Cours de Courbes Elliptiques

Ecrit par Marion Candau

Enseignant : M.Karim Belabas

Master 1 Cryptologie et Sécurité Informatique
Université Bordeaux 1

2009 - 2010

Table des matières

1 Introduction **2**
1.1 Dissymétrie 2

2 Courbes Elliptiques **5**
2.1 Définitions 5

3 Comptage de points **11**
3.1 Comptage de points général 11
3.2 Algorithme de Schoof en $(\log q)^{O(1)}$ 13

4 Primalité et factorisation **19**
4.1 Primalité 19
4.2 Factorisation 22

5 Applications en cryptographie à clé publique **25**
5.1 Le schéma d'El Gamal 25
5.2 Couplages 26
5.3 Réalisation de couplages sur $E/\mathbb{F}_q$ une courbe elliptique 28

6 Premier complément : $E(\mathbb{F}_q) = (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z})P_1 \oplus (\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z})P_2$ **31**

7 Deuxime complément : Retour sur $Cl(D)$ et sur $U^2 - DV^2 = 4p$, $D < 0$ **33**

Chapitre 1

Introduction

Soit G un groupe cyclique engendré par g d'ordre n c'est-à-dire $g^n = g^0$. Il existe un isomorphisme de groupe entre G et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ défini par :

$$(G, \times) \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$$

$$g^k \longmapsto k$$

1.1 Dissymétrie

La fonction $k \longmapsto g^k$ se calcule en $O(\log k)$ dans G.

$k = \sum_{i=0}^{l} \epsilon_i \times 2^i$ avec $\epsilon_i \in \{0, 1\}$

$g^k = \prod_{i=0}^{l} \left(g^{2^i}\right)^{\epsilon_i} = \prod_{i=0, \epsilon_i=1}^{l} g^{2^i}$

Etant donné $h \in G$,on veut $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $h = g^k$. On a donc un problème de logarithme discret.

$0 \leqslant k < n$, m paramètre $\simeq \sqrt{n}$

$k = k_1 \times m + k_0$, avec $0 \leqslant k_0 < m$ et $0 \leqslant k_1 \leqslant \frac{k}{m} \leqslant \frac{n}{m}$

$g^{k_1 \times m + k_0} = h \Longleftrightarrow (g^m)^{k_1} = h \times g^{-k_0}$

On a :

$$L_1 = \{h \times g^{-k_0} : 0 \leqslant k_0 < m\}$$

$$L_2 = \{(g^m)^{k_1} : 0 \leqslant k_1 < \frac{n}{m}\}$$

Algorithme 1 Algorithme "générique" (méthode de Shanks : pas de bébé, pas de géant)

1. Construire L_1
2. Trier L_1
3. Successivement chercher $g^0, g^m, g^{2m}, \ldots$ dans L_1
4. Si $k_1 \geqslant 0$ est le plus petit indice tel que $(g^m)^k \in L_1$, on pose $k = k_0 + k_1 \times m$.

Coût : m multiplications dans G $\Longrightarrow L_1$ et g^m
+ au plus $\frac{n}{m}$ multiplications + recherche + tri
La valeur de m qui minimise $m + \frac{n}{m}$ est $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Dans un modèle ou la multiplication et la comparaison d'éléments de G coûtent 1, le coût total est en $O(\sqrt{n}\log n)$.

Algorithme 2 Algorithme "générique" (Pohlig-Helmann)

Soit G cyclique d'ordre n, g d'ordre n, $p|n : n = pq$
$g^k = h \Longrightarrow (g^p)^k = h^p, g^p$ est d'ordre $\frac{n}{p} = q$.
$\Longrightarrow k \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ en résolvant un problème de logarithme discret de taille q :
$k = k_0 + k_1 \times q$ où k_0 est connu.
$g^{k_0} \times (g^q)^{k_1} = h \Rightarrow (g^q)^{k_1} = h \times g^{-k_0}$
$\Longrightarrow$ problème de logarithme discret de taille p.

Définition
$\tilde{O}(f) = O(f) \times (\log f)^{O(1)}$

Corollaire
Un logarithme discret de taille n se calcule en $\tilde{O}(\sqrt{p})$ ou p est le plus grand diviseur premier de n.
Conséquence : on veut n premier ou premier en petit cofacteur :

$$n = \underset{premier}{p} \times \underset{\leqslant 10}{c}$$

Remarque : Si l est premier tel que $p = 2 \times l + 1$ soit premier, on a : $\#F_p^* = 2l$

Théorème de Shoup
Cette complexité est optimale dans le modèle du groupe générique.

Algorithme 3 Algorithme "non générique" : Calcul d'indice sur F_p^*

On choisit $\mathcal{B} = \{l \leqslant B : l \text{ premier}\}$ ($B = o(p^\epsilon), \forall \epsilon > 0, B$ petit).
On recherche des relations dans F_p^* de la forme :
$g^x \equiv \prod_{l \in \mathcal{B}} l^{e_l(x)} \mod p$ avec $e_l(x) \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N}$
$x \equiv \sum_{l \in \mathcal{B}} e_l(x) \log l \mod p-1$
$\Longrightarrow \log l, l \in \mathcal{B}$
On cherche x tel que $h \times g^x = \prod_{l \in \mathcal{B}} l^{e_l(x)} \mod p$
$\Longrightarrow \log h = \sum_{l \in \mathcal{B}} e_l(x) \log l - x$

Corollaire

On sait résoudre le problème du logarithme discret dans F_q^* en temps $L_{\frac{1}{2}}(\log p)^{O(1)} = o(p^\epsilon)\ \forall \epsilon > 0$

Conjecture

On peut remplacer par $L_{\frac{1}{3}}(\log p)^{O(1)}$.

Chapitre 2

Courbes Elliptiques

2.1 Définitions

Soit K un corps ($K = \mathbb{R}, \mathbb{F}_q$).
On appelle $K^n = K \times \ldots \times K$ l'espace affine de dimension n sur K.
$K^n = \{(x_1, \ldots, x_n), x_i \in K\}$.
On appelle $(K^{n+1} \backslash \{(0, \ldots, 0)\})/\sim$: $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^*, x = \lambda y$ l'espace projectif de dimension n sur K.

Notation On note $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ la classe de
$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in K^{n+1} \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$.
L'espace affine est noté $\mathbb{A}^n(K)$.
L'espace projectif sera noté $\mathbb{P}^n(K)$.

