MÉTODOS NUMÉRICOS - LISTA DE EXERCÍCIOS III

SÉRGIO CORDEIRO

SUMÁRIO

1. Problemas

1. Sobre SVD: apresente modelagem matemática para calculo; apresente aplicações práticas; escolha uma aplicação associada à compressão de matrizes e faça a decomposição, a compressão e a analise o número de condicionamento antes e depois da compressão. Comente e analise todos os resultados.

A decomposição SVD de uma matriz $\mathbf{A}$ consiste na sua substituição pelo produto de três outras matrizes: $\mathbf{A} = \mathbf{USV}^{(T)}$, onde $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são unitárias e $\mathbf{S}$ é diagonal. Pode-se demonstrar que toda matriz pode ser decomposta dessa forma, e que a decomposição é única, a menos da ordem das colunas das matrizes.

A aplicação imediata da decomposição SVD é a solução mais fácil de um sistema linear, pois $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são matrizes unitárias, por isso suas transpostas são as inversas; $\mathbf{S}$, por sua vez, é diagonal, e encontrar sua inversa é trivial. Portanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \implies \qquad \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ &= \left(\mathbf{USV}^{(T)}\right)^{-1}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{VS}^{-1}\mathbf{U}^{(T)}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Uma segunda aplicação é a compressão da matriz, que pode ser expressa pelo produto $\hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{V}}^{(T)}$, com as matrizes $\hat{\mathbf{U}}$, $\hat{\mathbf{S}}$ e $\hat{\mathbf{V}}^{(T)}$ derivadas das originais por eliminação de colunas menos significativas, correspondentes a valores singulares de menor valor absoluto.
Uma terceira aplicação é a diminuição do número de condicionamento da matriz, através da eliminação dos valores singulares com menor valor absoluto.

A compressão de matrizes por meio da decomposição SVD usa a técnica conhecida como *low-rank approximation*: após encontrarem-se os n autovalores, selecionam-se os m maiores; todas linhas de $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são mantidas, mas apenas as m colunas que correspondem aos maiores autovalores dessas matrizes; quanto a $\mathbf{S}$, são selecionadas tanto as linhas quanto as colunas que correspondem aos autovalores mais importantes. O resultado é uma matriz $\mathbf{C}$ que tem o mesmo tamanho da matriz original, mas apenas m autovalores.

A manutenção dos maiores autovalores faz com que a maior parte da variância original seja preservada, e com ela, a informação relevante. O número de condição, por sua vez, é bastante melhorado.

A aplicação escolhida foi a compressão de imagens em preto e branco, com e sem introdução de ruído. As imagens originais foram obtidas no banco de dados do Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação do Instituto Politécnico da Universidade de Nova York.
O programa **`exercmat.c`**, em anexo, escrito em C, lê uma matriz em disco e comprime-a pelo método de decomposição SVD, calculando o número de condicionamento antes e depois da compressão. Basta digitar:

```
exercmat 20 n
```

onde n é o tamanho da matriz (n x n). Ele também calcula o número de operações em ponto flutuante necessário para cada etapa. O próprio programa tenta descobrir qual é a maior taxa de compressão possível sem que resulte perda expressiva de dados.
O algoritmo é totalmente genérico, e pode ser aplicado diretamente a uma matriz que representa uma imagem. Para este exercício, experimentou-se com alguns valores diferentes para a taxa de compressão.
O algoritmo usa o método de Jacobi para encontrar os autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{A}^{(T)}\mathbf{A}$, o que não é uma solução ótima.
Os resultados obtidos são mostrados e tabelados a seguir. Foi usada apenas precisão simples, de forma a favorecer a ocorrência de erros de arredondamento.

n		**nome**	**Número de condição**		**iterações**
antes	**depois**		**antes**	**depois**	
512	347	Lena	38.146271	1.860093	406
	240			1.495879	
	149			1.273939	
	71			1.142361	
512	336	Bárbara	23.812378	1.879261	348
	232			1.471599	
	145			1.275514	
	68			1.138802	

n		nome	custo [1]	
antes	**depois**		**decomposição**	**¨compressão**
512	347	Lena	35047344300288	304347657
	240			184041993
	149			100176393
	71			41789961
512	336	Bárbara	35047344300288	290898441
	232			175989257
	145			96879113
	68			39793161

Imagem original: Lena com 512 valores singulares

[1]Número de operações de ponto flutuante necessárias.

