Master CSI-UE / Master CSI-THCS
MHT 723-Analyse de Fourier

Corrigé de l'examen du 17 décembre 2010

Exercice 1

1) On commence par rappeler la procédure du renversement de bits sur $\{0, 1, 2, 3\}$.

m	0	1	2	3
$bits$	00	01	10	11
rev	00	10	01	11
$rev(m)$	0	2	1	3

On considère les deux signaux

$$f = [1, 3, 4, 0] \text{ et } g = [2, 1, 0, 0]$$

de longueur 4 formés avec les coefficients de p et q, complétés à droite par des zéros.

On leur applique ensuite la FFT, décimation temporelle. On commence par "renverser les bits". Ensuite on effectue les étapes 1 et 2, qui correspondent aux schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+i^{-1}d = b-id$	$a-c$	$b-i^{-1}d = b+id$

Ceci donne

m	0	1	2	3
$f[m]$	1	3	4	0
$rev(f)[m]$	1	4	3	0
étape 1	5	-3	3	3
étape 2, $\hat{f}(m)$	8	$-3-3i$	2	$-3+3i$

m	0	1	2	3
$g[m]$	2	1	0	0
$rev(g)[m]$	2	0	1	0
étape 2	2	2	1	1
étape 2, $\hat{g}(m)$	3	$2-i$	1	$2+i$

2) On considère $p = 1 + 3x + 4x^2$ et $q = 2 + x$. Les coefficients du produit pq s'obtiennent par convolution **acyclique** sur $\mathbb{Z}^+$ des suites $[1, 3, 4, 0, 0, 0...]$ et $[2, 1, 0, 0, 0, ...]$. Comme le degré du produit pq est égal à 3, les coefficients potentiellement non nuls de pq sont donnés par les termes $h[0], h[1], h[2], h[3]$ du produit de convolution **cyclique** $h := f \underset{4}{*} g$.

On a alors $\hat{h} = \hat{f}.\hat{g}$, et h s'obtient comme la transformée de Fourier inverse du produit $\hat{f}.\hat{g} = [24, -9-3i, 2, -9+3i]$.

On va donc appliquer la FFT inverse à $\hat{f}.\hat{g}$. On commence de même que plus haut par "renverser les bits", et on applique les étapes 1 et 2, en remplaçant i par son conjugué $-i$, ce qui donne les schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+id$	$a-c$	$b-id$

La transformée de Fourier inverse s'obtient alors en divisant par 4 le résultat obtenu à la 2e étape. On obtient

m	0	1	2	3
$(\hat{f}.\hat{g})[m]$	24	$-9-3i$	2	$-9+3i$
$rev(\hat{f}.\hat{g})[m]$	24	2	$-9-3i$	$-9+3i$
étape 1	26	22	-18	$-6i$
étape 2	8	28	44	16
h	2	7	11	4

On a donc

$$pq = 2 + 7x + 11x^2 + 4x^3,$$

$$431 \times 12 = p(10)q(10) = (pq)(10) = 2 + 70 + 1100 + 4000 = 5172.$$

Ces résultats sont confirmés par un calcul direct. En effet on a

$$(1+3x+4x^2)(2+x) = 2+6x+8x^2+x+3x^2+4x^3 = 2+7x+11x^2+4x^3, \text{ et } 431\times 12 = 4310+862 = 5172.$$

3) Soit $w = [a, b, c, d]$ la transformée de Fourier discrète de $[1, 1, 1, 1]$. On a

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

L'équation $f \underset{4}{*} h = [1, 1, 1, 1]$ est équivalente à $\hat{f}.\hat{h} = [4, \widehat{0, 0}, 0]$, ce qui donne $[8\hat{h}(0), (-9-3i)\hat{h}(1), 2\hat{h}(2), (-9-3i)\hat{h}(3)] = u = [4, 0, 0, 0]$, soit $\hat{h} = \left[\frac{1}{2}, 0, 0, 0\right]$.

