Master CSI 1 2015-2016

Théorie de l'information, MA7W08EX : Examen du 11 décembre 2015

Master Sciences et Technologies, mention Mathématiques ou Informatique, spécialité Cryptologie et Sécurité informatique

Responsable : Gilles Zémor

Durée : 3h. Sans document. Les exercices sont indépendants.

– EXERCICE 1. Soient X une variable aléatoire de Bernoulli de loi uniforme $P(X=0) = P(X=1) = 1/2$. Soient Y et Z deux variables de même loi que X et telles que X, Y, Z sont indépendantes dans leur ensemble. Calculer l'information mutuelle $I(X+Y, X+Y+Z)$ où l'addition s'entend dans les entiers.

– EXERCICE 2. On considère le canal dont l'entrée X prend ses valeurs dans l'alphabet $\{0,1,2,3\}$ et dont la sortie Y prend ses valeurs dans $\{0,1,2,3,4\}$ et est obtenue à partir de X en lui ajoutant l'entier 0 ou l'entier 1, avec probabilité 1/2. En faisant l'hypothèse raisonnable que l'information mutuelle $I(X,Y)$ est maximisée pour une loi de X telle que $P(X=0) = P(X=3)$ et $P(X=1) = P(X=2)$, trouver la capacité du canal.

– EXERCICE 3. Soit $\mathcal{C}$ un canal discret sans mémoire. Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires, prenant chacune leurs valeurs dans l'alphabet d'entrée du canal. Soient Y_1 et Y_2 les variables de sortie correspondantes. En supposant que X_1 et X_2 sont indépendantes de même loi, montrer que $I((X_1,X_2),(Y_1,Y_2)) = 2I(X_1,Y_1)$.

– EXERCICE 4. Soit C un code de Hamming binaire en longueur $15 = 2^4 - 1$.

a) Rappeler quels sont ses paramètres.

b) Montrer qu'étant données deux positions distinctes $i, j \in \{1, 2, \ldots, 15\}$, il existe un unique mot $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots x_{15})$ du code C de poids 3 tel que $x_i = x_j = 1$. En constatant qu'un mot $\mathbf{x}$ de poids 3 admet 3 paires de positions $\{i, j\}$ telles que $x_i = x_j = 1$, en déduire le nombre total de mots de C de poids 3.

c) On considère maintenant un code de Hamming ternaire (sur l'alphabet $\{0, 1, -1\}$) de longueur $13 = (3^3 - 1)/2$. Calculer le nombre de mots de poids 3 du code.

– EXERCICE 5. Soit la matrice de parité

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$