Examen final – Correction
Février 2019

Ce sujet contient 8 pages (en comptant la page de garde) et 3 exercices.
Le nombre total de point est de 30.

Barême

Question	Points	Score
1	10	
2	10	
3	10	
Total:	30	

1. (10 points) **Système de fonctions itérées: la courbe de Koch**

   La construction de la courbe de Koch est décrite schématiquement sur la figure 1 (voir page suivante). On cherche dans cet exercice à décrire cette construction à l'aide d'un système de fonctions itérées.

   (a) (3 points) Donnez l'expression des quatres transformations affines $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i$ permettant de construire cette courbe avec $\boldsymbol{x} = (x, y)$. Expliquez en quoi consiste chacune des ces quatres transformations.

   Solution: Les quatres transformations affines recherchées sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}_1(x,y) &= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{f}_2(x,y) &= \begin{bmatrix} 1/6 & -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{f}_3(x,y) &= \begin{bmatrix} 1/6 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/6 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{f}_4(x,y) &= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1}$$

   En rapport à la figure 1, chacune de ces transformations affines permet d'obtenir l'un des segments de couleurs ($\boldsymbol{f}_1 \to$ bleu, $\boldsymbol{f}_2 \to$ orange, $\boldsymbol{f}_3 \to$ vert et $\boldsymbol{f}_4 \to$ violet).

   (b) (2 points) Montrez que chacune de ces transformations est contractante (i.e. les valeurs propres de chacune des matrices $\boldsymbol{A}_i$ sont comprises dans le cercle unité).

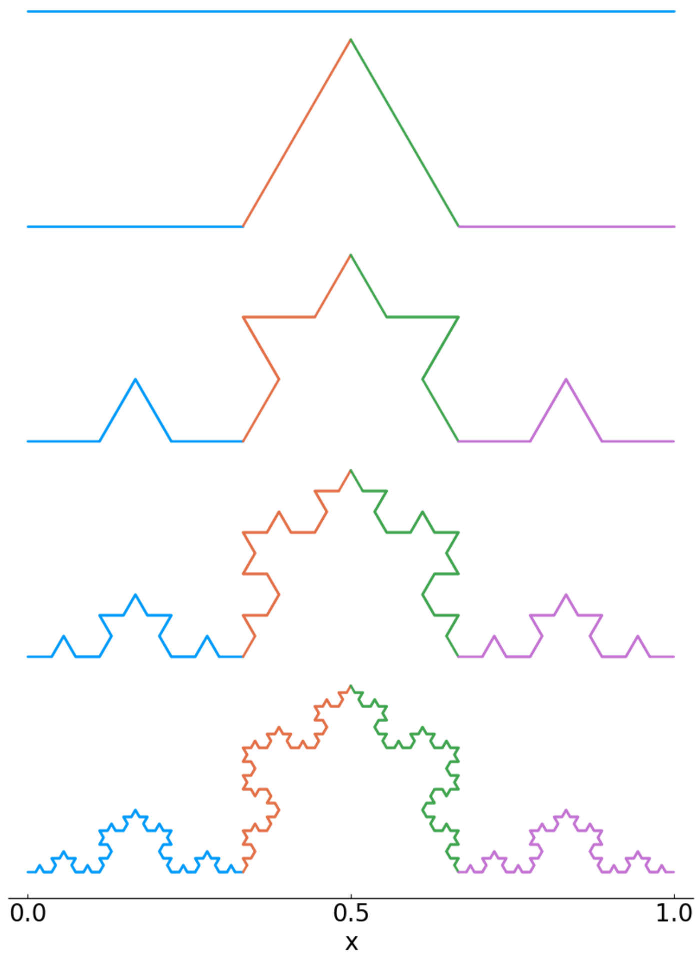

Figure 1: Premières étapes de la construction de la courbe de Koch. À titre indicatif, chacun des angles d'un triangle equilatéral vaut 60°.

