**Physique non-linéaire** **Nom – Prénom:** ________________________

**Examen final**

**Février 2017**

**Durée: 120 Minutes**

---

Ce sujet contient 2 pages (en comptant la page de garde) et 3 exercices.
Le nombre total de point est de 26.

Barême

| Question | Points | Score |
|---|---|---|
| 1 | 10 | |
| 2 | 10 | |
| 3 | 6 | |
| Total: | 26 | |

---

1. (10 points) **Théorie de Koopman**

   Soit le système dynamique non-linéaire suivant

   $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu x_1 \\ \dot{x}_2 &= \lambda \left( x_2 - x_1^4 + 2x_1^2 \right), \end{aligned} \tag{1}$$

   avec $\mu < 0$ et $\lambda < 0$.

   (a) (2 points) Calculez le(s) point(s) fixe(s) du système et étudiez leur stabilité linéaire.

   (b) (4 points) Donnez l'expression des variétés stables du point fixe situé à l'origine et tracer un schéma de l'espace des phases ainsi que quelques trajectoires.

   (c) (4 points) En introduisant de nouvelles variables, montrez que le système non-linéaire (1) peut être ré-écrit sous la forme d'un système linéaire à 4 degrés de liberté.

   (d) (5 bonus points) Calculez les valeurs propres et vecteurs propres du système linéaire obtenu à la question précédente. Concluez quant aux fonctions propres de l'opérateur de Koopman.

2. (10 points) **Bifurcation de Hopf**

   Soit le système dynamique non-linéaire suivant

   $$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(1-z)x - \omega y \\ \dot{y} &= \omega x + \sigma(1-z)y \\ \dot{z} &= -\lambda(z - x^2 - y^2), \end{aligned} \tag{2}$$

   avec $\lambda > 0$ et $\omega > 0$.

(a) (1 point) Quel problème de mécanique des fluides ce système dynamique permet-il de modéliser? De quelles structures physiques $x$, $y$ et $z$ décrivent-ils l'évolution?

(b) (3 points) Montrez que, pour $\sigma > 0$, le point fixe situé à l'origine possède une variété instable de dimension 2. Approximez son expression à l'aide d'un polynome du type

$$h(x, y) \simeq c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 x^2 + c_4 xy + c_5 y^2 + \cdots$$

(c) (1 point) En introduisant $z \simeq h(x, y)$ dans le système (2), donnez les équations décrivant la dynamique temporelle de $x$ et $y$.

(d) (5 points) En utilisant le changement de variable $x + iy = re^{i\theta}$, montrez que le système subit une bifurcation de Hopf supercritique pour $\sigma = 0$.

3. (6 points) **Questions diverses**

(a) (2 points) Soit le système de Lorenz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z. \end{aligned} \tag{3}$$

Montrez que, pour $\sigma > 0$, $\rho > 0$ et $\beta > 0$, le système ne peut pas présenter de dynamique quasi-périodique (i.e. il n'existe pas d'attracteur prenant la forme d'un tore).

(b) (2 points) Présentez simplement le principe de la cascade sous-harmonique, l'une des route pouvant conduire un système vers le chaos.

(c) (2 points) Expliquez le principe de la *POD* (Proper Orthogonal Decomposition). Dans quel cas de figure cette approche a-t'elle un réel intérêt pour réduire la dimensionalité du problème?