Université Bordeaux 1
Master CSI-UE / Master CSI-THCS
MHT 723-Analyse de Fourier
Annales-Années 2008-2009

26 novembre 2010

Table des matières

Chapitre 1

Sujets d'examen

1.1 Examen du 19 Décembre 2008

[1]

Exercice 1 (5 points)

On considère l'image numérisée

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1) En utilisant la transformée de Walsh rapide sur les lignes et les colonnes de A, calculer la transformée de Walsh de A.

2) Vérifier que les compressions de A à 25% et à 50% coincident, et calculer leur valeur commune.

Exercice 2 (6 points)

1) Calculer la transformée de Fourier discrète de $f = [1, 1, 0, 0]$ en utilisant la FFT décimation temporelle. Vérifier le résultat obtenu en utilisant la matrice de Fourier.

2) Calculer la transformée de Fourier inverse de $g = [8, -2 - 2i, 0, -2 + 2i]$ en utilisant la FFT inverse décimation fréquentielle. Vérifier le résultat obtenu en utilisant la matrice de Fourier.

3) En utilisant la FFT sur $\mathbb{C}^4$, calculer $(1+x)^3$. Appliquer le résultat obtenu au calcul de 11^3.

1. Durée 1h30-Documents autorisés

Exercice 3 (9 points)

1) On pose $f(t) = 1$ si $t \in [-1, 1]$, $f(t) = 0$ si $|t| > 1$.

Calculer la transformée de Fourier de f et représenter sur un même graphique f et $\hat{f}$.

2) Calculer $(f * f)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3) On pose $g(x) = 0$ pour $|x| > 2$, $g(x) = x+2$ pour $x \in [-2, 0]$, $g(x) = 2-x$ pour $x \in [0, 2]$.

Calculer la transformée de Fourier de g. Représenter sur un même graphique g et $\hat{g}$.

4) En utilisant le théorème d'échantillonnage de Shannon, déterminer pour quelles valeurs positives de δ on peut reconstituer toutes les valeurs de $\hat{f}$ à partir de la suite $(\hat{f}[\delta m])_{m\in\mathbb{Z}}$. Dans ce cas donner une formule explicite permettant de calculer $\hat{f}(t)$ à partir de la suite $(\hat{f}[\delta m])_{m\in\mathbb{Z}}$.

5) En utilisant de nouveau le théorème d'échantillonnage de Shannon, déterminer pour quelles valeurs positives de δ on peut reconstituer toutes les valeurs de $\hat{g}$ à partir de la suite $(\hat{g}[\delta m])_{m\in\mathbb{Z}}$. Dans ce cas donner une formule explicite permettant de calculer $\hat{g}(t)$ à partir de la suite $(\hat{g}[\delta m])_{m\in\mathbb{Z}}$.

6) En utilisant une formule sommatoire du cours, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sin^2(n\delta)}{n^2}$ pour $\delta > 0$. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1.2 Examen du 18 décembre 2009

[2]

Exercice 1 (5 points)

On pose $u = [1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1]$.

1) Calculer la transformée de Walsh de u.

2) Calculer la compression de u à 50%.

3) On rappelle que si ϕ est une fonction booléenne sur $\mathbb{F}_2^3 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ et si $n = a_1 + 2a_2 + 4a_3 \in \{0, ..., 7\}$, avec $a_i \in \{0, 1\}$ pour $i = 1, 2, 3$, on pose

2. Durée 1h30.Documents autorisés

$\phi^*[n] = (-1)^{\phi(\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3})}$. On pose $\phi = X_1X_2 + X_1X_2X_3$. Vérifier que $\phi^* = u$. En déduire la distance de ϕ au fonctions affines (c'est à dire le minimum de $d(\phi,\psi)$, d désignant la distance de Hammings, quand ψ décrit l'ensemble des fonctions booléennes affines sur $\mathbb{F}_2^3$).

Exercice 2 (6 points)

1) Calculer les transformées de Fourier discrètes de $f = [2,1,1,0]$ et $g = [1,2,0,0]$ par FFT, décimation temporelle.

2) En déduire le produit des polynômes $2 + x + x^2$ et $1 + 2x$, ainsi que le produit 112×21.

3) Déterminer les fonctions $h \in \mathbb{C}^4$ vérifiant l'équation $f \underset{4}{*} h = [1,1,1,1]$.

