Master CSI-UE / Master CSI-THCS-Analyse de Fourier

Corrigé du devoir maison du 4 décembre 2009

[1]

Exercice 1

On calcule la transformée de Fourier discrète de $u = [0,1,0,1,0,1,0,1]$ par FFT décimation temporelle, en commençant bien sûr par "inverser les bits".

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$bits$	000	001	010	011	100	101	110	111
$revbits$	000	100	010	110	001	101	011	111
$rev(k)$	0	4	2	6	1	5	3	7
$f(k)$	0	1	0	1	0	1	0	1
$rev(f)(k)$	0	0	0	0	1	1	1	1
$\omega_2 = -1$	0	0	0	0	2	0	2	0
$\omega_4 = i$	0	0	0	0	$2+2=4$	0	$2-2=0$	0
$\omega_8 = -1, \hat{u}(k)$	$0+4=4$	0	0	0	$0-4=-4$	0	0	0

Donc $\hat{u} = [4,0,0,0,-4,0,0,0]$.

2) On note $v \underset{8}{*} w$ la convolution cyclique de $v = [v[0],...,v[7]]$ et $w = [w[0],...w[7]]$. Soit $h = [h[0],...,h[7]]$.

On a $u \underset{8}{*} v = h$ si et seulement si $\widehat{u \underset{8}{*} v} = \hat{h}$. Comme $\widehat{u \underset{8}{*} v} = \hat{u}.\hat{v} = [4\hat{v}[0],0,0,0,-4\hat{v}[4],0,0,0]$, on voit que l'équation $u \underset{8}{*} v = h$ possède des solutions si et seulement si $h[1] = h[2] = h[3] = h[5] = h[6] = h[7] = 0$.

Supposons maintenant que cette condition est vérifiée et que $\hat{h}[0] \neq 0$ et $\hat{h}[4] \neq 0$. On a alors $u \underset{8}{*} v = h$ si et seulement si $\hat{v}[0] = \frac{\hat{h}[0]}{4}$ et $\hat{v}[4] = -\frac{\hat{h}[4]}{4}$. La condition $|Supp(\hat{v})| \leq 2$ est alors vérifiée si et seulement si $\hat{v}[1] = \hat{v}[2] = \hat{v}[3] = \hat{v}[5] = \hat{v}[6] = \hat{v}[7] = 0$, ce qui donne

$$v = \mathcal{F}_8^{-1}\left(\left[\frac{\hat{h}[0]}{4},0,0,0,-\frac{\hat{h}[4]}{4},0,0,0\right]\right).$$

3) Supposons maintenant que $\hat{h} = [8,0,0,0,-8,0,0,0]$, ce qui correspond d'après la linéarité et l'injectivité de la transformée de Fourier discrète à $h = 2u = [0,2,0,2,0,2,0,2]$ On obtient $v = \mathcal{F}_8^{-1}([2,0,0,0,2,0,0,0])$. On a alors

[1] Pour toute question concernant ce corrigé s'adresser à charles.dossal@math.u-bordeaux1.fr ou esterle@math.u-bordeaux.fr

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{v}[k]$	2	0	0	0	2	0	0	0
$\omega_8 = e^{\frac{i\pi}{4}}$	4	0	0	0	0	0	0	0
$\omega_4 = i$	4	0	4	0	0	0	0	0
$\omega_2 = -1$	4	4	4	4	0	0	0	0
$revbits$	4	0	4	0	4	0	4	0
$v[k]$	$1/2$	0	$1/2$	0	$1/2$	0	$1/2$	0

Donc l'équation $u \underset{8}{*} v = [8,0,0,0,-8,0,0,0]$ admet pour unique solution vérifiant $|Supp(\hat{v})| \leq 2$ la suite $v = [1/2, 0, 1/2, 0, 1/2, 0, 1/2, 0]$.

