Master CSI-UE / Master CSI-THCS-Analyse de Fourier

Examen du 19 Décembre 2008
Durée 1h30-Documents autorisés

Exercice 1

1) On va calculer la transformée de Walsh de A en utilisant l'algorithme rapide, appliqué aux colonnes et ensuite aux lignes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1e étape, colonnes,

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2e étape, colonnes,

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1e étape, lignes

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2e étape, lignes, on obtient

$$\mathcal{W}_2(A) = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) On a

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On numérote les lignes de W_2 de 0 à 3. Le nombre de changements de signe $n(i)$ de la ligne d'indice i est alors donné par le tableau suivant.

i	0	1	2	3
$n(i)$	0	3	1	2

On ordonne les pixels (i, j) selon la règle $(i_1, j_1) \prec (i_2, j_2)$ si $n(i_1) + n(j_1) < n(i_2) + n(j_2)$ ou si $n(i_1) + n(j_1) = n(i_2) + n(j_2)$ **et** $n(i_1) < n(i_2)$. On numérote alors les 16 pixels considérés ici du plus petit au plus grand pour l'ordre ci-dessus. On obtient le tableau suivant.

(i, j)	$n(i)$	$n(j)$	$n(i) + n(j)$	$rang[(i, j)]$
$(0, 0)$	0	0	0	1
$(0, 1)$	0	3	3	7
$(0, 2)$	0	1	1	2
$(0, 3)$	0	2	2	4
$(1, 0)$	3	0	3	10
$(1, 1)$	3	3	6	16
$(1, 2)$	3	1	4	13
$(1, 3)$	3	2	5	15
$(2, 0)$	1	0	1	3
$(2, 1)$	1	3	4	11
$(2, 2)$	1	1	2	5
$(2, 3)$	1	2	3	8
$(3, 0)$	2	0	2	6
$(3, 1)$	2	3	5	14
$(3, 2)$	2	1	3	9
$(3, 3)$	2	2	4	12

Pour la compression à 25%, on garde les pixels de rang 1, 2, 3 et 4 de la transformée de Walsh, et on annule les autres. On obtient le schéma suivant

$$\begin{bmatrix} * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour la compression à 50%, on garde les pixels de rang 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8de la transformée de Walsh, et on annule les autres. On obtient le schéma suivant

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On obtient

$$\mathcal{W}_2(A)_{25\%} = \mathcal{W}_2(A)_{50\%} = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On effectue les transformées de Walsh inverses en commençant cette fois par les lignes et en terminant par les colonnes. On obtient, pour la compression à 25%,

1e étape, lignes,

$$\begin{bmatrix} 24 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2e étape, lignes,

$$\begin{bmatrix} 24 & 24 & 24 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1e étape, colonnes,

$$\begin{bmatrix} 24 & 24 & 24 & 24 \\ 24 & 24 & 24 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2e étape, colonnes,

$$\begin{bmatrix} 24 & 24 & 24 & 24 \\ 24 & 24 & 24 & 24 \\ 24 & 24 & 24 & 24 \\ 24 & 24 & 24 & 24 \end{bmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à diviser par 16 pour obtenir le résultat ce qui donne

$$A_{25\%} = A_{50\%} = \begin{bmatrix} 3/2 & 3/2 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 3/2 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2

1) On va calculer la transformée de Fourier discrète de $f = [1, 1, 0, 0]$ en utilisant la FFT décimation temporelle. On notera que le "renversement des bits" se fait au début des calculs.

k	0	1	2	3
$bits$	00	01	10	11
$revbits$	00	10	01	11
$revbits(k)$	0	2	1	3
$f[k]$	1	1	0	0
$rev(f)[k]$	1	0	1	0
$1e\ etape, \omega 2 = -1$	1	1	1	1
$2e\ etape, \omega_4 = i$	2	$1-i$	0	$1+i$

Donc $\widehat{f} = [2, 1-i, 0, 1+i]$.