Exercice 3 (9 points)

1a) Soit $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction paire. Démontrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)e^{ixt}dt = 2\int_0^{+\infty} \phi(t)cos(xt)dt.$$

1b) Vérifier que l'on a

$$\int_0^{\pi} cos(t/2)cos(xt)dt = \frac{2cos(\pi x)}{1-4x^2} \text{ pour } x \neq \pm 1/2$$

et

$$\int_0^{\pi} cos^2(t/2)cos(xt)dt = \frac{sin(\pi x)}{2(x-x^3)} \text{ pour } x \neq 0, x \neq \pm 1.$$

2) On pose $f(x) = cos(x/2)$ pour $x \in [-\pi,\pi]$, $f(x) = 0$ pour $|x| > \pi$. Vérifier que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Calculer la transformée de Fourier de f et vérifier que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Représenter f et $\hat{f}$ sur un même graphique, et expliciter les formules obtenues en appliquant à f le théorème de Parseval et la formule d'inversion de Fourier.

3) On pose $g(x) = \frac{2cos(\pi x)}{\pi(1-4x^2)}$. Montrer que $\hat{g} = f$, et calculer $(g * g)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

4) En utilisant le théorème d'échantillonnage de Shannon, déterminer pour quelles valeurs positives de δ on peut reconstituer toutes les valeurs de g à partir de la suite $(g[\delta m])_{m\in\mathbb{Z}}$. Dans ce cas donner une formule explicite permettant de calculer $g(t)$ à partir de la suite $g[\delta m])_{m\in\mathbb{Z}}$.

5) En utilisant une formule sommatoire du cours, calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

Chapitre 2

Corrigés

2.1 Corrigé de l'examen du 19 Décembre 2008

Exercice 1

1) On va calculer la transformée de Walsh de A en utilisant l'algorithme rapide, appliqué aux colonnes et ensuite aux lignes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1e étape, colonnes,

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2e étape, colonnes,

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1e étape, lignes

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2e étape, lignes, on obtient

$$\mathcal{W}_2(A) = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) On a

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On numérote les lignes de W_2 de 0 à 3. Le nombre de changements de signe $n(i)$ de la ligne d'indice i est alors donné par le tableau suivant.

i	0	1	2	3
$n(i)$	0	3	1	2

On ordonne les pixels (i, j) selon la règle $(i_1, j_1) \prec (i_2, j_2)$ si $n(i_1) + n(j_1) < n(i_2) + n(j_2)$ ou si $n(i_1) + n(j_1) = n(i_2) + n(j_2)$ **et** $n(i_1) < n(i_2)$. On numérote alors les 16 pixels considérés ici du plus petit au plus grand pour l'ordre ci-dessus. On obtient le tableau suivant.

(i, j)	$n(i)$	$n(j)$	$n(i) + n(j)$	$rang[(i, j)]$
$(0, 0)$	0	0	0	1
$(0, 1)$	0	3	3	7
$(0, 2)$	0	1	1	2
$(0, 3)$	0	2	2	4
$(1, 0)$	3	0	3	10
$(1, 1)$	3	3	6	16
$(1, 2)$	3	1	4	13
$(1, 3)$	3	2	5	15
$(2, 0)$	1	0	1	3
$(2, 1)$	1	3	4	11
$(2, 2)$	1	1	2	5
$(2, 3)$	1	2	3	8
$(3, 0)$	2	0	2	6
$(3, 1)$	2	3	5	14
$(3, 2)$	2	1	3	9
$(3, 3)$	2	2	4	12

Pour la compression à 25%, on garde les pixels de rang 1, 2, 3 et 4 de la transformée de Walsh, et on annule les autres. On obtient le schéma suivant

$$\begin{bmatrix} * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour la compression à 50%, on garde les pixels de rang 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8de la transformée de Walsh, et on annule les autres. On obtient le schéma suivant

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On obtient

$$\mathcal{W}_2(A)_{25\%} = \mathcal{W}_2(A)_{50\%} = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On effectue les transformées de Walsh inverses en commençant cette fois par les lignes et en terminant par les colonnes. On obtient, pour la compression à 25%,

1e étape, lignes,

$$\begin{bmatrix} 24 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2e étape, lignes,

$$\begin{bmatrix} 24 & 24 & 24 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1e étape, colonnes,

$$\begin{bmatrix} 24 & 24 & 24 & 24 \\ 24 & 24 & 24 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2e étape, colonnes,

$$\begin{bmatrix} 24 & 24 & 24 & 24 \\ 24 & 24 & 24 & 24 \\ 24 & 24 & 24 & 24 \\ 24 & 24 & 24 & 24 \end{bmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à diviser par 16 pour obtenir le résultat ce qui donne

$$A_{25\%} = A_{50\%} = \begin{bmatrix} 3/2 & 3/2 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 3/2 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2

1) On va calculer la transformée de Fourier discrète de $f = [1, 1, 0, 0]$ en utilisant la FFT décimation temporelle. On notera que le "renversement des bits" se fait au début des calculs.

k	0	1	2	3
$bits$	00	01	10	11
$revbits$	00	10	01	11
$revbits(k)$	0	2	1	3
$f[k]$	1	1	0	0
$rev(f)[k]$	1	0	1	0
$1e\ etape, \omega 2 = -1$	1	1	1	1
$2e\ etape, \omega_4 = i$	2	$1-i$	0	$1+i$

Donc $\widehat{f} = [2, 1-i, 0, 1+i]$.