Remarque
Tous les points $(1 : 0), \{(x : 1), x \in K\}$ sont différents dans $\mathbb{P}^1(K)$. Plus généralement, considérons dans $\mathbb{P}^n(K)$, $(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K)$

- Si $x_n = 0$, $(x_0 : \ldots : x_n) \longleftrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(K)$ points à l'infini.
- Si $x_n \neq 0$, $(x_0 : \ldots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_n} : \frac{x_1}{x_n} : \ldots : \frac{x_{n-1}}{x_n} : 1\right) \longleftrightarrow \mathbb{A}^n(K)$ points finis

D'ou :

$$\mathbb{P}^n(K) = U^n \amalg U^{n-1} \amalg \ldots \amalg U^0$$

avec $U^i = \{(x_0 : \ldots : x_{i-1} : 1 : 0 : \ldots : 0), x_0, \ldots, x_{i-1} \in K\}$
U^i peut s'interpréter comme $K^i = \mathbb{A}^i(K)$

Définition
On appelle courbe plane sur K, une équation du type $\mathcal{C} : C(x, y, z) = 0$ ou

C est un polynome homogène de $K[x, y, z]$ c'est-à-dire

$$C(X, Y, Z) = \sum_{i,j,k} \lambda_{i,j,k} X^i Y^j Z^k$$

Notation
$\mathcal{C}(K) = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(K)$ tel que $C(x, y, z) = 0\}$ sont les points de la courbe.

Remarque
$\forall (x, y, z) \in K, C(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^{cste} \times C(x, y, z)$

Définition
Soit $\mathcal{C}$ une courbe plane définie par $C(x, y, z) \in K[X, Y, Z]$ avec $L \supseteq K$. $(x : y : z) \in \mathcal{C}(L) \subseteq \mathbb{P}^2(L)$ est non-singulier (ou régulier) si :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial C}{\partial X} \\ \frac{\partial C}{\partial Y} \\ \frac{\partial C}{\partial Z} \end{pmatrix} \times (x, y, z) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Définition
Soit $\mathcal{E} : (YZ^2 + a_1XYZ + a_3YZ^2) - (X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3)$ avec $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_6) \in K$.
$\mathcal{E}$ est une cubique plane projective sur un corps K.

Remarque
$\mathcal{E}(K) \neq 0$ et $(0 : 1 : 0) \in \mathcal{E}(K)$ c'est le seul point à l'infini de $\mathcal{E}(K)$

Définition
Soit $\bar{K} \supset K$ une cloture algébrique de K. $\mathcal{E}$ est dite singulière si tous les points de $\mathcal{E}(\bar{K})$ sont non-singuliers. Une cubique comme ci-dessus est appelée courbe elliptique.

Cas particulier (important)

La forme courte de Weierstass est définie par : $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. La courbe a donc l'équation suivante :

$$\mathcal{E} : Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$$

$\mathcal{E}$ est non singulière $\iff$ le polynome cubique $X^3 + aX + b$ n'a pas de racine double $\iff -4a^3 + 27b^2 \neq 0$

Remarque

Si $car(K) \neq 2, 3$, toute courbe elliptique se ramène à une équation de Weierstrass (par un changement de variable simple).

Définition + théorème

On pose $0 = (0 : 1 : 0) \in \mathcal{E}(K)$.
Si $P = (x : y : 1) \in \mathcal{E}(K)$, on pose $\ominus P = (x : -a_1x - a_3 - y : 1) \in \mathcal{E}(K)$.
Soient $P_1 = (x_1 : y_1 : 1)$ et $P_2 = (x_2 : y_2 : 1) \in \mathcal{E}(K), P_1 \neq \ominus P_2$.

Soit $m = \begin{cases} \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} & \text{si } P_1 \neq P_2 \\ \dfrac{3x_1^2 + 2a_2x_1 + a_4 - a_1y_1}{2y_1 + a_1x_1 + a_3} & \text{sinon.} \end{cases}$

$$P3 = \begin{cases} x_3 = -x_1 - x_2 - a_2 + m(m + a_1) \\ y_3 = -y_1 - a_3 - a_1x_3 + m(x_1 - x_3) \end{cases}$$

On pose $P_1 \oplus P_2 = P_3 = (x_3 : y_3 : 1) \in \mathcal{E}(K)$. $(\mathcal{E}(K), \oplus)$ est un groupe abélien, de neutre 0 et d'inverse donné par $P \longmapsto \ominus P$.

Notation

Pour $n \in \mathbb{Z}$, $P \in \mathcal{E}(K)$, on pose :

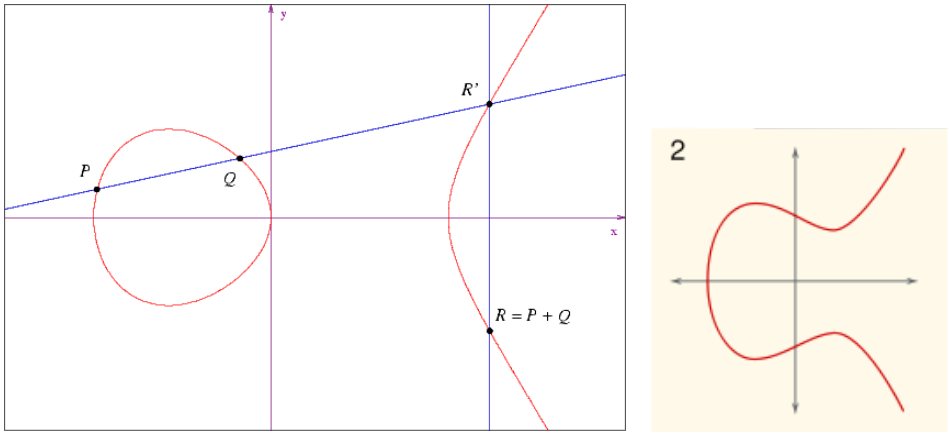
$$[n]P = \begin{cases} P \oplus P \oplus P \oplus \ldots \oplus P & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ [-n](\ominus P) & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

C'est la multiplication scalaire sur $\mathcal{E}$.

Théorème : borne de Hasse

$$|\#\mathcal{E}(\mathbb{F}_q) - (q + 1)| \leqslant 2\sqrt{q} \Longrightarrow \left|\#\mathcal{E}(\mathbb{F}_q^k) - (q^k + 1)\right| \leqslant 2q^{\frac{k}{2}}$$

FIG. 2.1 – Dessin si $K = \mathbb{R}$ de la partie affine de la courbe $y^2 = x^2 + ax + b$



(a) $\delta > 0$ (b) $\delta < 0$

$\#\mathcal{E}(\mathbb{F}_q) = q^k + 1 - \alpha^k - \beta^k$ où α, β sont les racines complexes d'une équation $X^2 - sX + q = 0$ tel que $|\alpha| = |\beta| = \sqrt{q}$ et $\alpha + \beta = s$ et $\alpha\beta = q$.

Problèmes

- Divisions : couteux sur un processeur dédié
  → coordonnées projectives : $(x : y : z) = (\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1)$
  → formules polynomiales pour $(x_3, y_3, z_3) = P_3 = P_1 \oplus P_2$ en termes de $(x_1 : y_1 : z_1) = P_1$ et $(x_2 : y_2 : z_2) = P_2$ plus rapide que la loi de groupe sur la forme de Weierstrass.
- Side Channel Attacks (SCA) / Attaques par canaux cachés → Attaques physiques $\Longrightarrow$ Formules unifiées : on rajoute des opérations fictives dans les deux sous-opérations atomiques $\longrightarrow$ indistinguables.

