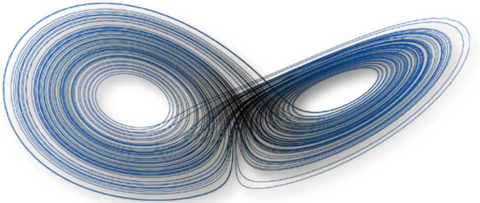


# Physique non-linéaire, systèmes dynamiques et théorie du chaos


Jean-Christophe Loiseau

*jean-christophe.loiseau@ensam.eu*
*Laboratoire DynFluid*
*Arts et Métiers ParisTech, France.*

# Remarques générales

- Les cours ont lieu chaque **Mardi** et **Jeudi**, de 15h30 à 17h30 jusqu'à fin février.
- L'évaluation se fera en deux parties:
  - ↪ Un devoir sur table de 2h fin février.
  - ↪ Un projet alliant mathématiques et simulations numériques.
- Révisez vos cours d'algèbre linéaire si vous n'êtes pas au point.

# Projet numérique

- Le projet numérique se fera en **Python 3.6** ou **Julia**.
- Vous pouvez télécharger la distribution **Anaconda** sur `https://www.anaconda.com/`
  - ↪ Disponible pour Windows, Mac et Linux.
- De nombreux tutoriels sont disponibles en ligne pour vous familiariser avec Python.
  - ↪ `https://www.codecademy.com/` est un bon endroit pour commencer.
  - ↪ `https://github.com/UCIDataScienceInitiative/IntroToJulia` également.

# Quelques références utiles

Niveau: débutant, lecture vivement conseillée!

- Ian Stewart, *Dieu joue-t'il au dés?*, Flammarion (2004).
- James Gleick, *La théorie du chaos*, Flammarion (2008).
- Ilya Prigogine, *Les lois du chaos*, Flammarion (2008).

# Quelques références utiles

Niveau: avancé

- Y. Pomeau, M. Dubois Gance et P. Bergé, *Des rythmes au chaos*, Odile Jacobi (1994).
- P. Bergé, Y. Pomeau et C. Vidal, *L'order dans le chaos*, Hermann (1998).
- P. Manneville, *Instabilités, chaos et turbulence*, Editions de l'Ecole Polytechnique (2004).

# Qu'est un système dynamique?

Quelques exemples

# Quelques exemples...

## Le pendule simple

- L'évolution de sa position angulaire $\theta(t)$ au cours du temps est gouvernée par

$$\ddot{\theta} + 2k\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0.$$

- C'est une équation différentielle ordinaire (EDO) non-linéaire.
  - $\hookrightarrow$ Pas de solution analytique.

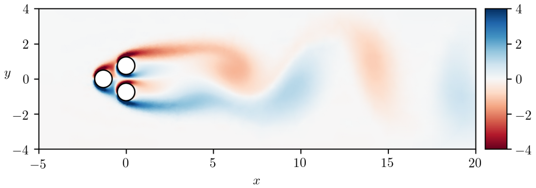
# Quelques exemples...

## L'écoulement autour d'un cylindre

- La dynamique de l'écoulement est gouvernée par les équations de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0.$$

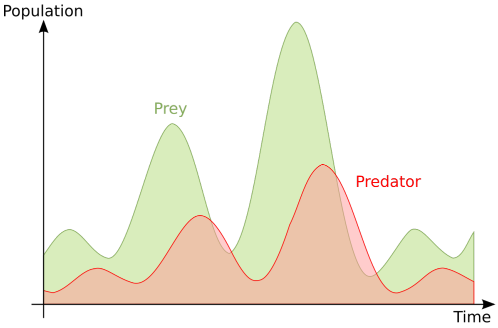
- Ce sont des équations non-linéaires aux dérivées partielles.
  $\hookrightarrow$ Très peu de solutions analytiques.




Evolution temporelle du champ de vorticité autour d'un trio de cylindre. Notez que la vitesse de rotation des cylindres n'est pas constante.

