Devoir maison, Modèles de calcul, 2012-13.

On attachera une grande importance à la clarté et à la concision des justifications.

Rappels :

- Un ensemble $X \subseteq U$ est *dénombrable* s'il est fini, ou il existe une fonction $f : \mathbb{N} \to U$ telle que $f(\mathbb{N}) = U$.
- Une fonction $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ est *calculable*, s'il existe un programme WHILE (ou GOTO) qui la calcule.
- Un ensemble $X \subseteq \mathbb{N}$ est *semi-décidable*, s'il existe un programme WHILE (ou GOTO) qui retourne 1 sur $x \in \mathbb{N}$ si et seulement si $x \in X$. (Si $x \notin X$ le programme peut soit ne pas terminer, ou retourner une valeur différente).
- Un ensemble $X \subseteq \mathbb{N}$ est *décidable*, s'il existe un programme WHILE (ou GOTO) qui retourne 1 sur $x \in \mathbb{N}$ si et seulement si $x \in X$, et qui *termine toujours*.
- Un *problème de décision* est défini par un ensemble d'instances positives (c-à-d, instances où la réponse est "oui").
- Les notions *récursif* et *décidable* sont équivalentes. De même pour *récursivement-énumerable* et *semi-décidable*.
- Le problème universel *UNIV* est défini par : (n, m) est une instance positive si le programme P_n termine sur l'entrée m.
- Une réduction $P_1 \leq P_2$ du problème P_1 vers le problème P_2 est une fonction calculable f qui transforme des instances de P_1 en instances de P_2 tel que x est une instance positive de P_1 si et seulement si $f(x)$ est une instance positive de P_2.

Exercice 1 Est-ce que les ensembles suivants sont dénombrables ? Justifiez votre réponse.

- L'ensemble des sous-parties de $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des sous-parties *finies* de $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des arbres binaires enracinés finis.
- L'ensemble des arbres binaires enracinés infinis.
- L'ensemble des programmes C.
- l'ensemble des programmes C qui compilent.

Exercice 2 Justifiez les assertions suivantes :

1. Toute fonction primitive-récursive est calculable.
2. Toute fonction totale $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ telle que $f(n) = 1$ si $n \geq 42$ est primitive-récursive.
3. Toute fonction $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ telle que $f(n)$ n'est pas défini si $n > 42$, est calculable.

Exercice 3 Montrez que les fonctions suivantes sont récursives, en donnant le schéma de récursion :

1. $div(m, n) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ retourne la valeur de la division entière de m par n, si $n > 0$, et 1 sinon.

2. *reste*$(m, n) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ retourne le reste de la division entière de m par n, si $n > 0$, et 0 sinon.
3. *premier*$(n) : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ retourne 1 si n est premier, et 0 sinon.

Est-ce que ces fonctions sont primitives-récursives ? Justifiez votre réponse.

Exercice 4 Pour une fonction fixée de codage/décodage et tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle P_n le programme WHILE dont le code est l'entier n. On considère les deux problèmes suivants :

$P1$: *Entrée :* n.
Question : Est-ce que P_n s'arrête sur l'entrée 0 ?

$P2$: *Entrée :* n.
Question : Est-ce qu'il existe un entier $M \in \mathbb{N}$ tel que P_n s'arrête sur toute entrée $m \geq M$?

Montrez que la fonction $R : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui suit est une réduction de $P1$ vers $P2$: sur l'entrée n, la fonction R retourne le code du programme WHILE π suivant :
- π reçoit en entrée un entier.
- Sur l'entier m, le programme π simule P_n sur l'entrée 0 pendant m pas de calcul.
- Si la simulation termine avant, alors π s'arrête.