Master CSI-UE / Master CSI-THCS/ Master ENSM
Analyse de Fourier

Devoir maison 1
à remettre le vendredi 22 Octobre 2010

[1]

Exercice 1

1) Trouver l'ensemble des points à coordonnées entières de la droite d'équation $19x + 7y = 1$. Parmi ces points déterminer ceux dont l'abscisse x vérifie la condition $0 \leq x \leq 20$.

2) Déterminer l'inverse de $\overline{7}$ dans $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ et l'inverse de $\overline{5}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

3) Trouver l'ensemble des entiers $n \in [0, 1200]$ vérifiant

$$\begin{cases} x \equiv 1 \quad (mod\ 7) \\ x \equiv 3 \quad (mod\ 19) \\ x \equiv -1 \quad (mod\ 8) \end{cases}$$

Exercice 2

1) Soit $f = [5, 5, 3, 3, 1, 0, 0, 1]$. Calculer la transformée de Walsh de f en utilisant la "transformée de Walsh rapide."

2) Soit maintenant $h_1 = [18, 0, 4, 0, 14, 0, 4, 0]$ et $h_2 = [18, 0, 4, 2, 0, 0, 0, 0]$. Calculer les transformées de Walsh inverses de h_1 et h_2.

3) Calculer le signal obtenu en comprimant à 50% le signal f, puis le signal obtenu en conservant les quatre premiers termes de la transformées de Walsh de f et en annulant les quatre termes restants, et en calculant la transformée de Walsh inverse du résultat obtenu. Calculer en norme l^2 les erreurs associées. Quelle est la méthode de compression la plus efficace ?

Exercice 3

1) Calculer la transformée de Walsh de l'image numérisée $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ en utilisant la transformée de Walsh rapide sur les lignes, puis sur les colonnes de A.

2) Calculer la compression à 50% de A.

1. Pour toute question concernant ce Devoir s'adresser à esterle@math.u-bordeaux1.fr

Exercice 4

1) Donner un exemple d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas égale presque partout à une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Donner également un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

2) On pose $f(t) = 1/4$ pour $-1 \leq t \leq 1$, $f(t) = -1/4$ pour $-2 < t < -1$ et $1 < t < 2$, $f(t) = 0$ pour $t \leq -2$ et $t \geq 2$. Dessiner le graphe de f.

3) Calculer la transformée de Fourier de f.

4) En utilisant une formule classique, calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin^2(x)(1-cos(x))^2}{x^2} dx$.

5) En utilisant la formule d'inversion de Fourier, montrer que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|sinx|\,(1-cos(x))}{|x|} dx = +\infty.$$

6) On pose $g(t) = 1$ pour $-1 \leq t \leq 1$, $g(t) = 0$ pour $|t| > 1$. Calculer la transformée de Fourier de g, et expliciter la formule obtenue en appliquant la formule de Parseval à g.

7) Montrer que l'équation de convolution $g*y = f$ ne possède aucune solution $y \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 5

1) En représentant une fonction booléenne f sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ sous la forme $f = \{f(\bar{0},\bar{0}), f(\bar{0},\bar{1}), f(\bar{1},\bar{0}), f(\bar{1},\bar{1})\}$, écrire les fonctions booléennes affines sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

2) On pose $f = \{\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{1}\}$. Calculer f^*.

3) Calculer directement la distance de Hamming de f aux fonctions booléennes affines et vérifier que pour tout $y \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ on a bien $d(f,\phi_y) = 2 - \frac{W(f^*)(y)}{2} \geq 1$. En déduire que f est une fonction courbe sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, c'est à dire que $d(f, Aff) = 1$.

4) En utilisant la transformée de Walsh inverse, déterminer toutes les fonctions courbes sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.