Université Bordeaux 1 **MHT812 – Master**
Mathématiques Année 2012–2013

FEUILLE D'EXERCICES n$^{\text{o}}$ 11

Polynômes à plusieurs indéterminées

Dans ce travail, on utilisera l'ordre lexicographique $\prec_{\text{lex}}$ sur les monômes et aussi parfois l'ordre lexicographique gradué $\prec_{\text{grlex}}$.

On rappelle la définition des S-polynômes. Soit k un corps, et soit $A = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$. On note $x^a = x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$. Soient g et h non nuls dans A. Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ le degré du terme dominant de g et soit $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ le degré du terme dominant de h. On note $\gamma = (\max(\alpha_1, \beta_1), \ldots, \max(\alpha_1, \beta_1))$. Alors on définit

$$S(g, h) = \frac{x^\gamma}{\text{td}(g)} g - \frac{x^\gamma}{\text{td}(h)} h.$$

Le théorème suivant fournit un critère pratique pour reconnaître ou pour construire une base de Gröbner.

Théorème 1. *Un ensemble fini $G = \{g_1, \ldots, g_s\} \subset A$ est une base de Gröbner si et seulement si pour tout couple (i, j), où $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant s$, le reste de la division de $S(g_i, g_j)$ par $(g_1, \ldots, g_s)$ est nul.*

Exercice 1 – On utilise $\prec = \prec_{\text{lex}}$. Soient $f = xy^2 + 1$, $f_1 = xy + 1$ et $f_2 = y + 1$.

1) En divisant f par f_1, puis par f_2, décomposer $f = g + r$, où $g \in < f_1, f_2 >$ et où aucun terme de r n'est divisible par le terme dominant de f_1 ni de f_2.

2) Faire de même en divisant d'abord par f_2, puis par f_1.

3) Le polynôme f appartient-il à l'idéal engendré par f_1 et f_2 ?

4) Déterminer une base de Gröbner de l'idéal de $\mathbb{Q}[x, y]$ engendré par f_1 et f_2.

Exercice 2 – On utilise $\prec = \prec_{\text{lex}}$. Soient $f = xy^2 - x$, $f_1 = xy + 1$ et $f_2 = y^2 - 1$.

1) Diviser f par f_1.

2) Le polynôme f appartient-il à $< f_1, f_2 >$?

Exercice 3 – On utilise $\prec = \prec_{\text{lex}}$. Soient $f = x^2y + xy^2 + y^2$, $f_1 = xy - 1$ et $f_2 = y^2 - 1$.

1) Écrire de deux façons différentes $f = g + r$, où $g \in < f_1, f_2 >$ et où aucun terme de r n'est divisible par le terme dominant de f_1 ni de f_2.

2) Calculer $f_3 = S(f_1, f_2)$. Peut-on diviser ce polynôme par f_1 ou f_2 ?

3) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de Gröbner de $I = < f_1, f_2 >$.

4) Le polynôme f appartient-il à I ?

5) On demande à sage une base de Gröbner de $< f_1, f_2 >$. Il rend $[y^2 - 1, x - y]$. Commenter.

Exercice 4 – On utilise $\prec = \prec_{\text{grlex}}$. Soient $g = x^3 - 2xy$, $h = x^2y - 2y^2 + x$, $G = \{g, h\}$ et $I =< G >$.

1) Montrer que $x^2 \in I$, que $x^2 \in < \mathrm{td}(I) >$, mais que $x^2 \notin < \mathrm{td}(G) >$.

2) Trouver une base de Gröbner de I.

3) Trouver la base de Gröbner réduite de I.

Exercice 5 – Dans $k[x, y, z]$, soient $f_1 = x - z^4$, $f_2 = y - z^5$ et $I =< f_1, f_2 >$.

1) Trouver une base de Gröbner de I pour l'ordre lexicographique avec $x > y > z$. Soit B cette base.

2) Montrer que B n'est pas une base de Gröbner de I pour l'ordre lexicographique gradué avec $x > y > z$.

Exercice 6 – Soit k un corps. Montrer que les idéaux $I =< x+xy, y+xy, x^2, y^2 >$ et $J =< x, y >$ de $k[x, y]$ sont égaux.

Exercice 7 – Soit K un corps. Soit x un élément algébrique sur K. On rappelle que le polynôme minimal m de x sur K est le polynôme unitaire de plus petit degré de $K[x]$ tel que $m(x) = 0$. De plus, si $P \in K[x]$, alors $P(x) = 0$ si et seulement si m divise P.

1) Soit f un polynôme irréductible de $K[x]$. Soit $g \in K[x]$, et soit m le polynôme minimal de l'image de g dans $K[x]/(f)$. Soit I l'idéal de $K[x, y]$ engendré par $g(x) - y$ et $f(x)$. Montrer que $I \cap K[y] = m(y)K[y]$.

2) Soit $f = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Vérifier que f est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$. Soit a une racine de f dans $\mathbb{C}$. Quel est le polynôme minimal de $a^2 + a + 1$?