Exercice 2

On va utiliser la FFT pour calculer le produit des deux polynômes $p = 1 + 5x^2 + x^3$ et $q = 1 + x^4$. On peut effectuer les calculs dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, puisque le degré du produit est égal à 7. Les calculs sont analogues à ceux effectués dans le cours.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(k)$	1	0	5	1	0	0	0	0
$\omega_8^{-1} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$	1	0	5	1	1	0	$-5i$	$e^{-\frac{3i\pi}{4}}$
$\omega_4^{-1} = -i$	6	1	-4	i	$1-5i$	$e^{-\frac{3i\pi}{4}}$	$1+5i$	$e^{-\frac{i\pi}{4}}$
$\omega_2^{-1} = -1$	7	5	$-4+i$	$-4-i$	$1-5i$ $e^{-\frac{3i\pi}{4}}$	$1-5i$ $-e^{-\frac{3i\pi}{4}}$	$1+5i$ $+e^{-\frac{i\pi}{4}}$	$1+5i$ $-e^{-\frac{i\pi}{4}}$
$F_8(p)(k)$ (Revbits ligne préc.)	7	$1-5i$ $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$	$-4+i$	$1+5i$ $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$	5	$1-5i$ $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$	$-4-i$	$1+5i$ $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$
$q(k)$	1	0	0	0	1	0	0	0
$\omega_8^{-1} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$	2	0	0	0	0	0	0	0
$\omega_4^{-1} = -i$	2	0	2	0	0	0	0	0
$\omega_2^{-1} = -1$	2	2	2	2	0	0	0	0
$F_8(q)(k)$ (Revbits ligne préc.)	2	0	2	0	2	0	2	0
$F_8(p*q)(k)$	14	0	$-8+2i$	0	10	0	$-8-2i$	0
Revbits	14	10	$-8+2i$	$-8-2i$	0	0	0	0
$\omega_2 = -1$	24	4	-16	$4i$	0	0	0	0
$\omega_4 = i$	8	0	40	8	0	0	0	0
$\omega_8 = e^{i\frac{\pi}{4}}$	8	0	40	8	8	0	40	8
$(p*q)(k)$ (diviser par 8)	1	0	5	1	1	0	5	1

On trouve donc sans surprise que

$$pq = \sum_{k=0}^{7} (p*q)[k] x^k = 1 + 5x^2 + x^3 + x^4 + 5x^6 + x^7.$$

On a alors

$$1501 \times 10001 = p(10)q(10) = (pq)(10) = 15011501.$$

Exercice 3 sous Matlab

1) On écrit les coefficients des polynômes $p = 1 + 5x^2 + x^3$ et $q = 1 + x^4$ en partant du terme constant. On calcule ensuite la transformée de Fourier inverse du produit ponctuel des transformées de Fourier discrètes dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ des suites obtenues. Matlab rajoute automatiquement des zéros au départ des calculs.

```
>>   p1=[1 0 5 1];
q1=[1 0 0 0 1];
pq1=ifft((fft(p1,8).*fft(q1,8)),8)


pq1 =

     1     0     5     1     1     0     5     1
```

On utilise la commande 'fliplr' pour écrire en sens inverse les coefficients du produit pq obtenus c-dessus, ce qui donne l'écriture pour Matlab du polynôme produit pq, et on évalue en 10, ce qui donne le produit cherché.

```
polyval(fliplr(pq1),10)
ans =

    15011501
```

2)

On procède comme précédemment, en écrivant les coefficients des polynômes notés ici $p2$ et $q2$.

```
p2=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
q2=[1 2 3 4 5 6 7 8 9];
pq2=ifft((fft(p2,32).*fft(q2,32)),32)

pq2 =

  Columns 1 through 8

    1.0000    3.0000    6.0000   10.0000   15.0000   21.0000   28.0000   36.0000

  Columns 9 through 16

   45.0000   45.0000   45.0000   44.0000   42.0000   39.0000   35.0000   30.0000
```

```
  Columns 17 through 24

   24.0000   17.0000    9.0000   -0.0000         0   -0.0000   -0.0000   -0.0000

  Columns 25 through 32

         0   -0.0000   -0.0000   -0.0000         0   -0.0000         0   -0.0000
```

On peut alors donner le résultat.