# Quelques exemples...

## Le modèle de Lotka-Volterra




- L'évolution d'une population de proies et de prédateurs peut être modélisée par

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha x - \beta xy,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \delta xy - \gamma y.$$

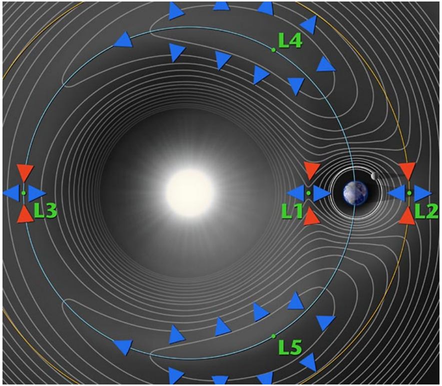
- C'est un système de deux équations différentielles ordinaires non-linéairement couplées.

# Quelques exemples...

## Le problème des trois corps

- Le problème des trois corps peut être utilisé pour modéliser l'évolution d'un satellite autour de la Terre et de la Lune.

- C'est un système de trois équations différentielles ordinaires non-linéairement couplées.



# Quelques exemples...

## Systèmes dynamiques en temps continu

- Tous ces systèmes peuvent être écrits sous la forme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \lambda)$$

  où $\boldsymbol{x}$ est le *vecteur d'état* du système, $\lambda$ un vecteur de *paramètres* et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \lambda)$ une fonction non-linéaire.

- À noter que l'on pré-suppose ici que le temps $t$ est continu.

# Quelques exemples...

Systèmes dynamiques en temps discret

- Si l'on a qu'une vue *stroboscopique* du système, sa dynamique peut alors être exprimée de la façon suivante
$$\boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{(n)}, \lambda)$$
où $n$ définie maintenant l'instant discret.

- Ce genre de modèle est appelé un *système dynamique à temps discret*, un *itéré* ou encore une *map*.

# Comment étudie-t'on un système dynamique?

Un petit aperçu de ce qui vous attend...

# Qu'est ce qu'un système linéaire?

Considérons le système dynamique suivant

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Sous quelle(s) condition(s) est-il **linéaire**?

# Qu'est ce qu'un système linéaire?

Quelques définitions...

- Soit $\boldsymbol{u}(t)$ et $\boldsymbol{v}(t)$ deux solutions du système. Ce dernier est dit **linéaire** si :
  - $\hookrightarrow$ $\boldsymbol{w}(t) = \alpha \boldsymbol{u}(t) + \beta \boldsymbol{v}(t)$ est aussi solution du système,
  - $\hookrightarrow$ $\boldsymbol{f}(\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}) = \alpha \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) + \beta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$,
  - $\hookrightarrow$ Il obéît au **principe de superposition**.
- Le système peut alors être écrit sous la forme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

  où $\boldsymbol{A}$ est un opérateur linéaire.
- Sa solution est alors

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0.$$

# Qu'est ce qu'un système linéaire?

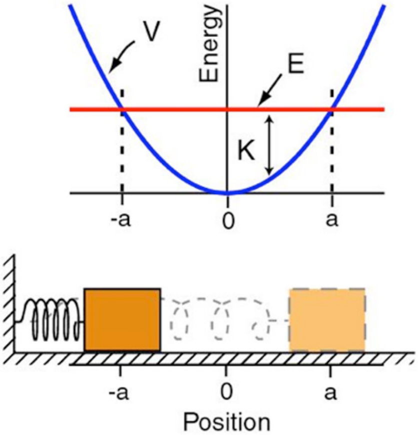
Exemple: l'oscillateur harmonique

- La dynamique d'un oscillateur harmonique est gouvernée par

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x.$$

- En posant $y = \dot{x}$, on obtient alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$



**Attention!**

Si les sytèmes linéaires sont apparus si fréquemment tout au long de vos études, c'est uniquement parce qu'ils sont plus faciles à étudier! Beaucoup de systèmes linéaires en apparance ne sont en réalité qu'une approximation d'un système non-linéaire plus complexe.

