Master CSI 1 — 2009-2010

Théorie de l'information : DS du 5 mars 2010

Durée : 1h30. Sans document. Les exercices sont indépendants.

– EXERCICE 1. Soient X et Y deux variables *de même loi*. On définit :

$$\rho = 1 - \frac{H(X\,|\,Y)}{H(Y)}.$$

a) Exprimer ρ en fonction de $I(X,Y)$ et de $H(Y)$.

b) Montrer que $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Quand est-ce que $\rho = 0$? Quand est-ce que $\rho = 1$?

– **Solution.**

a)

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{H(Y) - H(X\,|\,Y)}{H(Y)} = \frac{H(Y) - H(X,Y) + H(Y)}{H(Y)} \\ &= \frac{H(Y) + H(X) - H(X,Y)}{H(Y)} \quad (H(Y) = H(X) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ ont même loi}) \\ &= \frac{I(X,Y)}{H(Y)}.\end{aligned}$$

b) Comme X et Y ont même loi $H(X\,|\,Y) = H(X,Y) - H(Y) = H(Y\,|\,X)$, et $0 \leqslant H(Y\,|\,X) \leqslant H(Y)$ impliquent $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. On a $\rho = 0$ si et seulement si X et Y sont indépendantes et $\rho = 1$ si et seulement si Y est une fonction de X.

– EXERCICE 2. Soient X, Y, Z trois variables aléatoires.

a) Démontrer la formule :

$$H(X,Y,Z) = H(X) + H(Y\,|\,X) + H(Z\,|\,X,Y).$$

b) On suppose que X, Y, Z sont trois variables de Bernoulli de même loi avec $P(X = 0) = P(X = 1) = 1/2$. On suppose de plus que X, Y, Z sont indépendantes *deux à deux*. Démontrer que

$$H(X,Y,Z) \geqslant 2 \text{ shannons}.$$

c) Montrer que si Y et Z sont deux variables indépendantes de même loi de Bernoulli $P(Y = 0) = P(Y = 1) = 1/2$, et que si $Z = X + Y \mod 2$, alors X, Y, Z sont deux à deux indépendantes et $H(X,Y,Z) = 2$ shannons.

– **Solution.**

a)

$$\begin{aligned} H(X,Y,Z) &= H(X,Y) + H(Z \,|\, X,Y) \\ &= H(X) + H(Y \,|\, X) + H(Z \,|\, X,Y). \end{aligned}$$

b) L'égalité précédente implique :

$$\begin{aligned} H(X,Y,Z) &\geqslant H(X) + H(Y \,|\, X) \\ &\geqslant H(X) + H(Y) \end{aligned}$$

car $H(Y) = H(Y \,|\, X)$ puisque X et Y sont indépendantes. D'où la réponse.

c) D'après la première question on a, en intervertissant les rôles de Z et Y :

$$H(X,Y,Z) = H(X) + H(Z \,|\, X) + H(Y \,|\, X,Z).$$

Mais comme $Y = X + Z \mod 2$ on a $H(Y \,|\, X,Z) = 0$ donc

$$H(X,Y,Z) = H(X) + H(Z \,|\, X).$$

Mais d'après la deuxième question on a $H(X,Y,Z) \geqslant 2$ dès que X et Y sont indépendantes ce qui est le cas ici. Donc $H(Z \,|\, X) = 1 = H(Z)$ et Z et X sont indépendantes. Par symétrie Z est aussi indépendante de Y.

– Exercice 3. Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs a, b, c, d, e, f, g, h de loi de probabilité $(P(X=a), P(X=b), \ldots, P(X=h))$ égale à :

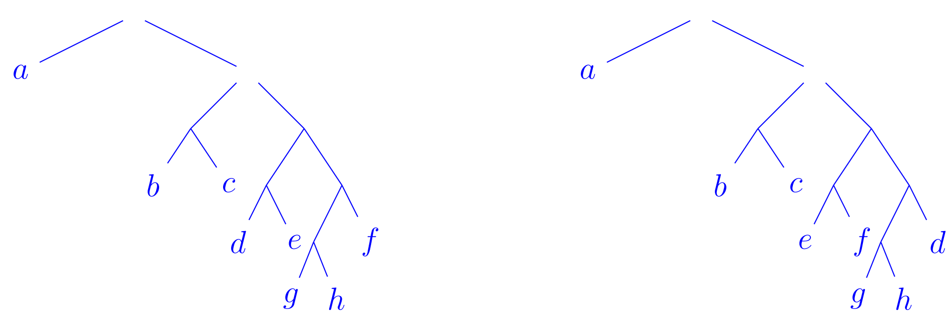
$$(0{,}42,\ 0{,}19,\ 0{,}19,\ 0{,}06,\ 0{,}05,\ 0{,}04,\ 0{,}03,\ 0{,}02).$$

a) Montrer qu'il y a deux arbres de Huffman binaires pour X, et les trouver. Donner un code de Huffman associé.

b) Trouver la longueur moyenne $\overline{\ell}$ pour ce code et cette loi de probabilité.

