

ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO POR UMA ESFERA CONDUTORA ELÉTRICA PERFEITA

SÉRGIO CORDEIRO

RESUMO. O presente trabalho versa sobre a determinação dos campos no entorno de uma esfera condutora perfeita, localizada no espaço livre, sobre a qual incide uma onda eletromagnética viajante plana; sob essas condições ideais, soluções analíticas podem ser encontradas. Para tal geometria do problema, essas soluções envolvem funções transcendentais: as conhecidas funções de Bessel e Hankel esféricas.

Os conceitos e derivações menos comuns são apresentados em detalhe; para os mais comuns remete-se à bibliografia de referência. Este trabalho complementa o anterior, "*Espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor elétrico perfeito*", no qual se encontram as derivações mais básicas.

SUMÁRIO

1. Introdução	2
2. Equações de Maxwell em coordenadas esféricas	3
2.1. Forma das equações para o problema proposto	3
2.2. Forma das equações em coordenadas esféricas	3
3. Solução do problema	4
3.1. Solução das equações	4
3.2. Implementação	8
3.3. Análise dos resultados	10
Referências	16

1. INTRODUÇÃO

As equações de Maxwell¹:

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$(4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

podem ser manipuladas de forma a obter-se um conjunto de equações de onda vetoriais:

$$(5) \quad \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$(6) \quad \vec{\nabla}^2 \vec{H} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Ambos os conjuntos consistem de equações diferenciais parciais, por isso a forma da solução é determinada também pelas *condições de contorno*, que variam de problema para problema. Em casos mais simples, pode-se obter uma solução analítica; nos demais, é necessário recorrer a métodos numéricos e, em consequência, a solução obtida estará em forma de sequências de valores. No presente trabalho, estudaremos a configuração dos campos no entorno de uma esfera condutora perfeita sobre a qual incide uma onda eletromagnética viajante plana, no espaço livre; sob essas condições ideais, soluções analíticas podem ser encontradas [BALANIS 2012 1].

Tanto 1 a 4 quanto 5 a 6 são úteis em aplicações práticas. A opção entre os dois conjuntos é uma questão de conveniência, o que por sua vez depende das condições do problema específico a ser resolvido, como geometria, condições de contorno e parâmetros constitutivos. Para este trabalho, lançamos mão de 5 e 6.

¹Neste trabalho, a notação segue de perto a das principais referências, mas diverge em pontos onde buscamos maior clareza ou precisão.

2. EQUAÇÕES DE MAXWELL EM COORDENADAS ESFÉRICAS

2.1. Forma das equações para o problema proposto. Para um condutor perfeito, as perdas por polarização e magnetização são nulas; isso equivale a fazer $\varpi = 0$ nas equações 5 a 6. Além disso, como o meio é linear, todas essas equações são lineares e vale o teorema integral de Fourier. Quando $f(t)$ é uma função periódica, com período τ , a integral ?? degenera numa somatória discreta; em condições de *regime permanente*, pode-se simplificar ainda mais o problema com a introdução da notação fasorial. Podemos ainda, sem perda de generalidade, fazer todos os fasores unitários. Após todas essas simplificações, temos [BALANIS 2012 2, BALANIS 2012 3]:

$$(7) \quad \vec{\nabla}^2 (\mathcal{E} \vec{E}(x, y, z)) = -\mathbb{I} \epsilon \omega^2 (\mathcal{H} \vec{H}(x, y, z))$$

$$(8) \quad \vec{\nabla}^2 (\mathcal{H} \vec{H}(x, y, z)) = -\mathbb{I} \epsilon \omega^2 (\mathcal{E} \vec{E}(x, y, z))$$

2.2. Forma das equações em coordenadas esféricas. Obviamente, o sistema de coordenadas mais adequado ao problema proposto é o esférico. As equações de onda vetoriais, 7 a 8, após todas as manipulações, são simples o suficiente para permitir uma solução analítica. No sistema escolhido, entretanto, o sistema obtido consiste em três equações acopladas. Para o campo elétrico, por exemplo, após aplicar-se a identidade $\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \beta^2 \vec{E}$, chega-se a:

$$(9) \quad \nabla^2 E_r = \frac{2}{r^2} \left(E_r + E_\theta \cot \theta + \csc \theta \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} \right) - \beta^2 E_r$$

$$(10) \quad \nabla^2 E_\theta = \frac{1}{r^2} \left(E_\theta \csc^2 \theta - 2 \frac{\partial E_r}{\partial \theta} + 2 \cot \theta \csc \theta \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \right) - \beta^2 E_\theta$$

$$(11) \quad \nabla^2 E_\phi = \frac{1}{r^2} \left(E_\phi \csc^2 \theta - 2 \csc \theta \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - 2 \cot \theta \csc \theta \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} \right) - \beta^2 E_\phi$$

