Master CSI-UE / Master CSI-THCS/ Master ENSM
Analyse de Fourier

Corrigé du devoir maison du 22 Octobre 2010

Exercice 1

1) On utilise l'algorithme d'Euclide étendu pour trouver une solution à l'équation $19u + 7v = 1$.

	q_n	u_n	v_n
		1	0
		0	1
$\mathbf{19} = \mathbf{7} \times 2 + \mathbf{5}$	2	1	-2
$\mathbf{7} = \mathbf{5} \times 1 + \mathbf{2}$	1	-1	3
$\mathbf{5} = \mathbf{2} \times 2 + \mathbf{1}$	2	3	-8
$\mathbf{2} = \mathbf{1} \times 2 + \mathbf{0}$	1		

Donc l'équation $19x + 7y = 1$ admet comme couple d'entiers la solution $x_0 = 3, y_0 = -8$ (que l'on pouvait aussi trouver par tâtonnements). Pour trouver la solution générale on pose $x = u + 3, y = v - 8$, et on obtient $19x + 7y = 19u + 7v + 1$. L'équation $19x + 7y = 1$ donne $19u + 7v = 0$, soit $19u = -7v$. Comme 19 est premier avec 7, 19 divise v, d'après le théorème de Gauss, donc $v = 19p$, avec $p \in \mathbf{Z}$, et $u = -7p$. Réciproquement il est clair que si $v = 19p$ et $u = -7p$, avec $p \in \mathbf{Z}$, alors $19u = -7p$. Finalement les points à coordonnées entières de la droite d'équation $19x + 7y = 0$ sont les points de coordonnées $(3 - 7p, -8 + 19p)$, avec $p \in \mathbf{Z}$.

La condition $0 \leq x \leq 20$ donne $-3 \leq -7p \leq 17$, $-17 \leq 7p \leq 3$, $-\frac{17}{7} \leq p \leq \frac{3}{7}$. Les seules possibilités sont $p = 0$, $p = -1$ et $p = -2$, et les solutions sont le point de coordonnées $(3, -8)$, le point de coordonnées $(10, -27)$ et le point de coordonnées $(17, -46)$.

2) On a $19 \times 3 - 8 \times 7 = 1$. On obtient, dans $\mathbf{Z}/19\mathbf{Z}$,

$$-\overline{8}.\overline{7} = \overline{1}.$$

Ceci donne

$$\overline{11}.\overline{7} = \overline{1},$$

et $(\overline{7})^{-1} = \overline{11}$ dans $\mathbf{Z}/19\mathbf{Z}$.

D'autre part comme $\overline{7} = 0$ dans $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$, on obtient, dans $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$,

$$\overline{5}.\overline{3} = \overline{1},$$

donc $(\overline{5})^{-1} = \overline{3}$ dans $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$.

3) Les deux premières équations donnent

$$x = 1 + 7p = 3 + 19q,\ 19q - 7p = -2, \text{ avec } p, q \in \mathbf{Z}.$$

Comme $19 \times 3 - 7 \times 8 = 1$, on peut prendre $q = -6$, $p = -16$, et $x_0 = -111$ est solution des deux premières équations. La solution générale des deux premières équations est donc

$$x = -111 + 7 \times 19u = -111 + 133a,\ \ a \in \mathbf{Z}.$$

En reportant dans la troisième équation, on obtient $x = -111 + 133a = -1 + 8b$, $133a - 8b = 110$, avec $a, b \in \mathbf{Z}$.

On utilise l'algorithme d'Euclide étendu pour trouver une solution à l'équation $133u + 8v = 1$.

	q_n	u_n	v_n
		1	0
		0	1
$\mathbf{133} = \mathbf{8} \times 16 + \mathbf{5}$	16	1	-16
$\mathbf{8} = \mathbf{5} \times 1 + \mathbf{3}$	1	-1	17
$\mathbf{5} = \mathbf{3} \times 1 + \mathbf{2}$	1	2	-33
$\mathbf{3} = \mathbf{2} \times 1 + \mathbf{1}$	1	-3	50
$\mathbf{2} = \mathbf{1} \times 2 + \mathbf{0}$			

On peut donc prendre $b = -50 \times (110) = -5500$, et $x = -1 + 8 \times (-5500) = -44001$ est solution du système proposé. Comme $7 \times 19 \times 8 = 1064$, la solution générale du système est de la forme

$$x = -44001 + 1064m,\ m \in \mathbf{Z}.$$

Comme $44001 = 41 \times 1064 + 377$, la solution générale du système proposé est

$$x = -377 + 1064n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

La condition $0 \leq x \leq 1200$ donne donc une seule solution, $x = -377 + 1064 = 687$.

