Master CSI 1 — 2008-2009

Théorie de l'information : DS du 6 mars 2009

Durée : 1h30. Sans document. Les exercices sont indépendants.

– Exercice 1. On considère deux variables aléatoires de Bernoulli X et Y telles que

$$P(X=0, Y=0) = 1/3, \qquad P(X=0, Y=1) = 1/3,$$
$$P(X=1, Y=0) = 0, \qquad P(X=1, Y=1) = 1/3.$$

Calculer les quantités :

a) $H(X), H(Y)$,

b) $H(X \mid Y)$, $H(Y \mid X)$,

c) $H(X, Y)$,

d) $I(X, Y)$.

– Exercice 2. Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs a, b, c, d, e, f, g de loi de probabilité $(P(X=a), P(X=b), \ldots, P(X=g))$ égale à :

$$(0{,}49,\ 0{,}26,\ 0{,}12,\ 0{,}04,\ 0{,}04,\ 0{,}03,\ 0{,}02).$$

a) Trouver un code de Huffman binaire pour X.

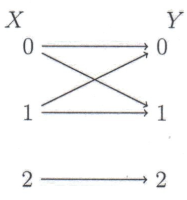
b) Trouver la longueur moyenne $\overline{\ell}$ pour ce code et cette loi de probabilité.

– Exercice 3. On considère les trois codes suivants :

$$C_1 = \{0, 10, 11\}, C_2 = \{00, 01, 10, 110\}, C_3 = \{01, 10\}.$$

Lequel d'entre eux ne peut jamais être un code de Huffman ? Pourquoi ?

– Exercice 4. On considère le canal discret sans mémoire :



où les probabilités de transition $P(Y = 1|X = 0)$ et $P(Y = 0|X = 1)$ valent toutes les deux la même valeur p.

a) Soit Z la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si $X = 2$ et 0 si $X \neq 2$. Écrire $H(Y) = H(Z) + H(Y|Z)$ et calculer $H(Y)$ en fonction de p et de $\alpha = P(X = 2)$.

b) Calculer $H(Y|X)$ en fonction de p et de α.

c) En déduire l'information mutuelle $I(X, Y)$ en fonction de p et de α.

d) Que vaut la capacité de ce canal en fonction de p ?