Solution: Pour chacune des matrices intervenant dans les différentes transformations affines décrites à la question précédente, le module des valeurs propres est à chaque fois

$$|\lambda| = 1/3 < 1.$$

Par conséquent, ces quatres transformations $\boldsymbol{f}_i(x, y)$ sont toutes contractantes.

(c) (2 points) La courbe de Koch est la courbe limite obtenue en appliquant les transformations affines $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})$ un nombre infini de fois. Démontrez que sa longueur est infinie.

Solution: Soit L_k la longueur d'un segment et N_k le nombre de segments composant la figure à l'itération k. Le longueur totale de la courbe à l'itération k est alors $P_k = N_k \times L_k$. On a :

- Itération 0 : $L_0 = 1$, $N_0 = 1$ et donc $P_0 = 1$.
- Itération 1 : $L_1 = 1/3$, $N_1 = 4$ et donc $P_1 = 4/3$.
- Itération 2 : $L_2 = 1/3^2$, $N_2 = 4^2$ et donc $P_2 = (4/3)^2$.
- $\cdots$
- Itération k : $L_k = 1/3^k$, $N_k = 4^k$ et donc $P_k = (4/3)^k$.

De là, il est facile de montrer que

$$\lim_{k \to +\infty} P_k = +\infty.$$

(d) (3 points) Quelle est la dimension fractale de cet objet?

Solution: La dimension fractale de la courbe de Koch est

$$D = \frac{\log(4)}{\log(3)}.$$

2. (10 points) **Réduction sur la variété centrale: le système de Lorenz**

Considérons le système de Lorenz donné par

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma\,(y - x) \\ \dot{y} = x\,(\rho - z) - y \\ \dot{z} = -\beta z + xy. \end{cases} \tag{2}$$

Dans la suite de cette exercice, on supposera que les paramètres $\sigma > 0$ et $\beta > 0$ sont fixés. L'objectif de cet exercice est de caractériser la première bifurcation rencontrée par le système.

(a) On s'intéresse dans un premier temps à la stabilité du point fixe

$$(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$$

pour $0 \leq \rho < 1$. Pour cela, introduisons la fonction potentielle donnée par

$$V(x, y, z, t) = \frac{x(t)^2}{\sigma} + y(t)^2 + z(t)^2 \geq 0.$$

i. (2 points) Montrez que l'équation différentielle gouvernant la dynamique de V peut être mise sous la forme suivante

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -2\left(x - \frac{1+\rho}{2}y\right)^2 - 2\left(1 - \frac{(1+\rho)^2}{4}\right)y^2 - 2\beta z^2.$$

Solution: En partant de l'expression de la fonction potentielle V, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^2(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y^2(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z^2(t).$$

Cette équation peut également s'écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{2x(t)\dot{x}(t)}{\sigma} + 2y(t)\dot{y}(t) + 2z(t)\dot{z}(t).$$

En insérant dans l'équation ci-dessus l'expression de $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$, puis en regroupant les différents terms, on retrouve alors l'équation demandée.

ii. (2 points) Montrez que, pour $0 \leq \rho < 1$, cette fonction potentielle est strictement décroissante au cours du temps.

Solution: On cherche à montrer que ${}^{\mathrm{d}V}/_{\mathrm{d}t} \leq 0\ \forall t$. En partant de l'expression obtenue à l'équation précédente, il est facilement de montrer que $V(t)$ est strictement décroissante au cours du temps si

$$1 - \frac{(1+\rho)^2}{4} \geq 0.$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} 1 &> \frac{(1+\rho)^2}{4} \\ 4 &> (1+\rho)^2 \\ 2 &> 1+\rho > -2 \\ 1 &> \rho > -1. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $0 \leq \rho < 1$, la fonction potentielle $V(t)$ est bien strictement décroissante au cours du temps.

iii. (1 point) En conclure quant à la stabilité du point fixe $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$. Existe-t'il d'autres attracteurs pour $0 \leq \rho < 1$?