Como no trabalho anterior, neste caso também é possível escolher um modo transversal onde as componentes podem ser representadas na forma separável $A(r, \theta, \phi) = f(r) g(\theta) h(\phi)$. Uma manipulação nos moldes da que foi feita para o problema do espalhamento por um cilindro resulta

em:

$$(12) \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df(r)}{dr} \right) + [(\beta r)^2 - n(n+1)] f(r) = 0$$

$$(13) \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dg(\theta)}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \left(\frac{m}{\sin \theta} \right)^2 \right] g(\theta) = 0$$

$$(14) \quad \frac{d^2 h(\phi)}{d\phi^2} + m^2 h(\phi) = 0$$

A equação 12 é um tipo de Equação de Bessel; a sua solução é uma combinação linear de **funções de Bessel ou de Hankel esféricas**. A equação 13 é um tipo de Equação de Legendre; sua solução é uma combinação linear de **funções de Legendre associadas**. A equação 14 é uma equação harmônica comum, cuja solução é uma combinação de funções exponenciais complexas [BALANIS 2012 4].

3. SOLUÇÃO DO PROBLEMA

3.1. Solução das equações. Consideremos uma onda incidente no modo TM^z , que é uma onda plana descrita, por exemplo, por $E_x = \mathcal{E}_0 e^{-j\beta z}$. Como as funções de Bessel e de Hankel esféricas e as funções associadas de Legendre constituem grupos de funções ortogonais entre si, podemos escrever a função exponencial complexa como uma somatória de componentes harmônicos em coordenadas esféricas, cada um deles consistindo de um produto de uma função de Bessel ou de Hankel esférica por uma função de Legendre associada. Dessa forma:

$$(15) \quad e^{-j\beta z} = e^{-j\beta r \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(\beta r) P_n(\cos \theta)$$

onde a_n são coeficientes complexos, j é a função de Bessel esférica de primeira espécie e P é a função de Legendre associada. O campo incidente e o campo refletido, escritos nessa forma, podem ser obtidos como soluções das equações de onda e somados, para se obter o campo espalhado.

As componentes do campo elétrico espalhado são dadas pelas fórmulas:

$$(16) \quad E_r = -j E_o \cos(\phi) \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \left[\frac{\partial^2 \hat{H}_n^{(2)}(\alpha)}{\partial \alpha^2} + \hat{H}_n^{(2)}(\alpha) \right] P_n^{(1)}(\gamma) \right)$$

$$(17) \quad E_{\theta} = \frac{1}{\alpha} E_o \cos(\phi) \sum_{n=1}^{\infty} \left(j b_n \sin(\theta) \frac{\partial \hat{H}_n^{(2)}(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial P_n^{(1)}(\gamma)}{\partial \gamma} - c_n \frac{1}{\sin(\theta)} \hat{H}_n^{(2)}(\alpha) P_n^{(1)}(\gamma) \right)$$

$$(18) \quad E_{\phi} = \frac{1}{\alpha} E_o \sin(\phi) \sum_{n=1}^{\infty} \left(j b_n \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial \hat{H}_n^{(2)}(\alpha)}{\partial \alpha} P_n^{(1)}(\gamma) - c_n \sin(\theta) \hat{H}_n^{(2)}(\alpha) \frac{\partial P_n^{(1)}(\gamma)}{\partial \gamma} \right)$$

onde E_o é a intensidade do campo elétrico incidente, $\alpha = \beta r$, $\gamma = \cos(\theta)$, $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ como usual (λ é o comprimento de onda), a_n , b_n e c_n são coeficientes complexos, $\hat{H}_n^{(2)}(\alpha) = \alpha h_n^{(2)}(\alpha)$ e $P_n^{(1)}(\gamma) = \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\gamma)$. Os coeficientes são calculados por meio das expressões:

$$(19) \quad a_n = j^{-n} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$(20) \quad b_n = -a_n \frac{\frac{\partial \hat{J}_n(\alpha)}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \hat{H}_n^{(2)}(\alpha)}{\partial \alpha}}$$

$$(21) \quad c_n = -a_n \frac{\hat{J}_n(\alpha)}{\hat{H}_n^{(2)}(\alpha)}$$

onde $\hat{J}_n(\alpha) = \alpha j_n(\alpha)$, onde j é a função de Bessel esférica de primeira espécie [BALANIS 2012 5]. As derivadas das funções são dadas por [WOLFRAM 2015 1, WOLFRAM 2015 2]:

$$(22) \quad \frac{\partial h_n^{(2)}(\alpha)}{\partial \alpha} = h_{n-1}^{(2)}(\alpha) - \frac{n+1}{\alpha} h_n^{(2)}(\alpha)$$

$$(23) \quad \frac{\partial j_n(\alpha)}{\partial \alpha} = j_{n-1}(\alpha) - \frac{n+1}{\alpha} j_n(\alpha)$$

$$(24) \quad \frac{\partial P_n(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta^2 - 1} \left(\theta P_n(\theta) - P_{n-1}(\theta) \right)$$