On vérifie le résultat obtenu en utilisant la matrice de Fourier

$$A_4 = \left[\omega_4^{-pq}\right]_{\substack{0\le p\le 3\\ 0\le q\le 3}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

On a bien

$$\widehat{f} = fA_4 = [1,1,0,0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} = [2, 1-i, 0, 1+i].$$

2) On va maintenant calculer la transformée de Fourier inverse de $g = [8, -2-2i, 0, -2+2i]$ en utilisant la FFT inverse décimation fréquentielle. On remarquera que l'envergure du papillon diminue de moitié à chaque étape, et que les renversements de bits se font à la fin. Les puissances négatives des racines 2^nemes de l'unité sont replacées par leurs inverses.

k	0	1	2	3
$g[k]$	8	$-2-2i$	0	$-2+2i$
$1eetape, \omega_4 = i$	8	$-2-2i+(-2+2i) = -4$	8	$i((-2-2i)-(-2+2i)) = 4$
$2e\ etape, \omega 2 = 1$	4	12	12	4
$revbits, 4\mathcal{F}^{-1}(g)[k]$	4	12	12	4
$\mathcal{F}^{-1}(g)[k]$	1	3	3	1

On sait que la matrice de Fourier inverse A_4^{-1} est donnée par la formule

$$A_4^{-1} = \frac{1}{4}\overline{A_4} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}.$$

On a bien

$$\mathcal{F}^{-1}(g) = gA_4^{-1} = \frac{1}{4}[8, -2-2i, 0, -2+2i]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} = [1, 3, 3, 1].$$

3) La suite des coefficients de $1 + x$, considéré comme polynôme de degré inférieur ou égal à 3, est égale à $f = [1, 1, 0, 0]$. Comme $(1 + x)^3$ est de degré 3, les produits de convolution acyclique $f * f * f$ et les produits de convolution cyclique $f \underset{3}{*} f \underset{3}{*} f$ coincident sur $\{0, 1, 2, 3\}$ et on a

$$(1 + x)^3 = \sum_{k=0}^{3} (f * f * f)[k]x^k = \sum_{k=0}^{3} (f \underset{3}{*} f \underset{3}{*} f)[k]x^k.$$

On a

$$\widehat{f \underset{3}{*} f \underset{3}{*} f} = \widehat{f}^3$$

$$= [2^3, (1-i)^3, 0, (1+i)^3 = [8, 1-3i+3i^2-i^3, 0, 1+3i+3i^2+i^3] = [8, -2-2i, 0, -2+2i]$$

$$= g.$$

On obtient

$$f \underset{3}{*} f \underset{3}{*} f = \mathcal{F}_4^{-1}(g) = [1, 3, 3, 1],\ (1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + 1.$$

En particulier

$$11^3 = (10 + 1)^3 = 10^3 + 3 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1 = 1331.$$

Exercice 3

1) On a, pour $x \neq 0$,

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt = \int_{-1}^{1} e^{-itx}dt = \left[-\frac{e^{-itx}}{ix}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{itx} - e^{-itx}}{x}.$$

