Physique non-linéaire **Nom – Prénom:** ______________________

Examen final

Février 2019

Durée: 120 Minutes

Ce sujet contient 4 pages (en comptant la page de garde) et 3 exercices.
Le nombre total de point est de 30.

Barême

Question	Points	Score
1	10	
2	10	
3	10	
Total:	30	

---

1. (10 points) **Système de fonctions itérées: la courbe de Koch**

   La construction de la courbe de Koch est décrite schématiquement sur la figure 1 (voir page suivante). On cherche dans cet exercice à décrire cette construction à l'aide d'un système de fonctions itérées.

   (a) (3 points) Donnez l'expression des quatres transformations affines $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_i$ permettant de construire cette courbe avec $\boldsymbol{x} = (x, y)$. Expliquez en quoi consiste chacune des ces quatres transformations.

   (b) (2 points) Montrez que chacune de ces transformations est contractante (i.e. les valeurs propres de chacune des matrices $\boldsymbol{A}_i$ sont comprises dans le cercle unité).

   (c) (2 points) La courbe de Koch est la courbe limite obtenue en appliquant les transformations affines $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})$ un nombre infini de fois. Démontrez que sa longueur est infinie.

   (d) (3 points) Quelle est la dimension fractale de cet objet?

2. (10 points) **Réduction sur la variété centrale: le système de Lorenz**

   Considérons le système de Lorenz donné par

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma\,(y-x) \\ \dot{y} = x\,(\rho - z) - y \\ \dot{z} = -\beta z + xy. \end{cases} \tag{1}$$

   Dans la suite de cette exercice, on supposera que les paramètres $\sigma > 0$ et $\beta > 0$ sont fixés. L'objectif de cet exercice est de caractériser la première bifurcation rencontrée par le système.

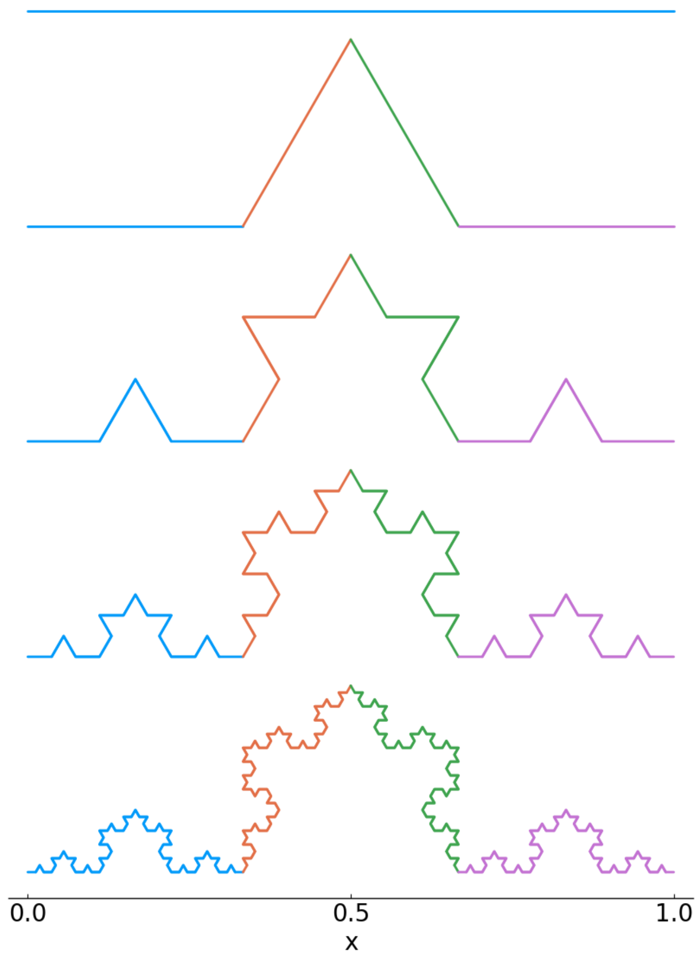

Figure 1: Premières étapes de la construction de la courbe de Koch. À titre indicatif, chacun des angles d'un triangle equilatéral vaut 60°.

