ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017/2018, SESSION 1 D'AUTOMNE
Master CSI, UE 4TCY701U, Théorie de la complexité.
Lundi 20 novembre 2017. 16h30–18h Durée : 1h30.
Documents non autorisés.

Collège Sciences et Technologies

Toute réponse non justifiée n'apportera pas de point. Le barème est indicatif.

Exercice 1 : Décidabilité et indécidabilité (cours) — 3 Points

On considère un alphabet A fini et un langage $L \subseteq A^*$. On note Σ un second alphabet fini qui permet de coder les machines de Turing travaillant sur le premier alphabet A. En particulier, étant donnée une telle machine M, on notera $<M> \in \Sigma^*$ le codage de M. On considère maintenant le langage $K \subseteq \Sigma^*$ suivant :

$$K = \{<M> \mid \text{pour tout mot } w \in A^*, M \text{ accepte } w \text{ si et seulement si } w \in L\} \subseteq \Sigma^*$$

a) Donner une condition C simple sur L telle que K est indécidable si et seulement si L satisfait C.

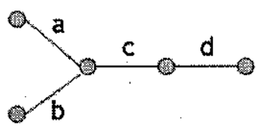
b) Montrer que K est décidable si et seulement si K est semi-décidable.

Exercice 2 : Graphes-arêtes et complexité — 5 Points

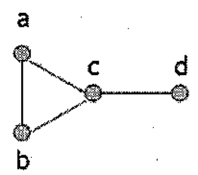
Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté (V est l'ensemble des sommets et E celui des arêtes). Un cycle dans G est *eulérien* si il passe par toutes les arêtes une et une seule fois (mais peut passer plusieurs fois par un même sommet). Un cycle est *hamiltonien* si il passe une et une seule fois par chaque sommet.

a) Soit K_4 le graphe complet (c'est-à-dire que tous les sommets sont reliés) à quatre sommets. K_4 contient-il un cycle eulérien ? Un cycle hamiltonien ?

Pour tout graphe non-orienté $G = (V, E)$, on définit son *graphe arête*, noté $G^* = (V^*, E^*)$, comme suit. L'ensemble des sommets de G^* est celui des arêtes de G : $V^* = E$. L'ensemble $E^* \subseteq V^* \times V^*$ des arêtes de G^* contient toutes les paires (e_1, e_2) telles que e_1 et e_2 ont un sommet en commun dans G : on relie deux sommets de G^* quand ils correspondent à des arêtes adjacentes de G. Par exemple,



$G = (V, E)$ avec $E = \{a, b, c, d\}$



$G^* = (V^*, E^*)$ avec $V^* = \{a, b, c, d\}$

b) Dessiner le graphe-arête de K_4. Contient-il un cycle eulérien ? Un cycle hamiltonien ?

c) Soit G un graphe non-orienté et C un cycle eulérien dans G. A quoi C correspond-il dans G^* ?

On dit qu'un graphe H est un graphe-arête s'il existe un graphe G tel que H est le graphe-arête de G et on considère le problème suivant :

CYCLE HAMILTONIEN ARÊTE

Entrée : Un graphe-arête H.
Question : Existe-t-il un cycle hamiltonien dans H ?

De plus on admettra qu'il existe un algorithme *polynomial* qui teste si un graphe non-orienté *quelconque* contient un cycle eulérien.

d) Que peut-on déduire de la classe de complexité à laquelle appartient CYCLE HAMILTONIEN ARÊTE ?

Exercice 3 : Transducteurs — 7 Points

On considère un alphabet à deux lettres $A = \{a, b\}$. On notera $A_\varepsilon = A \cup \{\varepsilon\} = \{a, b, \varepsilon\}$ (A_ε contient les deux lettres de A plus le mot vide "ε").

On appelle *transducteur fini* un tuple $T = (Q, q_I, F, \delta)$ où Q est un ensemble fini d'états, $q_I \in Q$ un état initial, $F \subseteq Q$ un ensemble d'états finaux et $\delta \subseteq Q \times A_\varepsilon \times A_\varepsilon \times Q$ un ensemble fini de transitions.