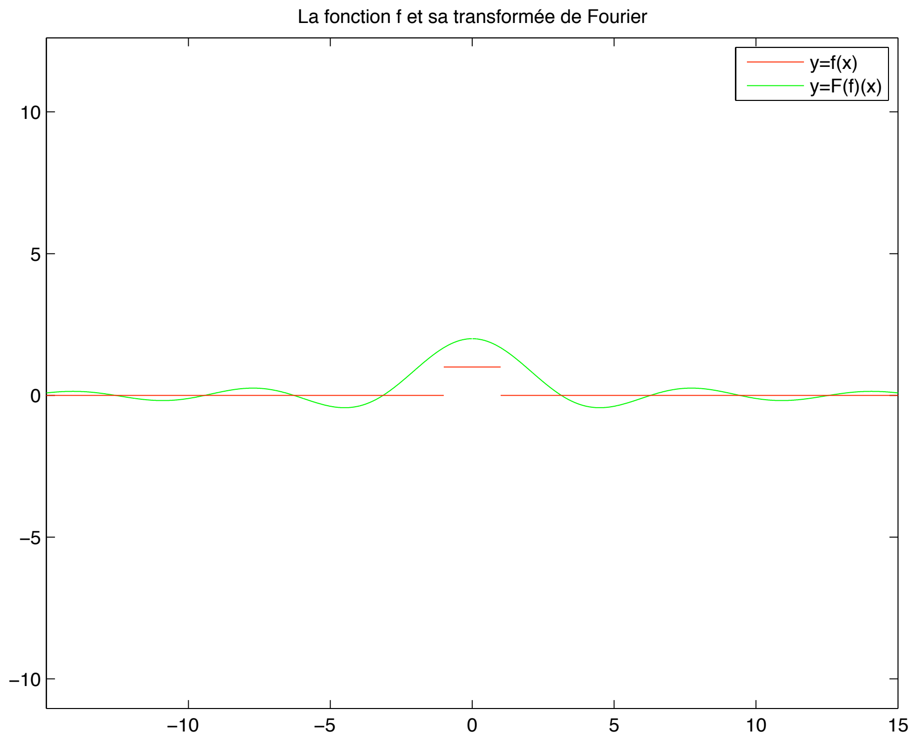
D'autre part un calcul direct donne $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-1}^{1} dt = 2$. On obtient, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(c) = 2\frac{sin(x)}{x} = 2sin_c(x),$$

où $sin_c(x) = \frac{sin(x)}{x}$ désigne le sinus cardinal de x, avec par convention $sin_c(0) = 1$.

On représente maintenant f et $\hat{f}$ sur un même graphique.

```
x1=[-1:0.01:1]; y1=polyval([1],x1); x2=[1: 0.01: 15];y2=polyval([0],x2);
x3=[-15:0.01:15];y3=2*sin(x3)./x3;
plot(x1,y1,'red',x3,y3,'green',x2, y2,'red', -x2,y2,'red');
hold on; axis equal; legend('y=f(x)', 'y=F(f)(x)');title('La fonction f et sa transformée de
print -depsc exo3exam
```



2) On a

$$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t)dt = \int_{-1}^{1} f(x-t)dt.$$

On a $f(t)f(x-t) = 1$ si $-1 \leq t \leq 1$ **et** $-1 \leq x-t \leq 1$, $f(x-t) = 0$ sinon. Autrement dit $f(t)f(x-t) = 1$ si $t \in [-1,1] \cap [x-1, x+1]$, et $f(t)f(x-t) = 0$ si $t \notin [-1,1] \cap [x-1, x+1]$. Donc $(f * f)(x) = 0$ si $x < -2$ ou si $x > 2$.