Imagem original: Bárbara com 512 valores singulares

Imagem comprimida: Lena com 347 valores singulares

Imagem comprimida: Bárbara com 336 valores singulares

Imagem comprimida: Lena com 240 valores singulares

Imagem comprimida: Bárbara com 232 valores singulares

Imagem comprimida: Lena com 149 valores singulares

Imagem comprimida: Bárbara com 145 valores singulares

Imagem comprimida: Lena com 71 valores singulares

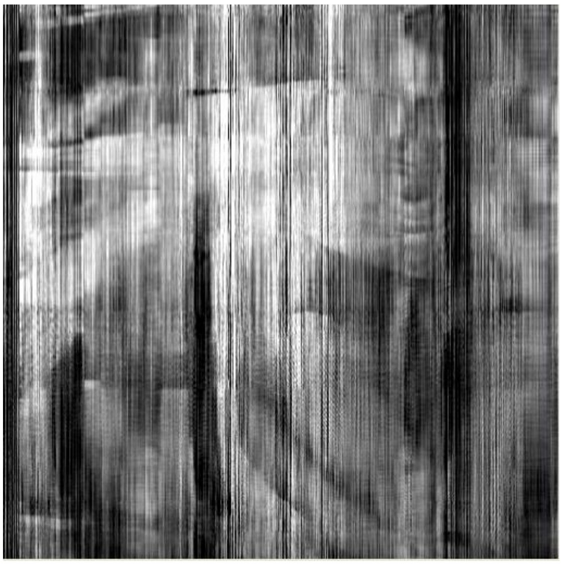
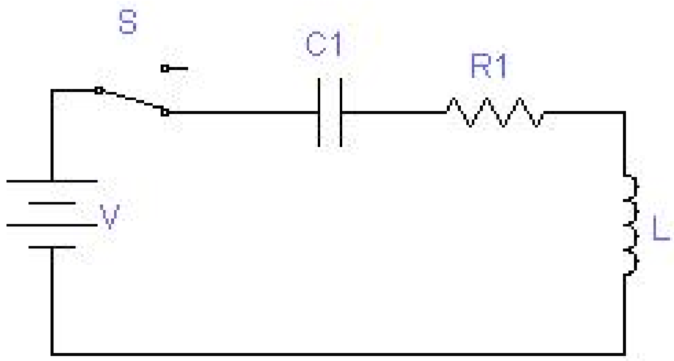


Imagem comprimida: Bárbara com 68 valores singulares

Para a pronunciada compressão obtida, as imagens mostram que a informação importante foi preservada.

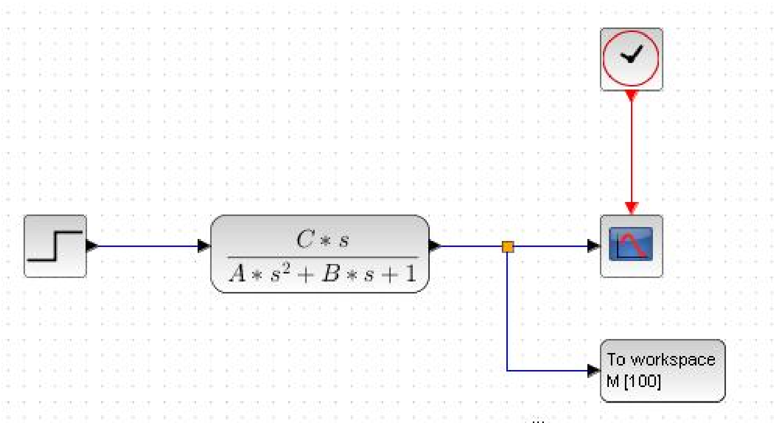
2. Simule (utilizando qualquer software) o circuito da figura 1 e obtenha a tabela de valores (t (seg) e I (A)). Resolva analiticamente o circuito. Faça o ajuste da função utilizando regressão (avalie a que melhor se adeque a esse problema). Plote em um gráfico os valores simulados, calculados (solução analítica) e os valores obtidos a partir da regressão. Escolha os valores para os elementos de forma que a resposta seja oscilatória. Comente os resultados.



