Master CSI-UE / Master CSI-THCS-Analyse de Fourier

Corrigé du devoir maison du 3 décembre 2010

[1]

Exercice 1

On calcule la transformée de Fourier discrète de $u = [0,1,0,1,1,1,1,1]$ par FFT décimation temporelle, en commençant bien sûr par "inverser les bits".

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$bits$	000	001	010	011	100	101	110	111
$revbits$	000	100	010	110	001	101	011	111
$rev(k)$	0	4	2	6	1	5	3	7
$f(k)$	0	1	0	1	1	1	1	1
$rev(f)(k)$	0	1	0	1	1	1	1	1
$\omega_2 = 1$	1	-1	-1	-1	2	0	2	0
$\omega_4 = i$	2	$-1+i$	0	$-1-i$	4	0	0	0
$\omega_8 = e^{\frac{i\pi}{4}}, \hat{u}[k]$	6	$-1+i$	0	$-1-i$	-2	$-1+i$	0	$-1-i$

Donc $\hat{u} = [6, -1+i, 0, -1-i, -2, -1+i, 0, -1-i]$.

2) On note $v \overset{(8)}{*} w$ la convolution cyclique de v et w pour $v, w \in \mathbb{C}^7$. Soit $h = [h[0], ..., h[7]]$.

On a $u \overset{(8)}{*} v = h$ si et seulement si $\widehat{u \overset{(8)}{*} v} = \hat{h}$. Comme $\widehat{u \overset{(8)}{*} v} = \hat{u}.\hat{v} = [6\hat{v}[0], (-1+i)v[1], 0, (-1-i)v[3], -2v[4], (-1+i)v[5], 0, (-1-i)v[7]]$, on voit que l'équation $u \overset{(8)}{*} v = h$ possède des solutions si et seulement si $h[2] = h[6] = 0$.

Supposons maintenant que cette condition est vérifiée, et que $\hat{v}[2] = \hat{v}[6] = 0$. On a alors $u \overset{(8)}{*} v = h$ si et seulement si $\hat{v}[0] = \frac{\hat{h}[0]}{6}$, $\hat{v}[1] = \frac{\hat{h}[1]}{-1+i} = -\frac{(1+i)\hat{v}[1]}{2}$, $\hat{v}[3] = \frac{\hat{h}[3]}{-1-i} i = \frac{(-1+i)\hat{h}[3]}{2}$, $\hat{v}[4] = -\frac{\hat{h}[4]}{2}$, $\hat{v}[5] = -\frac{\hat{h}[5]}{-1+i} = -\frac{(1+i)\hat{h}[5]}{2}$, $\hat{v}[7] = -\frac{\hat{h}[7]}{-1-i} = \frac{(-1+i)\hat{v}[7]}{2}$.

On obtient

$$v = \mathcal{F}_8^{-1}\left(\left[\frac{\hat{h}[0]}{6}, \frac{(1+i)\hat{v}[1]}{2}, 0, \frac{(-1+i)\hat{h}[3]}{2}, -\frac{\hat{h}[4]}{2}, -\frac{(1+i)\hat{h}[5]}{2}, 0, \frac{(-1+i)\hat{v}[7]}{2}.\right]\right).$$

3) Supposons maintenant que $\hat{h} = [24,0,0,0,8,0,0,0]$. On obtient $v = \mathcal{F}_8^{-1}\left([4,0,0,0,-4,0,0,0]\right)$. On a alors

1. Pour toute question concernant ce corrigé s'adresser à esterle@math.u-bordeaux.fr

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{v}[k]$	4	0	0	0	-4	0	0	0
$\omega_8 = e^{\frac{i\pi}{4}}$	0	0	0	0	8	0	0	0
$\omega_4 = i$		0	0	0	8	0	8	0
$\omega_2 = -1$	0	0	0	0	8	8	8	8
$revbits$	0	8	0	8	0	8	0	8
$v[k]$	0	1	0	1	0	1	0	1

Donc l'équation $u \underset{8}{*} v = [24, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0]$ admet pour unique solution vérifiant $\hat{v}[2] = \hat{v}[6] = 0$ la suite $v = [0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]$.

