Master CSI-UE- Mathématiques discrètes de la transformée de Fourier

Corrigé du devoir maison du 3 Novembre 2009

Exercice 1

1) L'équation $11x+7y=1$ admet comme couple d'entiers solution évident $u=2, v=-3$. Pour trouver la solution générale on pose $x=u+2, y=v-3$, et on obtient $11x+7y=11u+7v+1$. L'équation $11x+7y=1$ donne $11u+7v=0$, soit $11u=-7v$. Comme 11 est premier avec 7, 11 divise v, d'après le théorème de Gauss, donc $v=11p$, avec $p \in \mathbb{Z}$, et $u=-7p$. Réciproquement il est clair que si $v=11p$ et $u=-7p$, avec $p \in \mathbb{Z}$, alors $11u=-7p$. Finalement les points à coordonnées entières de la droite d'équation $11x+7y=0$ sont les points de coordonnées $(2-7p, -3+11p)$, avec $p \in \mathbb{Z}$.

La condition $0 \leq x \leq 20$ donne $-2 \leq -7p \leq 18$, $-18 \leq 7p \leq 2$, $-\frac{18}{7} \leq p \leq \frac{2}{7}$. Les seules possibilités sont $p=0$, $p=-1$ et $p=-2$, et les solutions sont le point de coordonnées $(2,-3)$, le point de coordonnées $(9,-14)$ et le point de coordonnées $(16,-25)$.

2) Comme 7, 11 et 8 sont premiers entre eux deux à deux, le système a des solutions. Les deux premières équations donnent

$x=1+7p=3+11q$, soit $7p-11q=2$, avec $p,q \in \mathbb{Z}$. On peut voir ici la solution évidente $p=5$, $q=3$, et $x=36$ est solution des deux premières équations. La solution générale des deux premières équations s'écrit $x=36+77u$, avec $u \in \mathbb{Z}$, et en reportant dans la troisième on obtient $x=36+77u=5+8v$, avec $u,v \in \mathbb{Z}$. En posant $v=w+4$, on obtient $36+77u=37+8w$, ce qui donne $77u-8w=1$.

On utilise l'algorithme d'Euclide étendu pour trouver une solution à l'équation $77u-8w=1$.

	q_n	u_n	v_n
		1	0
		0	1
$\mathbf{77}=\mathbf{8}\times 9+\mathbf{5}$	9	1	-9
$\mathbf{8}=\mathbf{5}\times 1+\mathbf{3}$	1	-1	10
$\mathbf{5}=\mathbf{3}\times 1+\mathbf{2}$	1	2	-19
$\mathbf{3}=\mathbf{2}\times 1+\mathbf{1}$	1	-3	29
$\mathbf{2}=\mathbf{1}\times 2+\mathbf{0}$			

On peut donc prendre $u = -3$, et $36 - 3 \times 77 = -195$ est solution du système proposé. Comme $7 \times 11 \times 8 = 616$, la solution générale du système est de la forme

$$x = -195 + 616n,$$

avec $n \in \mathbf{Z}$. La condition $0 \leq x \leq 1200$ donne $195 \leq 616n \leq 1395$, $\frac{195}{616} \leq n \leq \frac{1395}{616}$, et on obtient $n = 1$ ou $n = 2$.

On a donc deux solutions, $x = 421$ et $x = 1037$.

Exercice 2

1) On a, en posant $g = \mathcal{W}_4(f)$,

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f[k]$	1	2	3	4	4	3	2	1	1	2	3	4	4	3	2	1
étape 1	3	-1	7	-1	7	1	3	1	3	-1	7	-1	7	1	3	1
étape 2	10	-2	-4	0	10	2	4	0	10	-2	-4	0	10	2	4	0
	20	0	0	0	0	-4	-8	0	20	0	0	0	0	-4	-8	0
$g[k]$	40	0	0	0	0	-8	-16	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Donc $\mathcal{W}_4(f) = [40, 0, 0, 0, 0, -8, -16, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$.