e assim:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{\mathbf{H}}_n^{(2)}(\alpha)}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \mathbf{h}_n^{(2)}(\alpha) \right) \\
 &= \mathbf{h}_n^{(2)}(\alpha) + \alpha \frac{\partial \mathbf{h}_n^{(2)}(\alpha)}{\partial \alpha} \\
 &= \mathbf{h}_n^{(2)}(\alpha) + \alpha \left(\mathbf{h}_{n-1}^{(2)}(\alpha) - \frac{n+1}{\alpha} \mathbf{h}_n^{(2)}(\alpha) \right) \\
 &= \alpha \mathbf{h}_{n-1}^{(2)}(\alpha) - n \mathbf{h}_n^{(2)}(\alpha) \\
 (25) \quad &= \hat{\mathbf{H}}_{n-1}^{(2)}(\alpha) - \frac{n}{\alpha} \hat{\mathbf{H}}_n^{(2)}(\alpha)
 \end{aligned}$$

similarmente:

$$(26) \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{J}}_n(\alpha)}{\partial \alpha} = \hat{\mathbf{J}}_{n-1}(\alpha) - \frac{n}{\alpha} \hat{\mathbf{J}}_n(\alpha)$$

e também

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{H}}_n^{(2)}(\alpha)}{\partial \alpha^2} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\alpha \mathbf{h}_{n-1}^{(2)}(\alpha) - n \mathbf{h}_n^{(2)}(\alpha) \right] \\
 &= \alpha \frac{\partial \mathbf{h}_{n-1}^{(2)}(\alpha)}{\partial \alpha} + \mathbf{h}_{n-1}^{(2)}(\alpha) - n \frac{\partial \mathbf{h}_n^{(2)}(\alpha)}{\partial \alpha} \\
 &= \alpha \left[\alpha \mathbf{h}_{n-2}^{(2)}(\alpha) - (n-1) \mathbf{h}_{n-1}^{(2)}(\alpha) \right] + \mathbf{h}_{n-1}^{(2)}(\alpha) - n \left[\alpha \mathbf{h}_{n-1}^{(2)}(\alpha) - n \mathbf{h}_n^{(2)}(\alpha) \right] \\
 &= \alpha^2 \mathbf{h}_{n-2}^{(2)}(\alpha) + 2 \mathbf{h}_{n-1}^{(2)}(\alpha) + n^2 \mathbf{h}_n^{(2)}(\alpha) \\
 (27) \quad &= \alpha \hat{\mathbf{H}}_{n-2}^{(2)}(\alpha) + \frac{2}{\alpha} \hat{\mathbf{H}}_{n-1}^{(2)}(\alpha) + \frac{n^2}{\alpha} \hat{\mathbf{H}}_n^{(2)}(\alpha)
 \end{aligned}$$

finalmente:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_n^{(1)}(\gamma) &= \frac{\partial \mathbf{P}_n(\theta)}{\partial \theta} \\
 (28) \quad &= \frac{n}{\theta^2 - 1} \left(\theta \mathbf{P}_n(\theta) - \mathbf{P}_{n-1}(\theta) \right)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{P}_n^{(1)}(\gamma)}{\partial \gamma} &= -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial \mathbf{P}_n^{(1)}(\gamma)}{\partial \theta} \\
 &= -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{n}{\theta^2 - 1} \left(\theta \mathbf{P}_n(\theta) - \mathbf{P}_{n-1}(\theta) \right) \right] \\
 &= -\frac{n}{\sin(\theta)} \left[-\frac{2\theta}{(\theta^2 - 1)^2} \left(\theta \mathbf{P}_n(\theta) - \mathbf{P}_{n-1}(\theta) \right) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\theta^2 - 1} \left(\mathbf{P}_n(\theta) + \theta \frac{\partial \mathbf{P}_n}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathbf{P}_{n-1}}{\partial \theta} \right) \right] \\
 &= -\frac{n}{\sin(\theta)} \left[-\frac{2\theta}{(\theta^2 - 1)^2} \left(\theta \mathbf{P}_n(\theta) - \mathbf{P}_{n-1}(\theta) \right) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\theta^2 - 1} \left(\mathbf{P}_n(\theta) + \theta \left\{ \frac{n}{\theta^2 - 1} \left(\theta \mathbf{P}_n(\theta) - \mathbf{P}_{n-1}(\theta) \right) \right\} - \dots \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left\{ \frac{n}{\theta^2 - 1} \left(\theta \mathbf{P}_{n-1}(\theta) - \mathbf{P}_{n-2}(\theta) \right) \right\} \right) \right] \\
 &= -\frac{n}{\sin(\theta)} \left[\left(-\frac{2\theta}{(\theta^2 - 1)^2} + \frac{1}{\theta^2 - 1} + \frac{n\theta^2}{(\theta^2 - 1)^2} \right) \mathbf{P}_n(\theta) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{2\theta}{(\theta^2 - 1)^2} - \frac{n\theta}{(\theta^2 - 1)^2} - \frac{n\theta}{(\theta^2 - 1)^2} \right) \mathbf{P}_{n-1}(\theta) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n}{(\theta^2 - 1)^2} \mathbf{P}_{n-2}(\theta) \right] \\
 (29) \quad &= -\frac{n}{\sin(\theta)(\theta^2 - 1)^2} \left[(n\theta^2 - \theta^2 - 1) \mathbf{P}_n(\theta) - 2(n+1)\theta \mathbf{P}_{n-1}(\theta) + n \mathbf{P}_{n-2}(\theta) \right]
 \end{aligned}$$

