Master CSI-UE / Master CSI-THCS-Analyse de Fourier

Devoir maison 2
à remettre le 4 décembre 2009

[1]

Les copies seront corrigées pendant le week-end du 5 décembre

Exercice 1

En utilisant la FFT décimation temporelle, calculer la transformée de Fourier discrète de

$$u = [0,1,0,1,0,1,0,1].$$

2) On note $v \underset{8}{*} w$ la convolution cyclique de $v = [v[0], ..., v[7]]$ et $w = [w[0], ...w[7]]$. Soit $h = [h[0], ..., h[7]]$.

Montrer que l'équation $u \underset{8}{*} v = h$ possède des solutions si et seulement si $\hat{h}[1] = \hat{h}[2] = \hat{h}[3] = \hat{h}[5] = \hat{h}[6] = \hat{h}[7] = 0$. Montrer que si on suppose de plus que $\hat{h}[0] \neq 0$ et $\hat{h}[4] \neq 0$ il existe alors une unique solution v telle que $|Supp(\hat{v})| \leq 2$.

3) Calculer cette solution par FFT inverse (décimation fréquentielle) si $\hat{h} = [8,0,0,0,-8,0,0,0]$.

Exercice 2

Effectuer le produit des polynômes $x^3 + 5x^2 + 1$ et $x^4 + 1$ en utilisant la FFT décimation fréquentielle et la FFT inverse décimation temporelle. Appliquer ce résultat au calcul du produit de 1501 et 10001.

Exercice 3

La FFT sous Matlab se calcule avec la commande $fft(x,p)$ où x est le signal à transformer et p un entier (pour nous une puissance de 2). Si le signal est de longueur inférieure à p Matlab le complète automatiquement avec des zéros. La FFT inverse se calcule avec la commande $ifft(x,p)$.

1) Reprendre l'exercice précédent sous Matlab.

2) En utilisant Matlab, la FFT et la FFT inverse, calculer le produit des polynômes $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}$ et $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 8x^7 + 9x^8$. En déduire le produit $11111111111 \times 987654321$.

[1] Pour toute question concernant ce Devoir s'adresser à charles.dossal@math.u-bordeaux1.fr ou esterle@math.u-bordeaux.fr

Exercice 4

1) En appliquant la définition de la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$, montrer que si on pose $f(t) = e^{-|t|}$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(x) = \frac{2}{1+x^2}.$$

2) Soit $a > 0$. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-an}$.

3) En utilisant une formule du cours, en déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b^2+n^2}$ pour $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

1) On pose $g(x) = 0$ si $|x| < \pi$, $g(x) = 1$ si $\pi \leq |x| \leq 2\pi$, $g(x) = 0$ si $|x| > 2\pi$.

Dessiner le graphe de g, et calculer

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{itx}dx.$$

2) On pose $f(t) = \frac{sin(2\pi t) - sin(\pi t)}{\pi t}$ pour $t \neq 0$, $f(0) = 1$. Donner la transformée de Fourier de f.

3) En utilisant le théorème d'échantillonnage de Shannon, déterminer pour quelles valeurs positives de δ on peut reconstituer toutes les valeurs de f à partir de la suite $(f[\delta m])_{m\in\mathbb{Z}}$. Dans ce cas donner une formule explicite permettant de calculer $f(t)$ à partir de la suite $(f[\delta m])_{m\in\mathbb{Z}}$. Détailler le cas particulier $\delta = \frac{1}{4}$.