2) On utilise la machine pour faire apparaitre W_4.

```
M:=Dom::Matrix();
W:=proc(n) begin
if n=0 then M([[1]]) else
linalg::stackMatrix(linalg::concatMatrix(W(n-1),W(n-1)),
linalg::concatMatrix(W(n-1),-W(n-1)));
end_if
end_proc:
```

```
W(n) $n=0..3
```

$$\mathrm{Dom::Matrix}\,()$$

$$(1),\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
W(4)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut alors faire le tableau du nombre $n(i)$ de changements de signes de la ligne L_i d'indice i de la matrice de Walsh W_4.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$n(i)$	0	15	7	8	3	12	4	11	1	14	6	9	2	13	5	10

Dans la compression à 50%, on annule les termes de $g = \mathcal{W}_2(f)$ correspondant aux changements de signe dans la tranche des 50% les plus élevés. On va donc remplacer g par $g_{0.5}$ défini par la formule $g_{0.5}(i) = 0$ pour $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$, $g_{0.5}(i) = g(i)$ sinon. On calcule alors la compression à 50% de f, notée $f_{0.5}$, en appliquant à $g_{0.5}$ la transformation de Walsh inverse. On obtient

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$g[k]$	40	0	0	0	0	-8	-16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$g_{0.5}[k]$	40	0	0	0	0	0	-16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
étape 1	40	40	0	0	0	0	-16	-16	0	0	0	0	0	0	0	0
étape 2	40	40	40	40	-16	-16	16	16	0	0	0	0	0	0	0	0
étape 3	24	24	56	56	56	56	24	24	0	0	0	0	0	0	0	0
$16f_{0.5}[k]$	24	24	56	56	56	56	24	24	24	24	56	56	56	56	24	24
$f_{0.5}[k]$	3/2	3/2	7/2	7/2	7/2	7/2	3/2	3/2	3/2	3/2	7/2	7/2	7/2	7/2	3/2	3/2

On a

$$\|f - f_{0.5}\|_2 = \frac{1}{4 \times 16}\|\mathcal{W}_4(g) - \mathcal{W}_4(g_{0.5})\|_2 = \frac{1}{4}\|g - g_{0.5}\|_2 = 2.$$

Dans la compression à 25% on garde les coefficients de g correspondant aux 25% de changements de signe les moins élevés, c'est à dire $g[0]$, $g[2]$, $g[4]$ et $g[12]$, et on annule tous les autres. On calcule alors la compression à 25% de f, notée $f_{0.25}$, en appliquant à $g_{0.25}$ la transformation de Walsh inverse. On obtient

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$g[k]$	40	0	0	0	0	-8	-16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$g_{0.25}[k]$	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	40	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	40	40	40	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	40	40	40	40	40	40	40	40	0	0	0	0	0	0	0	0
$16f_{0.25}[k]$	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40
$f_{0.25}[k]$	5/2	5/2	5/2	5/2	5/2	5/2	5/2	5/2	5/2	5/2	5/2	5/2	5/2	5/2	5/2	5/2

On a

$$\|f - f_{0.25}\|_2 = \frac{1}{4 \times 16}\|\mathcal{W}_4(g) - \mathcal{W}_4(g_{0.25})\|_2 = \frac{1}{4}\|g - g_{0.25}\|_2 = \frac{1}{4}\sqrt{(-8)^2 + (-16)^2}^2 = \sqrt{20}.$$

Exercice 3

1) On va calculer la transformée de Walsh de A en utilisant l'algorithme rapide, appliqué aux colonnes et ensuite aux lignes.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1e étape, lignes,

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

2e étape, lignes,

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1e étape, colonnes

$$\begin{bmatrix} 15 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2e étape, colonnes, on obtient

$$\mathcal{W}_2(A) = \begin{bmatrix} 26 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2) On a

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On numérote les lignes de W_2 de 0 à 3. Le nombre de changements de signe $n(i)$ de la ligne d'indice i est alors donné par le tableau suivant.