On vérifie le résultat obtenu en utilisant la matrice de Fourier

$$A_4 = \left[\omega_4^{-pq}\right]_{\substack{0\le p\le 3\\ 0\le q\le 3}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

On a bien

$$\widehat{f} = fA_4 = [1, 1, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} = [2, 1-i, 0, 1+i].$$

2) On va maintenant calculer la transformée de Fourier inverse de $g = [8, -2-2i, 0, -2+2i]$ en utilisant la FFT inverse décimation fréquentielle. On remarquera que l'envergure du papillon diminue de moitié à chaque étape, et que les renversements de bits se font à la fin. Les puissances négatives des racines 2^nemes de l'unité sont replacées par leurs inverses.

k	0	1	2	3
$g[k]$	8	$-2-2i$	0	$-2+2i$
$1eetape, \omega_4 = i$	8	$-2-2i+(-2+2i) = -4$	8	$i((-2-2i)-(-2+2i)) = 4$
$2e\ etape, \omega 2 = 1$	4	12	12	4
$revbits, 4\mathcal{F}^{-1}(g)[k]$	4	12	12	4
$\mathcal{F}^{-1}(g)[k]$	1	3	3	1

On sait que la matrice de Fourier inverse A_4^{-1} est donnée par la formule

$$A_4^{-1} = \frac{1}{4}\overline{A_4} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}.$$

On a bien

$$\mathcal{F}^{-1}(g) = gA_4^{-1} = \frac{1}{4}[8, -2-2i, 0, -2+2i]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} = [1, 3, 3, 1].$$

3) La suite des coefficients de $1 + x$, considéré comme polynôme de degré inférieur ou égal à 3, est égale à $f = [1, 1, 0, 0]$. Comme $(1 + x)^3$ est de degré 3, les produits de convolution acyclique $f * f * f$ et les produits de convolution cyclique $f \underset{3}{*} f \underset{3}{*} f$ coincident sur $\{0, 1, 2, 3\}$ et on a

$$(1 + x)^3 = \sum_{k=0}^{3}(f * f * f)[k]x^k = \sum_{k=0}^{3}(f \underset{3}{*} f \underset{3}{*} f)[k]x^k.$$

On a

$$\widehat{f \underset{3}{*} f \underset{3}{*} f} = \widehat{f}^3$$

$$= [2^3, (1-i)^3, 0, (1+i)^3 = [8, 1-3i+3i^2-i^3, 0, 1+3i+3i^2+i^3] = [8, -2-2i, 0, -2+2i]$$

$$= g.$$

On obtient

$$f \underset{3}{*} f \underset{3}{*} f = \mathcal{F}_4^{-1}(g) = [1, 3, 3, 1], \ (1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + 1.$$

En particulier

$$11^3 = (10 + 1)^3 = 10^3 + 3 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1 = 1331.$$

Exercice 3

1) On a, pour $x \neq 0$,

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt = \int_{-1}^{1} e^{-itx}dt = \left[-\frac{e^{-itx}}{ix}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{itx} - e^{-itx}}{x}.$$

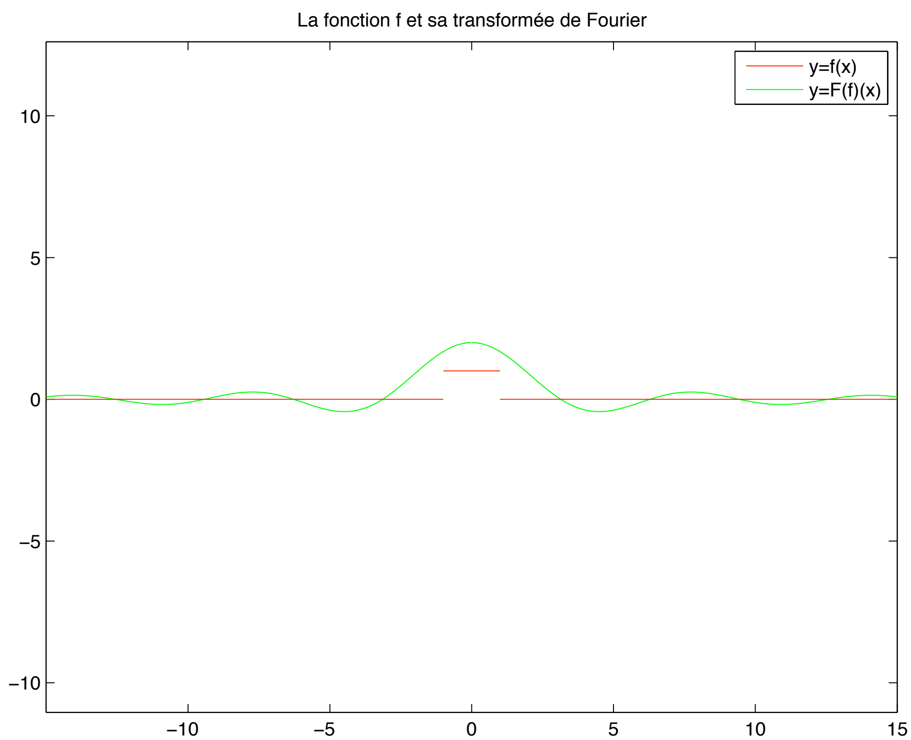
D'autre part un calcul direct donne $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-1}^{1} dt = 2$. On obtient, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(c) = 2\frac{sin(x)}{x} = 2sin_c(x),$$

