# Master CSI 1 2012-2013

## Théorie de l'information : DS du 23 octobre 2012

*Master Sciences et Technologies, mention Mathématiques ou Informatique, spécialité Cryptologie et Sécurité informatique*

*Responsable :* Gilles Zémor

*Durée : 1h30. Sans document. Les exercices sont indépendants.*

– Exercice 1. On nous dit que les corbeaux d'une certaine espèce sont noirs avec probabilité 0.6, mâles avec probabilité 1/2, femelles avec probabilité 1/2, et que les corbeaux mâles sont noirs trois fois plus souvent que les corbeaux femelles.

On apprend qu'un certain corbeau qui n'est pas noir est un mâle. Quelle est la valeur de cette information en shannons ?

– Exercice 2. Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots b_n$ deux suites d'entiers positifs. On pose $a = \sum_i a_i$ et $b = \sum_i b_i$. Déduire d'un résultat de théorie de l'information que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \log \frac{a_i}{b_i} \geqslant a \log \frac{b}{a}.$$

– Exercice 3. On jette deux dés et on appelle $X$ et $Y$ les numéros sortants.

a) Calculer l'entropie de leur somme $H(X+Y)$, ainsi que celle de leur différence $H(X-Y)$.

b) Montrer que l'application $(X,Y) \mapsto (X+Y, X-Y)$ est bijective et en déduire la valeur de l'information mutuelle $I(X+Y, X-Y)$.

– Exercice 4. Soient $X_1, X_2, Y_1, Y_2$ quatre variables aléatoires où l'on suppose que :
- $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes,
- $Y_1$ et $Y_2$ sont indépendantes,
- $X_1$ et $Y_1$ prennent leurs valeurs dans le même ensemble,
- $X_2$ et $Y_2$ prennent leurs valeurs dans le même ensemble,

Pour $i = 1, 2$ on note $p(X_i)$ la loi de $X_i$ et $p(Y_i)$ la loi de $Y_i$. On note $p(X_1, X_2)$ et $p(Y_1, Y_2)$ les lois des couples $(X_1, X_2)$ et $(Y_1, Y_2)$.

Montrer que

$$\mathrm{D}(p(X_1, X_2) \,||\, p(Y_1, Y_2)) = \mathrm{D}(p(X_1) \,||\, p(Y_1)) + \mathrm{D}(p(X_2) \,||\, p(Y_2)).$$

– EXERCICE 5. On considère la loi de probabilité $(0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.4)$. Quelles sont toutes les distributions des longueurs $\ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \ell_3 \leqslant \ell_4 \leqslant \ell_5$ associées aux différents codes de Huffman pour cette loi ? Quelle est la longueur moyenne $\overline{\ell}$ associée ?

– EXERCICE 6. Six occurences indépendantes d'une variable $X$ sont encodées par un code de Huffman. Le résultat de cet encodage est la séquence binaire 10110000101. On sait que la source $X$ prend ses valeurs dans un alphabet à cinq éléments. On sait par ailleurs que la loi $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ de $X$ vaut soit $(0.4, 0.3, 0.2, 0.05, 0.05)$, soit $(0.3, 0.25, 0.2, 0.2, 0.05)$.

a) Trouver la loi de $X$.

b) *(Délicat).* Décomposer la séquence 10110000101 en la concaténation de six mots du code préfixe (de Huffman) utilisé.