SISTEMAS E SINAIS - EXERCÍCIO VI

SÉRGIO CORDEIRO

1. Verificar como calcular série de Fourier e transformada de Fourier no MATLAB (simbólica e numérica).

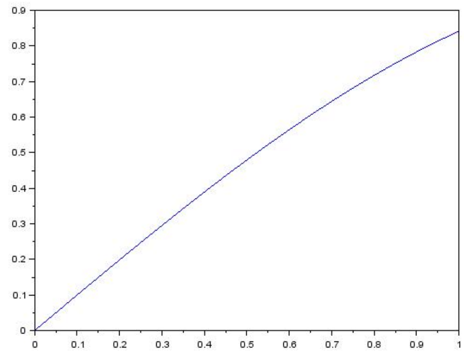
A função **fft** calcula a transformada discreta de Fourier (DFT) a partir de uma tabela de valores dada. A DFT é a versão discreta da série de Fourier. Exemplo:

```
dft = fft(y);
```

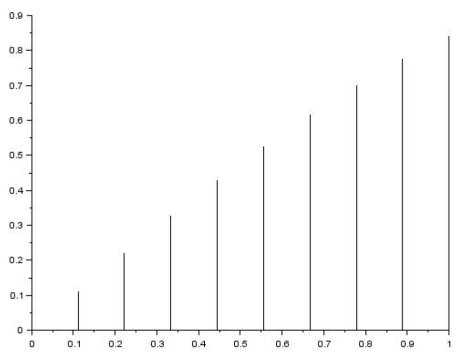
A saída é um espectro completo, portanto redundante. Para obter-se o espectro apenas para $\omega > 0$, seleciona-se a primeira metade dos valores. Exemplo:

```
len = size(dft, 2) / 2;
espectro = dtf(1:len);
```

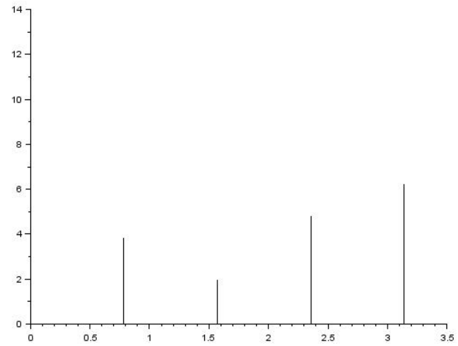
Os valores são complexos. Para plotar os gráficos de módulo e ângulo em função de ω, deve-se extrair a informação por meio de funções como **abs** e **arg**. O processo está ilustrado nos gráficos abaixo:
Os gráficos de resposta em frequência são os seguintes:



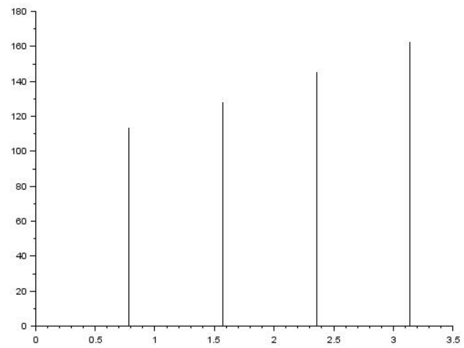
Função $y = sin(t)\left[\ \boldsymbol{u}\,(t) - \boldsymbol{u}\,(t-1)\right]$



Amostras de $y(t)$



$|H(\omega)|$



$\underline{/H}(\omega)$

A função **`fit`** calcula os coeficientes da série trigonométrica de Fourier que melhor se ajusta a uma tabela de valores dada; deve-se informar ainda o número de termos a ser usado. Exemplo:

```
coef = fit(x, y, 'fourier8');
```

Os valores obtidos, neste caso são reais, se a função de entrada for real. Os primeiros valores são os coeficientes a_0 a a_n, e os últimos, os coeficientes b_n. Em todos os casos acima, os valores de entrada devem corresponder a exatamente um período do sinal.
Se se desejar uma expressão analítica para a transformada de Fourier, pode-se empregar a função **`fourier`**:

