

TEORIA ELETROMAGNÉTICA - LISTA DE EXERCÍCIOS III

SÉRGIO CORDEIRO

PARTE 1

1. Para o problema do indutor impresso apresentado em sala, calcule a indutância e faça um estudo da influência dos seguintes parâmetros no valor da indutância: número de espiras, espessura da trilha, espaçamento entre espiras, tamanho de área aberta no centro do indutor.

Na solução do problema foram empregados dois métodos diferentes:

- 1) somaram-se as contribuições δL_i de cada um dos n condutores existentes na placa

$$L = \sum_{i=1}^n \delta L_i,$$

considerando-se tanto a indutância própria quanto a mútua com os demais condutores.

- 2) calculou-se o fluxo magnético Φ criado pelo indutor na placa, quando percorrido por uma corrente arbitrária I , e dividiu-se o valor encontrado pelo módulo da corrente

$$L = \frac{\Phi}{I}.$$

Para que o primeiro método funcione, os condutores devem ser compridos e estritos o suficiente para que o efeito das bordas possa ser desprezado e a seção do condutor, que é retangular, possa ser aproximada por um círculo. Neste caso, pode-se lançar mão de expressões conhecidas, derivadas teoricamente, para as indutâncias próprias e mútuas por unidade de comprimento de um par de condutores cilíndricos paralelos. Assim, a indutância total δL_i , a indutância própria δL_i^p e as indutâncias

mútuas $\delta L_{i,k}^m$ podem ser obtidas pelas fórmulas:

$$\begin{aligned}\delta L_i &= \delta L_i^p + \sum_{k=i+1}^n \delta L_{i,k}^m \\ \delta L_i^p &= \frac{\mu I \ell_i}{8\pi} \\ \delta L_{i,k}^m &= \frac{\mu I \ell_{i,k}}{\pi} \ln \left[\frac{d-a}{a} \right]\end{aligned}$$

onde ℓ_i é o comprimento do condutor, $\ell_{i,k}$ é o comprimento equivalente do par de condutores, d é a distância entre eles e a é o raio do condutor.

Consideramos sempre $\ell_{i,k} = \min(\ell_i, \ell_k)$ e $a = \frac{W}{2}$ no nosso cálculo.

Como $\mu = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, $I = 1 \text{ A}$ e as dimensões são em mm, as fórmulas acima podem ser reescritas como:

$$\delta L_i = \frac{k_\mu \ell_i}{2} + 4k_\mu \min(\ell_i, \ell_k) \ln \left[\frac{2d}{W} - 1 \right]$$

com $k_\mu = 10^{-4} \mu \text{H/mm}$. A indutância será calculada em μH .

As aproximações usadas tendem a fazer a indutância estimada ser maior do que ela é na realidade.

No segundo método, o fluxo magnético total foi estimado a partir da densidade de fluxo magnético B em cada ponto da placa

$$\Phi = \int_S B \, dS$$

onde S é a superfície da placa. Este, por sua vez, foi calculado conforme a lei de Biot-Savart, como a integral de linha

$$B(x, y) = \oint_C \frac{\mu I \, dl \, \sin \theta}{4\pi R^2}$$

onde R é a distância do elemento de corrente dl ao ponto (x, y) , e θ é o ângulo entre \vec{dl} e \vec{R} .

As integrais são aproximadas por somas discretas, com $dl = 1 \text{ mm}$ e

$I = 1A$. Assim, as fórmulas usadas foram:

$$dB_{i,k} = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m k_{\mu} \sin \theta_{(i,k),(p,q)} R_{(i,k),(p,q)}^{-2}$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m dB_{i,k}$$

onde m é a largura da placa, em mm.

O segundo método demanda maior esforço computacional, mas é mais genérico, podendo ser usado com geometrias diversas.

A função responsável pelo cálculo encontra-se a seguir. A geometria do indutor foi escolhida de forma a que os condutores formassem espiras regulares; assim, um dos parâmetros de entrada é o número de espiras (N), não o número de condutores.