– **Solution.**

a) Les deux arbres de Huffman sont les suivants :



Des codages associés sont les suivants :

$a \mapsto$	0	$a \mapsto$	0
$b \mapsto$	100	$b \mapsto$	100
$c \mapsto$	101	$c \mapsto$	101
$d \mapsto$	1100	$d \mapsto$	1110
$e \mapsto$	1101	$e \mapsto$	1100
$f \mapsto$	1110	$f \mapsto$	1101
$g \mapsto$	11110	$g \mapsto$	11110
$h \mapsto$	11111	$h \mapsto$	$11111.$

b) $\bar{\ell} = 2.41.$

– Exercice 4. On considère le canal discret sans mémoire défini sur les alphabets d'entrée et de sortie tous les deux égaux à $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et par les probabilités de transition :

$$\begin{aligned} P(Y = i \,|\, X = j) \quad &= \tfrac{1}{2} \quad \text{si} \;\; j = i \mod 6 \\ &= \tfrac{1}{2} \quad \text{si} \;\; j = i + 1 \mod 6 \\ &= 0 \quad \text{si} \;\; j \neq i \mod 6 \;\; \text{et si} \;\; j \neq i + 1 \mod 6. \end{aligned}$$

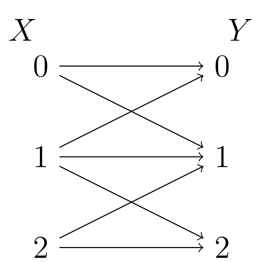
Trouver la capacité de ce canal.

– **Solution.** On a $H(Y \,|\, X) = \sum_x P(X = x) H(Y \,|\, X = x) = 1$ car pour tout $x = 0, 1, \ldots, 5$ on a $H(Y \,|\, X = x) = 1$.

Comme $I(X, Y) = H(Y) - H(Y \,|\, X)$, il s'agit de maximiser $H(Y)$, or Y est clairement uniforme lorsque X est uniforme. Donc

$$C = \log_2 6 - 1 = \log_2 3 = 1,58.$$

– Exercice 5. On considère le canal discret sans mémoire :



où les probabilités de transition sont données par :

$$P(Y=0|X=0) = P(Y=2|X=2) = \frac{2}{3}$$
$$P(Y=1|X=0) = P(Y=1|X=2) = \frac{1}{3}$$
$$P(Y=0|X=1) = P(Y=1|X=1) = P(Y=2|X=1) = \frac{1}{3}.$$

a) Calculer $H(Y|X)$ en fonction de la loi de X et montrer que cette quantité est minimale lorsque l'on a $P(X=1)=0$.

b) Montrer qu'il existe une loi de X telle que simultanément $P(X=1)=0$ et la loi de Y est uniforme. En déduire la capacité de ce canal.

– **Solution.**

a) On a :

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \sum_x P(X=x)H(Y|X=x) \\ &= (P(X=0)+P(X=2))\left(\frac{2}{3}\log_2\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\log_2 3\right)+P(X=1)\log_2 3 \\ &= \log_2 3 - \frac{2}{3}[P(X=0)+P(X=2)]. \end{aligned}$$

On en déduit donc que $H(Y|X)$ est minimisé lorsque $P(X=0)+P(X=2)$ est maximum, c'est-à-dire lorsque $P(X=1)=0$.

b) On constate que si $P(X=1)=0$ et $P(X=0)=P(X=2)=1/2$, alors $P(Y=0\,|\,X=0)=P(Y=2\,|\,X=2)=\frac{1}{2}\frac{2}{3}=1/3$. La loi de Y est alors uniforme et $H(Y)-H(Y|X)$ est forcément maximale dans ce cas et vaut :

$$C = \log_2 3 - \log_2 3 + \frac{2}{3}[P(X=0)+P(X=2) = \frac{2}{3}.$$