où $sin_c(x) = \frac{sin(x)}{x}$ désigne le sinus cardinal de x, avec par convention $sin_c(0) = 1$.

On représente maintenant f et $\hat{f}$ sur un même graphique.

```
x1=[-1:0.01:1]; y1=polyval([1],x1); x2=[1: 0.01: 15];y2=polyval([0],x2);
x3=[-15:0.01:15];y3=2*sin(x3)./x3;
plot(x1,y1,'red',x3,y3,'green',x2, y2,'red', -x2,y2,'red');
hold on; axis equal; legend('y=f(x)', 'y=F(f)(x)');title('La fonction f et sa transform
print -depsc exo3exam
```



2) On a

$$(f*f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t)dt = \int_{-1}^{1} f(x-t)dt.$$

On a $f(t)f(x-t) = 1$ si $-1 \leq t \leq 1$ **et** $-1 \leq x-t \leq 1$, $f(x-t) = 0$ sinon. Autrement dit $f(t)f(x-t) = 1$ si $t \in [-1,1] \cap [x-1, x+1]$, et $f(t)f(x-t) = 0$ si $t \notin [-1,1] \cap [x-1, x+1]$. Donc $(f*f)(x) = 0$ si $x < -2$ ou si $x > 2$.

Si $-2 \leq x \leq 0$, on a

$$(f * f)(x) = \int_{-1}^{x+1} dt = [t]_{-1}^{x+1} = x + 2.$$

Si $0 \leq x \leq 2$, on a

$$(f * f)(x) = \int_{x-1}^{1} dt = [t]_{x-1}^{1} = -x + 2.$$

3) On pose $g(x) = 0$ pour $|x| > 2$, $g(x) = x+2$ pour $x \in [-2, 0]$, $g(x) = 2-x$ pour $x \in [0, 2]$. Il résulte de la question précédente que $g = f * f$.

On a donc,pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{g}(x) = \hat{f}(x)^2 = 4sin_c(x)^2.$$

On représente maintenant sur un même graphique g et $\hat{g}$. On a pris une échelle différente sur l'axe des y pour mettre en valeur les oscillations de la transformée de Fourier de g.

```
x1=[-2:0.01:0]; y1=polyval([1,2],x1); x2=[0: 0.01: 2];y2=polyval([-1 2],x2);
x3=[-15:0.01:15];y3=4*(sin(x3).^2)./(x3.^2);x4=[2:0.01:15];y4=polyval([0],x4);
plot(x1,y1,'red',x3,y3,'green',x2, y2,'red', x4,y4,'red',-x4,y4,'red');
 legend('y=g(x)', 'y=F(g)(x)');title('La fonction g et sa transformée de Fourier');
print -depsc exo3exambis
```

4) On a $[\widehat{\widehat{f}}](x) = \frac{1}{2\pi} f(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, donc le plus petit réel positif a tel que $[\widehat{\widehat{f}}](x) = 0$ presque partout pour $|x| > a$ est égal à 1. Avec les notations du cours, on a donc $freq_{max}(\hat{f}) = \frac{1}{2\pi}$, et d'après le théorème d'échantillonnage de Shannon (page 109 du support de cours) on peut reconstituer toutes les valeurs de $\hat{f}$ à partir de la suite $(\hat{f}[\delta m])_{m \in \mathbb{Z}}$ si et seulement si $\frac{1}{\delta} \geq \frac{1}{\pi}$, c'est à dire $\delta \leq \pi$. On a alors

$$\hat{f}(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta \hat{f}(m\delta) \frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t - m\delta)\right)}{\pi(t - m\delta)}$$

$$= 2sin_c\left(\frac{\pi t}{\delta}\right) + 2 \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{sin(m\delta)}{m} \frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t - m\delta)\right)}{\pi(t - m\delta)}.$$

