Master CSI-ENSM-THCS
MHT 723-Analyse de Fourier

Examen du 5 novembre 2010, de 8h à 10h

Exercice 1

Calculer la transformée de Walsh du vecteur h suivant en utilisant la transformée rapide.

$$h = [1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1].$$

Solution :
Un calcul élémentaire donne

$$Wh = [2, 2, 2, 2, -6, 2, 2, 2] \tag{1}$$

Exercice 2

Soit f la fonction de $\mathbb{F}_2^3 \to \mathbb{F}_2$ définie par

$$f((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3.$$

1. En utilisant l'ordre de $\mathbb{F}_2^3$ défini en cours et utilisé en TD (binaire inversé), écrire le vecteur associé à la fonction f^*.
2. En utilisant la transformée de Walsh de f^* calculer la distance de f à l'ensemble des fonctions affines.
3. Déterminer l'ensemble des fonctions affines réalisant ce minimum (donner leur expression polynomiale).

Solution :

1. L'ordre binaire inversé est le suivant :

	$(x_1,$	x_2	$,x_3)$
1	(0,	0	,0)
2	(1,	0	,0)
3	(0,	1	,0)
4	(1,	1	,0)
5	(0,	0	,1)
6	(1,	0	,1)
7	(0,	1	,1)
8	(1,	1	,1)

Si on applique la formule définissant f en utilisant l'ordre ci dessus on obtient les vecteurs suivants

$$f = [0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0] \text{ et } f^* = [1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1]$$

2. La distance d'une fonction f aux fonctions affines est donnée par la formule suivante :

$$d(f, \mathcal{A}) = \frac{1}{2}\left(2^k - \max_k |Wf^*(k)|\right)$$

Dans le cas présent on a $d(f, \mathcal{A}) = (8-6)/2 = 1$.

3. Comme le maximum de la valeur absolue est atteint à la cinquième composante et que cette composante correspond à la fonction $g((x_1, x_2, x_3)) = x_3$ d'après l'ordre décrit au dessus et que cette plus grande valeur absolue et négative, la fonction affine la plus proche est $h((x_1, x_2, x_3)) = x_3 + 1$.

Exercice 3

Déterminer l'ensemble des morphismes de G dans H et préciser ceux qui sont bijectifs dans les cas suivants :

1. $G = (\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, +)$ et $H = (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, +)$,
2. $G = (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, +)$ et $H = (\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, +)$,
3. $G = (\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, +)$ et $H = (\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}^*, \times)$.

Solutions :

1. Comme $\bar{1}$ engendre $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$, tout morphisme de $(\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, +)$ vers $(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, +)$ est entièrement défini par l'image de $\bar{1}$. En effet

$$\phi(\bar{0}) = (0,0),\ \phi(\bar{2}) = \phi(\bar{1}) + \phi(\bar{1}),\ \phi(\bar{3}) = \phi(\bar{1}) + \phi(\bar{1}) + \phi(\bar{1}). \tag{2}$$

En choisissant pour image de $\bar{1}$ les 4 éléments de $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ et en utilisant (2) on construit 4 morphismes différents. On a donc 4 morphismes

$$\phi_1(\bar{x}) = (0,0)\ \forall x \in \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$$

$$\phi_2(\bar{0}) = (0,0),\ \phi_2(\bar{1}) = (0,1),\ \phi_2(\bar{2}) = (0,0) \text{ et } \phi_2(\bar{3}) = (0,1).$$

$$\phi_3(\bar{0}) = (0,0),\ \phi_3(\bar{1}) = (1,0),\ \phi_3(\bar{2}) = (0,0) \text{ et } \phi_3(\bar{3}) = (1,0).$$

$$\phi_4(\bar{0}) = (0,0),\ \phi_2(\bar{1}) = (1,1),\ \phi_4(\bar{2}) = (0,0) \text{ et } \phi_4(\bar{3}) = (1,1).$$

On remarque qu'aucun n'est bijectif car l'image de $\bar{2}$ est toujours $(0,0)$.