Solution: Posons $\hat{x} = {}^{x}/\sqrt{\sigma}$. La fonction $V(t)$ peut alors se ré-écrire sous la forme $V(t) = \hat{x}^2(t) + y^2(t) + z^2(t)$. Pour une condition initiale donnée $\boldsymbol{x}(0)$, cette fonction potentielle décrit donc l'évolution au cours du temps d'une forme de distance (au carré) de $\boldsymbol{x}(t)$ par rapport à l'origine de l'espace des phases. $V(t)$ étant une fonction strictement décroissante au cours du temps, on a alors que toute condition initiale est inévitablement attirée vers l'origine. Le point fixe $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ est donc non seulement stable mais il est également le seul point fixe existant pour $0 \leq \rho < 1$.

(b) On cherche maintenant à caractériser le type de bifurcation ayant lieu pour $\rho_c = 1$. Pour cela, l'analyse se fera en deux temps.

i. (1 point) Donnez l'expression de la matrice Jacobienne $\boldsymbol{J}$ du système linéarisé autour du point fixe $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ et montrez que, pour $\rho = 1$, ses valeurs propres sont données par

$$\lambda_1 = 0, \;\; \lambda_2 = -(\sigma + 1), \;\; \text{et} \;\; \lambda_3 = -\beta.$$

Solution: Pour $\rho = 1$, la matrice Jacobienne du système de Lorenz linéarisé autour du point fixe $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ est donnée par

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}.$$

Cette matrice étant diagonale par bloc, il est facile de montrer que ses valeurs propres sont effet données par

$$\lambda_1 = 0, \;\; \lambda_2 = -(\sigma + 1), \;\; \text{et} \;\; \lambda_3 = -\beta.$$

ii. (3 points) Afin de déterminer le type de bifurcation rencontrée, faisons le changement de variable $r = \rho - 1$ de sorte à ce que l'équation pour y s'écrive

$$\dot{y} = (r + 1)x - y - xz.$$

La linéarisation et les valeurs propres restent les mêmes. La matrice $\boldsymbol{T}$ des vecteurs propres s'écrit par ailleurs

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En introduisant le changement de variable $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$, avec $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ et $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$, les équations gouvernant la dynamique de $\boldsymbol{u}$ sont données par

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{\sigma}{1+\sigma}\left(r - w\right)\left(u + \sigma v\right) \\ \dot{v} = -\left(1+\sigma\right)v - \dfrac{1}{1+\sigma}\left(r - w\right)\left(u + \sigma v\right) \\ \dot{w} = -\beta w + \left(u + \sigma v\right)\left(u - v\right) \\ \dot{r} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

On peut montrer que la variété centrale W_c est de la forme

$$W_c = \left\{(u, v, w, r) : v = h_1(u, r), w = h_2(u, r), h_i(0, 0) = 0, Dh_i(0, 0) = 0\right\}.$$

Supposons maintenant que

$$\begin{aligned} h_1(u, r) &= a_{0,0} + a_{1,0}u + a_{0,1}r + a_{2,0}u^2 + a_{1,1}ur + a_{0,2}r^2 + \mathcal{O}(3) \\ h_2(u, r) &= b_{0,0} + b_{1,0}u + b_{0,1}r + b_{2,0}u^2 + b_{1,1}ur + b_{0,2}r^2 + \mathcal{O}(3). \end{aligned}$$

En déterminant les valeurs des différents coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$, montrez que le système (3) se réduit à un système du type

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u, r) \\ \dot{r} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Solution: ...

iii. (1 point) En se basant sur l'équation $\dot{u} = f(u, r)$ obtenue, en déduire le type de bifurcation rencontrée.

Solution: L'équation obtenue à la question précédente correspond à la forme normale d'une bifurcation fourche supercritique. Pour $\rho < 1$, le système ne possède donc qu'un seul point fixe linéairement stable, voir question a)iii. Ce point fixe perd sa stabilité pour $\rho \geq 1$ et deux nouveaux points fixes linéairement stables sont alors créés.

