Master CSI-UE / Master CSI-THCS-Analyse de Fourier

# Devoir maison 1
# à remettre le mercredi 28 Octobre 2009

[1]

## Exercice 1

1) Trouver l'ensemble des points à coordonnées entières de la droite d'équation $11x + 7y = 1$. Parmi ces points déterminer ceux dont l'abscisse $x$ vérifie la condition $0 \leq x \leq 20$.

2) Trouver l'ensemble des entiers $n \in [0, 1200]$ vérifiant

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{11} \\ x \equiv 5 \pmod{8} \end{cases}$$

## Exercice 2

1) Soit $f = [1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1]$. Calculer la transformée de Walsh de $f$ en utilisant l'algorithme rapide.

2) Donner les compressions à 25% et 50% de $f$ en utilisant la méthode du cours. Calculer en norme $l^2$ les erreurs associées.

## Exercice 3

Calculer la compression à 50% de l'image numérisée

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

## Exercice 4

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la formule $f(t) = cos^2(t/2)$ si $-\pi \leq t \leq \pi$ et $f(t) = 0$ si $|t| > \pi$.

1) Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et calculer $\hat{f}$. Représenter graphiquement sous Matlab $f$ et $\hat{f}$ sur l'intervalle $[-4\pi, 4\pi]$, avec un graphique contenant titre et légende.

[1]Pour toute question concernant ce Devoir s'adresser à charles.dossal@math.u-bordeaux1.fr ou esterle@math.u-bordeaux.fr

2) Appliquer la formule de Parseval à $f$ et expliciter la formule obtenue.

3) A t'on $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$? Si oui, expliciter les formules obtenues en appliquant à $\hat{f}$ la formule d'inversion de Fourier.

### Exercice 5

1) En représentant une fonction booléenne $f$ sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ sous la forme $f = \{f(\bar{0}, \bar{0}), f(\bar{0}, \bar{1}), f(\bar{1}, \bar{0}), f(\bar{1}, \bar{1})\}$, écrire les fonctions booléennes affines sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

2) On pose $f = \{\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}\}$. Calculer $f^*$.

3) Calculer directement la distance de Hamming de $f$ aux fonctions booléennes affines et vérifier que pour tout $y \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ on a bien $d(f, \phi_y) = 2 - \frac{W(f^*)(y)}{2} \geq 1$. En déduire que $f$ est une fonction courbe sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, c'est à dire que $d(f, Aff) = 1$.

4) En utilisant la transformée de Walsh inverse, déterminer toutes les fonctions courbes sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.