Si $-2 \leq x \leq 0$, on a

$$(f * f)(x) = \int_{-1}^{x+1} dt = [t]_{-1}^{x+1} = x + 2.$$

Si $0 \leq x \leq 2$, on a

$$(f * f)(x) = \int_{x-1}^{1} dt = [t]_{x-1}^{1} = -x + 2.$$

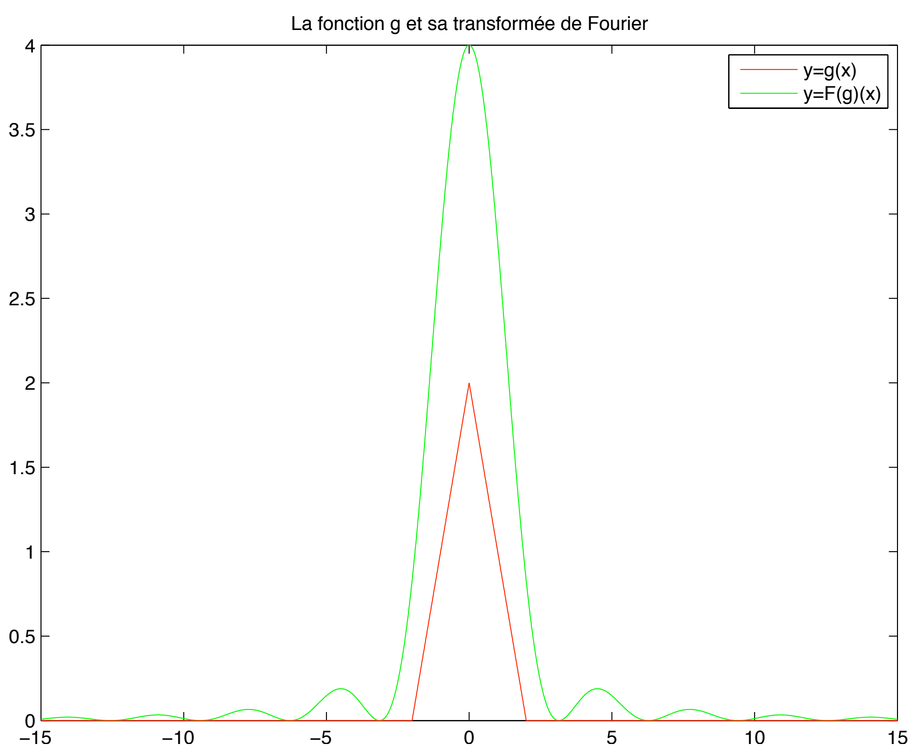
3) On pose $g(x) = 0$ pour $|x| > 2$, $g(x) = x+2$ pour $x \in [-2, 0]$, $g(x) = 2-x$ pour $x \in [0, 2]$. Il résulte de la question précédente que $g = f * f$.

On a donc,pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{g}(x) = \hat{f}(x)^2 = 4sin_c(x)^2.$$

On représente maintenant sur un même graphique g et $\hat{g}$. On a pris une échelle différente sur l'axe des y pour mettre en valeur les oscillations de la transformée de Fourier de g.

```
x1=[-2:0.01:0]; y1=polyval([1,2],x1); x2=[0: 0.01: 2];y2=polyval([-1 2],x2);
x3=[-15:0.01:15];y3=4*(sin(x3).^2)./(x3.^2);x4=[2:0.01:15];y4=polyval([0],x4);
plot(x1,y1,'red',x3,y3,'green',x2, y2,'red', x4,y4,'red',-x4,y4,'red');
 legend('y=g(x)', 'y=F(g)(x)');title('La fonction g et sa transformée de Fourier');
print -depsc exo3exambis
```



4) On a $\widehat{[\widehat{f}]}(x) = \frac{1}{2\pi} f(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, donc le plus petit réel positif a tel que $\widehat{[\widehat{f}]}(x) = 0$ presque partout pour $|x| > a$ est égal à 1. Avec les notations du

cours, on a donc $freq_{max}(\hat{f}) = \frac{1}{2\pi}$, et d'après le théorème d'échantillonnage de Shannon (page 109 du support de cours) on peut reconstituer toutes les valeurs de $\hat{f}$ à partir de la suite $(\hat{f}[\delta m])_{m\in\mathbb{Z}}$ si et seulement si $\frac{1}{\delta} \geq \frac{1}{\pi}$, c'est à dire $\delta \leq \pi$. On a alors

$$\hat{f}(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta\hat{f}(m\delta)\frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t-m\delta)\right)}{\pi(t-m\delta)}$$

$$= 2sin_c\left(\frac{\pi t}{\delta}\right) + 2\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{sin(m\delta)}{m}\frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t-m\delta)\right)}{\pi(t-m\delta)}.$$

