

Sorular

VK

March 12, 2020

Bazen çevreden hoşuma giden sorular görüyorum. Bunları da çözüp atmak yerine bir yerde depolayıp örnek sorular oluşturma fikri aklıma geldi. O yüzden Github'ta tutayım dedim, belki gün gelir yeterli soru birikirse millet de faydalanır (faydalanamadı).

1 Soru: 2020/03/12

Soru: $\int_0^\infty t e^{-kt^2} dt = \frac{1}{2k}$ ise n 'in tek degerleri için $\int_0^\infty t^n e^{-kt^2} dt$ nedir?

Cevap:

n tek ise $n = 2m + 1 \quad \forall m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ yazılabilir. Öyleyse integral:

$$\int_0^\infty t^{2m+1} e^{-kt^2} dt = \int_0^\infty t^{2m} t e^{-kt^2} dt \quad (1)$$

Bunu integral reduction ile çözmeliyiz. Ama önce değişken dönüşümü yapalım. $z = t^2$ için $dz = 2t dt$ olur.

$$z = t^2 \quad (2)$$

$$dz = 2t dt \quad (3)$$

$$t^{2m} = (t^2)^m = z^m \quad (4)$$

$$t \rightarrow 0, \quad z \rightarrow 0 \quad (5)$$

$$t \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow \infty \quad (6)$$

Öyleyse:

$$\underbrace{\frac{1}{2} \int_0^\infty z^m e^{-kz} dz}_{I(m)} \quad (7)$$

Bundan sonra $I(m)$ 'i çözmek integral reduction ile çok kolay! Tabi yardımımıza

kısmi integrasyon yetişsin. $\int v du = uv - \int u dv$

$$v = z^m \quad (8)$$

$$dv = mz^{m-1} \quad (9)$$

$$du = e^{-kz} dz \quad (10)$$

$$u = -e^{-kz}/k \quad (11)$$

$$(12)$$

Yerlerine yazarsak:

$$I(m) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{-e^{-kz} z^m / k}_{f(z)} \bigg|_0^\infty + \frac{m}{k} \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\infty z^{m-1} e^{-kz} dz}_{I(m-1)} \right) \quad (13)$$

Burada $f(z)$ hesaplanırsa

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(-\frac{z^m}{e^{kz}} \right) = 0 \quad (14)$$

$$f(0) = 0 \quad (15)$$

Böylelikle Denklem (13):

$$I(m) = \frac{m}{k} I(m-1) \quad (16)$$

$m = 0$ için soruda verildiği üzere $I(0) = 1/(2k)$ olduğundan:

$$I(1) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2k^2} \quad (17)$$

$$I(2) = \frac{2}{k} \cdot \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{k^3} \quad (18)$$

$$I(3) = \frac{3}{k} \cdot \frac{1}{k^3} = \frac{3}{k^4} \quad (19)$$

$$\vdots \quad (20)$$

$$I(m) = \frac{m!}{2k^{m+1}} \quad (21)$$

Burada tabi soruda n verildiği için m cinsinden bırakmak yakışık almaz. Onu da çevirmek lazım (çevirmedi)