Courbes d'Edwards

$\mathcal{C}(K) : x^2 + y^2 = c^2(1 + dx^2y^2), c, d \in K, car(K) \neq 2$
Soient $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$. On a :

$$P_3 = P_1 \oplus P_2 = \left(\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{c(1 + dx_1x_2y_1y_2)}, \frac{y_1y_2 - x_1x_2}{c(1 - dx_1x_2y_1y_2)} \right) \in \mathcal{C}(K)$$

En général, c et d sont petits.

Théorème

$\oplus$ est une loi de groupe sur $\mathcal{C}(K)$ de neutre $(0, c)$ et d'inverse $\ominus(x, y) = (-x, y)$.

Remarque
$(0, -c)$ est d'ordre 2, $(-c, 0)$ est d'ordre 4.

Théorème
Soit $e = 1 - dc^4$ avec d non carré et $e \neq 0$, et

$$E : \frac{1}{e}Y^2 = X^3 + \left(\frac{4}{e} - 2\right)X^2 + X$$

Pour $i = 1, 2, 3$ on définit Q_i de la façon suivante :

- $Q_i = 0$ si $(x_i, y_i) = (0, c)$
- $Q_i = (0, 0)$ si $(x_i, y_i) = (0, -c)$
- $Q_i = \left(\dfrac{c + y_i}{c - y_i}, \dfrac{2c(c + y_i)}{(c - y_i)x_i}\right)$ si $x_i \neq 0 \Rightarrow y_i \neq c$

Alors $Q_i \in E(K)$ et $Q_3 = Q_1 + Q_2$.

Addition efficace

$$(X^2 + Y^2)Z^2 - c^2(Z^4 + dX^2Y^2)$$

$$(X : Y : Z) \longmapsto \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \text{ sur la courbe affine avec } Z \neq 0$$

$$(X_1 : Y_1 : Z_1) \oplus (X_2 : Y_2 : Z_2) = (X_3 : Y_3 : Z_3)$$

1. $A \leftarrow Z_1Z_2$
   $B \leftarrow A^2$
   $C \leftarrow X_1X_2$
   $D \leftarrow Y_1Y_2$
   $E \leftarrow dCD$
   $F \leftarrow B - E$
   $G \leftarrow B + E$
2. $X_3 \leftarrow AF((X_1 + Y_1)(X_2 + Y_2) - C - D)$
   $Y_3 \leftarrow AG(D - C)$
   $Z_3 \leftarrow cFG$

Coût total : 10 multiplications + 1 mise au carré + 1 multiplication par c + 1 multiplication par d + 7 additions

Espace

$(R_1, R_2, R_3) \to P_1$ et $(R_4, R_5, R_6) \to P_2$: 2 registres pour calculer $P_1 \leftarrow P_1 \oplus P_2$

On a environ : mise au carré $\approx 0,7$ multiplications, multiplications par c $\approx$ multiplications par d $\approx$ additions.

2 cas particuliers

1. $Z_1 = 1$
2. Doublement $P_1 = P_2$ 3 multiplications + 4 mises au carré + 3 multiplications par c + 6 additions

Chapitre 3

Comptage de points

On cherche calculer le cardinal de $E(\mathbb{F}_q)$. Le but est de garantir que $\#E(\mathbb{F}_q)$ n'est pas friable, idéalement est premier ($\#E(\mathbb{F}_q) = \underset{\leqslant 4}{c} \times \underset{premier}{l}$).

Remarque

Si E est associée à une courbe d'Edwards, $4|\#E(\mathbb{F}_q)$.
Si $E : Y^2 = X^3 + aX + b$ telle que $X^3 + aX + b$ a une racine dans $\mathbb{F}_q$ alors $2|\#E(\mathbb{F}_q)$.
Si $E : Y^2 = X^3 + aX + b$ telle que $X^3 + aX + b$ a 3 racines dans $\mathbb{F}_q$ alors $4|\#E(\mathbb{F}_q)$.

Deux approches

1. $E/\mathbb{F}_q$ étant donnés, calculer $\#E(\mathbb{F}_q)$.
2. Etant donnés m tel que $|m - (q+1)| < 2\sqrt{q}$, construire $E/\mathbb{F}_q$ tel que $\#E(\mathbb{F}_q) = m$

3.1 Comptage de points général

On a : car $\mathbb{F}_q \neq 2, 3$, $E : Y^2 = X^3 + aX + b$.

Définition : Symbole de Legendre

Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $p \neq 2$, il existe x tel que :

$$x^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1 & \iff \text{x est un carré dans } \mathbb{F}_p^* \\ 0 & \iff x = 0 \\ -1 & \iff \text{x n'est pas un carré} \end{cases}$$

On définit le symbole de Legendre :

$$\left(\frac{x}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \iff \text{x est un carré dans } \mathbb{F}_p^* \\ 0 & \iff x = 0 \\ -1 & \iff \text{x n'est pas un carré} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x}{p}\right) \equiv x^{\frac{p-1}{2}} \mod p$$

Mthode "naïve"

$$\#E(\mathbb{F}_q) = 1 + \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \#\{y \in \mathbb{F}_q, y^2 = x^3 + ax + b\}$$

Cas particulier

q premier, q=p.

$$\#E(\mathbb{F}_q) = p + 1 + \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \left(\frac{x^3 + ax + b}{p}\right)$$

Cas général

x est un carré si et seulement si $x^{\frac{q-1}{2}} = 1 \Leftrightarrow x^{(p^{e-1}+\ldots+1)\left(\frac{p-1}{2}\right)} = 1 \Leftrightarrow x^{p^{e-1}+\ldots+1} = y \in \mathbb{F}_p$.

$$\#E(\mathbb{F}_q) = q + 1 + \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \left(\frac{(x^3 + ax + b)^{p^{e-1}+\ldots+1}}{p}\right)$$

L'algorithme "naïf" est en $\tilde{O}(q)$.
L'algorithme de Shanks-Mestre est en $\tilde{O}(q^{\frac{1}{4}})$. Il utilise :

- la borne de Hasse : $|\#E(\mathbb{F}_q) - (q+1)| < 2\sqrt{q}$.
- S'il existe P d'ordre o dans $E(\mathbb{F}_q)$ alors $o|\#E(\mathbb{F}_q)$

$\Longrightarrow$ si $o \geqslant 4\sqrt{q}$ alors $\#E(\mathbb{F}_q)$ est déterminé.