Para codificação no MATLAB, as funções esféricas $\hat{\mathbf{H}}_n^{(2)}(\alpha)$ e $\hat{\mathbf{J}}_n(\alpha)$ devem ainda ser expressas em função das funções regulares:

$$(30) \quad \hat{\mathbf{H}}_n^{(2)}(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}} \mathbf{H}_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\alpha)$$

$$(31) \quad \hat{\mathbf{J}}_n(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}} \mathbf{J}_{n+\frac{1}{2}}(\alpha)$$

3.2. Implementação. As equações 16 a 31 foram implementadas através de funções auxiliares. O programa para o cálculo do campo espalhado está listado a seguir. Ele toma 3 valores distintos de $\frac{R}{\lambda}$, sendo R o raio da esfera, e estima o valor das componentes em um ponto qualquer do espaço próximo.

LISTING 1. probesfera.m

```

1 % Parâmetros do problema (em metros)
2 R = 1; % raio do cilindro
3 lambda = [0.3 1 3]; % comprimento de onda
4 % Outros valores
5 infy = 20; % controla quantas componentes serão integradas
6 step = 10; % resolução angular
7 prec = 10; % resolução radial
8 scale = pi()/step; % conversão de unidades
9 Eo = 1; % intensidade do campo incidente
10
11 % Funções auxiliares
12 function [b,c] = Calc_bc(m, alpha)
13 % Calcula os coeficientes an, bn e cn, com 0 <= n <= m
14 b = c = zeros(m,1);
15 for n = 1:m
16 a = j^(-n) * (2 * n + 1) / (n * (n + 1) );
17 b(n) = - a * Jotalinha(n, alpha) / Haga2linha(n, alpha);
18 c(n) = - a * Jota(n, alpha) / Haga2(n, alpha);
19 end
20 end
21
22 function [Jlinha] = Jotalinha(n, alpha)
23 % Calcula a derivada da função de Bessel de primeira espécie esférica modificada
24 Jlinha = Jota(n - 1, alpha) - n / alpha * Jota(n, alpha);
25 end
26
27 function [H2linha] = Haga2linha(n, alpha)
28 % Calcula a derivada da função de Hankel de segunda espécie esférica modificada
29 H2linha = Haga2(n - 1, alpha) - n / alpha * Haga2(n, alpha);
30 end
31
32 function [H2linhalinha] = Haga2linhalinha(n, alpha)
33 % Calcula a derivada segunda da função de Hankel de segunda espécie esférica modificada
34 H2linhalinha = alpha * Haga2(n - 2, alpha) + 2 / alpha * Haga2(n - 1, alpha) + n ^2 /
alpha * Haga2(n, alpha);
35 end
36
37 function [Hn2] = Haga2(n, alpha)
38 % Calcula a função de Hankel de segunda espécie esférica modificada
39 Hn2 = sqrt(pi/2 * alpha) * besselh(n + 1/2, 2, alpha, 0);
40 end
41
42 function [Jn] = Jota(n, alpha)
43 % Calcula a função de Bessel de primeira espécie esférica modificada
44 Jn = sqrt(pi/2 * alpha) * besselj(n + 1/2, alpha, 0);
45 end
46
47 function [pl] = Pl(n, theta)
48 % Calcula a função de Legendre associada
49 if n <= 0