Exercice 3

1) Calculons la transformée de Walsh de f par "Walsh rapide" :

5	5	3	3	1	0	0	1
10	0	6	0	1	1	1	-1
16	0	4	0	2	0	0	2
18	0	4	2	14	0	4	-2

La transformée de Walsh de f est donc :

$$\mathcal{W}_3(f) = [18, 0, 4, 2, 14, 0, 4, -2].$$

2) D'après le cours, on sait que $\mathcal{W}_3^{-1} = \frac{1}{2^3}\mathcal{W}_3$.Par conséquent, calculer la transformée de Walsh inverse de ces vecteurs revient à calculer leur transformée de Walsh et à la diviser par 2^3.

Faisons le pour h_1 :

18	0	4	0	14	0	4	0
18	18	4	4	14	14	4	4
22	22	14	14	18	18	10	10
40	40	24	24	4	4	4	4
5	5	3	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

La transformée de Walsh inverse de h_1 est donc :

$$\mathcal{W}_3^{-1}(h_1) = [5, 5, 3, 3, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}].$$

Faisons le pour h_2 :

18	0	4	2	0	0	0	0
18	18	6	2	0	0	0	0
24	20	12	16	0	0	0	0
24	20	12	16	24	20	12	16
3	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

La transformée de Walsh inverse de h_2 est donc :

$$\mathcal{W}_3^{-1}(h_2) = [3, \tfrac{5}{2}, \tfrac{3}{2}, 2, 3, \tfrac{5}{2}, \tfrac{3}{2}, 2].$$

3) Rappelons que comprimer le signal f à 50% revient à remplacer $\mathcal{W}_3(f)[i]$ par 0 si $cs_3(i) > 0,5 \times 2^3 - 1 = 3$, et à conserver $\mathcal{W}_3(f)[i]$ si $cs_3(i) \leq 3$. La compression à 50% de f est alors égale à la transformée de Walsh inverse de la "transformée de Walsh modifiée."

Par conséquent, comprimer le signal f à 50% revient à calculer la transformée de Walsh inverse de h_1, ce qui a été fait à la question 2).

Conclusion :

En comprimant le signal f à 50% on obtient :

$$f_1 = [5, 5, 3, 3, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}].$$

D'autre part, calculer le signal obtenu en conservant les 4 premiers termes de la transformée de Walsh de f et en annulant les 4 restant revient à calculer la transformée de Walsh inverse de h_2.

On obtient

$$f_2 = [3, \tfrac{5}{2}, \tfrac{3}{2}, 2, 3, \tfrac{5}{2}, \tfrac{3}{2}, 2].$$

On a

$$\|f - f_1\|_2^2 = \|[0, 0, 0, 0, 1/2, -1/2, -1/2, 1/2]\|_2^2 = 1,$$
$$\|f - f_2\|_2^2 = \|[2, 5/2, 3/2, 1, -2, -5/2, -3/2, -1]\|_2^2 = 27,$$

donc $\|f - f_1\|_2^2 = 1$ et $\|f - f_1\|_2^2 = 3\sqrt{3}$, soit environ $5, 196$.

Il est donc clair que la méthode de compression la plus efficace ici est celle qui consiste à comprimer à 50% selon le procédé du cours. Ceci s'explique par le fait que les informations perdues par compression par la méthode du cours relèvent du "détail", alors que des informations plus importantes sont perdues par la seconde méthode.

Exercice 3

1) On va calculer la transformée de Walsh de A en utilisant l'algorithme rapide, appliqué aux colonnes et ensuite aux lignes.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

1e étape, lignes,

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

2e étape, lignes,

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1e étape, colonnes

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 12 & 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

2e étape, colonnes, on obtient

$$\mathcal{W}_2(A) = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

2) On a

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On numérote les lignes de W_2 de 0 à 3. Le nombre de changements de signe $n(i)$ de la ligne d'indice i est alors donné par le tableau suivant.

i	0	1	2	3
$n(i)$	0	3	1	2

On ordonne les pixels (i,j) selon la règle $(i_1,j_1) \prec (i_2,j_2)$ si $n(i_1)+n(j_1) < n(i_2)+n(j_2)$ ou si $n(i_1)+n(j_1) = n(i_2)+n(j_2)$ **et** $n(i_1) < n(i_2)$. On numérote alors les 16 pixels considérés ici du plus petit au plus grand pour l'ordre ci-dessus. On obtient le tableau suivant.