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10})(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7+9x^8)$$
$$= (1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+28x^6+36x^7+45x^8+45x^9+45x^{10}+44x^{11}+42x^{12}+39x^{13}+35x^{14}$$
$$+30x^{15} + 24x^{16} + 17x^{17} + 9x^{18}).$$

Pour le produit des deux entiers, on se heurte à des problèmes d'arrondi.

```
>> format long
>> polyval(fliplr(pq2),10)

ans =

     1.095581052799700e+19
```

On va donc terminer à la main (on pourrait aussi faire appel à un logiciel de calcul symbolique).

Si on pose $p_2 = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}$, $q_2 = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10})(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7+9x^8$, on a $11111111111 = p(10)$, $987654321 = q(10)$, donc

$$11111111111 \times 987654321 = p_2(10)q_2(10) = p_2q_2(10)$$
$$= 1+30+600+10^4+5.10^4+10^5+10^5+2.10^6+8.10^6+2.10^7+6.10^7+3.10^8+5.10^8+4.10^9$$
$$+5.10^9+4.10^{10}+5.10^{10}+4.10^{11}+4.10^{11}+4.10^{12}+2.10^{12}+4.10^{13}+9.10^{13}+3.10^{14}+5.10^{14}+3.10^{15}$$
$$+3.10^{16} + 4.10^{16} + 2.10^{17} + 7.10^{17} + 10^{18} + 9.10^{18}$$
$$= 10973936899890260631.$$

Exercice 4

1) On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}e^{-itx}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t}e^{-itx}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t}e^{-itx}dt$$

$$\left[\frac{e^{t(1-ix)}}{1-ix}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{t(-1-ix)}}{-1-ix}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix}$$

$$= \frac{2}{1+x^2}.$$

2) On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-an} = lim_{p\to+\infty}\sum_{n=1}^{p}[e^{-a}]^n = lim_{p\to+\infty}\frac{e^{-a}-[e^{-a}]^{p+1}}{1-e^{-a}} = \frac{e^{-a}}{1-e^{-a}}$$

$$= \frac{1}{e^a-1}.$$

3) On va utiliser ici la formule sommatoire de Poisson. En effet comme "l'exponentielle l'emporte sur la puissance" on a $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|(1+|x|)^n < +\infty$ pour tout $n \geq 0$. D'autre part on a

$$\lim_{|n|\to+\infty} n^2 \left|\hat{f}\left(\frac{2\pi n}{c}\right)\right| = \lim_{|n|\to+\infty}\frac{2n^2}{1+\left(\frac{2\pi n}{c}\right)^2} = \frac{c^2}{2\pi^2} < +\infty.$$

Comme la série de Riemmann $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ est convergente, les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} f\left(\frac{2\pi n}{c}\right)$ et $\sum_{n<0} f\left(\frac{2\pi n}{c}\right)$ sont convergentes, et on déduit de la formule sommatoire de Poisson que l'on a, pour $c > 0$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(cn) = \frac{1}{c}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(\frac{2\pi n}{c}\right).$$

Comme f et $\hat{f}$ sont paires, et comme $f(0) = 1$ et $\hat{f}(0) = 2$, on a

$$\frac{e^c+1}{e^c-1} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-c|n|} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(cn) = \frac{2}{c} + \frac{2}{c}\sum_{n=1}^{+\infty}\hat{f}\left(\frac{2\pi n}{c}\right) = \frac{2}{c} + \frac{4}{c}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{4n^2\pi^2}{c^2}}$$

$$= \frac{2}{c} + \frac{c}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\frac{c^2}{4\pi^2}+n^2}.$$

On obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\frac{c^2}{4\pi^2}+n^2} = \frac{\pi^2}{c}\frac{e^c+1}{e^c-1} - \frac{2\pi^2}{c^2}.$$

