

Devoir maison 2
à remettre le 3 décembre 2010

1

Exercice 1

En utilisant la FFT décimation temporelle, calculer la transformée de Fourier discrète de

$$u = [0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1].$$

2) On note $v^{(8)} * w$ la convolution cyclique de $v = [v[0], \dots, v[7]]$ et $w = [w[0], \dots, w[7]]$. Soit $h = [h[0], \dots, h[7]]$.

Montrer que l'équation $u^{(8)} * v = h$ possède des solutions si et seulement si $\hat{h}[2] = \hat{h}[6] = 0$. Montrer que dans ce cas il existe une unique solution v de cette équation vérifiant $\hat{v}[2] = \hat{v}[6] = 0$.

3) Calculer cette solution par FFT inverse (décimation fréquentielle) si $\hat{h} = [24, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0]$.

Exercice 2

Effectuer le produit des polynômes $x^3 + 1$ et $x^4 + x$ en utilisant la FFT décimation fréquentielle et la FFT inverse décimation temporelle. Appliquer ce résultat au calcul du produit de 1001 et 10010.

Exercice 3

La FFT sous Matlab se calcule avec la commande $fft(x, p)$ où x est le signal à transformer et p un entier (pour nous une puissance de 2). Si le signal est de longueur inférieure à p Matlab le complète automatiquement avec des zéros. La FFT inverse se calcule avec la commande $ifft(x, p)$.

1) Reprendre l'exercice précédent sous Matlab.

2) En utilisant Matlab, la FFT et la FFT inverse, calculer le produit des polynômes $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11}$ et $9 + 8x + 7x^2 + 6x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + x^8$. En déduire le produit $111111111111 \times 123456789$.

1. Pour toute question concernant ce devoir s'adresser à esterle@math.u-bordeaux.fr

Exercice 4

1) En appliquant la définition de la transformation de Fourier sur \mathbb{R} , montrer que si on pose $f(t) = e^{-|t|}$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(x) = \frac{2}{1+x^2}.$$

2) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$. Connaissez vous une méthode directe pour calculer cette intégrale ?

3) Soit $a > 0$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-an}$.

4) En utilisant une formule du cours, en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b^2+n^2}$ pour $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

1) On pose $g(x) = 0$ si $|x| < \pi$, $g(x) = 1$ si $\pi \leq |x| \leq 2\pi$, $g(x) = 0$ si $|x| > 2\pi$.

Dessiner le graphe de g , et calculer

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{itx} dx.$$

2) On pose $f(t) = \frac{\sin(2\pi t) - \sin(\pi t)}{\pi t}$ pour $t \neq 0$, $f(0) = 1$. Donner la transformée de Fourier de f .

3) En utilisant le théorème d'échantillonnage de Shannon, déterminer pour quelles valeurs positives de δ on peut reconstituer toutes les valeurs de f à partir de la suite $(f[\delta m])_{m \in \mathbb{Z}}$. Dans ce cas donner une formule explicite permettant de calculer $f(t)$ à partir de la suite $(f[\delta m])_{m \in \mathbb{Z}}$. Détailler le cas particulier $\delta = \frac{1}{4}$.