i	0	1	2	3
$n(i)$	0	3	1	2

On ordonne les pixels (i, j) selon la règle $(i_1, j_1) \prec (i_2, j_2)$ si $n(i_1) + n(j_1) < n(i_2) + n(j_2)$ ou si $n(i_1) + n(j_1) = n(i_2) + n(j_2)$ **et** $n(i_1) < n(i_2)$. On numérote alors les 16 pixels considérés ici du plus petit au plus grand pour l'ordre ci-dessus. On obtient le tableau suivant.

(i,j)	$n(i)$	$n(j)$	$n(i)+n(j)$	$rang[(i,j)]$
$(0,0)$	0	0	0	1
$(0,1)$	0	3	3	7
$(0,2)$	0	1	1	2
$(0,3)$	0	2	2	4
$(1,0)$	3	0	3	10
$(1,1)$	3	3	6	16
$(1,2)$	3	1	4	13
$(1,3)$	3	2	5	15
$(2,0)$	1	0	1	3
$(2,1)$	1	3	4	11
$(2,2)$	1	1	2	5
$(2,3)$	1	2	3	8
$(3,0)$	2	0	2	6
$(3,1)$	2	3	5	14
$(3,2)$	2	1	3	9
$(3,3)$	2	2	4	12

Pour la compression à 50% de A, on annule les coefficients d'indice $(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (3,1), (3,2), (3,3)$ de la transformée de Walsh et on effectue une transformée de Walsh inverse. Ceci donne

$$\mathcal{W}_2(A)_{0.5} = \begin{bmatrix} 26 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1e étape, colonnes,

$$\begin{bmatrix} 26 & -2 & -4 & 0 \\ 26 & -2 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

2e étape, colonnes,

$$\begin{bmatrix} 30 & -2 & -2 & -2 \\ 30 & -2 & -2 & -2 \\ 22 & -2 & -6 & 2 \\ 22 & -2 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

1e étape, lignes,

$$\begin{bmatrix} 28 & 32 & -4 & 0 \\ 28 & 32 & -4 & 0 \\ 20 & 24 & -4 & -8 \\ 20 & 24 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

2e étape, lignes,

$$\begin{bmatrix} 24 & 32 & 32 & 32 \\ 24 & 32 & 32 & 32 \\ 16 & 16 & 24 & 32 \\ 16 & 16 & 24 & 32 \end{bmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à diviser par 16 pour obtenir la compression à 50% de A, ce qui donne

$$A_{50\%} = \begin{bmatrix} 3/2 & 2 & 2 & 2 \\ 3/2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3/2 & 2 \\ 1 & 1 & 3/2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 4

1) $\int_{\mathbf{R}} |f(t)|dt = \int_{-\pi}^{\pi} cos^2(t/2)dt =< +\infty$ donc $f \in L^1(\mathbf{R})$. De même $\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2dt = \int_{-\pi}^{\pi} cos^4(t/2)dt =< +\infty$.

Pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a, en utilisant les identités

$$cos^2(a) = \frac{1 + cos(2a)}{2}, cos(a)cos(b) = \frac{cos(a+b) + cos(a-b)}{2},$$

et le fait que $\int_{-\pi}^{\pi} cos^2(t/2)sin(tx)dt = 0$,

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t)e^{-itx}dt = \int_{-\pi}^{\pi} cos^2(t/2)(cos(tx)+isin(tx))dt = \int_{-\pi}^{\pi} cos^2(t/2)cos(tx)dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+cos(t))cos(tx)dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} cos(tx)dt + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}(cos(t(x+1)) + cos(t(x-1)))dt$$
$$= \left[\frac{sin(tx)}{2x} + \frac{sin(t(x+1))}{4(x+1)} + \frac{sin(t(x-1))}{4(x-1)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{sin(\pi x)}{x} - \frac{sin(\pi x)}{2(x+1)} - \frac{sin(\pi x)}{2(x-1)}$$
$$= \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2-1}\right) sin(\pi x)$$
$$= -\frac{sin(\pi x)}{x(x^2-1)}.$$