# Qu'est ce qu'un système non-linéaire?

**Définition**

C'est un système qui n'est pas linéaire.

# Qu'est ce qu'un système non-linéaire?

Quelques exemples

- L'oscillateur de *van der Pol*

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

permet de modéliser le potentiel d'action des neurones ou d'étudier l'intéraction des plaques au niveau d'une faille de subduction.

- L'émission de photons par un laser est modélisée par

$$\dot{n} = gn(N_0 - an) - kn$$

où $g$ est le gain du laser, $k$ décrit le taux de pertes et $N(t) = N_0 - an$ est le nombre d'atomes excités.

# Illustration

Le pendule simple

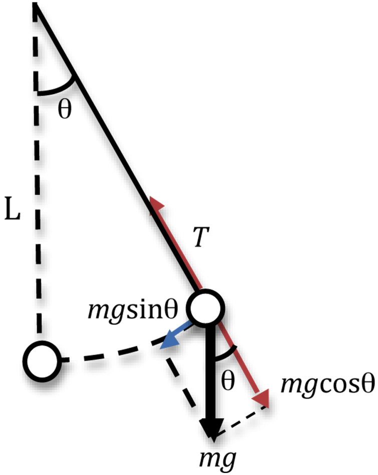
# Le pendule simple

- La dynamique angulaire d'un pendule simple est gouvernée par

$$\ddot{\theta} = -2k\dot{\theta} - \omega_0^2 \sin(\theta).$$

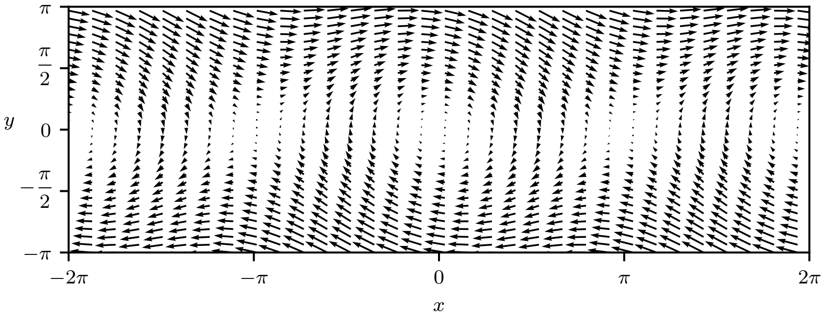
- En posant $x = \theta$ et $y = \dot{\theta}$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -2ky - \omega_0^2 \sin(x). \end{aligned}$$



# Le pendule simple

## Plan de phase




Plan de phase du pendule simple pour $(k, \omega_0) = (0.1, 1)$.

# Le pendule simple

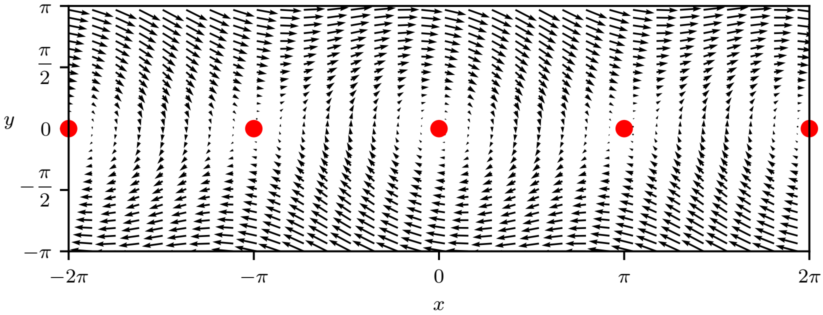
## Points fixes

- Il existe certains point du plan de phase pour lesquels le système est en équilibre. Ce sont des **points fixes**. Ils sont donnés par
$$\dot{x} = 0 \text{ et } \dot{y} = 0.$$
- Pour le pendule simple, ces points fixes sont solutions de
$$y = 0 \text{ et } \sin(x) = 0.$$

