Université Bordeaux
Master Sciences & Technologies, Informatique. Session automne 2014
Examen Automates et Complexité IN7W21

17 décembre 2014, 8h30 – 11h30

Documents autorisés: transparents du cours et notes de TD.
On attachera une grande importance à la clarté et à la concision des justifications.
Le barème est indicatif.

Exercice 1 (3 points)

Considérez l'opération de différence entre deux langages L_1 et L_2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

$$L_1 \smallsetminus L_2 \;=\; \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; w \in L_1,\; w \notin L_2 \right\} .$$

a) Construisez deux *automates finis déterministes* (DFA) acceptant les langages $L_1 = ab^*$ et $L_2 = a^*b$, respectivement.

b) Construisez un DFA pour le *complément* de L_2 (d'abord, assurez-vous que le DFA pour L_2 est complet).

c) Construisez un DFA qui accepte le langage $L_1 \smallsetminus L_2$.

Exercice 2 (6 points)

Etant donné un nombre entier $k > 0$, considerez le langage suivant sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

$$L_k \;=\; \left\{ u \cdot v \cdot u \;\middle|\; u, v \in \Sigma^\star,\; |u| = k \right\} .$$

a) Montrer que l'*equivalence de Myhill-Nerode* pour le langage L_k a au moins 2^k classes.

b) Justifiez que n'importe quel automate deterministe (DFA) acceptant L_k possède au moins 2^k états.

c) Décrivez de manière informelle une *automate déterministe bidirectionnel* (2DFA) qui accepte L_k et possède un nombre d'états linéaire en k.

Exercice 3 (2 points)

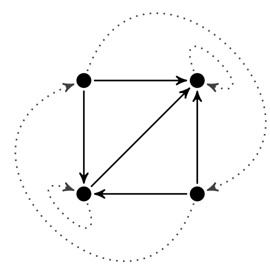
Donnez un *grammaire hors-contexte* pour le langage suivant:

$$L \;=\; \left\{ a^i\, b^{i+j}\, c^j \;\middle|\; i, j \in \mathbb{N} \right\} .$$

Exercice 4 (6 points)

Considérez le problème suivant, abrégé AUTOMORPHISM. L'input du problème est un graphe orienté $G = (V, E)$, où V est un ensemble fini de sommets et $E \subseteq V^2$ est un ensemble fini d'arêtes. Étant donné un graphe G en input, le problème consiste à vérifier s'il existe un *automorphisme non-trivial* sur G, c'est-à-dire, s'il existe une bijection $f : V \to V$ tel que (1) pour tous les sommets $v_1, v_2 \in V$, nous avons $(v_1, v_2) \in E$ si et seulement si $\big(f(v_1), f(v_2)\big) \in E$ et (2) il existe au moins un sommet $v \in V$ où $f(v) \neq v$.

Example: Le graphe suivant possède un automorphisme non-trivial, comme indiquée par les flèches en pointillés:



a) Justifiez que le problème AUTOMORPHISM est dans la classe de complexité **NP**.

b) Donnez une réduction polynomiale de AUTOMORPHISM à SAT.

Indication: Vous pouvez associer avec chaque paire de sommets v, w du graphe $G = (V, E)$ une variable Booléenne $x_{v,w}$, dont la valeur doit être vrai si et seulement si $f(v) = w$. Ensuite, vous pouvez faire respecter les propriétés suivantes en utilisant des formules appropriées:

- f est une *fonction*, c'est-à-dire, pour chaque sommet $v \in V$, il existe un sommet $w \in V$ tel que $f(v) = w$, et il n'y a jamais trois sommets $v, w_1, w_2 \in V$, avec $w_1 \neq w_2$, tels que $f(v) = w_1$ et $f(v) = w_2$;
- f est *injective*, c'est-à-dire, il n'y a jamais trois sommets $v_1, v_2, w \in V$, avec $v_1 \neq v_2$, tels que $f(v_1) = w$ et $f(v_2) = w$;
- f est *surjective*, c'est-à-dire, pour chaque sommet $w \in V$, il existe un sommet $v \in V$ tel que $f(v) = w$;
- f préserve les arêtes, c'est-à-dire, pour chaque arête $(v_1, v_2) \in E$, il existe une arête $(w_1, w_2) \in E$ tel que $f(v_1) = w_1$ et $f(v_2) = w_2$;
- f^{-1} préserve les arêtes, c'est-à-dire, pour chaque arête $(w_1, w_2) \in E$, il existe une arête $(v_1, v_2) \in E$ tel que $f(v_1) = w_1$ et $f(v_2) = w_2$;
- f est *non-trivial*, c'est-à-dire, il existe deux sommets $v, w \in V$, avec $v \neq w$, tels que $f(v) = w$.

Exercise 5 (3 points)

Rappelez-vous que le problème ISOMORPHISM consiste à vérifier si deux graphes orientés G_1 et G_2 donnés en input sont isomorphes. Supposons que nous voulons réduire le problème ISOMORPHISM au problème AUTOMORPHISM, comme défini dans l'exercice précédent. Qu'est-ce qui ne va pas dans la "réduction" suivante ?

> *Étant donné deux graphes G_1 et G_2 en input, on construit en temps polynomial l'union disjointe G de G_1 et G_2. Alors, G_1 et G_2 sont isomorphes si et seulement si G possède un automorphisme non-trivial.*