Le calcul ci-dessus montre que $\mathcal{F}_4^{-1}([4, 0, 0, 0]) = [1, 1, 1, 1]$. Donc l'unique solution dans $\mathbb{C}^4$ de l'équation $f \underset{4}{*} h = [1, 1, 1, 1]$ est donnée par la formule

$$h = \mathcal{F}_4^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 0, 0, 0\right]\right) = \frac{1}{8}\mathcal{F}_4^{-1}([4, 0, 0, 0]) = \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right].$$

Exercice 2

1) Calculons la transformée de Walsh de u par l'algorithme rapide.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$u[k]$	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
1e étape	2	0	0	2	0	2	-2	0
2e étape	2	2	2	-2	-2	2	2	2
$\mathcal{W}_3(u)[k]$	0	4	4	0	4	0	0	-4

La transformée de Walsh de u est donc $\mathcal{W}_3(u) = [0, 4, 4, 0, 4, 0, 0, -4]$.

2) On écrit la matrice de Walsh W_4, ce qui donne

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

On peut alors écrire le tableau des changements de signes des lignes de la matrice W_4, $n(i)$ désignant le nombre de changements de signes de W_3 pour $0 \leq i \leq 7$,

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$n(i)$	0	7	3	4	1	6	2	5

Pour la compression 1-D à 25% on garde le coefficient $\mathcal{W}_3(u)[i]$ si $0 \leq n(i) \leq 1$, c'est à dire si $i = 0$ ou 4, et on annulle $\mathcal{W}_3(u)[i]$ dans le cas contraire. On obtient

$\mathcal{W}_3(u)_{25\%} = [0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0]$.

On calcule alors la compression de u à 25% en calculant la transformée de Walsh inverse de $[6, 0, 2, 0, -2, 0, 2, 0]$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{W}_3(u)_{25\%}[k]$	0	0	0	0	4	0	0	0
1e étape	0	0	0	0	4	4	0	0
2e étape	0	0	0	0	4	4	4	4
3e étape, $8u_{25\%}[k]$	4	4	4	4	-4	-4	-4	4
$u_{50\%}[k]$	1/2	1/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2

Donc la compression à 25% de u est donnée par la formule

$$u_{25\%} = [1/2, 1/2, 1/2, 1/2, -1/2, -1/2, -1/2, -1/2].$$

3) On considère maintenant la fonction booléenne $\phi = X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_1$ sur $\mathbb{F}_2^3$. On a $\phi(u, v, w) = uv + vw + wu$. Donc $\phi(u, v, w) = \overline{0}$ si au moins deux des trois coefficients u, v, w sont égaux à $\overline{0}$. Si un et un seul de ces coefficients est égal à $\overline{0}$, on a $\phi(u, v, w) = \overline{1}$. De même si $u = v = w = \overline{1}$ on a $\phi(u, v, w) = \overline{3} = \overline{1}$. Donc $\phi^*(k) = 1$ si $k \in \{0, ..., 7\}$ possède au moins deux zéros dans son écriture dyadique, c'est à dire si $k = 0, 1, 2$ ou 4, et $\phi^*(k) = -1$ si k possède au plus un zéro dans son écriture dyadique, c'est à dire si $k = 3, 5, 6$ ou 7. Donc $\phi^* = [1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1] = u$.

La distance de ϕ aux fonctions affines est donc donnée par la formule

$$d(\phi, Aff) = 2^{3-1} - \frac{1}{2}\left|max\left(\mathcal{W}_3(u)\right)\right| = 4 - \frac{4}{2} = 2.$$

Exercice 3

1) On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(\phi * p)(x) = (p * \phi)(x) \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\phi(x-t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \phi(x-t)dt.$$