Les trois valeurs manquantes, à savoir $\hat{f}(-1)$, $\hat{f}(0)$ et $\hat{f}(1)$ s'obtiennent par passage à la limite, puisque $\hat{f}$ est continue, ou par calcul direct. Par exemple on a

$$\hat{f}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{x(1-x^2)} = \pi.$$

De même on a

$$\hat{f}(1) = -\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi(x-1))}{x(x+1)(x-1)} = \frac{\pi}{2},$$

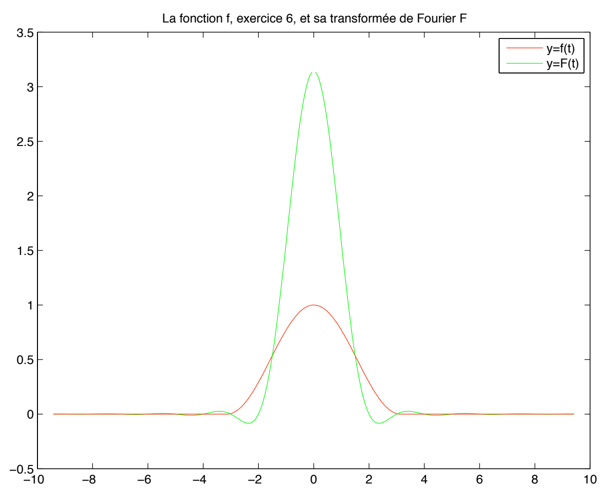
et $\hat{f}(-1) = \hat{f}(1) = \frac{\pi}{2}$ puisque $\hat{f}$ est paire.

On trace les graphes de f et $\hat{f}$ sous Matlab.

```
x1=[-pi:pi/50:pi];
y1=cos(x1/2);
z1=y1.^2;
u=[0];
```

```
x2=[-3*pi:pi/50:-pi];
z2=polyval(u,x2);
x3=[pi:pi/50:3*pi];
z3=polyval(u,x3);
x4=[-3*pi:pi/50:3*pi];
u4=sin(pi*x4);
p=[1 0];
q=[-1 0 1];
r=conv(p,q);
y4=polyval(r,x4);
z4=u4./y4;
axis equal;
plot(x1,z1,'red');
hold on;
plot(x4,z4, 'green');
hold on;
plot(x2,z2,'red');
hold on;
plot(x3,z3,'red');
hold on;
legend('y=f(t)','y=F(t)');
title('La fonction f, exercice 6, et sa transformŽe de Fourier F');
print exo6;
```

On inclut ensuite le fichier pdf obtenu dans le texte.



2) On a $f \in L^2(\mathbf{R})$, donc la formule de Parseval est applicable à

f, ce qui signifie que $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$, et que l'on a

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(t)|^2 dt.$$

Ici

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} cos^4(t/2)dt = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}(1+cos(2t))^2 dt = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}(1+2cos(2t)+cos^2(2t))dt$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-\pi}^{\pi}(3+4cos(2t)+cos(4t))dt = \frac{1}{8}\left[3t - 2sin(2t) - \frac{sin(4t)}{4}\right]_{\pi}^{\pi} = \frac{3\pi}{4}.$$

D'où,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin^2(\pi x)}{x^2(x^2-1)^2} dx = \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(t)|^2 dt = 2\pi \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt$$
$$= \frac{3\pi^2}{2}.$$

4) La fonction $\hat{f}$ est continue sur $\mathbf{R}$ et paire, donc pour vérifier qu'elle est intégrable sur $\mathbf{R}$ il suffit de vérifier que $\int_2^{+\infty} |\hat{f}(x)|dx < +\infty$. On a $|x^2\hat{f}(x)| \le \frac{1}{|x^2-1|}$, donc $\lim_{x\to\infty} x^2|\hat{f}(x)| = 0$. On déduit alors du critère de Cauchy que $\int_2^{+\infty} |\hat{f}(x)|dx < +\infty$, et $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$.