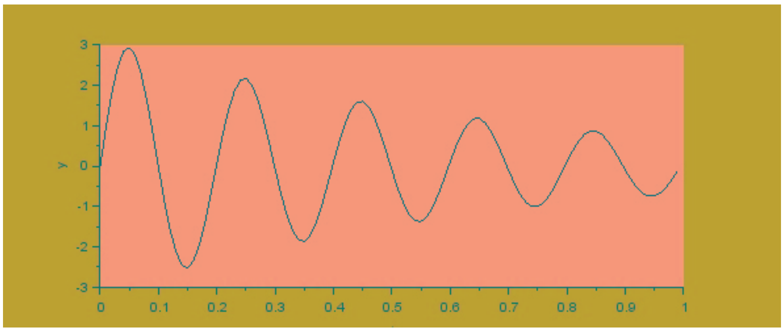
A função de transferência $\mathcal{G}(s) = \frac{\mathcal{I}(s)}{\mathcal{V}(s)}$ correspondente é:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(s) &= \frac{1}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} \\ &= \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1} \qquad = \frac{Cs}{As^2 + Bs + 1} \qquad \boxed{LC = A, RC = B}\end{aligned}$$

O diagrama de simulação correspondente é o seguinte:



e a saída simulada é a seguinte, para $A = 0.001$, $B = 0.003$ e $C = 0.1$:



Evidentemente, $C = 0.1\ F$, $L = \frac{A}{C} = \frac{0.001}{0.1} = 0.01\ H$ e $R = \frac{B}{C} = \frac{0.003}{0.1} = 0.03\ \Omega$, que não são valores muito realísticos, mas servem como ilustração.
As raízes da equação característica são:

$$
\begin{aligned}
A\lambda^2 + B\lambda + 1 = 0 \implies \qquad \lambda &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4A}}{2A} \\
&= \frac{-0.003 \pm \sqrt{0.003^2 - 4 \times 0.001}}{2 \times 0.001} \\
&= \frac{-0.003 \pm \jmath 0.0632}{0.002} \\
&= -1.5 \pm \jmath 31.6
\end{aligned}
$$

Assim, a forma da resposta será $y = De^{-1.5t}\sin(31.6t + E)$. Como $y(0) = 0$, então $E = 0$.

3. Para os Tópicos: Interpolação de Hermite, Interpolação com *Spline* Cúbico e Extrapolação faça:

- Descrição de um problema real;
- Modelagem matemática e numérica (código em anexo);
- Resultados e conclusões

I) Interpolação de Hermite:
A interpolação de Hermite utiliza n pontos (x, y) da função e n *pontos* (x, y') de sua derivada. Permite o uso de um polinômio de grau muito menor, $\frac{n-1}{2}$ em lugar de $n-1$, o que, entre outras coisas, implica em menor oscilação do resultado [2]. Os coeficientes são obtidos a partir da fórmula para os coeficientes de Lagrange. Evidentemente, seu emprego se limita aos casos em que os pontos da derivada são conhecidos.
O programa **`exercmat.c`**, em anexo, escrito em C, lê uma tabela em disco e interpola um ponto pelo método de Hermite. Basta digitar:

`exercmat 21` ***n***

onde n é o tamanho da tabela (n x 3). Ele também calcula o número de operações em ponto flutuante necessário.
Um caso prático, trabalhado por [TOBÓN 2011], é a aproximação da função $y = \ln(x)$ por meio de um polinômio; em todos os pontos se conhece a derivada $y' = \frac{1}{x}$. Neste caso, foram usadas tabela com 6, 10 e 20 entradas, para $1 \leq x \leq 5.5$, resultando em polinômios de grau crescente. O ponto interpolado foi $x = 3.1$; o valor exato é $y = 1.131402$. Os resultados obtidos estão mostrados abaixo. O valor obtido pela interpolação pelos métodos de Lagrange e de Neville também são mostrados, para comparação. A interpolação de Lagrange pode ser obtida digitando-se:

`exercmat 19` ***n***

e a interpolação de Neville é obtida digitando-se:

`exercmat 24` ***n***

As técnicas de Lagrange e de Neville não consideram o valor da derivada.

n	Hermite	Lagrange	Neville	custo [3]
3	1.31482	1.138113	1.124153	81
5	1.31399	1.130888	1.131802	215
10	1.31400	1.131401	1.131402	830

[2] O chamado *Fenômeno de Runge*.

O número ideal de entradas é 10, neste caso, 5 para y e 5 para y', que corresponde a um polinômio interpolador de grau 9. Mais pontos não melhoram muito a precisão e aumentam bastante o custo computacional. A técnica se mostrou superior às interpolações de Lagrange e de Neville para o mesmo número de pontos.
Uma grande desvantagem da técnica é que cada ponto a ser interpolado exige o recálculo de todos os coeficientes [FREITAS 2010, TOBÓN 2011].

