Université Bordeaux 1 **MHT812 – Master**
Mathématiques Année 2012–2013

FEUILLE D'EXERCICES n° 13

Exercice 1 – On reprend l'exercice 4 de la feuille 11. Soit K un corps de caractéristique nulle. Dans $K[x,y]$ on utilise $\prec = \prec_{\text{grlex}}$, où $y \prec x$. Soient $g = x^3 - 2xy$, $h = x^2y - 2y^2 + x$, $G = \{g, h\}$ et $I = < G >$. Soit B la base de Gröbner réduite de I.

1) Quels est l'ensemble S des monômes standards de $K[x,y]/I$ pour B ? Quelle est la dimension de $K[x,y]/I$ comme K-espace vectoriel ?

2) Écrire le produit dans $K[x,y]/I$ de chaque couple d'éléments de S en fonction des éléments de S.

3) Soit $f = x^5 + y^2 + xy$. Quelle est la forme normale $n(f)$ de f par rapport à B ? Écrire f sous la forme $f = n(f) + ag + bh$.

4) Quelle est la base de Gröbner réduite de I pour l'ordre lexicographique, où $y \prec x$? Donner l'ensemble des monômes standards correspondant.

Exercice 2 –

1) On reprend l'exercice 5 de la feuille 11. Dans $k[x,y,z]$, soient $f_1 = x - z^4$, $f_2 = y - z^5$ et $I = < f_1, f_2 >$. Quelle est la dimension du k-espace vectoriel $k[x,y,z]/I$?

2) Même question pour le k-espace vectoriel $k[x,y]/I$, où $I = < x^5y + xy^5, x^2y^3 >$.

Exercice 3 – Soit $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Soit I un idéal de A, et soit B la base de Gröbner réduite de I pour un ordre donné sur les monômes. Soient f et g deux éléments de A. Montrer que $f + I = g + I$ si et seulement si f et g ont même forme normale par rapport à B.

Exercice 4 – [Systèmes linéaires et bases de Gröbner]
Soient k un corps, n un entier naturel non nul et $A = (a_{i,j})_{i,j}$ une matrice de $M_n(k)$. Soient $R = k[x_1, \dots, x_n]$ et

$$G_A = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \in R \ : \ 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$$

l'ensemble des polynômes linéaires correspondant aux lignes de la matrice A. On note $I_A = < G_A >$ l'idéal de R engendré par les éléments de G_A. Soit $V(G_A) = V(I_A) = \operatorname{Ker} A$ l'ensemble des solutions du système $Ax = 0$.

1) Montrer que si $L \in \mathrm{GL}_n(k)$, alors $I_{LA} = I_A$.

2) On suppose qu'il existe $L \in \mathrm{GL}_n(k)$ telle que

$$U = LA = \begin{pmatrix} I_r & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $V \in M_{r,n-r}(k)$. Montrer que G_U est une base de Gröbner réduite de I_A pour tout ordre $\prec$ sur les monômes tel que $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n$.

3) Quelle est la base de Gröbner réduite de I_A dans le cas où A est inversible ?