```


ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO POR UMA ESFERA CONDUTORA ELÉTRICA PERFEITA

```

50     pl = 0;
51     else
52         Pn = legendre(n, cos(theta));
53         pl = Pn(end);
54     end
55 end
56
57 function [pl] = Pel(n, theta)
58 % Calcula a função de Legendre associada
59 pl = n / (theta^2 - 1) * (theta * Pl(n, theta) - Pl(n - 1, theta));
60 end
61
62 function [pl] = Pelinhal(n, theta)
63 % Calcula a função de Legendre associada
64 theta2 = theta^2;
65 c1 = (n - 1) * theta2 - 1;
66 c2 = 2 * (n + 1) * theta;
67 pl = n / sin(theta) / (theta2 - 1)^2 * (c1 * Pl(n, theta) + c2 * Pl(n - 1, theta) + n
        * Pl(n - 2, theta));
68 end
69
70 function [E] = Calc_E(m, alpha, theta, phi, b, c)
71 % Calcula o campo elétrico espalhado na posição dada
72 costheta = cos(theta);
73 sentheta = sin(theta);
74 cosphi = cos(phi);
75 senphi = sin(phi);
76 sEr = sEphi1 = sEphi2 = sEtheta1 = sEtheta2 = 0;
77 for n = 1:m
78     sEr = sEr + b(n) * (Haga2linhalinha(n, alpha) + Haga2(n, alpha)) * Pel(n, theta);
79     if sentheta ~= 0
80         sEtheta1 = sEtheta1 + j * b(n) * Haga2linha(n, alpha) * Pelinhal(n, theta);
81         sEtheta2 = sEtheta2 + c(n) * Haga2(n, alpha) * Pel(n, theta);
82         sEphi1 = sEphi1 + j * b(n) * Haga2linha(n, alpha) * Pel(n, theta);
83         sEphi2 = sEphi2 + c(n) * Haga2(n, alpha) * Pelinhal(n, theta);
84     end
85 end
86 Er = -j * cosphi * sEr;
87 if sentheta ~= 0
88     Etheta = cosphi / alpha * (sentheta * sEtheta1 - sEtheta2 / sentheta);
89     Ephi = senphi / alpha * (sEphi1 / sentheta - sEphi2 * sentheta);
90 else
91     Etheta = Ephi = 0;
92 end
93 E = [Er, Etheta, Ephi];
94 end
95
96 function [Er, Etheta, Ephi] = Calc_Esfera(l, prec, step, scale, m)
97 % Calcula as componentes do campo elétrico em cada ponto do espaço, para a geometria
    dada
98 Er=zeros(prec, step, step);
99 Etheta=zeros(prec, step, step);
100 Ephi=zeros(prec, step, step);
101 for qr = 1:prec
102     alpha = 2 * pi * qr * l ;
103     for qphi = 1:step
104         phi = qphi * 2 * scale;
105         for qtheta = 1:step
106             theta = qtheta * scale;

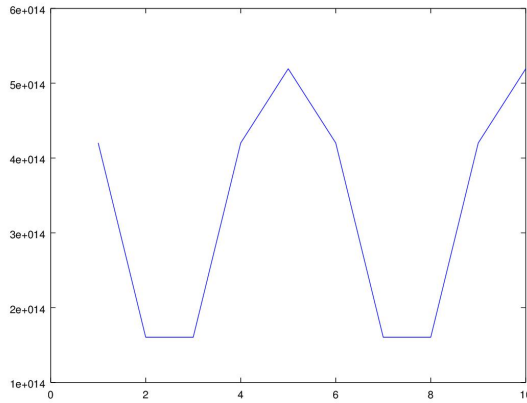
```

```

107     [b,c] = Calc_bc(m, alpha);
108     E = Calc_E(m, alpha, theta, phi, b, c) ;
109     Er(qr, qphi, qtheta) = E(1);
110     Etheta(qr, qphi, qtheta) = E(2);
111     Ephi(qr, qphi, qtheta) = E(3);
112     end
113 end
114 end
115 end
116
117 for i=1:3
118     [Er,Etheta,Ephi] = Calc_Esfera(R / lambda(i), prec, step, scale, infty);
119 end

```

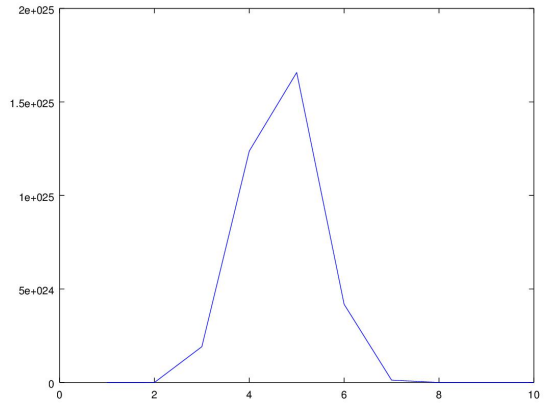
3.3. Análise dos resultados. Os gráficos seguintes foram obtidos a partir dos cálculos desse programa. No primeiro grupo, $\lambda = 0,3 R$. Pode-se observar o caráter oscilatório em θ e ϕ para alguns valores de r . pode-se também verificar que variação de E com a distância tem a mesma forma para posições diferentes na esfera. Para melhor qualidade gráfica, basta aumentar o valor das variáveis do programa que controlam a resolução: step, prec e, talvez, também infty.