(a) On s'intéresse dans un premier temps à la stabilité du point fixe

$$(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$$

pour $0 \leq \rho < 1$. Pour cela, introduisons la fonction potentielle donnée par

$$V(x, y, z, t) = \frac{x(t)^2}{\sigma} + y(t)^2 + z(t)^2 \geq 0.$$

i. (2 points) Montrez que l'équation différentielle gouvernant la dynamique de V peut être mise sous la forme suivante

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -2\left(x - \frac{1+\rho}{2}y\right)^2 - 2\left(1 - \frac{(1+\rho)^2}{4}\right)y^2 - 2\beta z^2.$$

ii. (2 points) Montrez que, pour $0 \leq \rho < 1$, cette fonction potentielle est strictement décroissante au cours du temps.

iii. (1 point) En conclure quant à la stabilité du point fixe $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$. Existe-t'il d'autres attracteurs pour $0 \leq \rho < 1$?

(b) On cherche maintenant à caractériser le type de bifurcation ayant lieu pour $\rho_c = 1$. Pour cela, l'analyse se fera en deux temps.

i. (1 point) Donnez l'expression de la matrice Jacobienne $\boldsymbol{J}$ du système linéarisé autour du point fixe $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ et montrez que, pour $\rho = 1$, ses valeurs propres sont données par

$$\lambda_1 = 0, \;\; \lambda_2 = -(\sigma + 1), \;\text{ et } \lambda_3 = -\beta.$$

ii. (3 points) Afin de déterminer le type de bifurcation rencontrée, faisons le changement de variable $r = \rho - 1$ de sorte à ce que l'équation pour y s'écrive

$$\dot{y} = (r + 1)x - y - xz.$$

La linéarisation et les valeurs propres restent les mêmes. La matrice $\boldsymbol{T}$ des vecteurs propres s'écrit par ailleurs

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En introduisant le changement de variable $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$, avec $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ et $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$, les équations gouvernant la dynamique de $\boldsymbol{u}$ sont données par

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{\sigma}{1+\sigma}\left(r - w\right)\left(u + \sigma v\right) \\ \dot{v} = -\left(1 + \sigma\right)v - \dfrac{1}{1+\sigma}\left(r - w\right)\left(u + \sigma v\right) \\ \dot{w} = -\beta w + \left(u + \sigma v\right)\left(u - v\right) \\ \dot{r} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

On peut montrer que la variété centrale W_c est de la forme

$$W_c = \{(u,v,w,r) : v = h_1(u,r), w = h_2(u,r), h_i(0,0) = 0, Dh_i(0,0) = 0\}.$$

Supposons maintenant que

$$\begin{aligned} h_1(u,r) &= a_{0,0} + a_{1,0}u + a_{0,1}r + a_{2,0}u^2 + a_{1,1}ur + a_{0,2}r^2 + \mathcal{O}(3) \\ h_2(u,r) &= b_{0,0} + b_{1,0}u + b_{0,1}r + b_{2,0}u^2 + b_{1,1}ur + b_{0,2}r^2 + \mathcal{O}(3). \end{aligned}$$

En déterminant les valeurs des différents coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$, montrez que le système (2) se réduit à un système du type

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u,r) \\ \dot{r} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

iii. (1 point) En se basant sur l'équation $\dot{u} = f(u,r)$ obtenue, en déduire le type de bifurcation rencontrée.

3. (10 points) **Théorie de Koopman**

Soit le système dynamique non-linéaire suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu x_1 \\ \dot{x}_2 &= \lambda\left(x_2 - x_1^4 + 2x_1^2\right), \end{aligned} \tag{4}$$

avec $\mu < 0$ et $\lambda < 0$.

(a) (2 points) Calculez le(s) point(s) fixe(s) du système et étudiez leur stabilité linéaire.

(b) (4 points) Donnez l'expression des variétés stables du point fixe situé à l'origine et tracer un schéma de l'espace des phases ainsi que quelques trajectoires.

(c) (4 points) En introduisant de nouvelles variables, montrez que le système non-linéaire (4) peut être ré-écrit sous la forme d'un système linéaire à 4 degrés de liberté.

(d) (5 Bonus points) Calculez les valeurs propres et vecteurs propres du système linéaire obtenu à la question précédente. Concluez quant aux fonctions propres de l'opérateur de Koopman.