SISTEMAS E SINAIS - EXERCÍCIO VII

SÉRGIO CORDEIRO

1. Calcular a transformada de Fourier da função triangular.

A função triangular é definida como:

$$\boldsymbol{tri}(t) = \begin{cases} 1+t & -1 \le t \le 0 \\ 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

Pode-se calcular a transformada de Fourier diretamente através da definição:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{tri}(t)\, e^{-\jmath\omega t}\, dt \\ &= \int_{-1}^{0} (1+t)\, e^{-\jmath\omega t}\, dt + \int_{0}^{1} (1-t)\, e^{-\jmath\omega t}\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} e^{-\jmath\omega t}\, dt + \int_{-1}^{0} te^{-\jmath\omega t}\, dt - \int_{0}^{1} te^{-\jmath\omega t}\, dt \qquad (1) \end{aligned}$$

A integral indefinida

$$\int te^{at}\, dt$$

pode ser obtida através da técnica de integração por partes:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

fazendo-se

$$\begin{array}{ccc} u = t & \Longrightarrow & du = dt \\ dv = e^{at}\, dt & & v = \frac{1}{a}e^{at} \end{array}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \int t\, e^{at}\, dt &= t\, \frac{1}{a}e^{at} - \int \frac{1}{a}e^{at}\, dt \\ &= \frac{1}{a}\, e^{at} \left(t - \frac{1}{a}\right) \qquad (2) \end{aligned}$$

Com base na equação 2, a equação 1 se torna:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\omega) &= \frac{1}{a} e^{at}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{a}\, e^{at}\, \left(t - \frac{1}{a}\right)\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{a}\, e^{at}\, \left(t - \frac{1}{a}\right)\Big|_{0}^{1} \qquad \boxed{a = -\jmath\omega} \\
&= \frac{1}{a}\left(e^{a} - e^{-a}\right) + \frac{1}{a}\left(1 \cdot \left[0 - \frac{1}{a}\right] - e^{-a}\, \left[-1 - \frac{1}{a}\right]\right) - \frac{1}{a}\left(e^{a}\, \left[1 - \frac{1}{a}\right] - 1 \cdot \left[0 - \frac{1}{a}\right]\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(e^{a} - e^{-a} - \frac{1}{a} + e^{-a}\, \left[1 + \frac{1}{a}\right] - e^{a}\, \left[1 - \frac{1}{a}\right] - \frac{1}{a}\right) \\
&= \frac{1}{a^2}\left(-2 + e^{-a} + e^{a}\right) \\
&= \frac{1}{[-\jmath\omega]^2}\left(-2 + e^{-\jmath\omega} + e^{\jmath\omega}\right) \\
&= \frac{2}{\omega^2}\left(1 - \cos(\omega)\right) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

A transformada pode também ser calculada através da propriedade da convolução, reconhecendo-se que:

$$\boldsymbol{tri}(t) = \boldsymbol{rect}(t) * \boldsymbol{rect}(t)$$

onde $\boldsymbol{rect}(t)$ é a função retangular, cuja transformada é conhecida:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\boldsymbol{rect}(t)\} &= \boldsymbol{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} \\
&= \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Pela propriedade da convolução

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\}\,\mathcal{F}\{g(t)\} \qquad \Longrightarrow \mathcal{F}\{\boldsymbol{tri}(t)\} &= \mathcal{F}\{\boldsymbol{rect}(t)\}\,\mathcal{F}\{\boldsymbol{rect}(t)\} \\
&= \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&= \frac{4}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Para demonstrar que as equações 3 e 4 são equivalentes, pode-se lançar mão da identidade $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$ e escrever:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\omega^2}\Big(1 - \cos(\omega)\Big) &= \frac{2}{\omega^2}\left(1 - \left[1 - 2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]\right) \\
&= \frac{2}{\omega^2}\left(2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) \\
&= \frac{4}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}$$

Texto formatado com **pdflatex** em ambiente **MiKTeX** 2.9:
`http://miktex.org/download/`