On a $\phi(x - t) = 0$ pour $|x - t| > \frac{\pi}{2}$, c'est à dire pour $t \in (-\infty, x - \frac{\pi}{2}) \cup (x + \frac{\pi}{2}, +\infty)$. Si $|x| > \pi$ on a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \subset (-\infty, x - \frac{\pi}{2}) \cup (x + \frac{\pi}{2}, +\infty)$, et $(\phi * p)(x) = 0$. Si $-\pi \le x \le 0$ on a $x - \frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}$, ce qui donne

$$(\phi * p)(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}} cos\,(x-t)\,dt = \left[-sin(x-t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}} = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(\frac{x+\pi}{2}\right)$$

$$= 1 + cos(x) = 2cos^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

De même si $0 \le x \le \pi$, on a $-\frac{\pi}{2} \le x - \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2}$, ce qui donne

$$(\phi * p)(x) = \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\,(x-t)\,dt = \left[-sin(x-t)\right]_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =)sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 1 + cos(x) = 2cos^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

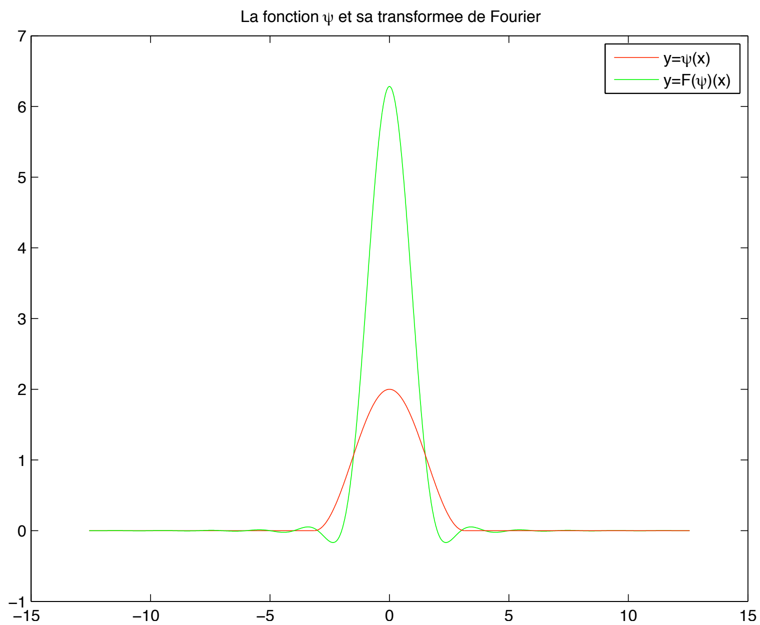
On a alors

$$\hat{\psi}(x) = \widehat{\phi * p}(x) = \hat{\phi}(x)\hat{p}(x) = \frac{4cos(\frac{\pi x}{2})sin(\frac{\pi x}{2})}{x(1-x^2)} = \frac{2sin(\pi x)}{x(1-x^2)} \text{ pour } x \neq -1, x \neq 0, x \neq 1,$$

avec $\hat{\psi}(-1) = \hat{\psi}(1) = \frac{\pi}{2}, \hat{\psi}(0) = \pi$.

On représente ψ et $\hat{\psi}$ sur un même graphique.

```
 x=[-4*pi:0.01:4*pi]; x1=[-4*pi:0.01:-pi];x2=[-pi:0.01:pi];
plot(x1,polyval([0],x1),'red',x, 2*sin(pi*x)./(x-x.^3),'green');hold on
plot(-x1,polyval([0], -x1),'red',x2,polyval([1],x2)+ cos(x2),'red');
hold on; title('La fonction \psi et sa transformee de Fourier');
legend('y=\psi(x)','y=F(\psi)(x)'); print -depsc Fourier2010
```



2) On a, d'après la formule de Parseval,

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin^2(\pi x)}{x^2(1-x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin^2(\pi x)}{x^2(1-x^2)^2}dx = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(x)|^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{\pi} (1+cos(t))^2\, dt$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \left(1+2cos(t)+cos^2(t)\right) dt = \frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \left(1+2cos(t)+\frac{1+cos(2t)}{2}\right) dt$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{3t}{2}+2sin(t)+\frac{sin(2t)}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{3\pi^2}{4}.$$

