Université Bordeaux 1 **Algèbre et calcul formel – Master**
Mathématiques Année 2012–2013

FEUILLE D'EXERCICES n° 14

Exercice 1 – Ordres sur les monomes. On considère $k[x_1,\ldots,x_n]$. Soit $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $x^a = x_1^{a_1}\ldots x_n^{a_n}$ et $\deg x^a = \sum_{i=1}^n a_i$

Ordre lexicographique. $x^a < x^b$ si et seulement s'il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $a_1 = b_1,\ldots,a_{i-1} = b_{i-1}, a_i < b_i$.

```
A.<x,y>=PolynomialRing(QQ,order='lex')
x>y
x>y**2*z
```

Ordre lexicographique gradué. $x^a < x^b$ si $\deg x^a < \deg x^b$ ou si $\deg x^a = \deg x^b$ et s'il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $a_1 = b_1,\ldots,a_{i-1} = b_{i-1}, a_i < b_i$.

```
B.<x,y>=PolynomialRing(QQ,order='deglex')
x>y
x>y**2*z
x*y**2*z**3 > x**3*y**2
x*y**2*z**3 > x**3*y**2*z
```

Ordre lexicographique gradué inverse. $x^a < x^b$ si $\deg x^a < \deg x^b$ ou si $\deg x^a = \deg x^b$ et s'il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $a_n = b_n,\ldots,a_{i+1} = b_{i+1}, a_i > b_i$.

```
C.<x,y>=PolynomialRing(QQ,order='degrevlex')
x>y
x>y**2*z
x*y**2*z**3 > x**3*y**2
x*y**2*z**3 > x**3*y**2*z
```

Si l'on n'indique pas l'ordre, l'ordre par défaut est l'ordre lexicographique gradué inverse.

```
pr.<x,y,z>=PolynomialRing(QQ)
pr==A
pr==C
```

Exercice 2 – On reprend l'exercice 4 de la feuille 11, avec $K = \mathbb{Q}$. On utilise l'ordre lexicographique gradué, avec $\prec=\prec_{\text{grlex}}$, où $y \prec x$. Soient $g = x^3 - 2xy$, $h = x^2y - 2y^2 + x$, $G = \{g,h\}$ et $I =< G >$. Soit B la base de Gröbner réduite de I.

1) On a déjà calculé B. Pour le vérifier sur machine, exécuter les commandes suivantes.

```
pr.<x,y>=PolynomialRing(QQ,order='deglex')
I=pr.ideal([x**3-2*x*y,x**2*y-2*y**2+x])
I.groebner_basis()
```

2) Quels est l'ensemble S des monômes standards de $\mathbb{Q}[x,y]/I$ pour B ? Quelle est la dimension de $\mathbb{Q}[x,y]/I$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ?

3) Écrire le produit dans $\mathbb{Q}[x,y]/I$ de chaque couple d'éléments de S en fonction des éléments de S.
4) Soit $f = x^5 + y^2 + xy \in \mathbb{Q}[x,y]$. Quelle est la forme normale $n(f)$ de f par rapport à B ? On pourra pour répondre exécuter les commandes suivantes.

```
A.<a,b>=pr.quotient(I)
f=x**5+y**2+x*y
(f(a,b)).lift()
```

5) Quelle est la base de Gröbner réduite de I pour l'ordre lexicographique, où $y \prec x$? Donner l'ensemble des monômes standards correspondant.

Exercice 3 –
1) Calculer la base de Gröbner réduite pour l'ordre lexicographique avec $x > y$ de l'idéal de $\mathbb{Q}[x,y]$:

$$I =< x^2 + y - 1, xy - x > .$$

2) Les polynômes suivants appartiennent-ils à I ?

$$f_1 = x^2 + y^2 - y \ , \ f_2 = 3xy^2 - 4xy + x + 1$$

Exercice 4 – Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la courbe C d'équation paramétrée

$$x = t^2 \ , \ y = t^3 \ , \ z = t^4.$$

1) Déterminer la base de Gröbner réduite de l'idéal de $\mathbb{R}[x,y,z]$ correspondant, où l'ordre utilisé est l'ordre lexicographique avec $x \prec y \prec z \prec t$.
2) Donner un système d'équations qui détermine C de façon implicite.

Exercice 5 –
1) Même exercice avec la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation paramétrée

$$x = \frac{t^2-1}{1+t^2} \ , \ y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

2) Même exercice avec la courbe paramétrée

$$x = \frac{3t}{1+t^3} \ , \ y = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Exercice 6 – On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système

$$f(x,y) = g(x,y) = 0, \tag{1}$$

où

$$f(x,y) = (y^2+6)(x-1) - y(x^2+1),$$
$$g(x,y) = (x^2+6)(y-1) - x(y^2+1).$$

1) Déterminer la base de Gröbner réduite de l'idéal $I =< f, g >$ de $\mathbb{C}[x,y]$, correspondant à l'ordre lexicographique avec $x \prec y$.
2) Résoudre le système (1).