Théorème de Mestre

Soient $E/\mathbb{F}_q : y^2 = x^3 + ax + b$ et $E'/\mathbb{F}_q : y^2 g = x^3 + ax + b$ avec $g \notin (\mathbb{F}_q)^2$ (tordue quadratique de E)

- $\#E(\mathbb{F}_q) + \#E'(\mathbb{F}_q) = 2(q+1)$
- Si $q \geqslant 229$, il existe $P \in E(\mathbb{F}_q) \cup E'(\mathbb{F}_q)$ dont l'ordre vérifie $o > 4\sqrt{q}$

Soit $P \in E(\mathbb{F}_q)$, on tire $x \in \mathbb{F}_q$, si $x^3 + ax + b \in \mathbb{F}_q^2$, on calcule y. On veut calculer l'ordre de P. Mais on va faire mieux, on va calculer un multiple x de l'ordre de P tel que $|x - (q+1)| < 2\sqrt{q}$ (un tel multiple existe, par exemple, $\#E(\mathbb{F}_q)$).

$\exists x$ tel que $[q+1-x]P = 0$ (*), $x = x_0 + mx_1, 0 \leqslant x_0 < m$ et $|x_1| < \dfrac{2\sqrt{q}}{m} + 1$

On choisit m tel que $m^2 \simeq 4\sqrt{q} \Rightarrow m = \lfloor 2q^{\frac{1}{4}} \rfloor$.

$$(*) \Leftrightarrow [q + 1 - x_0]P = [x_1]([m]P)$$

On détermine $x_0, x_1 = O(q^{\frac{1}{4}})$ tel que (*) vrai.

Algorithme 4

Entrées: $P \in E(\mathbb{F}_q)$
Sorties: ordre de P

1. $m \leftarrow \lfloor 2q^{\frac{1}{4}} \rfloor$
2. On énumère $L = \{[q + 1 - x_0]P, 0 \leqslant x_0 < m\}$
3. $Q \leftarrow [m]P$
   Pour tout x_1 tel que $|x_1| < \frac{2\sqrt{q}}{m} + 1$, vérifier si $[x_1]Q$ est dans L.
4. $r \leftarrow q + 1 - (x_0 + mx_1)$ est un multiple de l'ordre de P. On factorise r et on calcule l'ordre exact.

Algorithme 5 Algorithme générique de calcul de l'ordre de P

Entrées: $g \in G, r = \prod_{i=1, p_i \ premier}^{\omega} p_i^{e_i}$ tel que $g^r = 1$
Sorties: ordre de g

1: **pour** $i = 1$àω **faire**
2: $g_i \leftarrow g^{\frac{r}{p_i^{e_i}}}$ est d'ordre divisant $p_i^{e_i}$.
3: Soit f_i l'entier minimal tel que $g_i^{p_i^{f_i}} = 1$, $f_i < e_i$
4: **fin pour**
5: Renvoyer $o = \prod_{i=1}^{\omega} p_i^{f_i}$

3.2 Algorithme de Schoof en $(\log q)^{O(1)}$

Théorème Soit $E/\mathbb{F}_q$. Si $\#E(\mathbb{F}_q) = q + 1 - a_q$ ($a_q \in \mathbb{Z}, |a_q| \leqslant 2\sqrt{q}$) alors l'opérateur de Frobenius

$$\phi : E(\bar{\mathbb{F}}_q) \longrightarrow E(\bar{\mathbb{F}}_q)$$

$$(x : y : z) \longmapsto (x^q : y^q : z^q)$$

vérifie l'équation : $\phi^2 - [a_q]\phi + q = 0$ c'est-à-dire :

$$\forall P \in E(\bar{\mathbb{F}}_q), \phi(\phi(P)) \ominus [a_q]\phi(P) \oplus [q]P = 0 \ (*)$$

Remarque

ϕ est bien définie ! Si$(x : y : z)$ vérifient une équation polynmiale dans $\mathbb{F}_q[X, Y, Z]$ alors $(x^q : y^q : z^q)$ vérifient la même équation
$C(x^q, y^q, z^q) = C(x, y, z)^q = 0$.

Ide de Schoof

- Calculer $a_q \mod l$ pour un grand nombre de petits premiers l tel que $\prod l_i > 4\sqrt{q}$ $(\Rightarrow a_q \in \mathbb{Z})$.
- Soit $E[l] = \{P \in E(\bar{\mathbb{F}}_q)$ tel que $[l]P = 0\}$
  On choisit P d'ordre l premier dans $E[l]$ et on applique (*). $\phi(P)$ et $\phi^2(P)$ sont aussi d'ordre l.
  On cherche $0 \leqslant \alpha_l < l$ tel que $[\alpha_l]\phi(P) = \phi^2(P) \oplus [q]P$ en $O(l)$ additions alors $a_q \equiv \alpha_l \mod l$
- $\sum_{l_i \ premier, l_i < x} \ln l_i \sim x > 0,98x$ pour $x > 10^6$
  $\Rightarrow \sum_{l_i < x} \ln l_i > \ln(4\sqrt{q}) \Rightarrow x \asymp \log \sqrt{q}$

Définition : polynomes de n-division

Soit E/K, $car(K) \neq 2$.

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

On pose :

$$b_2 = a_1^2 + 4a_2$$

$$b_4 = 2a_4 + a_1a_3$$

$$b_6 = a_3^2 + 4a_6$$

$$b_8 = a_1^2a_6 - a_1a_3a_4 + 4a_2a_6 + a_2a_3^2 - a_4^2$$

Pour la forme courte $y^2 = x^3 + a_4x + a_6$ on a :

$$b_2 = 0$$

$$b_4 = 2a_4$$

$$b_6 = 4a_6$$

$$b_8 = -a_4^2$$

Ensuite on pose :

$$f_0(x) = 0$$

$$f_1(x) = 1$$

$$f_2(x) = 1$$

$$f_3(x) = 3x^4 + b_2x^3 + 3b_4x^2 + 3b_6x + b_8$$

$$f_4(x) = 2x^6 + b_2x^5 + 5b_4x^4 + 10b_6x^3 + 10b_8x^2 + (b_2b_8 - b_4b_6)x + (b_4b_8 - b_6^3)$$

On pose : $g(x) = 4x^3 + b_2x^2 + 2b_4x + b_6$
Pour $n \geqslant 2$, on définit :

$$f_{2n} = f_n(f_{n+2}f_{n-1}^2 - f_{n-2}f_{n+1}^2)$$

$$f_{2n+1} = \begin{cases} gf_{n+2}f_n^3 - f_{n-1}f_{n+1}^3 & \text{si n pair} \\ f_{n+2}f_n^3 - g^2f_{n-1}f_{n+1}^3 & \text{si n impair} \end{cases}$$

Théorème
Si $P = (x, y) \in E[\bar{K}] \setminus E[2]$ alors $P \in E[n]$ si et seulement si $f_n(x) = 0$.

Corollaire
Pour trouver $P = (x, y) \in E[l]$ d'ordre l premier, il suffit de résoudre $f_l(x) = 0$.
Problème : degré $f_n \asymp n^2$. La solution est Schoof Elkies-Atkin (SEA).

Mthode duale
Connaissant $\#E(\mathbb{F}_q)$ trouver q et E.