Exercice 2

On va utiliser la FFT pour calculer le produit des deux polynômes $p = 1 + x^3$ et $q = x + x^4$. On peut effectuer les calculs dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, puisque le degré du produit est égal à 7. Les calculs sont analogues à ceux effectués dans le cours. On calcule les transformées de Fourier discrètes en décimation fréquentielle et les transformées de Fourier inverse en FFT décimation temporelle.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\tilde{p}[k]$	1	0	0	1	0	0	0	0
$\omega_8^{-1} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$	1	0	0	1	1	0	0	$e^{-\frac{3i\pi}{4}}$
$\omega_4^{-1} = -i$	1	1	1	i	1	$e^{-\frac{3i\pi}{4}}$	1	$ie^{-\frac{3i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$
$\omega_2^{-1} = -1$	2	0	$1+i$	$1-i$	$1+e^{-\frac{3i\pi}{4}}$	$1-e^{-\frac{3i\pi}{4}}$	$1+e^{-\frac{i\pi}{4}}$	$1-e^{-\frac{i\pi}{4}}$
$\mathcal{F}_8(p)[k]$ (Revbits ligne préc.)								
$\tilde{q}(k)$	0	1	0	0	1	0	0	0
$\omega_8^{-1} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$	1	1	0	0	-1	$e^{-\frac{i\pi}{4}}$	0	0
$\omega_4^{-1} = -i$	1	1	1	$-i$	-1	$e^{-i\frac{\pi}{4}}$	-1	$-ie^{-\frac{i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$
$\omega_2^{-1} = -1$	2	0	$1-i$	$1+i$	$-1+e^{-\frac{i\pi}{4}}$	$-1-e^{-\frac{i\pi}{4}}$	$-1+e^{-\frac{3i\pi}{4}}$	$-1-e^{-\frac{3i\pi}{4}}$
$\mathcal{F}_8(\tilde{q})[k]$ (Revbits ligne préc.)								
$\mathcal{F}_8(\tilde{p} * \tilde{q})[k]$								
Revbits $F_8(p * q)(k)$	4	0	2	2	$-2+\sqrt{2}$	$-2-\sqrt{2}$	$-2-\sqrt{2}$	$-2+\sqrt{2}$
$\omega_2 = -1$	4	4	4	0	-4	$2\sqrt{2}$	-4	$-2\sqrt{2}$
$\omega_4 = i$	8	4	0	4	-8	$4e^{-\frac{i\pi}{4}}$	0	$4e^{\frac{i\pi}{4}}$
$\omega_8 = e^{i\frac{\pi}{4}}$	0	8	0	0	16	0	0	8
$(\tilde{p} * \tilde{q})[k]$ (diviser par 8)	0	1	0	0	2	0	0	1

On trouve donc sans surprise que

$$pq = \sum_{k=0}^{7} (\tilde{p} * \tilde{q})[k] x^k = x + 2x^4 + x^7.$$

On a alors

$$1001 \times 10010 = p(10)q(10) = (pq)(10) = 10020010.$$

Exercice 3 sous Matlab

1) On écrit les coefficients des polynômes $p = 1 + 5x^2 + x^3$ et $q = 1 + x^4$ en partant du terme constant. On calcule ensuite la transformée de Fourier inverse du produit ponctuel des transformées de Fourier discrètes dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ des suites obtenues. Matlab rajoute automatiquement des zéros au départ des calculs.

```
>>   p1=[1 0 0 1];
q1=[0 1 0 0 1];
pq1=ifft((fft(p1,8).*fft(q1,8)),8)


pq1 =

     0    1     0     0     2     0     0     1
```

On voit donc que $(1 + x^3)(x + x^4) = x + 2x^4 + x^7$

On utilise la commande 'fliplr' pour écrire en sens inverse les coefficients du produit pq obtenus ci-dessus, ce qui donne l'écriture pour Matlab du polynôme produit pq, et on évalue en 10, ce qui donne le produit cherché.

```
polyval(fliplr(pq1),10)
ans =

   10020010
```

2) On procède de même que précédemment avec les polynômes $p2 = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}$ et $q_2 = 9+8x+7x^2+6x^3+5x^4+4x^5+3x^6+2x^7+x^8$.