Finalement, en posant $c = 2\pi b$, on obtient, pour $b > 0$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{b^2+n^2} = \frac{\pi}{2b}\frac{e^{2\pi b}+1}{e^{2\pi b}-1} - \frac{1}{2b^2}.$$

Si $b < 0$, la formule ci-dessus reste valable en remplaçant b par $|b|$. D'autre part si on pose $\phi_n(b) = \frac{1}{b^2+n^2}$, ,$\phi(b) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(b)$, on a $0 \leq \phi_n(b) \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$ et tout $b \in \mathbb{R}$. Comme la série de Riemann$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente, on voit que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(b)$ est *normalement convergente sur* $\mathbb{R}$, et par conséquent ϕ est continue sur $\mathbb{R}$. On obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \ \to +\infty} \phi(b) = \lim_{n \ \to +\infty} \frac{\pi}{2b} \frac{e^{2\pi b}+1}{e^{2\pi b}-1} - \frac{1}{2b^2}$$

$$= \lim_{n \ \to +\infty} \frac{\pi b(e^{2\pi b}+1)+1-e^{2\pi b}}{2b^2(e^{2\pi b}-1)}.$$

On a

$$\pi b(e^{2\pi b}+1)+1-e^{2\pi b} = \pi b + 2\pi^2 b^2 + 2\pi^3 b^3 - \pi b - 2\pi^2 b^2 - \frac{8\pi^3 b^3}{6} + \epsilon_1(b) = \frac{2\pi^3}{3} + \epsilon_1(b),$$

$$2b^2(e^{2\pi b}-1) = 4\pi b + \epsilon_2(b),$$

avec $\lim_{b\to 0}\epsilon_1(b)$ =$\lim_{b\to 0}\epsilon_1(b) = 0$, et on obtient comme bien connu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 5

1) On pose $g(x) = 0$ si $|x| < \pi$, $g(x) = 1$ si $\pi \leq |x| \leq 2\pi$, $g(x) = 0$ si $|x| > 2\pi$. On a, pour $x \neq 0$,

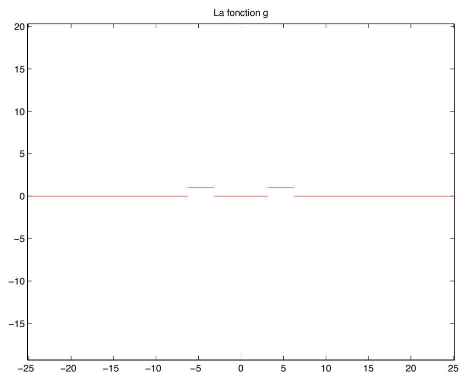
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{itx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{-\pi} e^{itx} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} e^{itx} dt = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} cos(tx) dt$$

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{sin(tx)}{t} \right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{sin(2\pi t) - sin(\pi t)}{\pi t}.$$

D'autre part si $x = 0$ on a $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{itx} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{-\pi} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} dt = 1.$

On représente la fonction g sous Matlab.

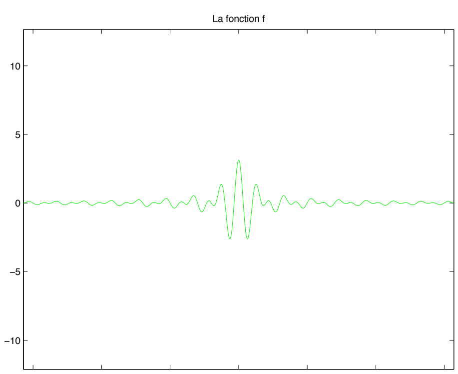
```
x1=[0:0.01:pi];x2=[pi:0.01:2*pi];x3=[2*pi:0.01:8*pi];
p=[0];q=[1];y1=polyval(p,x1);y2=polyval(q,x2);y3=polyval(p,x3);
plot(x1,y1,'red',x2,y2,'red',x3,y3,'red',-x1,y1,'red',-x2,y2,'red',-x3,y3,'red');
hold on;axis equal;
title('La fonction g');print -depsc g
```



2) On pose $f(t) = \frac{sin(2\pi t) - sin(\pi t)}{\pi t}$ pour $t \neq 0$, $f(0) = 1$. Il est clair que $f \in L^2(\mathbb{R})$, et d'après ce qui précède, $f = \mathcal{F}^{-1}(g)$. Donc $\hat{f} = g$.