LISTING 1. probtrack.m

```

1 function L = probtrack(ne, d, W, a)
2 %{
3 Retorna a indutância de um indutor plano composto por espiras quadradas concêntricas:
4   ne: número de espiras
5   d: distância entre as espiras (mm)
6   W: largura das trilhas (mm)
7   a: tamanho do lado da placa (mm)
8 Limitações:
9   o tratamento dos cantos das trilhas não está perfeito,
10  despreza componentes do fluxo magnético tangenciais à placa,
11  as susceptibilidades da fenolite e do cobre foram consideradas iguais a 1.
12 %{
13 % Constantes
14 kmu = 1e-4; % uH/mm
15 % Cria as trilhas
16 placa = zeros(a+1,a+1);
17 cond = zeros(4 * ne, 3);
18 for i = 1:ne
19   % Calcula as características da espira
20   lado = a - 2 * (i - 1) * (W + d);
21   gapx = (i + 1) * (W + d) - 1;
22   inicio = 1 + (i - 1) * (W + d);
23   % Desenha a espira
24   placa(inicio:inicio+lado-1, inicio:inicio+W-1) = 101;
25   placa(gapx, inicio:inicio+W-1) = 0;
26   if ne > i
27     placa(gapx+1:gapx+W*d-1, inicio+W: inicio+W*d-1) = 99;
28   end
29   placa(a-inicio-W+2:a-inicio+1, inicio:inicio+lado-1) = 100;
30   placa(inicio:inicio+lado-1, a-inicio-W+2:a-inicio+1) = 103;
31   placa(inicio:inicio+W-1, inicio:inicio+lado-1) = 102;
32   % Armazena as características de cada condutor
33   %[lado, direção, posição]
34   ncond = (i - 1) * 4 + 1;
35   cond(ncond:ncond+3,1) = lado;
36   cond(ncond:ncond+3,2) = [101 100 103 102];

```

```

37     cond(ncond:ncond+3,3) = [inicio+W/2, a-inicio+W/2, a-inicio+W/2, inicio+W/2];
38 end
39 % Mostra as trilhas
40 pcolor(placa);
41 shading flat;
42 % Calcula a indutância
43 % Primeiro método:
44 % Soma a indutância correspondente a cada condutor
45 B1 = 0;
46 for i = 1:(4 * ne)
47     l1 = cond(i,1);
48     d1 = cond(i,2);
49     p1 = cond(i,3);
50     % Indutâncias mútuas com os condutores restantes
51     for j = (i+1):(4*ne)
52         l2 = cond(j,1);
53         d2 = cond(j,2);
54         p2 = cond(j,3);
55         if (mod(d1,2) ~= mod(d2,2)) || (d1 == d2)
56             continue
57         end
58         dist = abs(p2 - p1);
59         l = min(l2, l1);
60         dLp = 4 * l * log(2 * dist / W - 1);
61         B1 = B1 + dLp;
62     end
63     % Indutância própria
64     dLp = l1 * 0.5;
65     B1 = B1 + dLp;
66 end
67 % Segundo método:
68 % Calcula a densidade de fluxo magnético em cada ponto {i,k} da placa
69 % considera a circulação de uma corrente de 1 A em cada elemento {ii,kk}
70 % assim, em cada condutor circulará uma corrente proporcional a W.
71 B2 = 0;
72 for i = 1:a
73     for k = 1:a
74         for ii = 1:a
75             for kk = 1:a
76                 direcao = placa(ii,kk) - 100;
77                 if direcao < 0
78                     continue
79                 end
80                 % Circula corrente neste ponto
81                 R = [i k] - [ii kk];
82                 dist2 = sum(R .* R);
83                 if dist2 == 0
84                     continue
85                 end
86                 switch direcao
87                     case 0
88                         dB = - R(1) / dist2^1.5;
89                     case 1
90                         dB = R(2) / dist2^1.5;
91                     case 2
92                         dB = R(1) / dist2^1.5;
93                     case 3
94                         dB = - R(2) / dist2^1.5;
95                 end

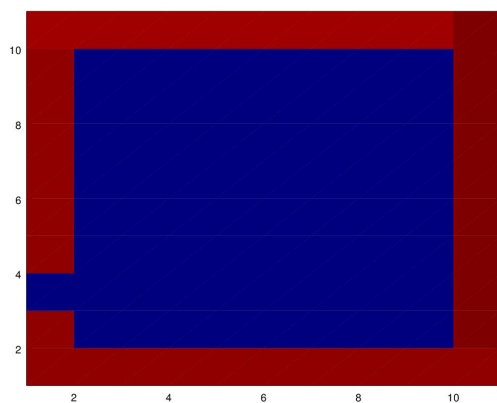
```

```

96      % Considera apenas o fluxo concatenado, que será sempre positivo nas condições
      do problema
97      if (dB > 0)
98          B2 = B2 + dB;
99      end
100     end
101     end
102     end
103 end
104 % Calcula a indutância
105 L2 = kmu * B2 / W;
106 L1 = kmu * B1;
107 disp(sprintf("Ne = %d, W = %d mm, d = %d mm, L1 = %f uH, L2 = %f uH", ne, W, d, L1, L2)
108 );
L = L1;