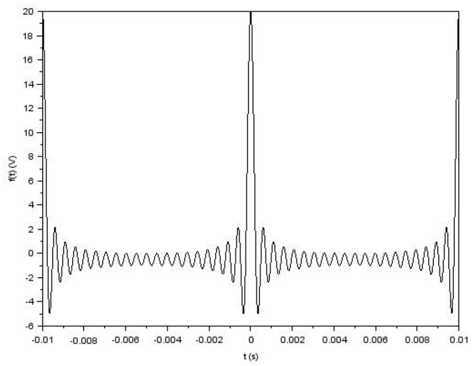
```
syms x;
fourier(sin(x));
```

2. Reproduzir o exemplo M.6.2 (página 587).

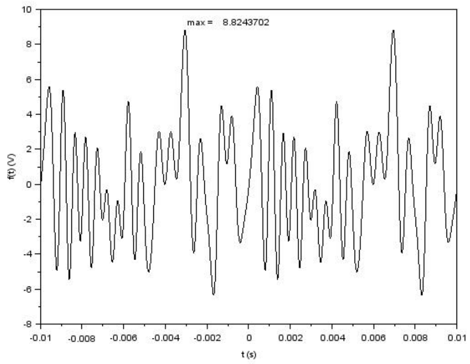
O problema consiste em gerar um sinal contendo componentes sempre nas mesmas frequências ω_n, com amplitudes constantes, mas diferentes valores para os ângulos de fase $theta_n$. O sinal gerado terá formas diversas, dependendo da escolha dos ângulos de fase; por conseguinte, também variará a amplitude máxima atingida pelo sinal.
As situações simuladas foram as seguintes:

1. Ângulos nulos para todas as componentes ($theta_n = 0$)
2. Ângulos aleatórios
3. Ângulos aleatórios, mas usando-se uma semente diferente para o gerador de números aleatórios
4. Ângulos otimizados

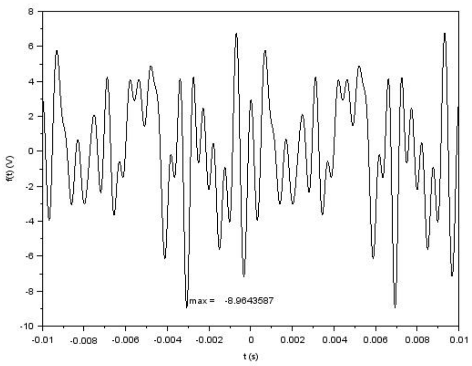
A otimização significa obter valores de $theta_n$ que minimizem a amplitude máxima atingida pelo sinal. Essa situação é desejável para que se obtenha a melhor relação sinal-ruído possível para análise em todas as frequências.
Os gráficos resultantes são os seguintes:



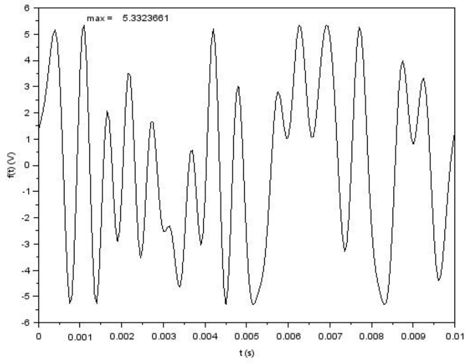
Para $\theta_n = 0$



Para θ_n aleatório (semente = 0)



Para θ_n aleatório (semente = 1)



Para θ_n otimizado

Os sinais gerados podem ser prolongados no tempo por alguns segundos e então ouvidos; a diferença entre eles é facilmente perceptível.

3. Resolver os exercícios 6.5.8 e 6.5.9.

a) O exercício 6.5.8 consiste em encontrar os dois primeiros coeficientes não nulos da série de Fourier baseada em polinômios de Legendre, bem como calcular a energia do erro na aproximação, para as duas funções:

$$f_A(t) = \begin{cases} 1 & -1 < t < 0 \\ -1 & 0 < t < 1 \end{cases} \tag{1}$$

$$f_B(t) = \begin{cases} 1 & -\pi < t < 0 \\ -1 & 0 < t < \pi \end{cases} \tag{2}$$

O período de $f_A(t)$ é igual a 2. Como a função é ímpar, os coeficientes pares serão nulos. Os primeiros polinômios de Legendre ímpares são:

$$\boldsymbol{P_L}^{(1)}(t) = t$$

$$\boldsymbol{P_L}^{(3)}(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$$

Os coeficientes são, então:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} f_A(t)\ \boldsymbol{P_L}^{(1)}(t)\ dt \\
&= \frac{1}{2}\left\{\int_{-1}^{0} 1\cdot t\ dt + \int_{0}^{1} -1\cdot t\ dt\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{0} - \left.\frac{t^2}{2}\right|_{0}^{1}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right\} \\
&= -1 \\
c_3 &= \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} f_A(t)\ \boldsymbol{P_L}^{(3)}(t)\ dt \\
&= \frac{1}{2}\left\{\int_{-1}^{0} 1\cdot \frac{1}{2}(5t^3-3t)\ dt + \int_{0}^{1} -1\cdot \frac{1}{2}(5t^3-3t)\ dt\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{\left.\frac{5t^4}{4}\right|_{-1}^{0} - \left.\frac{3t^2}{2}\right|_{-1}^{0} - \left.\frac{5t^4}{4}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{3t^2}{2}\right|_{-1}^{0}\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{-\frac{5}{4} + \frac{3}{2} - \frac{5}{4} + \frac{3}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Assim:

