GATR 2015], com raio de 2,4 m e pesando 45,4 kg, teremos:

$$J = \frac{45.4\ kg \times (2.4\ m)^2}{4} = 260N \cdot m^2$$

O atrito devido à fricção, segundo [NASA 1980], é altamente não-linear; os autores optaram por considerá-lo nulo para cálculo da função de transferência e tratar seu efeito como um distúrbio $\mathcal{T}(s)$ aplicado ao processo. Aqui adotaremos um procedimento mais simples: fazendo, na equação 9, a aproximação $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, podemos estimar um limite máximo para B:

$$\begin{aligned}
\frac{B_{max}R_a + K_T K_b}{R_a}\frac{dy}{dt} &= \frac{K_T}{R_a}V_a \\
\implies B_{max} &= \frac{K_T(V_a - \omega K_b)}{R_a} \\
&= \frac{0.607\ V \cdot s\ (200\ V - 50.0\ s^{-1} \times 3.80\ V \cdot s}{2.42\ \Omega} \\
&= 2.51\ N
\end{aligned}$$

Assumiremos, então, por simplicidade, $B = 2.00\ N$ em condições típicas de funcionamento. Agora, os coeficientes da função de transferência em malha aberta podem ser calculados:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{K_T}{JR_a} \\
&= \frac{0.607\ V \cdot s}{260\ N \cdot m^2 \times 2.42\ \Omega} \\
&= 9.65 \times 10^{-4} \\
a &= \frac{BR_a + K_T K_b}{JR_a} \\
&= \frac{2.00\ N \times 2.42\ \Omega + 0.607\ V \cdot s \times 3.80\ V \cdot s}{260\ N \cdot m^2 \times 2.42\ \Omega} \\
&= 1.14 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

O pequeno valor de A deixa mais clara a necessidade do amplificador na entrada. Para efeito de análise, consideraremos $K_s = 0.4$, $K_a = 20$ e tentaremos encontrar valores satisfatórios para K_c e α. Lembremos que, como o amplificador precisa ter alta potência na saída, da ordem de 750 W, o ganho não pode ser muito elevado.
A função de transferência em malha fechada do sistema será:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(s) &= \frac{\mathcal{D}(s)\mathcal{H}(s)\mathcal{G}(s)}{1+\mathcal{D}(s)\mathcal{H}(s)\mathcal{G}(s)} \\ &= \frac{K_c K_s K_a A(s+\alpha)}{s^2(s+a)+K_c K_s K_a A(s+\alpha)} \\ &= \frac{K_c C(s+\alpha)}{s^3+as^2+K_c Cs+K_c C\alpha} \qquad (11)\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}C &= K_s K_a A \\ &= 0.4 \times 20 \times 9.65 \times 10^{-4} \\ &= 7.72 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

A equação diferencial correspondente a 11 é:

$$\frac{d^3y}{dt^3} + a\frac{d^2y}{dt^2} + K_c C\frac{dy}{dt} + K_c C\alpha y = K_c C\frac{df}{dt} + K_c C\alpha f \qquad (12)$$

Na formulação de variáveis de estado:

$$\begin{aligned}x_1 &= y \\ x_2 &= \frac{dy}{dt} = \dot{x_1} \\ x_3 &= \frac{d^2y}{dt^2} = \dot{x_2} \qquad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\\ \dot{x_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -K_c C\alpha & -K_c C & -a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ K_c C\alpha & K_c C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} \\ v_1 &= f \\ v_2 &= \frac{df}{dt} = \dot{v_1}\end{aligned}$$

ou, mais brevemente, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{M}\mathbf{v}$.
Os polos de $\mathcal{F}(s)$ são os autovalores da matriz $\mathbf{L}$. Foram geradas, no MATLAB, algumas matrizes para diversos valores de K_c e α, através da função listada abaixo. Ela também calcula os autovalores.

LISTING 3. geraL.m

```
function geraL(n)
%Gera uma matriz de estados para o posicionador de antena de satélite e calcula seus
    autovalores.
  C = 7.72e-3;
  a = 1.14e-2;
  for i = 1:5
    K = 10^(i-1);
    for j = 1:5
      alpha = 10^(-j);
      L = [0, 1, 0; 0, 0, 1; -K * C * alpha, -K * C, -a];
      v = eig(L);
      disp(sprintf("K = %f, alpha = %f => v = ", K, alpha));
      disp(v);
    end
  end
end
```

Para todos os valores testados há um autovalor puramente real e dois complexos, obviamente conjugados. Para $\alpha = 0.1$, a parte real desse par conjugado é positiva, independentemente do valor de K_c, o que resulta num sistema instável. Aparentemente, à medida que α aumenta, o valor da parte real dos polos complexos se aproxima assintoticamente de -0.006, e a do polo real tende a 0. O aumento de K_c diminui a estabilidade relativa do sistema, mas não parece suficiente para provocar instabilidade estrita. A melhor combinação parece ser $K_c = 10000$ e $\alpha = 0.001$, que resulta no seguinte conjunto de autovalores: $\{-0.00100$ e $-0.00520 \pm \jmath 8.77$, para uma função de transferência do controlador $\mathcal{D}(s) = 10000 + \frac{10}{s}$, cuja implementação é perfeitamente viável.

4. ANEXOS

Os seguintes arquivos constam do anexo (arquivo **`exercmat1.zip`**):

- arquivo fonte em C **`exercmat.c`**
- arquivos fontes em MATLAB:
  - **`gerachol.m`**: problema 2
  - **`geradsis.m`**: problema 5
  - **`geraL.m`**: problema 11
- arquivos de dados:
  - S*n*: problemas 1, 3 e 4
  - C*n*: problemas 2, 7 e 8
  - D*n*: problemas 5 e 6

GLOSSÁRIO

Decomposição QR: É decomposição de uma matrz em um produto de duas matrizes, Q e R, em que Q é uma matriz ortogonal e R é uma matriz triangular superior.