5) On voit de même que plus haut que le plus petit réel positif a tel que $[\widehat{g}](x) = 0$ presque partout pour $|x| > a$ est égal à 2. Avec les notations du cours, on a donc $freq_{max}(\hat{g}) = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$, et d'après le théorème d'échantillonnage de Shannon (page 109 du support de cours) on peut reconstituer toutes les valeurs

de $\hat{g}$ à partir de la suite $(\hat{g}[\delta m])_{m\in\mathbb{Z}}$ si et seulement si $\frac{1}{\delta} \geq \frac{2}{\pi}$, c'est à dire $\delta \leq \frac{\pi}{2}$. On a alors

$$\hat{g}(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta\hat{g}(m\delta)\frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t-m\delta)\right)}{\pi(t-m\delta)}$$

$$= 4sin_c\left(\frac{\pi t}{\delta}\right) + 4\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{sin^2(m\delta)}{m\delta}\frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t-m\delta)\right)}{\pi(t-m\delta)}.$$

6) Comme la série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{g}(bn)|$ converge pour tout $b>0$. Comme g est continue à support compact, on a $\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^2|g(x)| < +\infty$. On voit donc que les conditions d'applications de la formule sommatoire de Poisson sont vérifiées, et on a, pour tout $a>0$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(an) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{g}(\frac{2\pi n}{a}).$$

Les fonctions g et $\hat{g}$ sont paires, et on a $g(0)=2$, $\hat{g}(0)=4$. On obtient

$$2+2\sum_{n=1}^{+\infty} g\left(an\right) = \frac{4}{a} + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{+\infty}\hat{g}\left(\frac{2\pi n}{a}\right) = \frac{4}{a} + \frac{8a}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{sin^2\left(\frac{2\pi n}{a}\right)}{n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{sin^2\left(\frac{2\pi n}{a}\right)}{n^2} = \frac{\pi^2}{a}\left[1-\frac{2}{a}+\sum_{n=1}^{+\infty} g(an)\right].$$

En posant $a=\frac{2\pi}{\delta}$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{sin^2(n\delta)}{n^2} = \frac{\pi\delta}{2} - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\pi\delta}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} g\left(\frac{2n\pi}{\delta}\right).$$

Notons $E\left(\frac{\delta}{\pi}\right)$ le plus grand entier $p\geq 0$ tel que $p\leq\frac{\delta}{\pi}$. On a $g\left(\frac{2n\pi}{\delta}\right) = 2-\frac{2n\pi}{\delta}$ si $n\leq p$, $g\left(\frac{2n\pi}{\delta}\right)=0$ sinon.

Si $\frac{\delta}{\pi}<1$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{sin^2(n\delta)}{n^2} = \frac{\pi\delta}{2} - \frac{\delta^2}{2}.$$

Si $\frac{\delta}{\pi}\geq 1$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{sin^2(n\delta)}{n^2} = \frac{\pi\delta}{2} - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\pi\delta}{2}\sum_{n=1}^{E\left(\frac{\delta}{\pi}\right)}\left(2-\frac{2n\pi}{\delta}\right)$$

$$= \pi\delta\left(\frac{1}{2}+E\left(\frac{\delta}{\pi}\right)\right) - \frac{\delta^2}{2} + \pi^2\sum_{n=1}^{E\left(\frac{\delta}{\pi}\right)} n. = \pi\delta\left(\frac{1}{2}+E\left(\frac{\delta}{\pi}\right)\right) - \frac{\delta^2}{2} - \pi^2\sum_{n=1}^{E\left(\frac{\delta}{\pi}\right)} n.$$

Le calcul classique de la somme des termes d'une progression arithmétique donne $\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$. On obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sin^2(n\delta)}{n^2} = \pi\delta\left(\frac{1}{2} + E\left(\frac{\delta}{\pi}\right)\right) - \frac{\delta^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} E\left(\frac{\delta}{\pi}\right)\left(E\left(\frac{\delta}{\pi}\right) + 1\right).$$

Pour $\delta = \frac{\pi}{2}$, on a $sin^2(n\delta) = 0$ si n est pair, et $sin^2(n\delta) = 1$ si n est impair. Comme dans ce cas $E(\frac{\delta}{\pi}) = 0$, on obtient

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2},$$

$$(1 - \frac{1}{4}) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2.2 Corrigé de l'examen du 18 décembre 2009

Exercice 1

1) Calculons la transformée de Walsh de u par l'algorithme rapide.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$u[k]$	1	1	1	-1	1	1	1	1
1e étape	2	0	0	2	2	0	2	0
2e étape	2	2	2	-2	4	0	0	0
$\mathcal{W}_3(u)[k]$	6	2	2	-2	-2	2	2	-2

La transformée de Walsh de u est donc $\mathcal{W}_3(u) = [6, 2, 2, -2, -2, 2, 2, -2]$.
2) On écrit la matrice de Walsh W_4, ce qui donne

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

On peut alors écrire le tableau des changements de signes des lignes de la matrice W_4, $n(i)$ désignant le nombre de changements de signes de W_3 pour $0 \leq i \leq 7$,

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$n(i)$	0	7	3	4	1	6	2	5

Pour la compression à 50% on garde le coefficient $\mathcal{W}_3(u)[i]$ si $0 \leq n(i) \leq 3$, c'est à dire si $i = 0, 2, 4$ ou 6, et on annulle $\mathcal{W}_3(u)[i]$ dans le cas contraire. On obtient

$\mathcal{W}_3(u)_{50\%} = [6, 0, 2, 0, -2, 0, 2, 0]$.