ARTS ET MÉTIERS ParisTech

# Le pendule simple

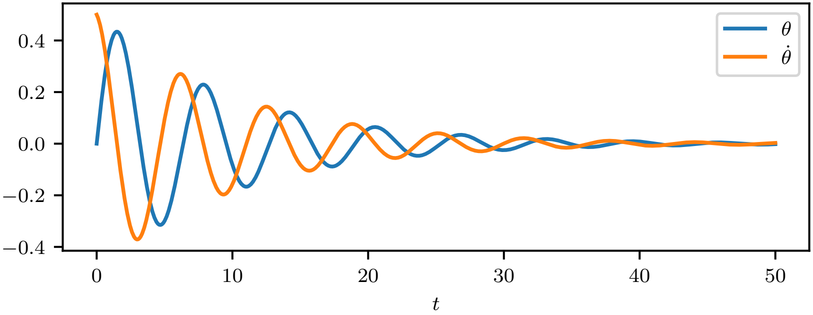
## Points fixes




Plan de phase du pendule simple pour $(k, \omega_0) = (0.1, 1)$.

# Le pendule simple

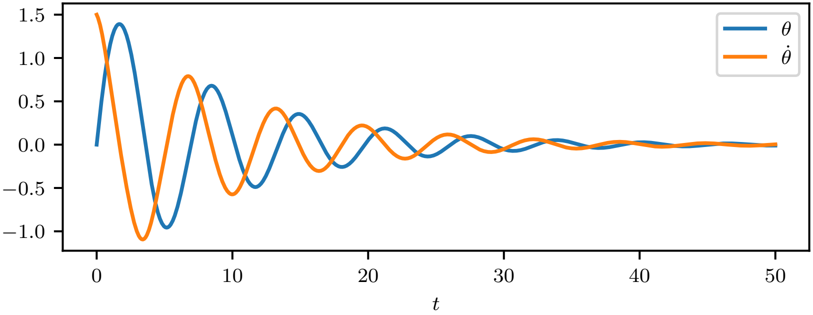
## Evolution du système




Evolution du pendule simple pour différentes conditions initiales.

# Le pendule simple

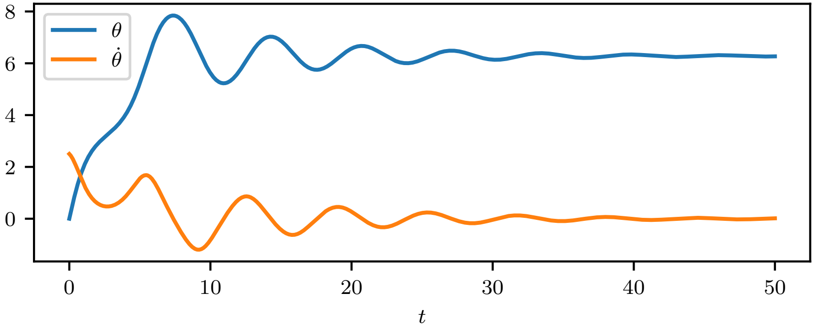
## Evolution du système




Evolution du pendule simple pour différentes conditions initiales.

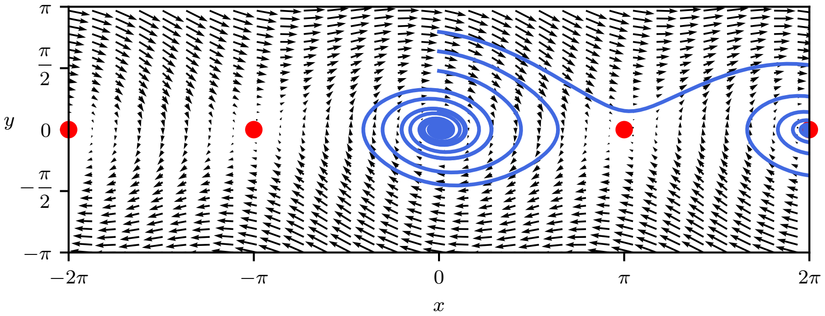
# Le pendule simple

Evolution du système




Evolution du pendule simple pour différentes conditions initiales.