II) *Spline* cúbico:
O problema anterior pode ser resolvido de forma alternativa por meio de *spline* cúbico. A técnica consiste em não ajustar um mesmo polinômio a todos os pontos conhecidos, e sim ajustar polinômios de grau 3 diferentes a grupos de 4 pontos consecutivios. Condições extras são introduzidas de forma a evitar descontinuidades nas derivadas primeiras e segundas. Condições adicionais devem ser impostas às derivadas primeira e segunda nos pontos extremos:

1. $y''(x_1) = y''(x_1) = 0$ (a chamda condição de ***spline* natural**), ou
2. $y''(x_1) = y''(x_2)$ e $y''(x_{n-1}) = y''(x_n)$, ou
3. $y''(x_1)$ e $y''(x_n)$ são obtidos por extrapolação linear, ou
4. $y'(x_1) =$ A e $y'(x_{n-1}) =$ B

O programa **`exercmat.c`**, em anexo, escrito em C, lê uma tabela em disco e interpola um ponto por tal método, considerando as derivadas ou não. Basta digitar:

```
exercmat 22 n
```

onde n é o tamanho da tabela. Ele também calcula o número de operações em ponto flutuante necessário. A condição de *spline* natural é sempre imposta.
Verifica-se que a consideração da derivada melhora bastante a precisão e diminui o custo computacional. A exatidão, contudo, é inferior à obtida com um polinômio de mais alto grau. A técnica do *spline*, além de ser mais simples, ainda permite o reaproveitamento dos coeficientes para interpolação de outros pontos [KOKKOTAS 2015, KUCKIR 2014, ONEILL 2002, OUYED 2011, PRESS 1992].

---

[3]Número de operações de ponto flutuante necessárias.

n	**derivadas**	**resultado**	**custo** [4]
5	Não	1.119492	127
10	Não	1.120845	317
5	Sim	1.31414	20
10	Sim	1.31404	20

III) Extrapolação:
As técnicas de interpolação podem também, a princípio, ser usadas para extrapolação, contanto que o ponto extrapolado não esteja muito distante do intervalo onde os pontos são conhecidos. A técnica do *spline* cúbico natural, devido às condições extras impostas aos pontos extremos, não se presta a esse uso.
O programa **`exercmat.c`**, em anexo, escrito em C, lê uma tabela em disco e extrapola um ponto por quatro métodos: o de Lagrange, o de Neville, o de Hermite e o *spline* cúbico. Basta digitar:

```
exercmat 23 n
```

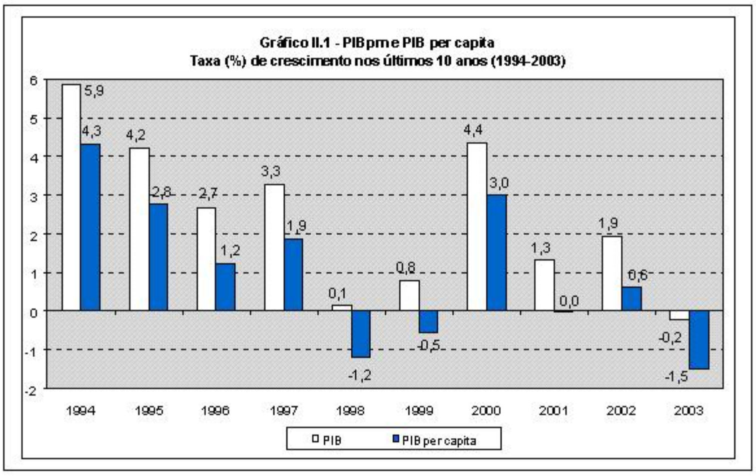
onde n é o tamanho da tabela. Ele também calcula o número de operações em ponto flutuante necessário. Os resultados são mostrados abaixo:

n	**valor exato**	**Lagrange**	**Hermite**	**Neville**
5	1.629240	1.626772	1.629260	1.769480
10	1.722767	1.722921	1.712949	1.713927

A tabela confirma a tendência de a técnica de Hermite ser a mais precisa e mais cara, e a de Neville, a menos precisa e mais barata.

[4] Número de operações de ponto flutuante necessárias.