La somme des degrés des polynômes étant égale à 19, on va effectuer la FFT avec $n = 32 = 2^5$.

```
 tildep2=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]

tildeq2=[9:-1:1]

tildep2q2=ifft((fft(p2,32).*fft(q2,32)),32)

tildep2 =

     1     1     1     1     1     1     1     1     1     1     1     1
```

```
tildeq2 =

     9     8     7     6     5     4     3     2     1


tildep2q2 =

  Columns 1 through 9

   9.0000             17.0000 + 0.0000i   24.0000             30.0000             35.0000

   39.0000 + 0.0000i      42.0000             44.0000             45.0000

  Columns 10 through 18

  45.0000             45.0000             45.0000 + 0.0000i   36.0000             28.0000 + 0.0000i

  21.0000             15.0000             10.0000             6.0000 - 0.0000i

  Columns 19 through 27

   3.0000              1.0000                   0             0.0000 - 0.0000i   0.0000

    0.0000                  0                   0             -0.0000

  Columns 28 through 32

    0 - 0.0000i  -0.0000                  0 + 0.0000i  -0.0000            -0.0000
```

Ceci donne

$$
\begin{aligned}
&(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11}).\\
&\quad(9 + 8x + 7x^2 + 6x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + x^8)\\
&= 9 + 17x + 24x^2 + 30x^3 + 35x^4 + 39x^5 + 42x^6 + 44x^7 + 45x^8 + 45x^9 + 45x^{10}\\
&\quad +45x^{11} + 36x^{12} + 28x^{13} + 21x^{14} + 15x^{15} + 10x^{16} + 6x^{17} + 3x^{18} + 10^{19}.
\end{aligned}
$$

On a $= p_2(10)$, $123456789 = q_2(10)$. Pour effectuer le produit $111111111111 \times 987654321$ on utilise la commande

```
polyval(fliplr(tildep2q2),10)
```

et on obtient

```
ans=1.3678e+19 +4.3521e+13i
```

et Matlab ne donne qu'un arrondi peu précis égal à $1,3678\times 10^{19}+4,3521\times 10^{13}i = 13678\times 10^{15}+4325110^{9}i$, avec une partie imaginaire due aux erreurs d'arrondi. On peut faire mieux numériquement en déclarant la suite [123456789] au lieu de la suite [987654321] et en utilisant la commande

```
10^{-13}*polyval(tildep2q2,10)
```

car en procŽdant de cette manière le résultat affiché par Mupad correspond au polynôme $x^1 3p_2q_2$.

Pour avoir le résultat exact on peut calculer directement à partir du polynôme p_2q_2 calculé par Matlab

$$111111111111\times 123456789 = p_2(10)q_2(10)$$
$$= 10^{19}+3\times 10^{18}+6\times x^{17}+10^{17}+10^{16}++5\times 10^{15}$$
$$2\times 10^{15}+10^{14}+2\times 10^{14}+8\times 10^{13}+3\times 10^{13}+6\times 10^{12}+4\times x^{12}+5\times 10^{11}+4\times 10^{11}$$
$$+5\times 10^{10}+4\times 10^{10}+5\times 10^{9}+4\times 10^{9}+5\times 10^{8}+4\times 10^{8}$$
$$+4\times 10^{7}+4\times 10^{7}+2\times 10^{6}+3\times 10^{6}+9\times 10^{5}+3\times 10^{5}+5\times 10^{4}+3\times 10^{4}+2\times 10^{3}+4\times 10^{2}$$
$$+10^{2}+7\times 10+9$$
$$= 137174209999862825 79.$$

Pour vérifier ce résultat exact on utilise Mupad

111111111111*987654321 ;