2. Le groupe $(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, +)$ est engendré par deux éléments, par exemple $(0,1)$ et $(1,0)$. Chaque morphisme est ainsi défini par l'image de ces deux éléments. En effet on a toujours

$$\phi((0,0)) = \bar{0} \text{ et } \phi((1,1)) = \phi((0,1)) + \phi((1,0)) \tag{3}$$

Comme $\phi((0,1)) + \phi((0,1)) = \phi((0,0)) = \bar{0}$ on en déduit que $\phi((0,1)) = \bar{0}$ ou $\phi((0,1)) = \bar{2}$. De même pour $\phi((1,0))$. En utilisant (3) et les 4 choix possibles pour les images de $(0,1)$ et $(1,0)$ on construit 4 morphismes. Aucun n'est bijectif car aucun élément n'a $\bar{1}$ pour image dans aucun morphisme.

3. A nouveau on remarque que tout morphisme est entièrement défini par l'image de $\bar{1}$. En effet

$$\forall a \in (\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, +)\, \phi(a) = (\phi(\bar{1}))^a \tag{4}$$

En prenant chaque valeur de $((\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}^*), \times)$ pour image de $\bar{1}$ on construit 4 morphismes :

$$\phi_1(\bar{x}) = \dot{1}\, \forall x \in \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$$

$$\phi_2(\bar{0}) = \dot{1},\ \phi_2(\bar{1}) = \dot{2},\ \phi_2(\bar{2}) = \dot{4} \text{ et } \phi_2(\bar{3}) = \dot{3}.$$
$$\phi_3(\bar{0}) = \dot{1},\ \phi_3(\bar{1}) = \dot{3},\ \phi_3(\bar{2}) = \dot{4} \text{ et } \phi_3(\bar{3}) = \dot{2}.$$
$$\phi_4(\bar{0}) = \dot{1},\ \phi_2(\bar{1}) = \dot{4},\ \phi_4(\bar{2}) = \dot{1} \text{ et } \phi_4(\bar{3}) = \dot{4}.$$

On observe que ϕ_2 et ϕ_3 sont bijectifs.

Exercice 4

Ecrire une fonction matlab *ColonneWalsh* qui prend en entrée un entier k et un entier $n \leqslant 2^k$ et qui renvoie la n-ième colonne de la matrice de Walsh de dimension $2^k \times 2^k$. **Le programme ne doit calculer aucune matrice de Walsh** de manière à pouvoir être utilisé pour des valeurs de k de l'ordre de 15 sans qu'il y ait de problème de mémoire. On pourra utiliser une procédure récursive et exploiter la structure de la matrice de Walsh.

Exercice 5

Existe t'il des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$ non nulles presque partout telles que $f * f = f$? Même question dans $L^2(\mathbb{R})$.

Solution : $f * f = f$ est équivalent à $(\hat{f})^2 = \hat{f}$ c'est à dire est équivalent à

$$\forall \omega \in \mathbb{R}\, (\hat{f}(\omega))^2 = \hat{f}(\omega) \tag{5}$$

autrement dit $\forall \omega \in \mathbb{R}, \hat{f}(\omega) \in \{0, 1\}$. Attention cela ne signifie pas que $\hat{f}$ soit la fonction constante 0 ou la fonctiuon constante 1. Rien n'interdit que $\hat{f}$ puisse changer de valeur, qu'elle vaille 0 pour certaines valeurs de ω et 1 pour d'autres.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on sait que $\hat{f}$ est continue et tend vers 0 à l'infini. S'il existe $\omega_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\hat{f}(\omega_0) = 1$, comme $\lim\limits_{\omega \to \infty} \hat{f}(\omega) = 0$ et comme $\hat{f}$ est continue il existe ω_1 tel que $\hat{f}(\omega_1) = 1/2$ ce qui contredit le fait que $\hat{f}(\omega) \in \{0, 1\}\, \forall \omega \in \mathbb{R}$. Donc f est identiquement nulle. Il n'existe donc pas de fontion f non nulle de $L^1(\mathbb{R})$ telle que $f * f = f$.

La transformée de Fourier d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ mais n'est pas nécessairement continue et ne tend pas nécessairement vers 0 en l'infini. Si on prend par exemple une fonction f telle que $\hat{f}(\omega) = 1$ si $\omega \in [-1, 1]$ et $\hat{f}(\omega) = 0$ sinon, on construit une fonction f dans $L^2(\mathbb{R})$. Plus précisément on a dans ce cas $f(x) = \frac{\sin(x)}{\pi x}$. Il existe donc bien de telles fonctions dans $L^2(\mathbb{R})$.