On peut donc appliquer la formule d'inversion de Fourier, qui montre que $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)e^{itx}dx = f(t)$ presque partout. Comme f est continue, cette égalité est vraie partout et on obtient, puisque $\hat{f}$ est paire,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin(\pi x)cos(tx)}{x(1-x^2)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin(\pi x)}{x(1-x^2)} e^{itx} dx \begin{cases} = 0 \text{ si } t < -\pi \\ = cos^2(t/2) \text{ si } -\pi \le t \le \pi \\ = 0 \text{ si } t > \pi \end{cases}$$

Exercice 5

1) Comme $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ possède 4 éléments et que $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ en possède 2, il y a en tout 16 fonctions booléennes sur $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.

Les fonctions affines sont les fonctions de la forme $f_{a,b,c} : (x,y) \to ax + by + c$, avec $a, b, c \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On a $f_{a,b,c}(\bar{1},\bar{0}) = a$, $f_{a,b,c}(\bar{0},\bar{1}) = b$, $f_{a,b,c}(\bar{0},\bar{0}) = c$, $f_{a,b,c}(\bar{1},\bar{1}) = a+b+c$, donc l'application $(a,b,c) \to$

$f_{a,b,c}$ est une bijection de $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^3$ sur l'ensemble Aff des fonctions affines sur $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$. On peut donc énumérer les 8 fonctions affines $f_{a,b,c} = [c, a, b, a+b+c]$:

$$f_{000} = [\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}], f_{001} = [\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}], f_{010} = [\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}], f_{011} = [\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}], f_{100} = [\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}],$$
$$f_{101} = [\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}], f_{110} = [\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}], f_{111} = [\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}].$$

2) On a par définition $f^*(x) = (-1)^{f(x)}$, et on obtient

u	00	01	10	11
$f^*(u)$	1	1	1	-1

3) En appliquant la définition de la distance de Hammings, on obtient

$$d(f, f_{000}) = 1, d(f, f_{001}) = 3, d(f, f_{010}) = 1, d(f, f_{011}) = 3, d(f, f_{100}) = 1, d(f, f_{101}) = 3,$$
$$d(f, f_{110}) = 3, d(f, f_{111}) = 1.$$

Comme $2^{2-1} - 2^{\frac{2}{2}-1} = 2 - 1 = 1$, on a $d(g, Aff) \leq 1 = d(f, Aff)$ pour toute fonction booléenne g, et f est une fonction courbe.

On va maintenant vérifier que $2 - \frac{1}{2}\mathcal{W}(f^*)(u) = d(f, \phi_u)$ pour tout $u \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$, où $\phi_{a,b}(x, y) = ax + by$ pour $u = (a, b) \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$. On donne ces vérifications sous forme de tableau

u	00	01	10	11
$f^*(u)$	1	1	1	-1
papillon 0 à 2	2	0	0	2
$\mathcal{W}(f^*)(u)$	2	2	2	-2
$2 - \frac{1}{2}\mathcal{W}(f^*)(u)$	1	1	1	3
ϕ_u	f_{000}	f_{010}	f_{100}	f_{110}
$d(f, \phi_u)$	1	1	1	3

et on a bien la propriété cherchée.

4) On a vu que si g est une foncton booléenne quelconque sur $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$, on a $d(g, Aff) \leq 1$. Comme $d(g, Aff) \geq 1$ pour toute fonction booléenne non affine on voit que **toute fonction booléenne non affine sur $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ est une fonction courbe.**

Le recours à la transformée de Walsh est donc inutile, et on obtient les 8 fonctions courbes

$$[0,0,0,1],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,1,1,1],$$
$$[1,1,1,0],[1,0,1,1],[1,1,0,1],[1,0,0,0].$$