On calcule alors la compression de u à 50% en calculant la transformée de Walsh inverse de $[6, 0, 2, 0, -2, 0, 2, 0]$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{W}_3(u)_{50\%}[k]$	6	0	2	0	-2	0	2	0
1e étape	6	6	2	2	-2	-2	2	2
2e étape	8	8	4	4	0	0	-4	-4
3e étape, $8u_{50\%}[k]$	8	8	0	0	8	8	8	8
$u_{50\%}[k]$	1	1	0	0	1	1	1	1

Donc la compression à 50% de u est donnée par la formule

$$u_{50\%} = [1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1].$$

3) On considère maintenant la fonction booléenne $\phi = X_1X_2 + X_1X_2X_3$ sur $\mathbb{F}_2^3$. On a $\phi(u, v, w) = uv(\overline{1} - w) = \overline{0}$, sauf si $u = v = \overline{1} - w = \overline{1}$. Autrement dit $(-1)^{\phi(u,v,w)} = 1$ si $(u, v, w) \neq (\overline{1}, \overline{1}, \overline{0})$, et $(-1)^{\phi(\overline{1},\overline{1},\overline{0})} = -1$, ce qui signifie que $\phi^* = u$.

La distance de ϕ aux fonctions affines est donc donnée par la formule

$$d(\phi, Aff) = 2^{3-1} - \frac{1}{2}\left|max\left(\mathcal{W}_3(u)\right)\right| = 4 - \frac{6}{2} = 1.$$

On pouvait trouver directement ce résultat. Comme ϕ prend une fois la valeur $\overline{1}$ et sept fois la valeur $\overline{0}$ on a $d(\phi, \phi_0) = 1$, où $\phi_0 : x \to \overline{0}$ désigne la fonction affine nulle.

D'autre part comme les monômes forment une base du $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel des fonctions booléennes, ϕ n'est pas affine, et $d(\phi, Aff) \geq 1$, ce qui montre qu'en fait $d(\phi, Aff) = 1$.

Exercice 2

1) On commence par rappeler la procédure du renversement de bits sur $\{0, 1, 2, 3\}$.

m	0	1	2	3
$bits$	00	01	10	11
rev	00	10	01	11
$rev(m)$	0	2	1	3

On considère les deux signaux

$$f = [2, 1, 1, 0] \text{ et } g = [1, 2, 0, 0]$$

de longueur 4 avec les coefficients de p et q, complétés par des zéros.

On leur applique ensuite la FFT, décimation temporelle. On commence par "renverser les bits". Ensuite on effectue les étapes 1 et 2, qui correspondent aux schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+i^{-1}d = b-id$	$a-c$	$b-i^{-1}d = b+id$

Ceci donne

m	0	1	2	3
$f[m]$	2	1	1	0
$rev(f)[m]$	2	1	1	0
étape 1	3	1	1	1
étape 2, $\hat{f}(m)$	4	$1-i$	2	$1+i$

m	0	1	2	3
$g[m]$	1	2	0	0
$rev(g)[m]$	1	0	2	0
étape 1	1	1	2	2
étape 2, $\hat{g}(m)$	3	$1-2i$	-1	$1+2i$

2) On pose maintenant $p = 2+x+x^2$ et $q = 1+2x$. Les coefficients du produit pq s'obtiennent par convolution **acyclique** sur $\mathbb{Z}^+$ des suites $[2, 1, 1, 0, 0, 0...]$ et $[1, 2, 0, 0, 0, ...]$. Comme le degré du produit pq est égal à 3, les coefficients potentiellement non nuls de pq sont donnés par les termes $h[0], h[1], h[2], h[3]$ du produit de convolution **cyclique** $h := f \underset{4}{*} g$. On a alors $\hat{h} = \hat{f}.\hat{g}$, et h s'obtient comme la transformée de Fourier inverse du produit $\hat{f}.\hat{g} = [12, -1-3i, -2, -1+3i]$.