$$
\begin{aligned}
f_A(t) &\approx \tilde{f}_A(t) \\
&= c_1\ \boldsymbol{P_L}^{(1)}(t) + c_3\boldsymbol{P_L}^{(3)}(t) \\
&= -1\cdot t + \frac{1}{8}\ \frac{1}{2}(5t^3-3t) \\
&= \frac{1}{16}(5t^3-19t)
\end{aligned}
$$

O erro é dado por:

$$
\begin{aligned}
e(t) &= f_A(t) - \tilde{f}_A(t) \\
&= f_A(t) - \frac{1}{16}(5t^3-19t)
\end{aligned}
$$

e sua energia, por:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}\left\{ e(t)\right\} &= \int_{-\infty}^{-\infty} |e(t)|^2 \; dt \\
&= \int_{-1}^{1} e(t)^2 \; dt \\
&= \int_{-1}^{0} \left(1 - \frac{1}{16}(5t^3 - 19t)\right)^2 \; dt + \int_{0}^{1} \left(-1 - \frac{1}{16}(5t^3 - 19t)\right)^2 \; dt \\
&= \int_{-1}^{0} \left(1 - \frac{1}{8}(5t^3 - 19t) + \frac{1}{256}(5t^3 - 19t)^2\right) \; dt + ... \\
&\qquad ... + \int_{0}^{1} \left(1 + \frac{1}{8}(5t^3 - 19t) + \frac{1}{256}(5t^3 - 19t)^2\right) \; dt \\
&= \int_{-1}^{1} \left(1 + \frac{1}{256}(5t^3 - 19t)^2\right) \; dt - \int_{-1}^{0} \frac{1}{8}(5t^3 - 19t) \; dt + \int_{0}^{1} \frac{1}{8}(5t^3 - 19t) \; dt \\
&= \int_{-1}^{1} \left(1 + \frac{1}{256}(25t^6 - 190t^4 + 361t^2)\right) \; dt - \int_{-1}^{0} \frac{1}{8}(5t^3 - 19t) \; dt + ... \\
&\qquad ... + \int_{0}^{1} \frac{1}{8}(5t^3 - 19t) \; dt \\
&= \; t\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{256}\left(\frac{25t^7}{7} - \frac{38t^5}{5} + \frac{361t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{8}\left(\frac{5t^4}{4} - \frac{19t^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + ... \\
&\qquad ... + \frac{1}{8}\left(\frac{5t^4}{4} - \frac{19t^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{256}\left(\frac{25}{7} + \frac{25}{7} - \frac{38}{5} - \frac{38}{5} + \frac{361}{3} + \frac{361}{3}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{5}{4} + \frac{19}{2}\right) + ... \\
&\qquad ... + \frac{1}{8}\left(\frac{5}{4} - \frac{19}{2}\right) \\
&= 0.846
\end{aligned}
$$

Uma maneira alternativa de calcular a energia do erro é pela fórmula:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}\left\{ e(t) \right\} &= \mathcal{E}\left\{ f_A(t) \right\} - \mathcal{E}\left\{ \tilde{f}_A(t) \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{-\infty} |f_A(t)|^2 \, dt - \int_{-\infty}^{-\infty} |\tilde{f}_A(t)|^2 \, dt \\
&= \int_{-1}^{1} f_A(t)^2 \, dt - \int_{1}^{1} \tilde{f}_A(t)^2 \, dt \\
&= \int_{-1}^{1} 1 \, dt - \int_{1}^{1} \frac{1}{256}(5t^3 - 19t)^2 \, dt
\end{aligned}
$$

A função $f_B(t)$ pode ser escrita como $f_A\left(\frac{t}{\pi}\right)$. Sua aproximação, portanto, será:

$$
\begin{aligned}
f_B(t) \frac{1}{16} &\left(5 \left[\frac{t}{\pi} \right]^3 - 19 \left[\frac{t}{\pi} \right] \right) \\
&= \frac{1}{16\pi^3} \left(5t^3 - 19\pi^2 t \right)
\end{aligned}
$$