(i,j)	$n(i)$	$n(j)$	$n(i)+n(j)$	$rang[(i,j)]$
$(0,0)$	0	0	0	1
$(0,1)$	0	3	3	7
$(0,2)$	0	1	1	2
$(0,3)$	0	2	2	4
$(1,0)$	3	0	3	10
$(1,1)$	3	3	6	16
$(1,2)$	3	1	4	13
$(1,3)$	3	2	5	15
$(2,0)$	1	0	1	3
$(2,1)$	1	3	4	11
$(2,2)$	1	1	2	5
$(2,3)$	1	2	3	8
$(3,0)$	2	0	2	6
$(3,1)$	2	3	5	14
$(3,2)$	2	1	3	9
$(3,3)$	2	2	4	12

Pour la compression à 50% de A, on annule les coefficients d'indice $(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,2),(3,3)$ de la transformée de Walsh et on effectue une transformée de Walsh inverse. Ceci donne

$$\mathcal{W}_2(A)_{0.5} = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1e étape, colonnes,

$$\begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & -8 \\ 24 & 0 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2e étape, colonnes,

$$\begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 & -8 \\ 16 & 0 & 0 & -8 \\ 16 & 0 & 0 & -8 \\ 32 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

1e étape, lignes,

$$\begin{bmatrix} 32 & 32 & -8 & 8 \\ 16 & 16 & -8 & 8 \\ 16 & 16 & -8 & 8 \\ 32 & 32 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

2e étape, lignes,

$$\begin{bmatrix} 24 & 40 & 40 & 24 \\ 8 & 24 & 24 & 8 \\ 8 & 24 & 24 & 8 \\ 24 & 40 & 40 & 24 \end{bmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à diviser par 16 pour obtenir la compression à 50% de A, ce qui donne

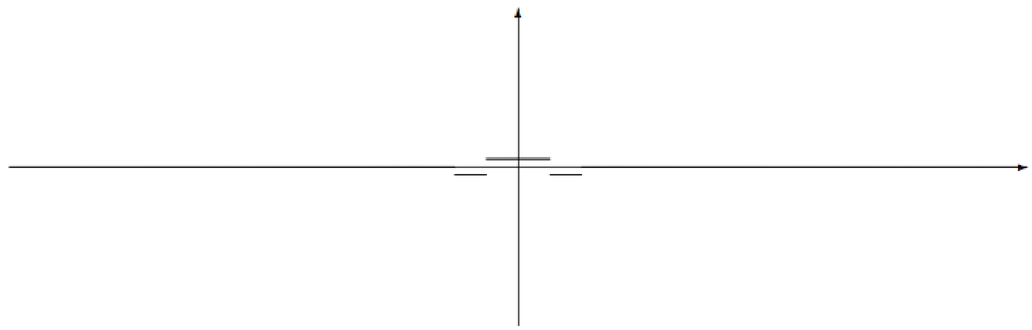
$$A_{50\%} = \begin{bmatrix} 3/2 & 5/2 & 5/2 & 3/2 \\ 1/2 & 3/2 & 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & 3/2 & 1/2 \\ 3/2 & 5/2 & 5/2 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 4

1) Posons $f(x) = 1$ pour $x \in [-1, 1]$, $f(x) = 0$ pour $|x| > 1$. Alors f est intégrable sur $\mathbf{R}$ et n'est pas égale presque partout à une fonction continue sur $\mathbf{R}$ puisque ses limites à droite et à gauche en 1 et -1 existent et sont distinctes.

Si on pose $g(x) = 1$ pour $x \in \mathbf{R}$, alors g est continue sur $\mathbf{R}$ mais n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}$.

2) La fonction f est paire et son graphe se compose de 3 segments horizontaux et de deux demi-droites portées par l'axe des abscisses. On reconnît quatre discontinuités aux points d'abscisse -2,-1,1 et 2.



3) On a, en posant $s = -t$

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-itx}dt = \int_{0}^{+\infty} f(-s)e^{isx}ds = \int_{0}^{+\infty} f(s)e^{isx}ds = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{itx}dt.$$

On obtient

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-itx}dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} f(t)[e^{itx} + e^{-itx}]dt = 2\int_{0}^{+\infty} cos(tx)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} cos(tx)dx - \frac{1}{2}\int_{1}^{2} cos(tx)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{sin(tx)}{x}\right]_{0}^{1} - \frac{1}{2}\left[\frac{sin(tx)}{x}\right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{2sin(x) - sin(2x)}{2sin(x)} = \frac{sin(x)(1 - cos(x))}{x}.$$

En toute rigueur ce calcul n'est valable que pour $x \neq 0$, mais un calcul direct montre que $\hat{f}(0) = 0$, ce qu'on pouvait voir par passage à la limite puisque $\hat{f}$ est continue.

4) On a, d'après la formule de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin^2(x)(1 - cos(x))^2}{x^2}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^2dx = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2dt$$

$$= 2\pi\int_{-2}^{2} \frac{dt}{16} = \frac{\pi}{2}.$$

5) Supposons que $\hat{f}$ soit intégrable sur $\mathbf{R}$. On aurait presque partout, d'après la formule d'inversion de Fourier,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)e^{itx}dx = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\hat{f})(-t),$$

et f sera presque partout égale à une fonction continue sur $\mathbf{R}$, ce qui est absurde puisque f possède des limites à droite et à gauche distinctes en certains points.