On va donc appliquer la FFT inverse à $\hat{f}.\hat{g}$. On commence de même que plus haut par "renverser les bits", et on applique les étapes 1 et 2, en remplaçant i par son conjugué $-i$, ce qui donne les schémas suivants

a	b
$a+b$	$a-b$

a	b	c	d
$a+c$	$b+id$	$a-c$	$b-id$

La transformée de Fourier inverse s'obtient alors en divisant par 4 le résultat obtenu à la 2e étape. On obtient

m	0	1	2	3
$(\hat{f}.\hat{g})[m]$	12	$-1-3i$	-2	$-1+3i$
$rev(\hat{f}.\hat{g})[m]$	12	-2	$-1-3i$	$-1+3i$
étape 1	10	14	-2	$-6i$
étape 2	8	20	12	8
h	2	5	3	2

On a donc

$$pq = 2 + 5x + 3x^2 + 2x^3,$$

$$112 \times 21 = p(10)q(10) = (pq)(10) = 2 + 50 + 300 + 2000 = 2352.$$

3) Soit $u = [a, b, c, d]$ la transformée de Fourier discrète de $[1, 1, 1, 1]$. On a

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

L'équation $f \underset{4}{*} h = [1, 1, 1, 1]$ est équivalente à $\hat{f}.\hat{h} = \widehat{[1, 1, 1, 1]}$, ce qui donne $[4\hat{h}(0), (1-i)\hat{h}(1), 2\hat{h}(2), (1+i)\hat{h}(3)] = u = [4, 0, 0, 0]$, soit $\hat{h} = [1, 0, 0, 0]$.

Le calcul ci-dessus montre que $\mathcal{F}_4^{-1}([4, 0, 0, 0]) = [1, 1, 1, 1]$. Donc l'unique solution dans $\mathbb{C}^4$ de l'équation $f \underset{4}{*} h = [1, 1, 1, 1]$ est donnée par la formule

$$h = \mathcal{F}_4^{-1}([1, 0, 0, 0]) = \frac{1}{4}\mathcal{F}_4^{-1}([4, 0, 0, 0]) = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right].$$

Exercice 3

1a) Soit $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction paire. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)e^{ixt}dt = -\int_{\infty}^{-\infty} \phi(-t)e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)e^{-ixt}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \phi(t)e^{-ixt}dt + \int_{0}^{+\infty} \phi(t)e^{-ixt}dt = -\int_{+\infty}^{0} \phi(-t)e^{ixt}dt + \int_{0}^{+\infty} \phi(t)e^{-ixt}dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \phi(t)e^{ixt}dt + \int_{0}^{+\infty} \phi(t)e^{-ixt}dt = 2\int_{0}^{+\infty} \phi(t)cos(xt)dt.$$

1b) On a, pour $x \neq \pm 1/2$,

$$\int_0^{\pi} cos(t/2)cos(xt)dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (-cos(t/2+xt)+cos(t/2-xt))dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{sin(t/2+xt)}{1/2+x} + \frac{sin(t/2-xt)}{1/2-x}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{sin(\pi/2 + x\pi)}{2(1/2+x)} + \frac{sin(\pi/2 - x\pi)}{2(1/2-x)} = -\frac{cos(\pi x)}{2x+1} + \frac{cos(\pi x)}{2x-1} = \frac{2cos(\pi x)}{1-4x^2}.$$

D'autre part on a, pour $x \neq 0, x \neq \pm 1$,

$$\int_0^{+\pi} cos^2(t/2)cos(xt)dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\pi}(cos(xt)+cos(t)cos(xt))dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} cos(xt)dt + \frac{1}{4}\int_0^{+\pi}(-cos(t+xt)+cos(t-xt))dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{sin(xt)}{xt}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{4}\left[-\frac{sin(t+xt)}{1+x}+\frac{sin(t-xt)}{1-x}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{sin(\pi x)}{2x} - \frac{sin(\pi+x\pi)}{4(1+x)} + \frac{sin(\pi-x\pi)}{4(1-x)}$$

$$= \frac{sin(\pi x)}{2x} + \frac{sin(\pi x)}{4(x+1)} - \frac{sin(\pi x)}{4(x-1)}$$