Un tel transducteur $T = (Q, q_I, F, \delta)$ accepte des paires de mots $(u, u') \in A^* \times A^*$. Une telle paire $(u, u') \in A^* \times A^*$ est acceptée par T quand il existe une séquence de la forme suivante :

$$q_0 \xrightarrow{(x_0,x'_0)} q_1 \xrightarrow{(x_1,x'_1)} q_2 \xrightarrow{(x_2,x'_2)} \cdots q_{n-1} \xrightarrow{(x_{n-1},x'_{n-1})} q_n$$

- $q_0, \ldots, q_n \in Q$ sont des états tels que $q_0 = q_I$ et $q_n \in F$.
- Pour tout i, (x_i, x'_i) est une paire dans $A_\varepsilon \times A_\varepsilon$ qui satisfait $(q_i, x_i, x'_i, q_{i+1}) \in \delta$.
- $u = x_0 x_1 \cdots x_{n-1}$ et $u' = x'_0 x'_1 \cdots x'_{n-1}$.

a) Montrer que le problème suivant est indécidable :

IDENTITÉ NON-VIDE

Entrée : Un transducteur fini $T = (Q, q_I, F, \delta)$.
Question : Existe-t'il un mot non-vide $u \neq \varepsilon$ tel que la paire (u, u) est acceptée par T ?

b) Montrer que le problème suivant est indécidable :

IDENTITÉ

Entrée : Un transducteur fini $T = (Q, q_I, F, \delta)$.
Question : Existe-t'il un mot quelconque $u \in A^*$ tel que la paire (u, u) est acceptée par T ?

Exercice 4 : Grammaires Étendues — 7 Points

On va considérer des grammaires qui peuvent utiliser des règles plus puissantes que les grammaires hors-contexte. On fixe un alphabet $A = \{a, b\}$ à deux lettres pour l'exercice.

Une *grammaire étendue* est un tuple $G = (V, S, R)$ qui définit un langage de mots $L(G) \subseteq A^*$:

- $V = \{X, Y, Z, \ldots,\}$ est un ensemble fini de variables et $S \in V$ est une variable de départ.
- R est un ensemble de règles de réécriture. Ici on a droit à deux types de règles :
  - Les règles classiques de la forme : $X \to w$ avec $X \in V$ et $w \in (V \cup A)^*$.
  - Les règles étendues ayant pour forme : $UX \to YZ$ avec $U, X, Y, Z \in V$.

Le langage $L(G) \subseteq A^*$ accepté par G est (comme attendu) défini comme le langage de tous les mots dans A^* qui peuvent être générés depuis la variable S de départ en appliquant des règles de R. Par exemple, considérons la grammaire $G = (V, S, R)$ avec $V = \{S, T, X, B, A_1, A_2\}$ et,

$$R = \left\{ \begin{array}{lllllllllllll} S & \to & TX & & A_1X & \to & XA_2 & & T & \to & \varepsilon & B & \to & b \\ T & \to & aTBA_1 & & A_1B & \to & BA_1 & & X & \to & \varepsilon & A_2 & \to & a \end{array} \right.$$

Il est simple vérifier que $aba \in L(G)$. En effet on peut utiliser la séquence suivante de réécritures :

$$S \to TX \to aTBA_1X \to aTBXA_2 \to aBXA_2 \to aBA_2 \to abA_2 \to aba$$

a) Quel est le langage $L(G)$ accepté par la grammaire G donnée ci-dessus ? Justifiez votre réponse.

b) Donner une grammaire étendue pour le langage suivant (dit langage des carrés) : $\{uu \mid u \in A^*\}$.

c) Montrer que le problème suivant est indécidable :

NON-VIDE

Entrée : Une grammaire étendue $G = (V, S, R)$.
Question : Est-ce que $L(G) \neq \emptyset$?