```

A seguir, alguns exemplos de indutores e resultados obtidos. O índice indica o método empregado para cálculo da indutância.

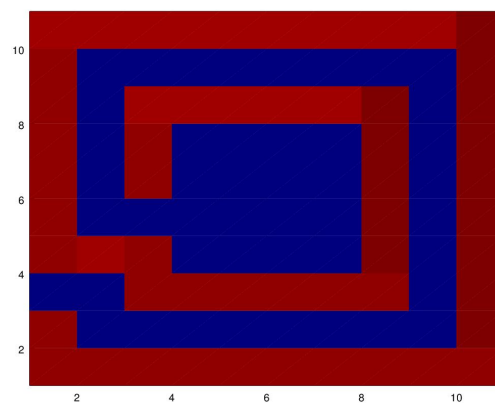


$N = 1$

$W = 1 \text{ mm}, d = 1 \text{ mm}, h = 10 \text{ mm}$

$L^{(1)} = 0.024 \text{ } \mu\text{H}$

$L^{(2)} = 0.015 \text{ } \mu\text{H}$

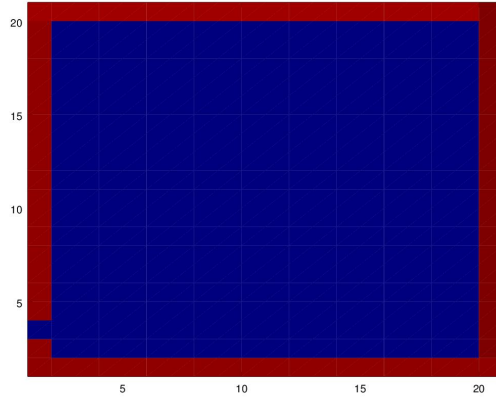


$N = 2$

$W = 1 \text{ mm}, d = 1 \text{ mm}, h = 10 \text{ mm}$

$L^{(1)} = 0.057 \text{ } \mu\text{H}$

$L^{(2)} = 0.024 \text{ } \mu\text{H}$

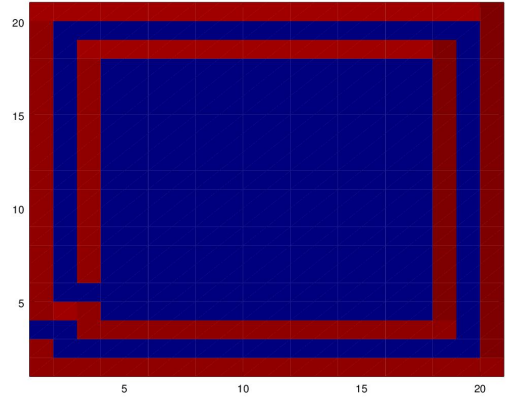


$$N = 1$$

$$W = 1 \text{ mm}, d = 1 \text{ mm}, h = 20 \text{ mm}$$

$$L^{(1)} = 0.061 \text{ } \mu\text{H}$$

$$L^{(2)} = 0.043 \text{ } \mu\text{H}$$

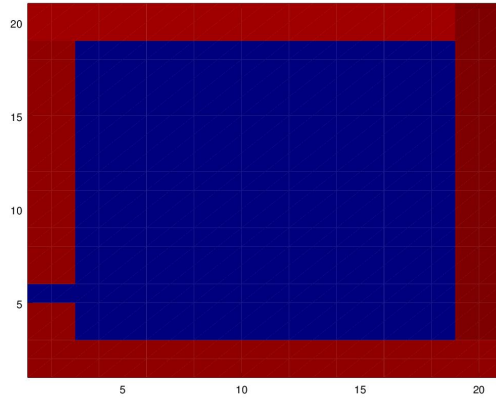


$$N = 2$$

$$W = 1 \text{ mm}, d = 1 \text{ mm}, h = 20 \text{ mm}$$

$$L^{(1)} = 0.19 \text{ } \mu\text{H}$$

$$L^{(2)} = 0.088 \text{ } \mu\text{H}$$

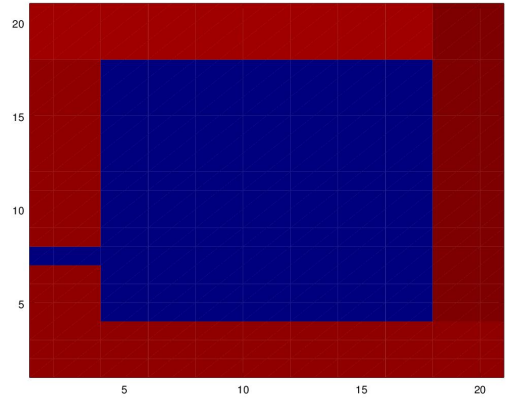


$$N = 1$$

$$W = 2 \text{ mm}, d = 1 \text{ mm}, h = 20 \text{ mm}$$

$$L^{(1)} = 0.049 \text{ } \mu\text{H}$$

$$L^{(2)} = 0.041 \text{ } \mu\text{H}$$

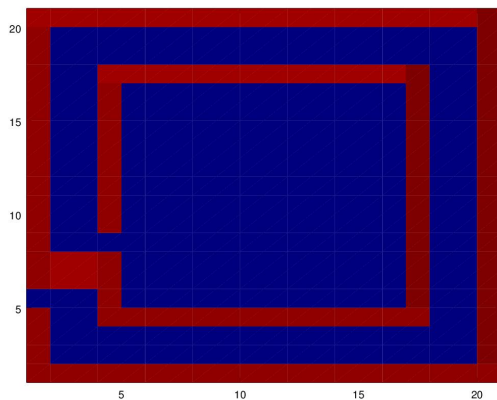


$$N = 1$$

$$W = 3 \text{ mm}, d = 1 \text{ mm}, h = 20 \text{ mm}$$

