SISTEMAS E SINAIS - EXERCÍCIO I

SÉRGIO CORDEIRO

1. Mostrar que o sistema descrito pela equação abaixo é linear, invariante no tempo e causal:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 3\frac{dx}{dt} + x \tag{1}$$

a) **Linearidade**

Sejam y_1 e y_2 as respostas do sistema aos dois sinais de entrada x_1 e x_2, respectivamente. Nesse caso, teremos:

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + 5\frac{dy_1}{dt} + 6y_1 = 3\frac{dx_1}{dt} + x_1 \tag{2}$$

e

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} + 5\frac{dy_2}{dt} + 6y_2 = 3\frac{dx_2}{dt} + x_2 \tag{3}$$

Seja x_3 uma combinação linear de x_1 e x_2. Podemos escrever:

$$x_3 = ax_1 + bx_2 \qquad \boxed{a, b \in \mathbb{R}} \tag{4}$$

A resposta y_3 do sistema será, então:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y_3}{dt^2} + 5\frac{dy_3}{dt} + 6y_3 &= 3\frac{dx_3}{dt} + x_3 \\
&= 3\frac{d}{dt}(ax_1 + bx_2) + (ax_1 + bx_2) \\
&= 3\frac{d(ax_1)}{dt} + 3\frac{d(bx_2)}{dt} + ax_1 + bx_2 \\
&= a\left(3\frac{dx_1}{dt} + x_1\right) + b\left(3\frac{dx_2}{dt} + bx_2\right) \qquad (5)
\end{aligned}$$

De acordo com 2 e 3, 5 se torna:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y_3}{dt^2}+5\frac{dy_3}{dt}+6y_3 &= a\left(\frac{d^2y_1}{dt^2}+5\frac{dy_1}{dt}+6y_1\right)+b\left(\frac{d^2y_2}{dt^2}+5\frac{dy_2}{dt}+6y_2\right)\\ &= \frac{d^2}{dt^2}(ay_1+by_2)+5\frac{d}{dt}(ay_1+by_2)+6(ay_1+by_2)\\ &\implies y_3=ay_1+by_2\end{aligned}$$

Ou seja, a resposta do sistema a uma combinação linear de diferentes sinais de entrada é a combinação linear das respostas a cada um desses sinais.

---

b) **Invariância no tempo**

A resposta y a um impulso $\boldsymbol{\delta}(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y &= 3\frac{d}{dt}\boldsymbol{\delta}(t)+\boldsymbol{\delta}(t)\\ &= 3\,\dot{\boldsymbol{\delta}}(t)+\boldsymbol{\delta}(t)\end{aligned}\tag{6}$$

Seja $x_1=\boldsymbol{\delta}(t-a)$ uma entrada aplicada em $t=a,\ a\in\mathbb{R}$. A resposta do sistema a essa entrada será:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y_1}{dt^2}+5\frac{dy_1}{dt}+6y_1 &= 3\frac{dx_1}{dt}+x_1\\ &= 3\,\dot{\boldsymbol{\delta}}(t-a)+\boldsymbol{\delta}(t-a)\end{aligned}$$

Fazendo $\tau=t-a$, então $d\tau=dt$ e teremos:

$$\frac{d^2y_1}{d\tau^2}+5\frac{dy_1}{d\tau}+6y_1=3\,\dot{\boldsymbol{\delta}}(\tau)+\boldsymbol{\delta}(\tau)\tag{7}$$

7 indica que y_1 tem a mesma forma de y, estando apenas deslocada no eixo do tempo pela quantidade a.

---

c) **Causalidade**
Seja $x = 0 \; \forall t < a, \; a \in \mathbb{R}$. Nesse caso, considerando-se condições iniciais nulas ($y(0) = \dot{y}(0) = 0$), a saída em $t < a$ será:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

$$\implies y = 0 \; \forall t < a$$

Assim, o sistema é causal, pois a saída é nula antes de o sinal de entrada ser aplicado.

2. Demonstrar as propriedades $\mathfrak{P}3$ e $\mathfrak{P}4$ da Transformada de Laplace.

a) Propriedade $\mathfrak{P}3$ (deslocamento na frequência):
Seja $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$ e $g(t) = e^{\alpha t} f(t),\ \alpha \in \mathbb{Z}$. Então:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{e^{\alpha t} f(t)\right\} \\
&= \int_0^\infty e^{\alpha t} f(t) e^{-st}\, dt \\
&= \int_0^\infty f(t) e^{-(s-\alpha)t}\, dt \\
&= \int_0^\infty f(t) e^{-zt}\, dt \qquad\qquad \boxed{z = s - a} \\
&= F(z)\big|_{z=s-a} \\
&= F(s-a)
\end{aligned}$$

---

b) Propriedade $\mathfrak{P}4$ (derivada):
Seja $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$ e $g(t) = \frac{d}{dt} f(t)$. Então:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} \\
&= \int_0^\infty \left[\frac{d}{dt} f(t)\right] e^{-st}\, dt \qquad (8)
\end{aligned}$$

Usando a técnica de integração por partes:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\begin{array}{rcccrcl}
u &=& e^{-st} & \Longrightarrow & du &=& -s\, e^{-st}\, dt \\
dv &=& \frac{d}{dt} f(t)\, dt & \Longrightarrow & v &=& f(t)
\end{array}$$

$$\therefore \begin{array}{rcl} uv &=& e^{-st} f(t) \\ v\, du &=& -se^{-st}\, f(t)\, dt \end{array} \qquad (9)$$

Substituindo 9 em 8, teremos:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left[\frac{d}{dt}f(t)\right] e^{-st}\, dt &= \left[e^{-st}f(t)\right]\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st}\, f(t)\, dt \\
&= [0 - f(0)] + s\int_0^\infty e^{-st}\, f(t)\, dt \qquad \boxed{\Re\{s\} > 0} \\
&= sF(s) - f(0)
\end{aligned}$$