Master CSI 2 2010-2011

Complexité : DS du 2 novembre 2010

Durée : 1h30. Sans document. Les exercices sont indépendants.

– EXERCICE 1. On considère le problème de décision «CLIQUE» :

- I : Un graphe G, un entier k
- Q : Existe-t-il une clique (un sous-graphe complet) de G à k sommets ?

Montrer que si l'on dispose d'un algorithme polynomial (en temps) qui résoud le problème *de décision* CLIQUE, alors on peut *trouver*, en temps polynomial, une clique explicite de tout graphe G, si elle existe.

– EXERCICE 2. Montrer que si P=NP alors tout problème de la classe P est NP-complet.

– EXERCICE 3. On considère le problème 4-SAT :

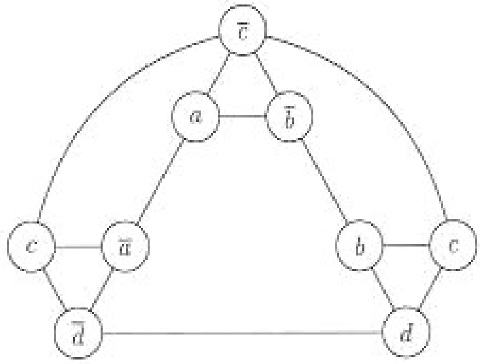
- I : Une formule booléenne de la forme $f = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k$ où chaque clause C_i est constitué d'exactement *quatre* termes littéraux reliés par des $\vee$.
- Q : La formule f est-elle satisfaisable ?

Montrer que 4-SAT est NP-complet.

– EXERCICE 4. Une partie *stable* (independent set) d'un graphe est un sous-ensemble de ses sommets, deux à deux non reliés par une arête. On considère le problème de décision «STABLE» suivant :

- I : Un graphe G, un entier k
- Q : Existe-t-il une partie stable de G à k sommets ?

On considère la transformation d'une instance de 3-SAT en un graphe. Toute clause $a \vee b \vee c$ est transformée en un triangle dont les sommets sont étiquetés a, b, c. Une arête supplémentaire est rajoutée entre deux sommets dès qu'ils sont étiquetés par a et $\overline{a}$. Par exemple, la formule $(a \vee \overline{b} \vee \overline{c}) \wedge (\overline{a} \vee c \vee \overline{d}) \wedge (b \vee c \vee d)$ devient :



Déduire de cette transformation une réduction polynomiale de 3-SAT vers le problème STABLE et en déduire que STABLE est NP-complet.

– EXERCICE 5. Soit E un ensemble et $\mathcal{P}$ un ensemble de parties de E. On dira que $\mathcal{P}$ est 2-séparable s'il est possible de colorier les éléments de E, soit en noir soit en blanc, de telle sorte que toute partie $P \in \mathcal{P}$ contienne deux éléments de couleur différente.

Par exemple, si $E = \{a, b, c, d\}$, l'ensemble de parties

$$\mathcal{P} = \{\{a, c\}, \{c, d\}, \{a, d\}\}$$

n'est pas 2-séparable, mais l'ensemble

$$\mathcal{P}' = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}, \{a, d\}\}$$

l'est.

Soit «2-séparabilité» le problème de décision :

I : Un ensemble E et un ensemble $\mathcal{P}$ de parties de E
Q : $\mathcal{P}$ est-il 2-séparable ?

Exhiber une réduction polynômiale de 3-SAT (ou juste de SAT) vers 2-séparabilité et en déduire que 2-séparabilité est NP-complet. Si f est une formule booléenne définie sur les variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, on pourra lui associer l'ensemble

$$E = \{a, x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \ldots, x_n, \overline{x_n}\}$$

constitué de l'ensemble des variables, de leur négations, et d'un symbole auxiliaire a. Il vous reste à définir l'ensemble $\mathcal{P}$ de parties de E.