Donc $\hat{f}$ n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}$, ce qui veut dire que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|sinx|\,(1-cos(x))}{|x|}dx = +\infty.$$

6) On pose $g(t) = 1$ pour $-1 \leq t \leq 1$, $g(t) = 0$ pour $|t| > 1$. On reconnaît la "fonction porte" p_1 et un calcul fait en cours donne

$$\hat{g}(x) = \frac{2sin(x)}{x} = 2sin_c(x).$$

En appliquant la formule de Parseval à g, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \frac{sin(x)^2}{x^2}dx \\ = \frac{1}{8}\int_0^{+\infty} |\hat{g}(x)|^2 dt = \frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} &|f(t)|^2 dt = \pi\int_{-1}^{1} dt \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

7) Soit $y \in L^1(\mathbf{R})$. 0n a

$$(\widehat{g * y})(x) = \frac{2\hat{y}(x)sin(x)}{x}.$$

Si $g * y = f$, on aurait

$$\frac{2\hat{y}(x)sin(x)}{x} = \hat{f}(x) = \frac{sin(x)(1-cos(x))}{x}, \quad \hat{y}(x) = \frac{1-cos(x)}{2},$$

ce qui est impossible puisque $\lim_{|x|\to+\infty}\hat{y}(x) = 0$, alors que $\frac{1-cos((2n+1)\pi)}{2} = 1$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 5

1) Comme $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ possède 4 éléments et que $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ en possède 2, il y a en tout 16 fonctions boolénnes sur $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.

Les fonctions affines sont les fonctions de la forme $f_{a,b,c} : (x, y) \to ax + by + c$, avec $a, b, c \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On a $f_{a,b,c}(\bar{1}, \bar{0}) = a$, $f_{a,b,c}(\bar{0}, \bar{1}) = b$, $f_{a,b,c}(\bar{0}, \bar{0}) = c$, $f_{a,b,c}(\bar{1}, \bar{1}) = a + b + c$, donc l'application $(a, b, c) \to f_{a,b,c}$ est une bijection de $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^3$ sur l'ensemble Aff des fonctions affines sur $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$. On peut donc énumérer les 8 fonctions affines $f_{a,b,c} = [c, a, b, a + b + c]$:

$$f_{000} = [\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}], f_{001} = [\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}], f_{010} = [\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}], f_{011} = [\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}], f_{100} = [\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}],$$
$$f_{101} = [\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}], f_{110} = [\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}], f_{111} = [\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}].$$

2) On a par définition $f^*(x) = (-1)^{f(x)}$, et on obtient

u	00	01	10	11
$f^*(u)$	1	1	1	-1

3) En appliquant la définition de la distance de Hammings, on obtient

$$d(f, f_{000}) = 1, d(f, f_{001}) = 3, d(f, f_{010}) = 1, d(f, f_{011}) = 3, d(f, f_{100}) = 1, d(f, f_{101}) = 3,$$
$$d(f, f_{110}) = 3, d(f, f_{111}) = 1.$$

Comme $2^{2-1} - 2^{\frac{2}{2}-1} = 2 - 1 = 1$, on a $d(g, Aff) \leq 1 = d(f, Aff)$ pour toute fonction booléenne g, et f est une fonction courbe.

On va maintenant vérifier que $2 - \frac{1}{2}\mathcal{W}(f^*)(u) = d(f, \phi_u)$ pour tout $u \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$, où $\phi_{a,b}(x, y) = ax + by$ pour $u = (a, b) \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$. On donne ces vérifications sous forme de tableau

u	00	01	10	11
$f^*(u)$	1	1	1	-1
papillon 0 à 2	2	0	0	2
$\mathcal{W}(f^*)(u)$	2	2	2	-2
$2 - \frac{1}{2}\mathcal{W}(f^*)(u)$	1	1	1	3
ϕ_u	f_{000}	f_{010}	f_{100}	f_{110}
$d(f, \phi_u)$	1	1	1	3

et on a bien la propriété cherchée.

4) On a vu que si g est une fonction booléenne quelconque sur $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$, on a $d(g, Aff) \leq 1$. Comme $d(g, Aff) \geq 1$ pour toute fonction booléenne non affine on voit que **toute fonction booléenne non affine sur $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ est une fonction courbe.**

Le recours à la transformée de Walsh est donc inutile, et on obtient les 8 fonctions courbes

$$[0,0,0,1], [0,1,0,0], [0,0,1,0], [0,1,1,1],$$
$$[1,1,1,0], [1,0,1,1], [1,1,0,1], [1,0,0,0].$$