$r = 1$ (superfície da esfera)

$0 \leq \theta \leq \pi$

$\phi = 0$

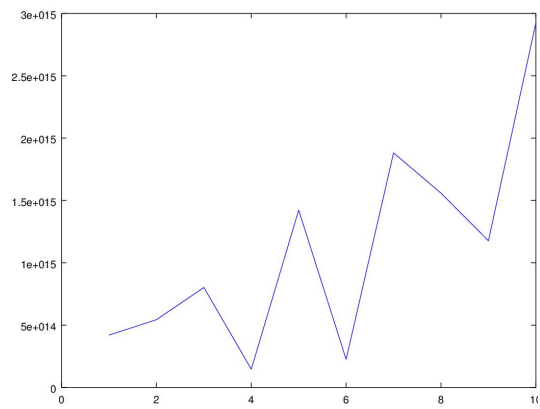


$r = 1$ (superfície da esfera)

$\theta = 0$

$0 \leq \phi \leq 2\pi$

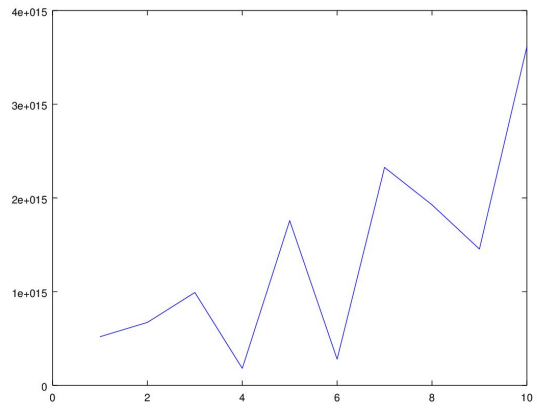
ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO POR UMA ESFERA CONDUTORA ELÉTRICA PERFEITA



$$R \leq r \leq 10R$$

$$\theta = 0$$

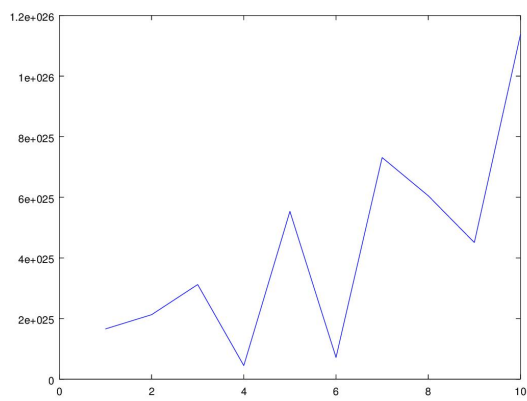
$$\phi = 0$$



$$R \leq r \leq 10R$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

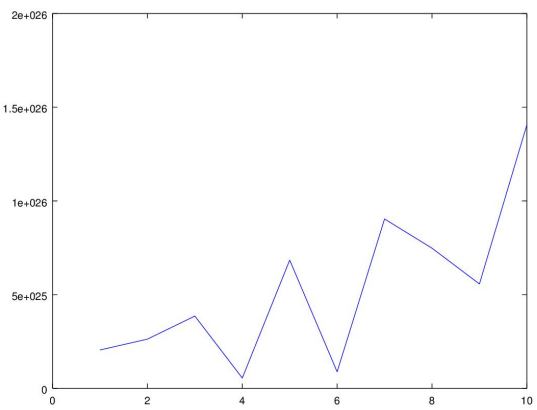
$$\phi = 0$$



$$R \leq r \leq 10R$$

$$\theta = \pi$$

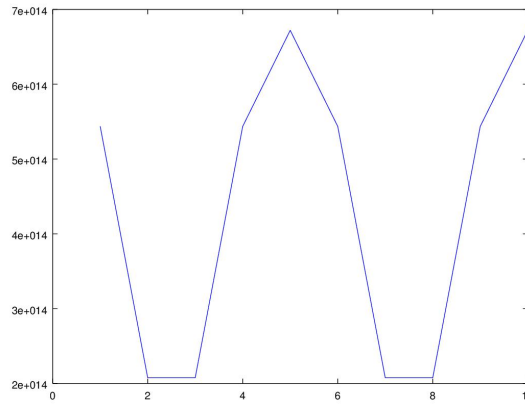
$$\phi = 0$$



$$R \leq r \leq 10R$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

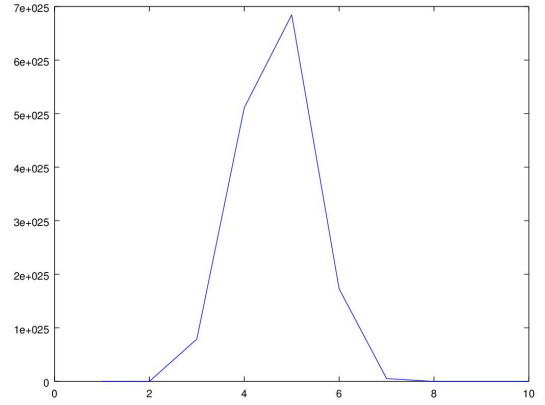
$$\phi = \pi$$



$$r = 2$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\phi = 0$$



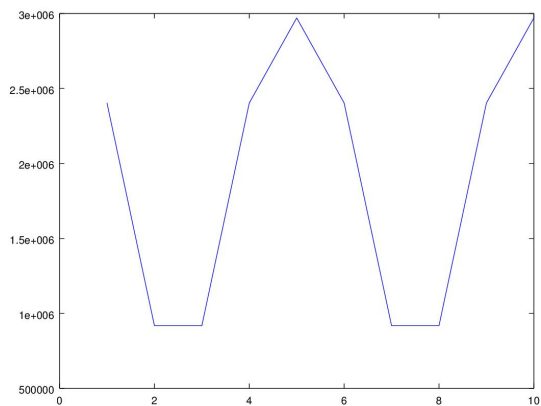
$$r = 5$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

No segundo grupo, $\lambda = R$. Percebe-se que a variação em θ e em ϕ possui o mesmo caráter do grupo anterior; a variação em r também, mas o período espacial da oscilação aumentou.