1. Soit q puissance d'un premier tel que

$$|q + 1 - m| \leqslant 2\sqrt{q}$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{q} \leqslant q + 1 - m \leqslant 2\sqrt{q}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{q} + 1)^2 \geqslant \sqrt{m} \geqslant (\sqrt{q} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow -1 \leqslant \sqrt{m} - \sqrt{q} \leqslant 1$$

   Problème : il n'est pas certain qu'un tel $q = p^n$, p premier, existe.

2. Théorème
   Si $|m-(q+1)| < 2\sqrt{q}$, il existe $E/\mathbb{F}_q$, $\#E(\mathbb{F}_q) = m$ (on sait même dire combien de telles E existent).

3. Construction de $E/\mathbb{F}_q$, $\#E(\mathbb{F}_q) = m$
   Théorie de la multiplication complexe (CM) $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{F}_q$

(a) Pour $\tau \in h = \{\tau \in \mathbb{C}, Im(\tau) > 0\}$, on pose

$$q = e^{2i\pi\tau} = \underbrace{e^{2i\pi Re(\tau)}}_{\text{module } 1} \times \underbrace{e^{-2\pi Im(\tau)}}_{\in]0,1[}$$

On pose :

$$j(\tau) = 1728 \times \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

ou :

$$g_2(\tau) = 1 + 240 \times \sum_{n \geqslant 1} \frac{n^3 q^n}{1 - q^n} \in \mathbb{C}$$

$$g_3(\tau) = 1 + 504 \times \sum_{n \geqslant 1} \frac{n^5 q^n}{1 - q^n} \in \mathbb{C}$$

(b) Courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$
$E/\mathbb{C} = \mathbb{C}/\Lambda$ ou $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} = \{a + b\tau, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. C'est un groupe additif, quotient de $(\mathbb{C}, +)$.

$$\phi : \mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow E[\mathbb{C}]$$

$$z \longmapsto \begin{cases} (p(z) : p'(z) : 1) & \text{si } z \notin \Lambda \\ (0 : 1 : 0) & \text{si } z \in \Lambda \end{cases}$$

$E[\mathbb{C}] = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ vérifient une équation du type $y^2 z = 4x^3 - G_2 x z^2 - G_3 z^3\}$
Théorème :ϕ est un morphisme $(\mathbb{C}/\Lambda, +) \to (E(\mathbb{C}), \oplus)$.

(c) On peut définir

$$J(E_\tau) = 1728 \times \frac{G_2^3}{G_2^3 - G_3^2} = j(\tau)$$

Soit $j \in K$ corps (car K $\neq$ 2,3), on veut trouver E/K sous forme courte de Weierstrass tel que $J(E) = j$.
– si $j = 0$, $y^2 = x^3 - 1$
– si $j = 1728$, $y^2 = x^3 - x$
– si $j \neq 1728$ et $j \neq 0$, $y^2 = x^3 + 3cx + 2c$ ou $c = \frac{j}{1728 - j}$
$\Longrightarrow J(E) = j$

(d) Groupes de classes : soit $D < 0$, $D \in \mathbb{Z}$ fixé, on considère
$Cl(D) = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $b^2 - 4ac = D$ et $|b| \leqslant a \leqslant c, b \geqslant 0$ si $a = |b|$ ou $a = c\}$
On a : $4ac - b^2 = |D| \geqslant 3a^2 \Rightarrow |a| \leqslant \sqrt{\frac{|D|}{3}} \Rightarrow Cl(D)$ est fini.
Théorème : $\#Cl(D) = \tilde{O}(|D|^{\frac{1}{2}})$

Algorithme 6 Algorithme d'énumération de $Cl(D)$

pour $a = 1$à$\sqrt{\frac{|D|}{3}}$ **faire**
  pour $b = 0$àa tel que $b = D \mod 2$ **faire**
    $c \longleftarrow \frac{b^2-D}{4a}$
    Si $c \notin \mathbb{Z}$ ou $c < a$, on stoppe cette itération et on passe au suivant.
    Afficher (a, b, c)
    Si $b \neq a \neq c$ et $b \neq 0$, afficher $(a, -b, c)$
  fin pour
fin pour

(e) Soit $H(X) = \prod_{a,b,c \in Cl(D)} \left(X - j\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \right) \right)$.
En fait, $H(X) \in \mathbb{Z}(X)$, il est facilement calculable.
Soit p premier > 3 tel que l'équation (*) $U^2 - DV^2 = 4p$ ait des solutions entires $(U, V) \in \mathbb{Z}^2$. Alors $\bar{H}(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ est scindé.
Soit $j \in \mathbb{F}_p$ une racine de $\bar{H}$ et $E/\mathbb{F}_p$ une courbe elliptique telle que $J(E) = j$. Alors $\#E(\mathbb{F}_p) = p + 1 - U$ pour un U solution de (*).

Soit p premier, $D < 0 \rightarrow Cl(D)$ avec $\#Cl(D) \approx \sqrt{|D|}$.

1. Hypothèse : $U^2 - DV^2 = 4p, U, V \in \mathbb{Z}(*)$. Remarque : si $D < -4$, il y a au plus deux U solutions (opposés).
2. $H(X) = \prod_{(a,b,*) \in Cl(D)} \left(X - j\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \right) \right) \in \mathbb{Z}[X]$
3. $\bar{H}$ est scindé sur $\mathbb{F}_p$: $\bar{H}(X) = \prod_{i=1}^{dH} (X - \bar{j})$.
4. Soit $E/\mathbb{F}_p$ tel que $j(E) = \bar{j}$ une racine de $\bar{H}$. Alors $\#E(\mathbb{F}_p) = p+1-U$ où U est solution de $(*)$.

Rappel

Si $E : y^2 = x^3 + ax + b$ a $p+1-U$ points sur $\mathbb{F}_p$ alors sa tordue quadratique $\tilde{E} : gy^2 = x^3 + ax + b$ a $p + 1 + U$ points sur $\mathbb{F}_p$ avec $g \notin (\mathbb{F}_p)^2$.

Application

Soit m fixé, p le premier le plus proche de m.

1. On suppose que $|m - (p + 1)| < 2\sqrt{p}$ et $U = p + 1 - m$.

2. On écrit $4p - U^2$ sous la forme ΔV^2 ou Δ est sans facteur carré et on suppose Δ petit. Par exemple, $\Delta < 10^6$, $D = -\Delta$
3. On calcule H puis une racine $\bar{j}$ de $\bar{H} \mod p$. Puis on écrit $E/\mathbb{F}_p$ tel que $j(E) = \bar{j}$. On a alors $\#E(\mathbb{F}_p) = p + 1 \pm U$.

