Université Bordeaux 1. Master Sciences & Technologies, Informatique. Devoir surveillé *Modèles de calcul.*

Documents autorisés : transparents du cours et notes de TD.
On attachera une grande importance à la clarté et à la concision des justifications.

Exercice 1 (facile) Justifiez que l'ensemble des polynômes de la forme $\sum_{i=0}^{k} a_k x^k$ avec $a_i \in \mathbb{N}$ est dénombrable.

Exercice 2 (moyen) Montrez que le prédicat $C_1 : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ est primitif-récursif :

$$C_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } m \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = m^2 + m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vous pouvez au choix :

1. Soit montrer comment obtenir C_1 par un schéma primitif-récursif et utiliser le fait que la multiplication et la fonction sgn sont primitives-récursives.
2. Ou montrer comment calculer C_1 par un programme LOOP qui dispose des opérations additionelles $+, \times$ (addition et multiplication).

Exercice 3 (plus difficile) Montrez que le prédicat $C_2 : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ est primitif-récursif :

$$C_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } p, q \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = p^2 + q^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifiez votre réponse.

Exercice 4 (moyen)

1. (*vu en cours*) Montrez que le problème suivant est décidable. Justifiez bien votre réponse.
   - *Entrée :* programme WHILE P, avec variables $x_0, \ldots, x_{k-1}$, et entier N.
   - *Sortie :* OUI, si le calcul de P à partir des valeurs initiales $\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}$ est tel qu'aucune des variables ne dépasse la valeur N au cours du calcul.
2. Rappel : le problème UNIV_0 demande si un programme P termine sur l'entrée 0.
   Proposez une réduction du complémentaire de UNIV_0 au problème suivant :
   - *Entrée :* programme P, avec variables $x_0, \ldots, x_{k-1}$.
   - *Sortie :* OUI si à partir des valeurs initiales $\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}$ la variable x_{k-1} prend au cours de l'exécution de P des valeurs arbitrairement grandes.

   Indication : A partir d'un programme P vous allez construire un programme P' tel que P ne termine pas sur 0 si et seulement si x_{k-1} prend des valeurs arbitrairement grandes dans l'exécution de P'.