Master CSI-ENSM-THCS
MHT 723-Analyse de Fourier

Examen du 5 novembre 2010, de 8h à 10h

Exercice 1

Calculer la transformée de Walsh du vecteur h suivant en utilisant la transformée rapide.

$$h = [1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1].$$

Exercice 2

Soit f la fonction de $\mathbb{F}_2^3 \to \mathbb{F}_2$ définie par

$$f((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3.$$

1. En utilisant l'ordre de $\mathbb{F}_2^3$ défini en cours et utilisé en TD (binaire inversé), écrire le vecteur associé à la fonction f^*.
2. En utilisant la transformée de Walsh de f^* calculer la distance de f à l'ensemble des fonctions affines.
3. Déterminer l'ensemble des fonctions affines réalisant ce minimum (donner leur expression polynomiale).

Exercice 3

Déterminer l'ensemble des morphismes de G dans H et préciser ceux qui sont bijectifs dans les cas suivants :

1. $G = (\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, +)$ et $H = (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, +)$,
2. $G = (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, +)$ et $H = (\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, +)$,
3. $G = (\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, +)$ et $H = (\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}^*, \times)$.

Exercice 4

Ecrire une fonction matlab *ColonneWalsh* qui prend en entrée un entier k et un entier $n \leqslant 2^k$ et qui renvoie la n-ième colonne de la matrice de Walsh de dimension $2^k \times 2^k$. **Le programme ne doit calculer aucune matrice de Walsh** de manière à pouvoir être utilisé pour des valeurs de k de l'ordre de 15 sans qu'il y ait de problème de mémoire. On pourra utiliser une procédure récursive et exploiter la structure de la matrice de Walsh.

Exercice 5

Existe t'il des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$ non nulles presque partout telles que $f * f = f$? Même question dans $L^2(\mathbb{R})$.