Remarque : racines de $H/\mathbb{F}_p$? avec $p \neq 2$

- Travailler avec $\mathbb{F}_p[X]/(H) \simeq \mathbb{F}_p^{dH}$
- Trouver un diviseur de zéro, $\bar{Q}$ dans $\mathbb{F}_p[X]/(H)$, le $PGCD(Q, H)$ donne un facteur strict de H.
- Si $\bar{R} \in \mathbb{F}_p[X]/(H)$, alors $\bar{R}^{\frac{p-1}{2}} - 1$ est un diviseur de zéro presque tout le temps.

Remarque : comment résoudre $X^2 - DY^2 = 4p$?
avec $D < 0$, p premier, $p \neq 2$, $p \nmid \Delta$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $\Delta = |D|$.
Remarque : $|y| \leqslant \sqrt{\frac{4p}{\Delta}}$.

1. On factorise $X^2 - D$ dans $\mathbb{F}_p[X]$. Il y a une erreur si $X^2 - D$ est irréductible.
   Sinon : soit $0 < b < p$ un représentant entier d'une racine. Si $b \neq D \mod 2$, $b \leftarrow p - b \Rightarrow b^2 \equiv D \mod 4p$
2. Soit $c \leftarrow \frac{b^2 - D}{4p} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow (p, b, c)$ vérifie les conditions pour appartenir $Cl(D)$ sauf la condition $|b| \leqslant a \leqslant c$.
3. Algorithme de type Euclide (Cornacchia)

Chapitre 4

Primalité et factorisation

4.1 Primalité

Théorème 1

Soit $N > 1$ un entier. Si on connait $g \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ tel que $\forall l$ premier divisant $N-1$:

$$g^{N-1} = 1$$

$$PGCD\left(g^{\frac{N-1}{l}}, N\right) = 1$$

Alors N est premier.

Théorème 2

Soit $N > 1$ un entier, l premier divisant $N-1$ tels que $v_l(N-1) = e$ (c'est-à-dire que $\exists k$ tel que $N-1 = l^e \times k$). Si on connait $g \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ tel que :

$$g^{N-1} = 1$$

$$PGCD\left(g^{\frac{N-1}{l}}, N\right) = 1$$

Alors tout diviseur d de N vérifie $d \equiv 1 \mod l^e$.

Corollaire

Si $N - 1 = FU$ ou les diviseurs premiers de F sont connus et $F \geqslant \sqrt{n}$, et si pour tout l premier avec $l|F$, il existe $g(l)$ vérifiant le théorème 2 alors N est premier.

Théorème

Soit $N > 1$ un entier premier 6. Soient $E/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $P \in E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $m > 0$ un entier tel qu'il existe $l|m$ premier assez grand, $l > \left(N^{\frac{1}{4}} + 1\right)^2$, et

$$[m]P = 0$$

$$\left[\frac{m}{l}\right] P = (x : y : z) \text{ avec } PGCD(z, N) = 1$$

Alors N est premier.

Définition

Soient $PGCD(N, 6) = 1$, N pas nécessairement premier.
On définit $\mathbb{P}^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^3, PGCD(x, y, z, N) = 1\}/\sim$
avec $\sim$: $(x, y, z) \sim (x', y', z') \Leftrightarrow \exists \lambda \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ tel que $(x, y, z) = \lambda(x', y', z')$
Une "courbe elliptique"$/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est une équation de la forme :

$$(*)\ Y^2 = X^3 + aX + b,\ a, b \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),\ PGCD(4a^3 + 27b^2, N) = 1$$

$E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ vérifiant l'équation $(*)\}$
On munit $E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ d'une loi interne $\oplus$ en reprenant les formules algébriques sur un corps. $P \oplus Q$ est bien défini ds que les dénominateurs $(\neq 0)$ apparaissant dans les formules sont inversibles.

Remarque

Si un dénominateur non inversible $d \neq 0$ apparait alors $PGCD(d, N)$ est un diviseur strict de N.

Remarque

Si $p|n$ est premier et E_p est la courbe elliptique sur $\mathbb{F}_p$ donne par $(*)$, on a une projection canonique :

$$\Pi : E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow E_p(\mathbb{F}_p)$$

$$(x, y, z) \longmapsto (x : y : z)$$

et $\Pi(P \oplus Q) = \Pi(P) \oplus \Pi(Q)$à condition que $P \oplus Q$ soit calculable.

Définition : Certificat de primalité pour N

- ★ une sentinelle triviale si $N < 10$.
- ★ $(N, E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), n, q,$ certificat pour q)
  avec $q|m$, $N > q > \left(N^{\frac{1}{4}} + 1\right)^2$, $[m]P = 0$, $\left[\frac{m}{q}\right] P = (x, y, z)$ et $PGCD(z, N) = 1$.
  C'est efficace si $q \simeq \sqrt{N}$ (en tout cas $q < \frac{N}{2}$).

Algorithme 7 Production d'un certificat

1: On tire $a, b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ uniformément au hasard tel que $4a^3 + 27b^2 \neq 0 \mod N$.
On a $E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ "courbe elliptique" : $Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$
2: On calcule $m = \#E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ en utilisant l'algorithme de Schoof.
Si N est bien premier, c'est bon, sinon il y aura une erreur plus tard.
3: On essaye de factoriser m, on espre avoir $m = fq$ où f friable et q pseudo-premier de Rabin-Miller tel que $q > \left(N^{\frac{1}{4}} + 1\right)^2$. Si ce n'est pas le cas on repart au 1.
4: On tire P au hasard dans $E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$: $(x : y : 1)$ tel que $y^2 = x^3 + ax + b$.
On itre cette tape tant que P ne vérifie pas $[m]P = 0$ et $\left[\frac{m}{q}\right] P = (x, y, z)$ avec $PGCD(z, N) = 1$.

Algorithme ECPP (Elliptic Curve Primality Proving)

Rappels

Soient N premier, $D < -4$, $D = 0, 1 \mod 4$, $U, V \in \mathbb{Z}$ tels que $U^2 - DV^2 = 4N$.
Alors on sait écrire une courbe $E/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ telle que $\#E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = N + 1 - U$.
Coût de l'ordre de $|D| \Rightarrow$ penser à D le plus petit possible !

Algorithme 8 Algorithme ECPP

1: Pour $D = -7$ ou $D = -8$ ($D < 0$, $D \equiv 0, 1 \mod 4$)
s'il existe (U, V) tels que $U^2 - DV^2 = 4N$ et si l'un des $m_u = N + 1 - U$ vérifie les hypothèses du théorème, aller en 2.
2: On calcule $Cl(D)$, $H_D = \prod_{(a,b,*) \in Cl(D)} \left(X - j\left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right)\right) \in \mathbb{Z}[X]$.
3: On calcule une racine $\bar{j}$ de $\bar{H_D} \mod N$ et on écrit E_j de cardinal $N + 1 \pm U$.
4: On détermine si $\#E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = N + 1 - U$ ou $N + 1 + U$ (on tire $P \in E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et on vérifie $[m_u]P = 0$).
Si $\#E_j(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = N + 1 + U$, on remplace E_j par sa tordue quadratique.
5: On tire $P \in E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et on vérifie les conditions $(**)$ du théorème.
6: On démontre récursivement la primalité de $q|m_u$.