5) On voit de même que plus haut que le plus petit réel positif a tel que $\widehat{[\widehat{g}]}(x) = 0$ presque partout pour $|x| > a$ est égal à 2. Avec les notations du cours, on a donc $freq_{max}(\hat{g}) = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$, et d'après le théorème d'échantillonnage de Shannon (page 109 du support de cours) on peut reconstituer toutes les valeurs de $\hat{g}$ à partir de la suite $(\hat{g}[\delta m])_{m\in\mathbb{Z}}$ si et seulement si $\frac{1}{\delta} \geq \frac{2}{\pi}$, c'est à dire $\delta \leq \frac{\pi}{2}$. On a alors

$$\hat{g}(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta\hat{g}(m\delta)\frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t-m\delta)\right)}{\pi(t-m\delta)}$$

$$= 4sin_c\left(\frac{\pi t}{\delta}\right) + 4\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{sin^2(m\delta)}{m\delta}\frac{sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t-m\delta)\right)}{\pi(t-m\delta)}.$$

6) Comme la série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{g}(bn)|$ converge pour tout $b > 0$. Comme g est continue à support compact, on a $\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^2|g(x)| < +\infty$. On voit donc que les conditions d'applications de la formule sommatoire de Poisson sont vérifiées, et on a, pour tout $a > 0$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(an) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{g}(\frac{2\pi n}{a}).$$

Les fonctions g et $\hat{g}$ sont paires, et on a $g(0) = 2$, $\hat{g}(0) = 4$. On obtient

$$2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} g\left(an\right) = \frac{4}{a} + \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{+\infty}\hat{g}\left(\frac{2\pi n}{a}\right) = \frac{4}{a} + \frac{8a}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{sin^2\left(\frac{2\pi n}{a}\right)}{n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{sin^2\left(\frac{2\pi n}{a}\right)}{n^2} = \frac{\pi^2}{a}\left[1 - \frac{2}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} g(an)\right].$$

En posant $a = \frac{2\pi}{\delta}$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sin^2(n\delta)}{n^2} = \frac{\pi\delta}{2} - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\pi\delta}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} g\left(\frac{2n\pi}{\delta}\right).$$

Notons $E\left(\frac{\delta}{\pi}\right)$ le plus grand entier $p \geq 0$ tel que $p \leq \frac{\delta}{\pi}$. On a $g\left(\frac{2n\pi}{\delta}\right) = 2 - \frac{2n\pi}{\delta}$ si $n \leq p$, $g\left(\frac{2n\pi}{\delta}\right) = 0$ sinon.

Si $\frac{\delta}{\pi} < 1$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sin^2(n\delta)}{n^2} = \frac{\pi\delta}{2} - \frac{\delta^2}{2}.$$

Si $\frac{\delta}{\pi} \geq 1$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sin^2(n\delta)}{n^2} = \frac{\pi\delta}{2} - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\pi\delta}{2} \sum_{n=1}^{E\left(\frac{\delta}{\pi}\right)} \left(2 - \frac{2n\pi}{\delta}\right)$$

$$= \pi\delta\left(\frac{1}{2} + E\left(\frac{\delta}{\pi}\right)\right) - \frac{\delta^2}{2} + \pi^2 \sum_{n=1}^{E\left(\frac{\delta}{\pi}\right)} n. = \pi\delta\left(\frac{1}{2} + E\left(\frac{\delta}{\pi}\right)\right) - \frac{\delta^2}{2} - \pi^2 \sum_{n=1}^{E\left(\frac{\delta}{\pi}\right)} n.$$

Le calcul classique de la somme des termes d'une progression arithmétique donne $\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$. On obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sin^2(n\delta)}{n^2} = \pi\delta\left(\frac{1}{2} + E\left(\frac{\delta}{\pi}\right)\right) - \frac{\delta^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} E\left(\frac{\delta}{\pi}\right)\left(E\left(\frac{\delta}{\pi}\right) + 1\right).$$

Pour $\delta = \frac{\pi}{2}$, on a $sin^2(n\delta) = 0$ si n est pair, et $sin^2(n\delta) = 1$ si n est impair. Comme dans ce cas $E(\frac{\delta}{\pi}) = 0$, on obtient

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2},$$

$$(1 - \frac{1}{4}) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$