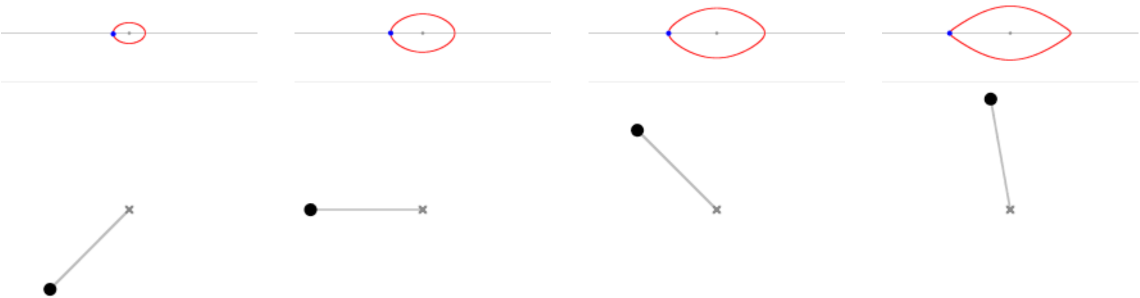
Trajectoires




Plan de phase du pendule simple pour $(k, \omega_0) = (0.1, 1)$.

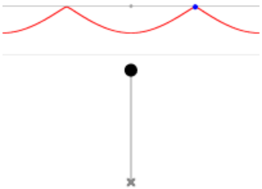
# Le pendule simple

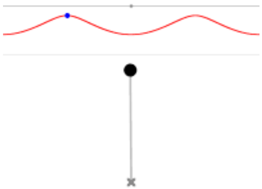
Les différents comportements dans l'espace des phases



# Le pendule simple

Les différents comportements dans l'espace des phases





# Illustration

## Le modèle de Lorenz

# Le modèle de Lorenz

## Un modèle simplifié de convection atmosphérique

- Le modèle de Lorenz est donné par

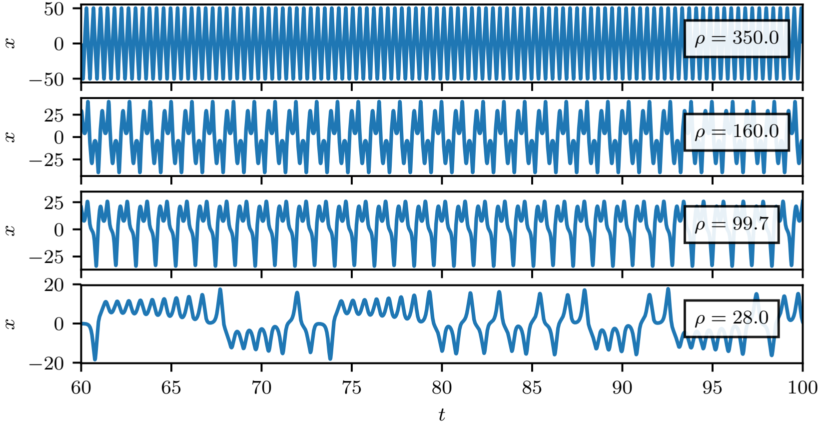
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z. \end{aligned}$$

  Ici, on fixe $\sigma = 10$ et $\beta = {}^{8}/_{3}$.

- C'est modèle simplifié de convection atmosphérique développé en 1963 par E. Lorenz.