3. (10 points) **Théorie de Koopman**

Soit le système dynamique non-linéaire suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu x_1 \\ \dot{x}_2 &= \lambda\left(x_2 - x_1^4 + 2x_1^2\right), \end{aligned} \tag{5}$$

avec $\mu < 0$ et $\lambda < 0$.

(a) (2 points) Calculez le(s) point(s) fixe(s) du système et étudiez leur stabilité linéaire.

Solution: Ce système n'admet qu'un seul point fixe donné par $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$. Le système d'équations linéarisé correspondant est alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Les valeurs propres sont alors $\lambda_1 = \mu$ et $\lambda_2 = \lambda$. Par ailleurs, puisque $\mu < 0$ et $\lambda < 0$, ce point fixe est alors linéairement stable.

(b) (4 points) Donnez l'expression des variétés stables du point fixe situé à l'origine et tracer un schéma de l'espace des phases ainsi que quelques trajectoires.

Solution: Intéressons nous tout d'abord à la variété stable associée à la valeur propre λ. Il est facile de monter que cette variété stable est donnée simplement par

$$x_1 = 0.$$

Tournons nous maintenant vers la seconde variété stable, maintenant associée à la valeur propre μ. Le vecteur propre correspondant est donné par $\boldsymbol{v} = [1, 0]^T$. On sait d'après le théorème des variétés stables et instables que la variété recherchée doit être tangente au sous-espace stable généré par $\boldsymbol{v}$ en $(x_1, x_2) = (0, 0)$. De fait, il paraît alors raisonnable de rechercher une variété de la forme

$$x_2 = h(x_1)$$

où $h(x_1)$ est donnée par

$$h(x_1) = a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + a_4 x_1^4.$$

Les coefficients a_i doivent satisfaire à

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial h}{\partial x_1}\dot{x}_1.$$

En remplaçant x_2 par $h(x_1)$ dans les différentes équations, on obtient alors le sytème suivant

$$\begin{cases} \lambda a_1 = \mu a_1 \\ \lambda(2 + a_2) = 2\mu a_2 \\ a_3 = 0 \\ \lambda(a_4 - 1) = 4\mu a_4. \end{cases}$$

De là, on peut facilement montrer que

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = \dfrac{-2\lambda}{\lambda - 2\mu} \\ a_3 = 0 \\ a_4 = \dfrac{\lambda}{\lambda - 4\mu}. \end{cases}$$

La variété stable recherchée est alors donnée par

$$x_2 = \frac{\lambda}{\lambda - 4\mu} x_1^4 - \frac{2\lambda}{\lambda - 2\mu} x_1^2.$$

À noter que si on fait l'hypothèse $|\lambda| \gg |\mu|$, alors cette expression se réduit à

$$x_2 = x_1^4 - 2x_1^2.$$

On laisse finalement à l'étudiant le loisir de tracer les différentes trajectoires du système.

(c) (4 points) En introduisant de nouvelles variables, montrez que le système non-linéaire (5) peut être ré-écrit sous la forme d'un système linéaire à 4 degrés de liberté.

Solution: On cherche à ré-écrire notre système non-linéaire à deux degrés de liberté comme un système linéaire à quatre degrés de liberté. Pour cela, introduisons les variables suivantes :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_1^2 \\ y_4 = x_1^4. \end{cases}$$

De là, il est facile de monter que la dynamique de $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}^T$ est en effet gouverné par le système dynamique linéaire suivant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

(d) (5 Bonus points) Calculez les valeurs propres et vecteurs propres du système linéaire obtenu à la question précédente. Concluez quant aux fonctions propres de l'opérateur de Koopman.

Solution: Le système dynamique linéaire étudié à la question précédente est du type $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ où $\boldsymbol{A}$ est une matrice triangulaire supérieure. Par conséquent, les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ sont ses éléments diagonaux, i.e. $\lambda_i = \{\mu, \lambda, 2\mu, 4\mu\}$. De là, le calcul des vecteurs propres de $\boldsymbol{A}$ (qui correspondent aux fonctions propres de l'opérateur de Koopman) est facile. Nous le laissons à l'étudiant comme exercice.