On obtient
13717420999986282579

Exercice 4

1) On a, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}e^{-itx}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t}e^{-itx}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t}e^{-itx}dt$$
$$\left[\frac{e^{t(1-ix)}}{1-ix}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{t(-1-ix)}}{-1-ix}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{1-ix}+\frac{1}{1+ix}$$
$$= \frac{2}{1+x^2}.$$

2) On a, d'après la formule de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(x)|^2dx = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx$$
$$= \pi\int_{0}^{+\infty}e^{-2t}dt = \left[-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Le calcul de primitive pour une fraction rationnelle de la forme $\frac{1}{x^2+bx+c)^n}$, avec $b^2-4c<0$, est un grand classique. Pour éviter le recours à une intégration par parties ou à un changement de variables, on va recourir à la décomposition en éléments simples complexe (on aurait pu aussi utiliser le théorème des résidus) :

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{a}{(x+i)^2} + \frac{b}{(x-i)^2} + \frac{c}{x+i} + \frac{d}{x-i}.$$

Compte tenu de l'unicité de la décomposition on a $b = \overline{a}, d = \overline{c}$. En multipliant par $(x+i)^2$, et en faisant $x = -i$, on obtient $a = -\frac{1}{4} = b$,

$$\frac{a}{(x+i)^2} + \frac{b}{(x-i)^2} = \frac{1-x^2}{2(x^2+1)^2},$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} - \frac{a}{(x+i)^2} - \frac{b}{(x-i)^2} = \frac{2}{2(x^2+1)^2} + \frac{x^2-1}{2(x^2+1)^2} = \frac{1}{2(x^2+1)}.$$

Finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+i)^2} - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-i)^2} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= lim_{L\to+\infty}\left[\frac{1}{4(x+i)} + \frac{1}{4(x-i)} + \frac{arctan(x)}{2}\right]_{-L}^{L} = \frac{\pi}{2}.$$

3) On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-an} = lim_{p\to+\infty}\sum_{n=1}^{p}[e^{-a}]^n = lim_{p\to+\infty}\frac{e^{-a}-[e^{-a}]^{p+1}}{1-e^{-a}} = \frac{e^{-a}}{1-e^{-a}}$$

$$= \frac{1}{e^a-1}.$$

3) On va utiliser ici la formule sommatoire de Poisson. En effet comme "l'exponentielle l'emporte sur la puissance" on a $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|(1+|x|)^n < +\infty$ pour tout $n \geq 0$. D'autre part on a

$$\lim_{|n|\to+\infty} n^2\left|\hat{f}\left(\frac{2\pi n}{c}\right)\right| = \lim_{|n|\to+\infty}\frac{2n^2}{1+\left(\frac{2\pi n}{c}\right)^2} = \frac{c^2}{2\pi^2} < +\infty.$$

Comme la série de Riemmann $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ est convergente, les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} f\left(\frac{2\pi n}{c}\right)$ et $\sum_{n<0} f\left(\frac{2\pi n}{c}\right)$ sont convergentes, et on déduit de la formule sommatoire de Poisson que l'on a, pour $c > 0$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(cn) = \frac{1}{c}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(\frac{2\pi n}{c}\right).$$

Comme f et $\hat{f}$ sont paires, et comme $f(0) = 1$ et $\hat{f}(0) = 2$, on a

$$\frac{e^c+1}{e^c-1} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-c|n|} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(cn) = \frac{2}{c} + \frac{2}{c}\sum_{n=1}^{+\infty}\hat{f}\left(\frac{2\pi n}{c}\right) = \frac{2}{c} + \frac{4}{c}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{4n^2\pi^2}{c^2}}$$

$$= \frac{2}{c} + \frac{c}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\frac{c^2}{4\pi^2} + n^2}.$$

On obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\frac{c^2}{4\pi^2} + n^2} = \frac{\pi^2}{c} \frac{e^c + 1}{e^c - 1} - \frac{2\pi^2}{c^2}.$$