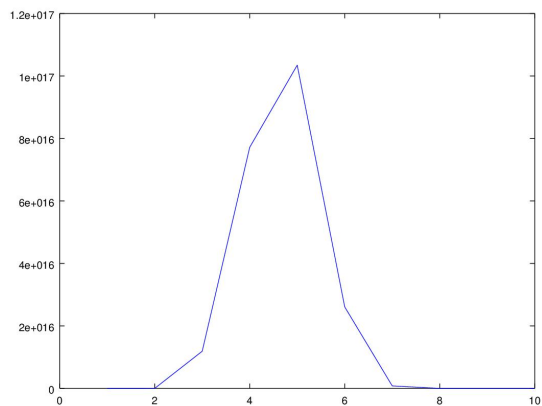
ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO POR UMA ESFERA CONDUTORA ELÉTRICA PERFEITA



$r = 1$ (superfície da esfera)

$0 \leq \theta \leq \pi$

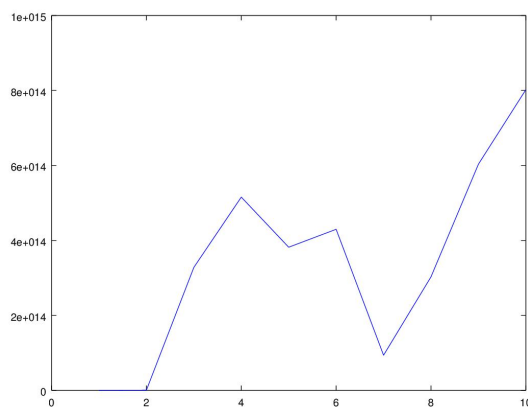
$\phi = 0$



$r = 1$ (superfície da esfera)

$\theta = 0$

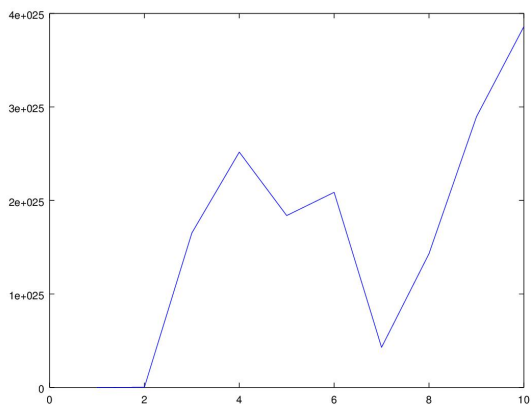
$0 \leq \phi \leq 2\pi$



$R \leq r \leq 10R$

$\theta = 0$

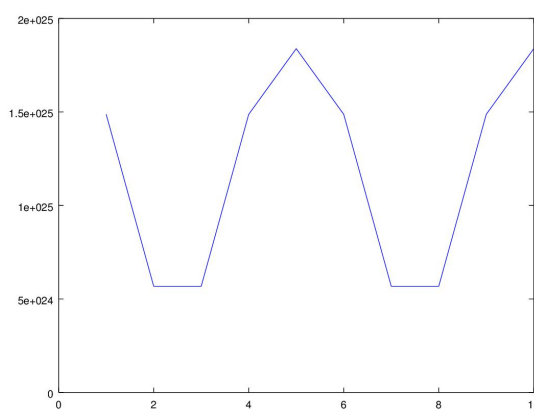
$\phi = 0$



$R \leq r \leq 10R$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

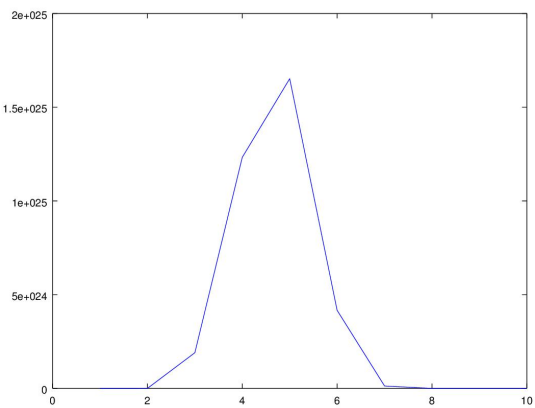
$\phi = \pi$



$$r = 5$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\phi = \pi$$



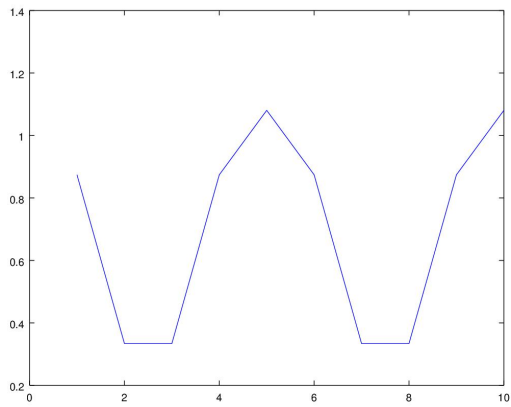
$$r = 3$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

De forma similar, no terceiro grupo, em que $\lambda = 3R$, notam-se os mesmos efeitos.