On représente maintenant la fonction f.

```
x=[-5*pi:0.01:5*pi];
y=(sin(2*pi*x)-sin(pi*x))./x;
plot(x,y,'green');axis equal;title('La fonction f');
>> print -depsc fonctionf
```



3) Le plus petit réel positif tel que $\hat{f}(x)$ soit nulle presque partout pour $|x| > a$ est égal à 2π, et $f \in L^2(\mathbb{R})$ puisque $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Avec les notations du cours, on a donc $freq_{max}(f) = 1$, et d'après le théorème d'échantillonnage de Shannon (théorème 8.5.1 page 109 du support de cours) on peut reconstituer toutes les valeurs de f à partir de la suite $(f[\delta m])_{m \in \mathbb{Z}}$ si et seulement si $\frac{1}{\delta} \geq 2$, c'est à dire $\delta \leq \frac{1}{2}$. On a alors

$$f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta f(m\delta) \frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t - m\delta)\right)}{\pi(t - m\delta)}$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (2cos(\pi m\delta - 1)) \frac{sin(\pi m\delta)}{\pi m} \frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t - m\delta)\right)}{\pi(t - m\delta)}.$$

On considère maintenant le cas particulier $\delta = \frac{1}{4}$. Si $m = 0$ on obtient $(2cos(\pi m\delta - 1))\frac{sin(\pi m\delta)}{\pi m}\frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t-m\delta)\right)}{\pi(t-m\delta)} = \frac{sin(4\pi t)}{4\pi t}$. Si $m = 4p$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on obtient $(2cos(\pi m\delta - 1))\frac{sin(\pi m\delta)}{\pi m}\frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t-m\delta)\right)}{\pi(t-m\delta)} = 0$. Si $m = 4p+1$, on obtient $cos(\frac{m\pi}{4}) = cos(\frac{\pi}{4}+p\pi) = \frac{(-1)^p}{\sqrt{2}}$, $sin(\frac{m\pi}{4}) = sin(\frac{\pi}{4}+p\pi) = \frac{(-1)^p}{\sqrt{2}}$, et $sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t-m\delta)\right) = -sin(4\pi t)$. Si $m = 4p-1$ on obtient $cos(\frac{m\pi}{4}) = cos(-\frac{\pi}{4}+p\pi) = \frac{(-1)^p}{\sqrt{2}}$, $sin(\frac{m\pi}{4}) = sin(-\frac{\pi}{4}-p\pi) = -\frac{(-1)^p}{\sqrt{2}}$, et $sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t-m\delta)\right) = -sin(4\pi t)$. Si $m = 4p+2$, on obtient $cos(\frac{m\pi}{4}) = cos(\frac{\pi}{2}+p\pi) = 0$, $sin(\frac{m\pi}{4}) = sin(\frac{\pi}{2}+p\pi) = (-1)^p$, et $sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t-m\delta)\right) = sin(4\pi t)$. Finalement on a

$$\begin{aligned}
f(t) = \frac{sin(4\pi t)}{4\pi t} &+ \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left(-1+\frac{(-1)^p}{\sqrt{2}}\right)\frac{sin(4\pi t)}{\pi^2(4p+1)(t-p-\frac{1}{4})} \\
&+ \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{(-1)^p}{\sqrt{2}}\right)\frac{sin(4\pi t)}{\pi^2(4p-1)(t-p+\frac{1}{4})} \\
&+ \sum_{p=-\infty}^{+\infty}(-1)^{p+1}\frac{sin(4\pi t)}{\pi^2(2p+1)(t-\frac{p}{2}-\frac{1}{4})}.
\end{aligned}$$