Finalement, en posant $c = 2\pi b$, on obtient, pour $b > 0$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b^2 + n^2} = \frac{\pi}{2b} \frac{e^{2\pi b} + 1}{e^{2\pi b} - 1} - \frac{1}{2b^2}.$$

Si $b < 0$, la formule ci-dessus reste valable en remplaçant b par $|b|$. D'autre part si on pose $\phi_n(b) = \frac{1}{b^2+n^2}$, ,$\phi(b) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(b)$, on a $0 \leq \phi_n(b) \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$ et tout $b \in \mathbb{R}$. Comme la série de Riemann$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente, on voit que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(b)$ est *normalement convergente sur* $\mathbb{R}$, et par conséquent ϕ est continue sur $\mathbb{R}$. On obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \phi(b) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{2b} \frac{e^{2\pi b} + 1}{e^{2\pi b} - 1} - \frac{1}{2b^2}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\pi b(e^{2\pi b} + 1) + 1 - e^{2\pi b}}{2b^2(e^{2\pi b} - 1)}.$$

On a

$$\pi b(e^{2\pi b} + 1) + 1 - e^{2\pi b} = \pi b + 2\pi^2 b^2 + 2\pi^3 b^3 - \pi b - 2\pi^2 b^2 - \frac{8\pi^3 b^3}{6} + \epsilon_1(b) = \frac{2\pi^3}{3} + \epsilon_1(b),$$

$$2b^2(e^{2\pi b} - 1) = 4\pi b + \epsilon_2(b),$$

avec $\lim_{b \to 0} \epsilon_1(b)$ =$\lim_{b \to 0} \epsilon_1(b) = 0$, et on obtient comme bien connu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 5

1) On pose $g(x) = 0$ si $|x| < \pi$, $g(x) = 1$ si $\pi \leq |x| \leq 2\pi$, $g(x) = 0$ si $|x| > 2\pi$. On a, pour $x \neq 0$,

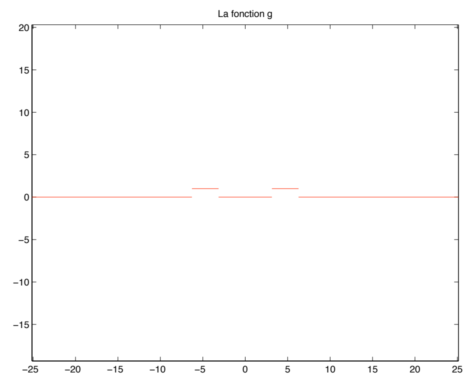
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{itx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{-\pi} e^{itx} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} e^{itx} dt = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} cos(tx) dt$$

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{sin(tx)}{t} \right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{sin(2\pi t) - sin(\pi t)}{\pi t}.$$

D'autre part si $x = 0$ on a $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{itx} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{-\pi} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} dt = 1.$

On représente la fonction g sous Matlab.

```
x1=[0:0.01:pi];x2=[pi:0.01:2*pi];x3=[2*pi:0.01:8*pi];
p=[0];q=[1];y1=polyval(p,x1);y2=polyval(q,x2);y3=polyval(p,x3);
plot(x1,y1,'red',x2,y2,'red',x3,y3,'red',-x1,y1,'red',-x2,y2,'red',-x3,y3,'red');
hold on;axis equal;
title('La fonction g');print -depsc g
```



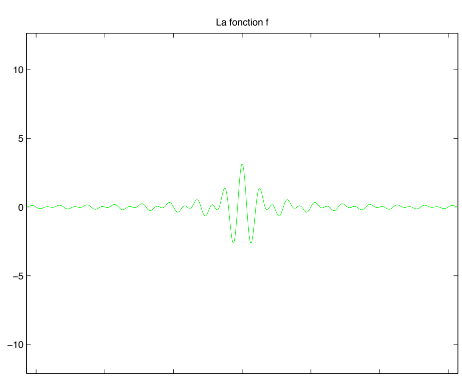
2) On pose $f(t) = \frac{sin(2\pi t) - sin(\pi t)}{\pi t}$ pour $t \neq 0$, $f(0) = 1$. On a $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, et on a presque partout sur $\mathbb{R}$, d'après la formule d'inversion de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ et la définition de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(t) = \frac{1}{2\pi}\hat{g}(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{itx}dx.$$

Donc $f = \mathcal{F}^{-1}(g)$, et $\hat{f} = g$.