$$L^{(1)} = 0.042 \text{ } \mu\text{H}$$

$$L^{(2)} = 0.039 \text{ } \mu\text{H}$$

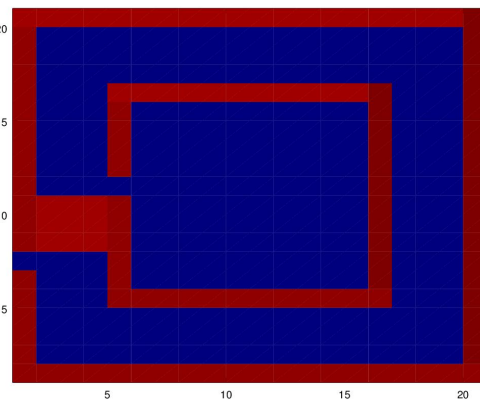


$$N = 2$$

$$W = 1 \text{ mm}, d = 2 \text{ mm}, h = 20 \text{ mm}$$

$$L^{(1)} = 0.17 \text{ } \mu\text{H}$$

$$L^{(2)} = 0.073 \text{ } \mu\text{H}$$



$$N = 2$$

$$W = 1 \text{ mm}, d = 3 \text{ mm}, h = 20 \text{ mm}$$

$$L^{(1)} = 0.15 \text{ } \mu\text{H}$$

$$L^{(2)} = 0.068 \text{ } \mu\text{H}$$

Os exemplos mostram que a indutância aumenta com o número de espiras e com o tamanho da placa e diminui com a espessura da trilha, a distância entre as trilhas e com o espaço vazio deixado no centro do indutor. No entanto, os resultados dos dois métodos não coincidem com boa aproximação. O primeiro método provavelmente é superior para h e N grandes e d e W pequenos, caso em que as aproximações empregadas são boas, porque o cálculo é menos intensivo.

Um indutor foi construído com as características seguintes: $N = 3$, $W = d = 10 \text{ mm}$, $h = 150 \text{ mm}$. A indutância medida em laboratório foi $1.34 \text{ } \mu\text{H}$; a calculada pelo programa foi $2.1 \text{ } \mu\text{H}$ pelo primeiro método e $1.2 \text{ } \mu\text{H}$ pelo segundo.
