Master CSI-UE / Master CSI-THCS-Analyse de Fourier

Examen du 19 Décembre 2008
Durée 1h30-Documents autorisés

Exercice 1 (5 points)

On considère l'image numérisée

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1) En utilisant la transformée de Walsh rapide sur les lignes et les colonnes de A, calculer la transformée de Walsh de A.

2) Vérifier que les compressions de A à 25% et à 50% coincident, et calculer leur valeur commune.

Exercice 2 (6 points)

1) Calculer la transformée de Fourier discrète de $f = [1, 1, 0, 0]$ en utilisant la FFT décimation temporelle. Vérifier le résultat obtenu en utilisant la matrice de Fourier.

2) Calculer la transformée de Fourier inverse de $g = [8, -2-2i, 0, -2+2i]$ en utilisant la FFT inverse décimation fréquentielle. Vérifier le résultat obtenu en utilisant la matrice de Fourier.

3) En utilisant la FFT sur $\mathbb{C}^4$, calculer $(1+x)^3$. Appliquer le résultat obtenu au calcul de 11^3.

Exercice 3 (9 points)

1) On pose $f(t) = 1$ si $t \in [-1, 1]$, $f(t) = 0$ si $|t| > 1$.
Calculer la transformée de Fourier de f et représenter sur un même graphique f et $\hat{f}$.

2) Calculer $(f * f)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3) On pose $g(x) = 0$ pour $|x| > 2$, $g(x) = x+2$ pour $x \in [-2, 0]$, $g(x) = 2-x$ pour $x \in [0, 2]$.
Calculer la transformée de Fourier de g. Représenter sur un même graphique g et $\hat{g}$.

4) En utilisant le théorème d'échantillonnage de Shannon, déterminer pour quelles valeurs positives de δ on peut reconstituer toutes les valeurs de $\hat{f}$ à partir de la suite $(\hat{f}[\delta m])_{m\in\mathbb{Z}}$. Dans ce cas donner une formule explicite permettant de calculer $\hat{f}(t)$ à partir de la suite $(\hat{f}[\delta m])_{m\in\mathbb{Z}}$.

5) En utilisant de nouveau le théorème d'échantillonnage de Shannon, déterminer pour quelles valeurs positives de δ on peut reconstituer toutes les valeurs de $\hat{g}$ à partir de la suite $(\hat{g}[\delta m])_{m\in\mathbb{Z}}$. Dans ce cas donner une formule explicite permettant de calculer $\hat{g}(t)$ à partir de la suite $(\hat{g}[\delta m])_{m\in\mathbb{Z}}$.

6) En utilisant une formule sommatoire du cours, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sin^2(n\delta)}{n^2}$ pour $\delta > 0$. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.