3) On a $h = \frac{\hat{\psi}}{2}$, donc h est continue sur $\mathbb{R}$. De plus on a $\lim_{x \to \pm\infty} x^2|h(x)| \leq \lim_{x \to \pm\infty} \left| \frac{2x^2}{x - x^3} \right| = 0$. Il résulte alors du critère de Riemann que $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|dx < +\infty$, et $h \in L^1(\mathbb{R})$. La formule d'inversion de Fourier donne

$$\psi(t) = \psi(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2h(x)e^{-ixt}dx = \frac{\hat{h}(t)}{\pi},$$

donc $\hat{h} = \pi\psi$, et le plus petit réel positif a tel que $\psi(t) = 0$ presque partout pour $|t| > a$ est égal à π. Avec les notations du cours, on a donc $freq_{max}(h) = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$, et d'après le théorème d'échantillonnage de Shannon (page 109 du support de cours) on peut reconstituer toutes les valeurs de $\hat{\psi}$ à partir de la suite $(g[\delta m])_{m \in \mathbb{Z}}$ si et seulement si $\frac{1}{\delta} \geq \frac{2}{2}$, c'est à dire $\delta \leq 1$. On a alors

$$h(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta \hat{h}(m\delta) \frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t - m\delta)\right)}{\pi(t - m\delta)}$$

$$= 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{sin(\pi m \delta)}{(\delta m - \delta^3 m^3)} sin_c\left(\frac{\pi}{\delta}(t - m\delta)\right).$$

4) La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$, on a $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|(1 + x^2) < +\infty$, et $\hat{h}(\frac{2\pi n}{c})$ est nul pour $|n|$ pour $n \geq c/2$. On déduit alors de la formule sommatoire de Poisson que l'on a, pour $c > 0$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} h(cn) = \frac{1}{c} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{h}\left(\frac{2\pi}{nc}\right) = \frac{2\pi}{c} \sum_{|n| < c/2} cos^2\left(\frac{\pi n}{c}\right).$$

Pour $c = 1/2$, on a $h(0) = \pi, h(2c) = h(-2c) = h(1) = h(-1) = \frac{\pi}{2}$, et $h(nc) = \frac{sin(nc)}{nc - n^3c^3}$ pour $n \neq 0, n \neq 2, n \neq -2$, et en particulier $h(nc) = 0$ pour n pair, $|n| > 2$. On obtient

$$2\pi + 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right)}{(p + 1/2) - (p + 1/2)^3} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h\left(\frac{n}{2}\right) = 4\pi,$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p - 1)(2p + 1)(2p + 3)} = \frac{\pi}{8}.$$

Exercice 4

On classe de 1 à 1048576 les 1 million quarante huit mille cinq cent soixante seize coefficients d'une matrice 1024×1024. Le coefficient le plus petit, qui donne le seul pixel survivant de la transformée de Walsh d'une image numérisée pour une compression â un milionnième, est le coefficient d'indice $(0, 0)$. Donc une image numérisée A à 1 048 576 pixels est égale à sa compression 2-D à 1 millionnième si et seulement si sa transformée de Walsh $\mathcal{W}_{20}(A)$ a tous ses coefficients nuls sauf éventuellement celui d'indice $(0,0)$. Autrement dit A est égale à sa compression à 1 millionnième si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{W}_{20}(A) = \lambda B$, soit $A = \lambda \mathcal{W}^{-1}(B)$, où B est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice $(0,0)$ qui est égal à 1.

BW_{20} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la première colonne qui sont égaux à 1, et $\mathcal{W}_{20}(B) = W_{20}BW_{20}$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donc $\mathcal{W}_{20}^{-1}(B)$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 2^{-20}.

Donc les images numérisées qui sont égales à leur compression à 1 millionnième sont **les images constantes, ce qui correspond à un gris uniforme**.