Complexit conjecturale :
Elle est en $\tilde{O}(\log N)^5$. Si on utilise FAST ECPP la complexité est de $\tilde{O}(\log N)^4$.

Complment sur ECPP

Théorème
Soient $E/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ une courbe, $P \in E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ un point sur cette courbe, $n \in \mathbb{N}$.
- $[m]P = O_E$, $\left[\frac{m}{q}\right] P = (x : y : z)$, avec $PGCD(z, N) = 1$
- $q|m$, q premier, $q \geqslant \left(N^{\frac{1}{4}} + 1\right)^2$

$\Rightarrow$ N premier.

Théorème
Soient $E/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ une courbe, $P \in E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ un point sur cette courbe, $n \in \mathbb{N}$, $m = FU$, $F = \prod q_i^{e_i}$, q_i premiers différents.
- $[m]P = O_E$, $\left[\frac{m}{q_i}\right] P = (x_i : y_i : z_i)$, avec $PGCD(z_i, N) = 1, \forall i$
- $F \geqslant \left(N^{\frac{1}{4}} + 1\right)^2$

$\Rightarrow$ N premier.

4.2 Factorisation

Motivation
Si $q|n$, q premier et $q - 1$ est B-friable ($l^e|q - 1$, l premier $\Rightarrow l^e \leqslant B$), $a \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ qui a q éléments donc l'ordre de a dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ est B-friable. D'où ordre de a $|ppcm(2, 3, 4, \ldots, B) \Longrightarrow b \equiv 1 \mod q \Longrightarrow q|PGCD(b - 1, N)$

Motivation
Si $q|N$, q premier et $\#E_q(\mathbb{F}_q)$ est B-friable, $a \in E_q(\mathbb{F}_q)$
$\#E_q(\mathbb{F}_q)$ est B-friable $\Rightarrow b = [ppcm(2, 3, 4, \ldots, B)] \times a = 0$ dans $E_q(\mathbb{F}_q)$.
Si $b \mod r \neq 0$ pour r un diviseur premier de N, le calcul de b n'est pas mené à bien.

Algorithme 9 Algorithme $(p-1)$ de Pollard

Entrées: N entier, B paramètre de "friabilité"
Sorties: Un facteur de N ou "Echec"

Calculer tous les $p \leqslant B$, p premiers.
Tirer $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, tel que $PGCD(a, N) = 1$; $b \leftarrow a$
On calcule $a^{ppcm(2,3,4,\ldots,B)}$ comme suit :
pour $p \leqslant B$ **faire**
    calcule k maximal tel que $p^k \leqslant B$
    $b \leftarrow b^{p^k}$
fin pour
$d \leftarrow PGCD(b-1, N)$
si $d \neq 1, N$ **alors**
    retourner d
sinon
    retourner "Echec"
finsi

Théorème

$$ln(ppcm(2, 3, 4, \ldots, B)) \sim B$$

hypothèses

Si $q|N$, q premier et $\#E_q(\mathbb{F}_q)$ est B_1-friable,à la possible exception d'un diviseur premier $B_1 < l \leqslant B_2$.

Théorème de Lenstra

Sous une conjecture raisonnable en théorie analytique des nombres, cet algorithme découvre un facteur premier de N en utilisant un nombre moyen d'opérations dans les courbes elliptiques sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$L_{\frac{1}{2}}(p)^{\frac{1}{\sqrt{2}}+O(1)}$$

où p est le plus petit diviseur premier de N.
Ici : $L_{\frac{1}{2}}(p) = e^{\sqrt{ln(p)ln(ln(p))}}$

Algorithme 10 Algorithme de Lenstra

Entrées: N entier, B paramètre de "friabilité"
Sorties: Un facteur de N ou "Echec"

1: Calculer tous les $p \leqslant B$, p premiers.
2: Tirer $E/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $a \in E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$
3: $b \leftarrow [ppcm(2, 3, 4, \ldots, B)] \times a$
4: **si** le calcul est mené à bien **alors**
5: **retourner** Echec
6: **sinon**
7: exhiber un diviseur de zéro dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, noté z, et
8: **retourner** $PGCD(z, N)$
9: **finsi**

Algorithme 11 Algorithme de Lenstra, phase $B_1 + B_2$

Entrées: N entier, B_1, B_2 paramtres de "friabilité"
Sorties: Un facteur de N ou "Echec"

1: Calculer tous les $p \leqslant B$, p premiers.
2: Tirer $E/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $a \in E(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$
3: $b \leftarrow [ppcm(2, 3, 4, \ldots, B)] \times a$ (sous la nouvelle hypothèse $\exists B_1 < l \leqslant B_2$ tel que $[l]b = 0$ sur $E_q(\mathbb{F}_q)$).
4: Calculer les $[l]b$ où l premier dans $[B_1, B_2]$
$[l']b = [l]b + [l' - l]b$ avec $[l' - l]b$ prcalcul

Chapitre 5

Applications en cryptographie à clé publique

5.1 Le schéma d'El Gamal

Soit $(G, \oplus)$ un groupe fini d'ordre l (l essentiellement premier, grand). Soit $\mathcal{M}$ = espace des messages en clair $\underset{\varphi}{\longrightarrow}$ G inversible (étant donnés $g \in G, g = \varphi(m)$, on sait trouver m).

Algorithme 12 Algorithme de chiffrement El Gamal

Entrées: $m \in \mathcal{M}$, $(G, \oplus)$, $P \in G$, $P_A \in G = [a]P$ avec a clé privée connue de A.

Sorties: Un chiffr (Q, c).

1: Tirer $k \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ uniformément au hasard.
2: $Q \leftarrow [k]P$;
3: $c \leftarrow [k]P_A \oplus \varphi(m)$

Algorithme 13 Algorithme de déchiffrement El Gamal

Entrées: (Q, c), a clé privée, $(G, \oplus, P)$

Sorties: m

1: $m \leftarrow \varphi^{-1}(c \ominus [a]Q)$

Signature

Fonction de hachage cryptographique $h : G \to \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$.

Algorithme 14 Algorithme de signature El Gamal

Entrées: $m \in \mathcal{M}$, $a \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ clé privée de A, $(G, \oplus, P)$.
Sorties: signature (Q, s).

1: Tirer $k \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ uniformément au hasard avec $PGCD(k, l) = 1$.
2: $Q \leftarrow [k]P$;
3: $s \leftarrow k^{-1}(h(m) - ah(Q))$ dans $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$

Vrification de la signature On a (Q, s), $m \in \mathcal{M}$, P_A clé publique, $(G, \oplus, P)$ et h.

$$[h(Q)]P_A \oplus [s]Q = [h(Q)]P_A \oplus [h(m) - ah(Q)]P = [h(m)]P$$

$\varphi : M \to E(\mathbb{F}_p)$?
$m \mapsto (m, y)$
$E : y^2 = x^3 + ax + b$
Si (m, y) ne vérifie pas l'équation ?
On fixe $N(\simeq 2^{10})$ et on choisit un point d'abscisse $x = Nm + x_0$, $x_0 \in \{0, \ldots, N-1\}$, tel que $0 \leqslant x < p$.