$$= \frac{sin(\pi x)}{2x} - \frac{x\sin(\pi x)}{2(x^2-1)}$$

$$= \frac{sin(\pi x)}{2x(1-x^2)}.$$

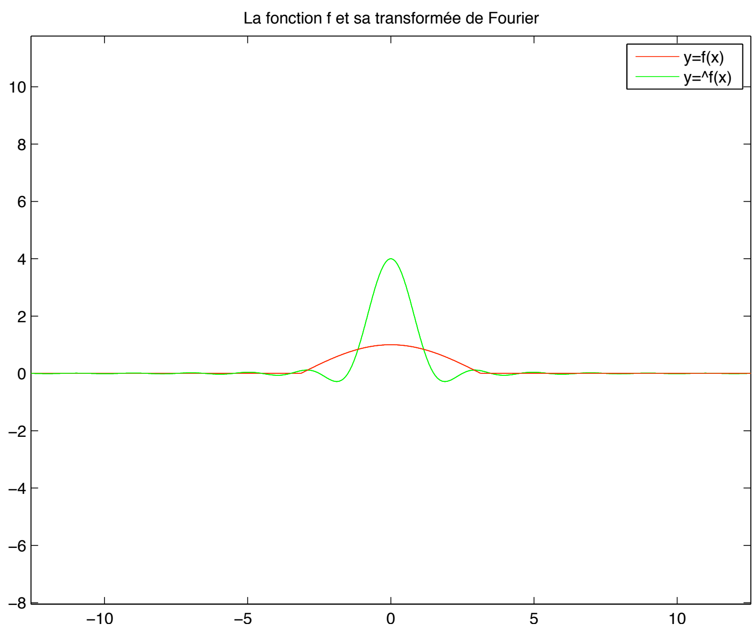
2) On a $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt \le \int_{-\pi}^{\pi}dt = 2\pi < +\infty$ et de même $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt \le \int_{-\pi}^{\pi}dt = 2\pi < +\infty$, donc $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Comme f est paire, on a

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)cos(xt)dt = 2\int_0^{\pi} cos(t/2)cos(xt)dt$$

$$= \frac{4cos(\pi x)}{1-4x^2}.$$

On représente f et $\hat{f}$ sur un même graphique.

```
 x=[-4*pi:0.01:4*pi]; x1=[-4*pi:0.01:-pi];x2=[-pi:0.01:pi];
plot(x1,polyval([0],x1),'red',x, 4*cos(pi*x)./(1-4*x.^2),'green');
plot(-x1,polyval([0], -x1),'red',x2,cos(x2/2),'red');
hold on; title('La fonction f et sa transformée de Fourier');
legend('y=f(x)','y=\^f(x)'); print -depsc exo4exam
```



On a, d'après le théorème de Parseval

$$\frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos^2(\pi x)dx}{(4x^2-1)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(x)^2dx = \int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)dt = \int_{-\pi}^{+\pi}cos^2(t/2)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+cos(t))dt = [t+sin(t)]_0^{\pi} = \pi,$$

et on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos^2(\pi x)dx}{(4x^2-1)^2} = 8\pi^2.$$

D'autre part lim $\sup_{|x|\to+\infty} x^2|\hat{f}(x)| \le$lim $\sup_{|x|\to+\infty}\frac{4x^2}{4x^2-1} = 1 < +\infty$. Comme $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} < +\infty$, et comme $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on voit que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient, d'après la formule d'inversion de Fourier,

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos(\pi x)e^{itx}}{1-4x^2}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(x)e^{itx} = f(x)\begin{cases} = cos(t/2) \text{ si } x\in[-\pi,\pi] \\ = 0 \text{ si } |x|>\pi \end{cases}.$$

3) On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2cos(\pi x)e^{-itx}}{\pi(1-4x^2)}dx = f(-x) = f(x).$$

Donc $\widehat{g * g} = f^2$, et on a pour $x \in \mathbb{R}, x \neq 0, x \neq \pm 1$, d'après la formule d'inversion de Fourier,

$$(g*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)e^{itx}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} f^2(t)cos(tx)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} cos^2(t/2)cos(tx)dt$$

$$= \frac{sin(\pi x)}{2\pi x(1-x^2)}.$$

4) Le plus petit réel positif a tel que $\widehat{g}(x) = 0$ presque partout pour $|x| > a$ est égal à π. Avec les notations du cours, on a donc $freq_{max}(\hat{g}) = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$, et d'après le théorème d'échantillonnage de Shannon (page 109 du support de cours) on peut reconstituer toutes les valeurs de g à partir de la suite $(g[\delta m])_{m\in\mathbb{Z}}$ si et seulement si $\frac{1}{\delta} \geq \frac{2}{2}$, c'est à dire $\delta \leq 1$. On a alors

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta\hat{g}(m\delta)\frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t-m\delta)\right)}{\pi(t-m\delta)} \\ &= 2\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{cos(\pi m\delta)}{\pi(1-4\delta^2n^2)} sin_c\left(\frac{\pi}{\delta}(t-m\delta)\right). \end{aligned}$$

5) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, on a $\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|(1+x^2) < +\infty$, et $\hat{g}(\frac{2\pi n}{c})$ est nul pour $|n|$ pour $c > 0$. On déduit alors de la formule sommatoire de Poisson que l'on a, pour $c > 0$,

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{cos(\pi nc)}{1-4c^2n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} g(cn) = \frac{1}{c}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}\left(\frac{2\pi n}{c}\right) = \sum_{|n|<\frac{1}{2c}} cos\left(\frac{2\pi n}{c}\right),$$

ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{cos(\pi nc)}{1-4c^2n^2} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4c}\sum_{|n|<\frac{1}{2c}} cos\left(\frac{2\pi n}{c}\right).$$

On obtient, pour $c = 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Index