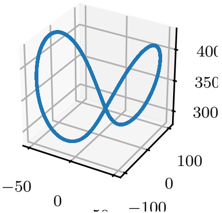
# Le modèle de Lorenz

Evolution du système pour différents $\rho$

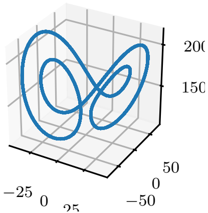


# Le modèle de Lorenz

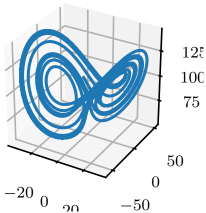
## Portrait de phase



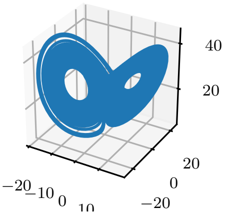

$\rho = 350$




$\rho = 160$



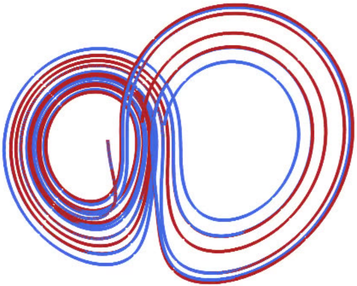

$\rho = 99.7$




$\rho = 28$

# Le modèle de Lorenz

Un système chaotique



# Illustration

L'équation logistique

# L'équation logistique

## Un modèle démographique simplifié

- L'équation logisitque, ou modèle de Verhulst, est donné par

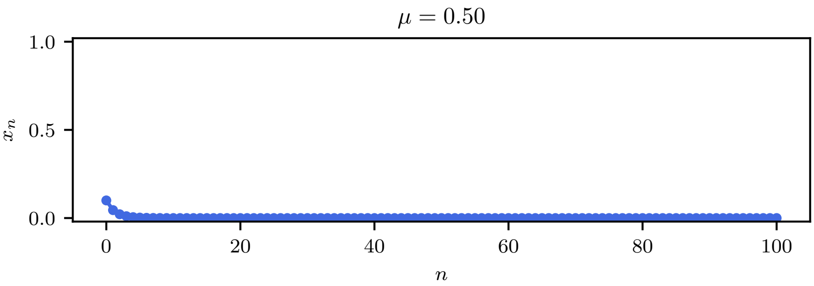
$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

avec $0 \leq x_n \leq 1$ et $\mu \in [0, 4]$.

- Ce modèle en temps discret a été popularisé en 1976 par le biologiste Robert May.