4. O gráfico a seguir apresenta as variações do PIB e PIB/percapita.



Para esses dados (PIB e PIB per capita) faça:

1. Encontre o polinômio interpolador que melhor represente essa função (PI de maior grau possível) (Use interpolação);
2. Plote o diagrama de dispersão e o PI encontrado;
3. Comente todos os resultados

O programa **exercmat.c**, em anexo, escrito em C, lê uma tabela em disco e encontra o polinômio interpolador com o maior grau possível. Basta digitar:

exercmat 18 *n*

onde n é o tamanho da tabela (n x 2). Ele também calcula o número de operações em ponto flutuante necessário para cada etapa.
Os coeficientes encontrados para o PIB foram:
$a_9 = 5.900000$, $a_8 = 24.808952$, $a_7 = -60.370991$, $a_6 = 49.870708$, $a_5 = -19.498470$, $a_4 = 3.804901$, $a_3 = -0.311178$, $a_2 = -0.005871$, $a_1 = 0.002509$, $a_0 = -0.000111$
A expressão do polinômio interpolador é:
$y = \sum_{i=0}^{9} a_i x^i$
com $x = ano - 1994$. Os coeficientes encontrados para o PIB per capita foram:
$a_9 = 4.300000$, $a_8 = 26.969584$, $a_7 = -64.837807$, $a_6 = 53.848827$, $a_5 = -21.452248$, $a_4 = 4.385204$, $a_3 = -0.417683$, $a_2 = 0.005891$, $a_1 = 0.001795$, $a_0 = -0.000093$.

2. Anexos

Os seguintes arquivos constam do anexo (arquivo **`exercmat1.zip`**):

- arquivo fonte em C **`exercmat.c`**
- arquivos fontes em MATLAB:
  - **`gerachol.m`**: problema 2
- arquivos de dados:
  - An: problema 1
  - En: problema 1
  - Bn: problemas 3 e 4

Referências

[FREITAS 2010] Pedro Garcia FREITAS, **3.1.4 Aproximação de Funções — Interpolação — Interpolação de Hermite**. Disponível em http://www.sawp.com.br/blog/?p=880, acesso em 04/04/2016.

[KOKKOTAS 2015] Kostas KOKKOTAS, **Interpolation, Extrapolation ans Polynomial Approximation**. Disponível em http://www.tat.physik.uni-tuebingen.de/~kokkotas/Teaching/Num_Methods_files/Comp_Phys3.pdf, acesso em 17/04/2016.

[KUCKIR 2014] Ivan KUCKIR, **Interpolation with Cubic Splines**. Disponível em http://blog.ivank.net/interpolation-with-cubic-splines.html, acesso em 05/04/2016.

[ONEILL 2002] Charles O'NEILL, **Cubic Spline Interpolation MAE 5093**. Disponível em http://charles-oneill.com/projects/cubicspline.pdf, acesso em 04/04/2016.

[OUYED 2011] Rachid OUYED e Woflgang DOBLER, **Interpolation, Extrapolation ans Polynomial Approximation**. Disponível em Chap.4,2011,pp.53a55, acesso em http://pjl.ucalgary.ca/courses/physics381/computational-physics/Ouyed-Chapter-4-Interpolation-Extrapolation-Techniques.pdf.17/04/2016

[PRESS 1992] William H. PRESS, Saul A. TEUKOLSKY, William T. VETTERLING and Brian P. FLANNERY, **Numerical recipes in Fortran 77: The art of scientific computing Vol. 1**: Cambridge University Press, 2nd. Ed., 1992, ISBN 0-521-43064-X, Chap. 3. pp. 99 a 122. Disponível em http://www.fing.edu.uy/if/cursos/fiscomp/extras/numrec/book/f3.pdf, acesso em 06/04/2016.

[TOBÓN 2011] Luis E. TOBÓN, **Newton, Lagrange and Hermite Interpolation: Convergence and Runge phenomena**. Disponível em http://people.duke.edu/~let12/pdf/courses/math225/LuisTobon_HW1_Interpolation.pdf, acesso em 04/04/2016.

[WEISSTEIN 2016] Eric W. WEISSTEIN, **Positive Definite Matrix *MathWorld***. Disponível em http://mathworld.wolfram.com/PositiveDefiniteMatrix.html, acesso em 17/03/2016.

Programas testados com **Octave** 4.0.0 e **MinGW** C 4.8.2:
https://www.gnu.org/software/octave/
https://www.mingw.org
Texto formatado com **pdflatex** em ambiente **MiKTeX** 2.9:
http://miktex.org/download/