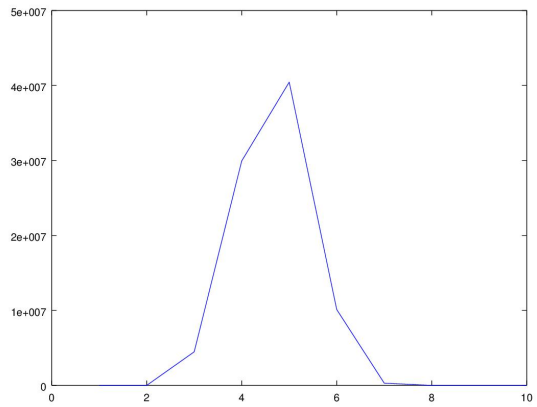
ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO POR UMA ESFERA CONDUTORA ELÉTRICA PERFEITA



$r = 1$ (superfície da esfera)

$0 \leq \theta \leq \pi$

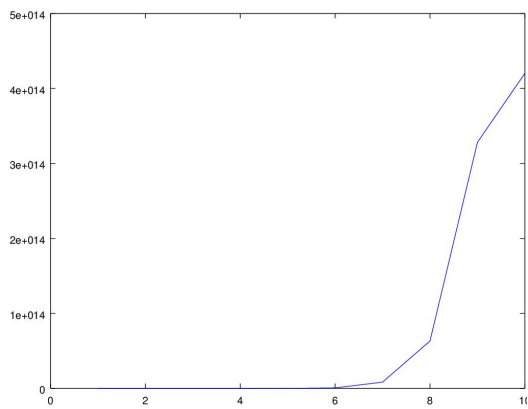
$\phi = 0$



$r = 1$ (superfície da esfera)

$\theta = 0$

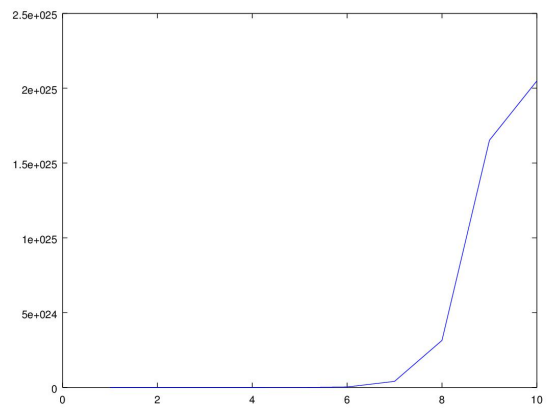
$0 \leq \phi \leq 2\pi$



$R \leq r \leq 10R$

$\theta = 0$

$\phi = 0$



$R \leq r \leq 10R$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$\phi = \pi$

REFERÊNCIAS

- [BALANIS 2012 1] Constantine A. BALANIS, **Advanced Engineering Electromagnetics**, 2nd edition, Wiley, 2012, ISBN 978-0-470-58948-9, itens 3.1 e 3.2, pp. 99 a 101.
- [BALANIS 2012 2] Constantine BALANIS, *op. cit.*, item 1.7, pp. 21 a 22.
- [BALANIS 2012 3] Constantine BALANIS, *op. cit.*, item 3.3, pp. 101 a 102.
- [BALANIS 2012 4] Constantine BALANIS, *op. cit.*, item 3.4.3 pp. 115 a 120.
- [BALANIS 2012 5] Constantine BALANIS, *op. cit.*, item 11.8, pp. 650 a 660.
- [WOLFRAM 2015 1] Stephen WOLFRAM, **WolframResearch** : Spherical Bessel function of the first kind: Differentiation. Disponível em <http://functions.wolfram.com/Bessel-TypeFunctions/SphericalBesselJ/20/01/02>, acesso em 30/10/2015.
- [WOLFRAM 2015 2] Stephen WOLFRAM, **WolframResearch** : Legendre polynomials: Differentiation. Disponível em <http://functions.wolfram.com/Polynomials/Legendre/20/01/01>, acesso em 30/10/2015.

Os gráficos foram preparados pelo **Octave 4.0.0**:

<https://www.gnu.org/software/octave/>

Texto formatado com **pdflatex** em ambiente MiKTeX 2.9:

<http://miktex.org/download/>