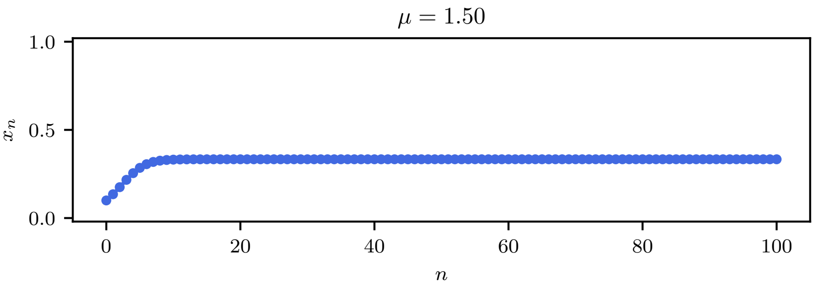
# L'équation logistique

L'un des routes vers le chaos



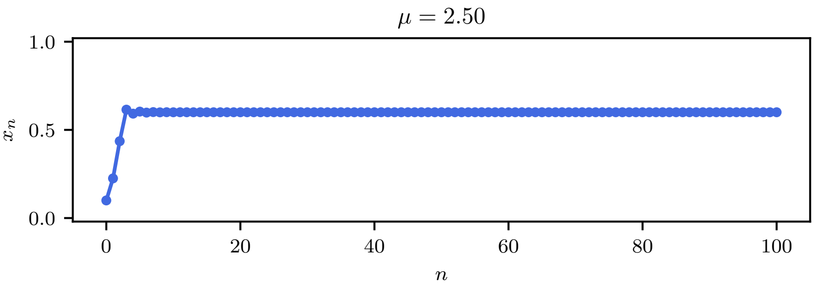
# L'équation logistique

L'un des routes vers le chaos



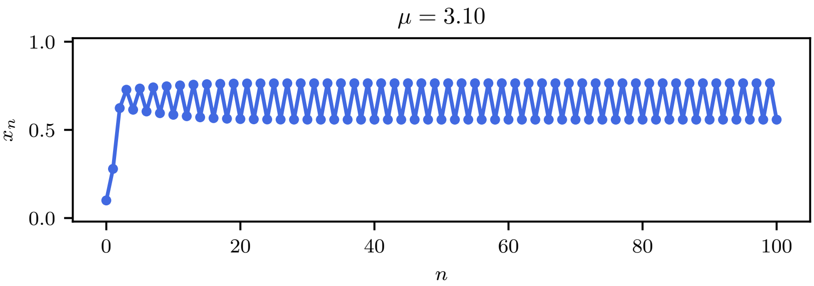
# L'équation logistique

## L'un des routes vers le chaos



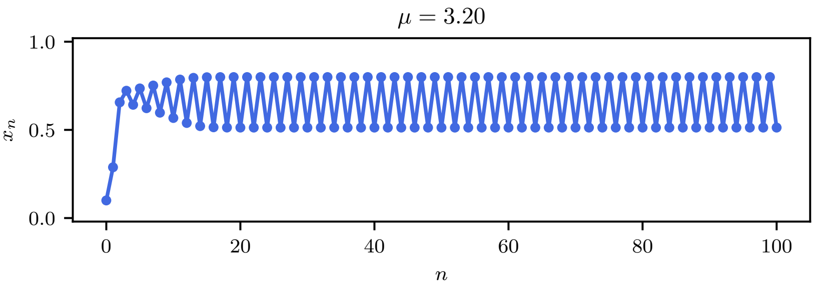
# L'équation logistique

L'un des routes vers le chaos



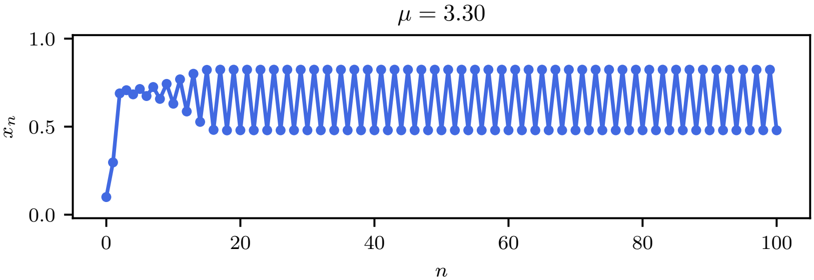
# L'équation logistique

L'un des routes vers le chaos



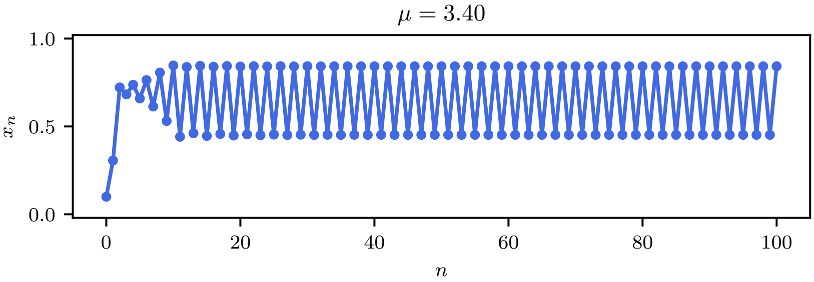
# L'équation logistique

## L'un des routes vers le chaos



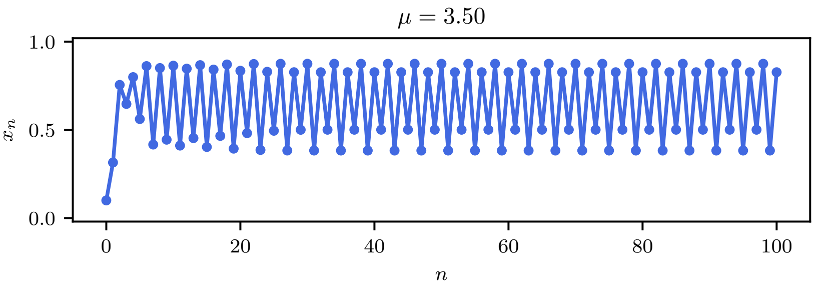
