Université Bordeaux – Master Sciences et Technologies, Informatique. Session automne 2015

DS Automates et Complexité, 2 novembre 2015, 16h15 – 18h15

Documents autorisés : notes de cours et de TD.
La notation attachera une grande importance à la clarté et à la concision des justifications.
Le barème est indicatif.

Exercice 1 — 5 points. Répondez aux questions suivantes en **justifiant brièvement** vos réponses :

a) Existe-t-il des problèmes à la fois semi-décidables et indécidables ?

b) On considère le langage L des codes des machines de Turing qui acceptent si l'entrée représente un nombre pair. Le langage L est-il décidable ou indécidable ?

c) On considère la variante DNF-SAT du problème de satisfaisabilité où les formules données en entrée sont en *forme normale disjonctive*, c'est-à-dire, sont disjonctions de clauses conjonctives. Par exemple, la formule suivante est en forme normale disjonctive : $(x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg y \wedge y \wedge t \wedge \neg z)$. Le problème DNF-SAT est-il dans la classe de complexité **P** ou est-il **NP**-complet ?

d) Est-il vrai que tout problème dans **P** se réduit au langage universel $\mathrm{UNIV} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ accepte } w\}$?

e) On propose de définir la classe des problèmes **P**-complets de la façon suivante. Un problème est **P**-complet si il satisfait les deux conditions suivantes :

— Il est dans **P**.

— Tout problème de **P** se réduit polynomialement à lui.

Cette définition est mauvaise. Expliquez pourquoi. ∎

Exercice 2 — 3 points. On considère une variante des machines de Turing déterministes avec une seule bande dont la tête de lecture ne peut se déplacer *que vers la droite*, c'est-à-dire, ses transitions sont toujours de la forme $\delta(p, a) = (q, b, \triangleright)$ pour n'importe quelle paire p, a.

Montrer que le problème de l'arrêt $\mathrm{HALT} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ s'arrête sur l'entrée } w\}$, restreint à ces machines, est décidable. ∎

Exercice 3 — 6 points. Dans cet exercice, on considère des graphes non orientés. Étant donné un graphe G, un *chemin Hamiltonien* pour G est un chemin dans G qui passe une et une seule fois par chacun de ses sommets. De plus, on appelle *circuit Hamiltonien* pour G, un chemin Hamiltonien fermé, c'est-à-dire qu'il existe une arrête entre entre le dernier sommet du chemin et le premier.

On appelle Chemin Hamiltonien et Circuit Hamiltonien les problèmes associés : ils ont pour entrée un graphe non orienté G et demandent s'il existe un chemin Hamiltonien pour G et un circuit Hamiltonien pour G, respectivement.

On rappelle aussi que le problème Sous-Graphe prend deux graphes non orientés G, H en entrée et demande si H est un *sous-graphe* de G (H est un sous-graphe de G s'il peut être obtenu en enlevant quelques sommets et quelques arêtes de G).

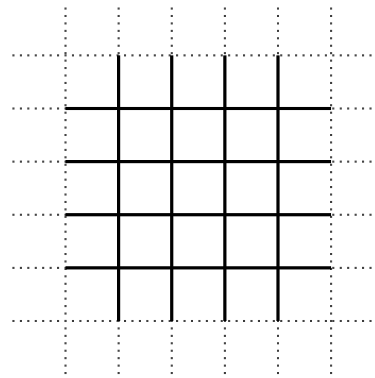
Donner des réductions en temps polynomial

a) de Circuit Hamiltonien à Sous-Graphe,

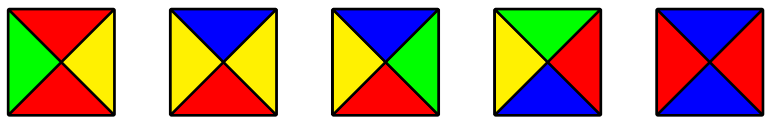
b) de Chemin Hamiltonien à Circuit Hamiltonien,

c) de Circuit Hamiltonien à Chemin Hamiltonien. ∎

Exercice 4 — 6 points. Dans cet exercice on considère deux problèmes de pavage du plan entier **infini** :

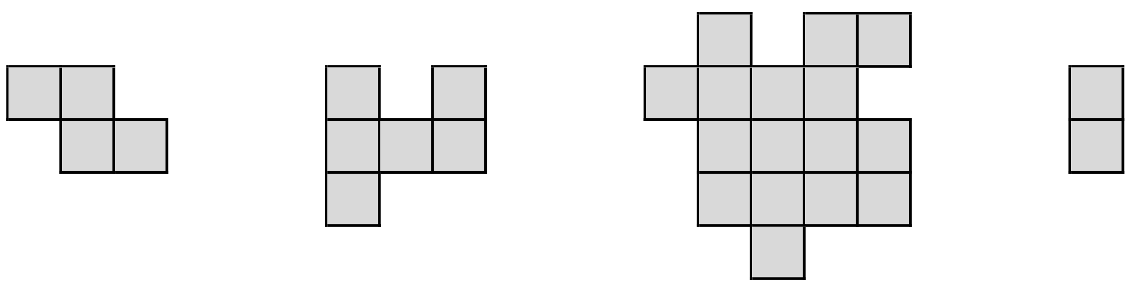


Le premier problème est une variante du problème de pavage avec des dominos de Wang, appelée Tiling. L'entrée de ce problème est un ensemble fini D de dominos de Wang, colorés sur leur côtés Nord, Est, Sud et Ouest (il n'y a pas de domino de départ imposé dans cette variante). Une entrée est par exemple :



Le problème Tiling consiste à déterminer si on peut paver le plan infini entier en utilisant uniquement des dominos de l'entrée en nombre arbitraire, mais sans changer leur orientation et en respectant les contraintes de couleur pour des dominos adjacents. Sur l'exemple, la réponse est positive, on peut même utiliser uniquement le dernier domino. On sait que ce problème est indécidable (ce qui a été vu en TD peut se généraliser à cette variante).

On appelle le second problème Tetris. Une entrée du problème Tetris est un ensemble fini P de *polyominos* de formes différentes et sans couleur. Un polyomino est une forme connexe obtenue en réunissant des dominos de même taille (*dominos unitaires*) par leurs côtés. Un exemple d'entrée est l'ensemble de polyominos suivants :



Étant donnée une entrée P, le problème Tetris consiste à déterminer si on peut couvrir, entièrement et sans chevauchements, le plan infini entier avec des polyominoes dans P. Pour former une couverture, on peut utiliser plusieurs fois le même polyomino, mais sans le faire tourner. Sur l'exemple, la réponse est encore positive, en utilisant par exemple uniquement le dernier polyomino.

1) Le problème Tiling est indécidable. On veut montrer que Tetris est aussi indécidable. Pour cela, faut-il réduire Tiling à Tetris ou Tetris à Tiling ? Justifier votre réponse.
2) Décrire de façon intuitive
   a) une réduction de Tiling à Tetris,
   b) une réduction de Tetris à Tiling.

∎