---

b) O exercício 6.5.9 consiste em encontrar os quatro primeiros coeficientes da série de Fourier baseada em funções de Walsh, bem como calcular a energia do erro na aproximação, para a função:

(3) $\qquad f(t) = t0 < t < 1$

O período da função é igual a 1; portanto, os coeficientes são:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{T}\int_0^1 f(t)\ \boldsymbol{W}^{(1)}(t)\ dt \\
&= \int_0^1 t\cdot 1\ dt \\
&= \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \\
c_2 &= \frac{1}{T}\int_0^1 f(t)\ \boldsymbol{W}^{(2)}(t)\ dt \\
&= \int_0^{0.5} t\cdot 1\ dt + \int_{0.5}^1 t\cdot -1\ dt \\
&= \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{0.5} - \left.\frac{t^2}{2}\right|_{0.5}^1 \\
&= \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) \\
&= -\frac{1}{4} \\
c_3 &= \frac{1}{T}\int_0^1 f(t)\ \boldsymbol{W}^{(3)}(t)\ dt \\
&= \int_0^{0.25} t\ dt - \int_{0.25}^{0.75} t\ dt + \int_{0.75}^1 t\ dt \\
&= \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{0.25} - \left.\frac{t^2}{2}\right|_{0.25}^{0.75} + \left.\frac{t^2}{2}\right|_{0.75}^1 \\
&= \frac{1}{32} - \frac{9}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{2} - \frac{9}{32} \\
&= 0 \\
c_4 &= \frac{1}{T}\int_0^1 f(t)\ \boldsymbol{W}^{(4)}(t)\ dt \\
&= \int_0^{0.25} t\ dt - \int_{0.25}^{0.5} t\ dt + \int_{0.5}^{0.75} t\ dt - \int_{0.75}^1 t\ dt \\
&= \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{0.25} - \left.\frac{t^2}{2}\right|_{0.25}^{0.5} + \left.\frac{t^2}{2}\right|_{0.5}^{0.75} - \left.\frac{t^2}{2}\right|_{0.75}^1 \\
&= \frac{1}{32} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{9}{32} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{9}{32} \\
&= -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Assim:

$$
\begin{aligned}
f(t) &\approx \tilde{f}(t) \\
&= c_1\,\boldsymbol{W}^{(1)}(t) + c_2\,\boldsymbol{W}^{(2)}(t) + c_3\,\boldsymbol{W}^{(3)}(t) + c_4\,\boldsymbol{W}^{(4)}(t) \\
&= \begin{cases} c_1 + c_2 + c_4 & 0 < t < 0.25 \\ c_1 + c_2 - c_4 & 0.25 < t < 0.5 \\ c_1 - c_2 + c_4 & 0.5 < t < 0.75 \\ c_1 - c_2 - c_4 & 0.75 < t < 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{8} & 0 < t < 0.25 \\ \frac{3}{8} & 0.25 < t < 0.5 \\ \frac{5}{8} & 0.5 < t < 0.75 \\ \frac{7}{8} & 0.75 < t < 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

A energia do erro é dada por:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}\Big\{\, e(t) \Big\} &= \mathcal{E}\Big\{\, f(t) \Big\} - \mathcal{E}\Big\{\, \tilde{f}(t) \Big\} \\
&= \int_{-\infty}^{-\infty} |f(t)|^2\, dt - \int_{-\infty}^{-\infty} |\tilde{f}(t)|^2\, dt \\
&= \int_0^1 f_A(t)^2\, dt - \int_0^1 \tilde{f}(t)^2\, dt \\
&= \int_0^1 t^2\, dt - \int_0^{0.25} \left(\frac{1}{8}\right)^2 dt - \int_{0.25}^{0.5} \left(\frac{3}{8}\right)^2 dt - \int_{0.5}^{0.75} \left(\frac{5}{8}\right)^2 dt - \int_{0.75}^{1} \left(\frac{7}{8}\right)^2 dt \\
&= \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 - \left.\frac{t}{64}\right|_0^{0.25} - \left.\frac{9t}{64}\right|_{0.25}^{0.5} - \left.\frac{25t}{64}\right|_{0.25}^{0.5} - \left.\frac{49t}{64}\right|_{0.75}^{1} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{256} - \frac{9}{256} - \frac{25}{256} - \frac{49}{256} \\
&= 0.00521
\end{aligned}
$$

Simulação realizada com **Scilab** 5.5.2:
`https://www.scilab.org`
Texto formatado com **pdflatex** em ambiente **MiKTeX** 2.9:
`http://miktex.org/download/`