# L’équation logistique

L’un des routes vers le chaos



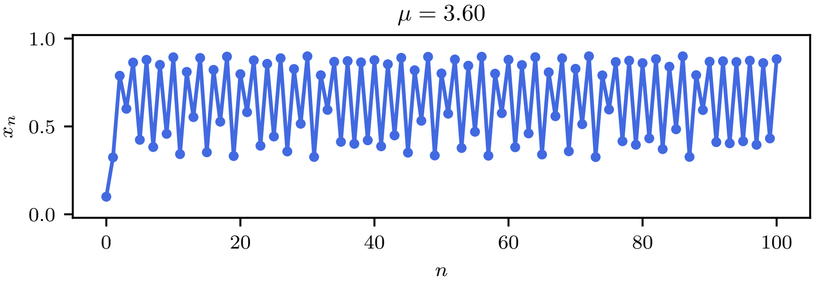
# L'équation logistique

L'un des routes vers le chaos



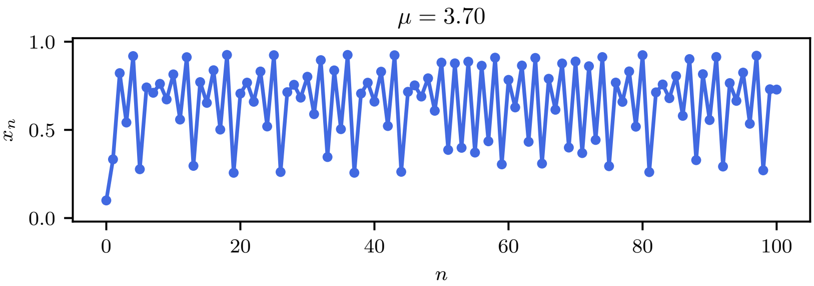
# L'équation logistique

L'un des routes vers le chaos



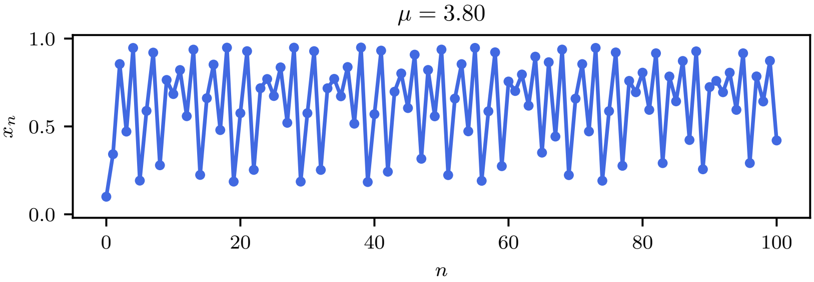
# L'équation logistique

L'un des routes vers le chaos



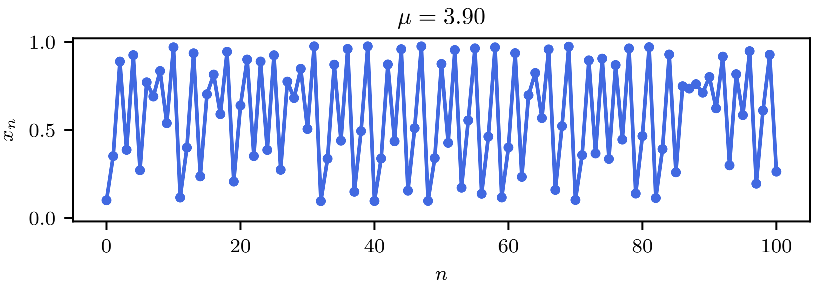
# L'équation logistique

## L'un des routes vers le chaos



# L'équation logistique

L'un des routes vers le chaos



# L'équation logistique

Diagramme de bifurcation