On représente maintenant la fonction f(ce nétait pas demandé).

```
x=[-5*pi:0.01:5*pi];
y=(sin(2*pi*x)-sin(pi*x))./x;
plot(x,y,'green');axis equal;title('La fonction f');
>> print -depsc fonctionf
```



3) Le plus petit réel positif tel que $\hat{f}(x)$ soit nulle presque partout pour $|x| > a$ est égal à 2π, et $f \in L^2(\mathbb{R})$ puisque $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Avec les notations du cours, on a donc $freq_{max}(f) = 1$, et d'après le théorème d'échantillonnage de Shannon (théorème 8.5.1 page 109 du support de cours) on peut reconstituer toutes les valeurs de f à partir de la suite $(f[\delta m])_{m\in\mathbb{Z}}$ si et seulement si $\frac{1}{\delta} \geq 2$, c'est à dire $\delta \leq \frac{1}{2}$. On a alors

$$f(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta f(m\delta) \frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t - m\delta)\right)}{\pi(t - m\delta)}$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} (2cos(\pi m\delta - 1)) \frac{sin(\pi m\delta)}{\pi m} \frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t - m\delta)\right)}{\pi(t - m\delta)}.$$

On considère maintenant le cas particulier $\delta = \frac{1}{4}$. Si $m = 0$ on obtient $(2cos(\pi m\delta - 1))\frac{sin(\pi m\delta)}{\pi m}\frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t-m\delta)\right)}{\pi(t-m\delta)} = \frac{sin(4\pi t)}{4\pi t}$. Si $m = 4p$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on obtient $(2cos(\pi m\delta - 1))\frac{sin(\pi m\delta)}{\pi m}\frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t-m\delta)\right)}{\pi(t-m\delta)} = 0$. Si $m = 4p+1$, on obtient $cos(\frac{m\pi}{4}) = cos(\frac{\pi}{4}+p\pi) = \frac{(-1)^p}{\sqrt{2}}$, $sin(\frac{m\pi}{4}) = sin(\frac{\pi}{4} + p\pi) = \frac{(-1)^p}{\sqrt{2}}$, et $sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t - m\delta)\right) = -sin(4\pi t)$. Si $m = 4p - 1$ on obtient $cos(\frac{m\pi}{4}) = cos(-\frac{\pi}{4} + p\pi) = \frac{(-1)^p}{\sqrt{2}}$, $sin(\frac{m\pi}{4}) = sin(-\frac{\pi}{4} - p\pi) = -\frac{(-1)^p}{\sqrt{2}}$, et $sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t - m\delta)\right) = -sin(4\pi t)$. Si $m = 4p + 2$, on obtient $cos(\frac{m\pi}{4}) = cos(\frac{\pi}{2} + p\pi) = 0$, $sin(\frac{m\pi}{4}) = sin(\frac{\pi}{2} + p\pi) = (-1)^p$, et $sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t - m\delta)\right) = sin(4\pi t)$. Finalement on a

$$f(t) = \frac{sin(4\pi t)}{4\pi t} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left(-1 + \frac{(-1)^p}{\sqrt{2}}\right) \frac{sin(4\pi t)}{\pi^2(4p+1)(t - p - \frac{1}{4})}$$
$$+ \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{(-1)^p}{\sqrt{2}}\right) \frac{sin(4\pi t)}{\pi^2(4p-1)(t - p + \frac{1}{4})}$$
$$+ \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (-1)^{p+1} \frac{sin(4\pi t)}{\pi^2(2p+1)(t - \frac{p}{2} - \frac{1}{4})}.$$