***Direct Inversion in the Iterative Subspace*:** Também conhecida como **Mistura de Pulay** (*Pulay Mixing*), é uma técnica iterativa de extrapolação em que o novo valor é obtido como combinação dos vetores de erro referentes às iterações prévias, de forma a minimizar o vetor de coeficientes.

Matriz de Hessenberg: É uma matriz quase triangular, ou seja, uma matriz cujos elementos são nulos a não ser acima da diagonal imediatamente abaixo da principal (matriz de Hessenberg superior) ou abaixo da diagonal imediatamente acima da principal (matriz de Hessenberg inferior).

Matriz ortogonal: É uma matriz quadrada cujas linhas e colunas são todas vetores ortonormais.

Matriz semi-separável: É uma matriz cujo rank, considerada apenas a parte inferior até a diagonal acima da principal, é igual ou menor que 1.

***Minimal Residual*:** Método iterativo para solução de sistemas lineares simétricos e esparsos que tenta minimizar alguma norma do resíduo.

Refletor: É uma matriz cujo determinate é igual a -1.

Refletor de Householder: É um refletor que, aplicado a uma outra matriz, produz uma reflexão da mesma em torno da origem. É usado no algoritmo de decomposição QR.

SIGLAS

MINRES: *Minimal Residual*.

DIIS: *Direct Inversion in the Iterative Subspace*.

REFERÊNCIAS

[FAH 2013] Folding@home, Pande Lab, Stanford University, **FAQ: FLOPS**. Disponível em https://folding.stanford.edu/home/faq/faq-flops/, acesso em 17/03/2016.

[FASSHAUER 2006] Greg FASSHAUER, **Numerical Linear Algebra/Computational Mathematics I**: Illinois Institute of Technology, 2006. Disponível em http://www.math.iit.edu/~fass/477577_Chapter_16.pdf, acesso em 25/03/2016.

[GATR 2015] GATR Technologies, **2.4m Antenna System Datasheet**. Disponível em http://www.gatr.com/products/2-4-antenna-system, acesso em 21/03/2016.

[INTEL 2016] INTEL Corporation, **Intel 64 and IA-32 Architectures Optimization Reference Manual**, 2016, Tab. 15-3, pag. 15-9 a 15-10.

[KAWAKAMI 1989] Y. KAWAKAMI, H. HOJO e M. UEBA, **Control Design of an Antenna Pointing Control System with Large On-board Reflectors**, *in* T. NISHIMURA - Automatic Control in Aerospace 1989: Selected Papers from The IFAC Symposium.

[MOON 2008] Francis C. MOON, **Applied Dynamics: With Applications to Multibody and Mechatronic Systems**, 2nd Ed., 2008, Weinheim, Wiley-VCH, ISBN 978-3-527-40751-4, Chap. 5, pp. 228 a 231.

[NASA 1980] National Aeronautics and Space Administration, **Satellite Power System (SPS) Antenna Pointing Control**. Disponível em http://www.nss.org/settlement/ssp/library/NASACR3350-AntennaPointingControl.pdf, acesso em 21/03/2016.

[PHILLIPS 1995] Charles L. PHILLIPS e H. Troy NAGLE, **Digital Control System Analysis and Design**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1995, 3 rd Ed..

[TAMAGAWA 2016] TAMAGAWA Seiki Corporation, **TBL-iIVseries AC Servomotor**. Disponível em http://www.tamagawa-seiki.com/pdf/download/1699N1EJ_shusei.pdf, acesso em 21/03/2016.

[TERAN 2013] Joseph M. TERAN, **Applied Numerical Linear Algebra Course Notes: Week 5**: Mathematics Department, UCLA, 2013. Disponível em http://www.math.ucla.edu/~jteran/270c.1.13s/notes_wk6.pdf, acesso em 25/03/2016.

[USMANI 1994] Riaz A. USMANI, **Inversion of a Tridiagonal Jacobi Matrix**: Department of Applied Mathematics, University of Manitoba, 1994. Disponível em http://ac.els-cdn.com/0024379594904146/1-s2.0-0024379594904146-main.pdf?_tid=1dc5a5dc-f2f2-11e5-9bd3-00000aacb35f&acdnat=1458955920_5a0cc77d01e9dbdd1dfc2d1e0b8627b1, acesso em 25/03/2016.

[VANDENBERGHE 2012] L. VANDENBERGHE, **Complexity of matrix algorithms**: EE103 - Applied Numerical Computing (Fall 2011-12), UCLA. Disponível em http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/103/lectures/flops.pdf, acesso em 26/03/2016.

[VANDEBRIL 2004] Raf VANDEBRIL, **Semiseparable matrices and the symmetric eigenvalue problem**: Katholieke Universiteit Leuven, Faculteit Toegepaste Wetenschappen - Departement Computerwetenschappen, 2004. Disponível em http://www.cs.kuleuven.be/publicaties/doctoraten/tw/TW2004_03.pdf, acesso em 25/03/2016.

[WEISSTEIN 2016] Eric W. WEISSTEIN, **Positive Definite Matrix *MathWorld***. Disponível em http://mathworld.wolfram.com/PositiveDefiniteMatrix.html, acesso em 17/03/2016.

Programas testados com **Octave** 4.0.0 e **MinGW** C 4.8.2:
https://www.gnu.org/software/octave/
https://www.mingw.org
Texto formatado com **pdflatex** em ambiente **MiKTeX** 2.9:
http://miktex.org/download/