5.2 Couplages

Soient $(G, \oplus)$, $(G', \oplus')$, $(H, \boxplus)$ et $e : G \times G' \to H$ telle que :

1. e bilinaire $e([a]P, [b]Q) = [ab]e(P, Q)$
2. Pour tout $P' \in G'$, $e(P_1, P') = e(P_2, P') \Leftrightarrow P_1 = P_2$

Un tel ensemble de données est appelé un système de logarithme discret avec couplage.

Algorithme 15 Algorithme du point de vue de A

Entrées: G, G', H, e, $P \in G$, $P' \in G'$
Sorties: $K \in H$ partage entre A,B,C

1: $a \in \mathbb{Z}$
2: $(P_A, P'_A) \leftarrow ([a]P, [a]P')$, publis.
3: On reoit (P_B, P'_B), (P_C, P'_C)
4: $K \leftarrow [a]e(P_B, P'_C) = [abc]e(P, P')$

Application 1 : Diffie Hellman tripartite

Hypothèse : les logarithmes discrets dans G, G' et H sont difficiles.

Application 2 : crypto ID-based, fonde sur l'identit

- Chaque individu a un ID $\in \mathbb{N}$ unique, public.
- Une autorité de confiance publie :

$$G = G', H, e, P \in G, [\alpha]P = P_{AC}$$

Algorithme 16 Chiffrement

Entrées: $G = G'$, H, e, $P \in G$, P_{AC}, ID du destinataire, $m \in \mathcal{M}$
Sorties: (R, c)

1: Tirer $r \in \mathbb{N}$ au hasard
2: $R \leftarrow [r]P$;
3: $Q \leftarrow h_1(ID) \in G$ avec $h_1 : \{0,1\}^* \rightarrow G$
4: $s \leftarrow e(P_{AC}, Q)$;
5: $c \leftarrow m$ XOR $h_2([r]s)$ avec $h_2 = H \rightarrow \mathcal{M}$

Génération d'une clé publique par l'autorité de certification pour A destinataire

1. $Q \leftarrow h_1(ID)$
2. $[\alpha]Q = A_{ID} \in G$ transmis A.

Algorithme 17 Déchiffrement

Entrées: $G = G'$, H, e, $P \in G$, P_{AC}, A_{ID} clé privée, (R, c)
Sorties: m

1: $T \leftarrow e(R, A_{ID}) = [\alpha]e(R, Q) = [\alpha r]e(P, Q) = [r]e(P_{AC}, Q) = [r]s$
2: $m = c$ XOR $h_2(T)$;

Application 3 : attaque sur le logarithme discret

Soit $Q = [x]_G P$ un problème de logarithme discret dans G. Soit $R \in G'$. On a :

$$e(Q, R) = e([x]P, R) = [x]_H e(P, R)$$

qui est un problème de logarithme discret dans H $\Rightarrow$ x mod (ordre de $e(P, R)$ qui divise l'ordre de P).

5.3 Réalisation de couplages sur $E/\mathbb{F}_q$ une courbe elliptique

On fixe n tel que $PGCD(n,q)=1$ $n|\#E(\mathbb{F}_q)$
Soit k le plus petit entier >0 tel que $q^k = 1 \mod n$ (k = ordre de q dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$)
On suppose que $E(\mathbb{F}_q)$ contient un point d'ordre n.
Il existe un couplage

$$e : E(\mathbb{F}_q)[n] \times E(\mathbb{F}_q^k/nE(\mathbb{F}_q^k)) \to (\mathbb{F}_q^k)^*/((\mathbb{F}_q^k)^*)^n$$

avec $E(\mathbb{F}_q)[n] = \{p \in E(\mathbb{F}_q), [n]P = 0\}$

Ordre de grandeur de k

	Sécurité moyenne (taille de clé)	sécurité forte (taille de clé)
RSA et El Gamal sur $\mathbb{F}_q^*$	1024 bits	2048 bits
El Gamal sur E	160 bits	200 bits

Supposons n premier $\asymp 2^{160}$, $q \asymp n$. Il faut $q^k \gtrsim 2^{1024} \Rightarrow k \geqslant 6$ ou 7. Pour la sécurité forte, même raisonnement et $k \geqslant 10$.

Remarque
$\#E(\mathbb{F}_q) = q+1-t$, $|t| \leqslant 2\sqrt{q}$, divisible par n.
$q^k = 1 \mod n$
$q = t-1 \mod n$
Très restrictif $\Rightarrow$ k "grand". L'algorithme est incorrect si $T = 0_E$ au cours de la boucle principale. Si n est premier et P d'ordre n, le problème ne se pose pas.
Conclusion : $O(\log n)$ opérations dans $\mathbb{F}_q^*$.

Définition
k = ordre de q dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ est appelé "degré de plongement".
Comment réaliser $E/\mathbb{F}_q$ tel que k soit "petit" ?

1. Construction 1 : courbes super singulières
   $E/\mathbb{F}_q$ est super singulière si $\#E(\mathbb{F}_q) = q+1-t$ avec $t = 0 \mod p$ et $p = car(\mathbb{F}_q)$.

Algorithme 18 Algorithme de Miller de calcul de $e(P,Q)$

Entrées: $n = (n_{a-1}, \ldots, n_0)$ avec $n_{a-1} = 1$, $n_i \in \{0,1\}$
$P = (x_1, y_1) \in E(\mathbb{F}_q)[n]$
$Q = (x_2, y_2) \in E(\mathbb{F}_q^*)$
Sorties: $e(P,Q) \in (\mathbb{F}_q^k)^*$ (tu par n)

$T \leftarrow P$; $f_1 \leftarrow 1$; $f_2 \leftarrow 1$;
pour $i = a-2, \ldots, 0$ **faire**
  $T \leftarrow [2]T$
  $\lambda \leftarrow$ la pente de la tangente E en T où $T = (x_3, y_3)$
  $f_1 \leftarrow f_1^2(y_2 - \lambda(x_2 - x_3) - y_3)$
  $f_2 \leftarrow f_2^2(x_2 + x_3 + x_1 - \lambda^2)$
  si $n_i = 1$ **alors**
    $T \leftarrow T \oplus P$
    $\lambda \leftarrow$ pente de la droite joignant T et P
    $f_1 \leftarrow f_1^2(y_2 - \lambda(x_2 - x_3) - y_3)$
    $f_2 \leftarrow f_2^2(x_2 + x_3 + x_1 - \lambda^2)$
  finsi
fin pour
retourner $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^{\frac{q^k-1}{n}}$

Théorème

$E/\mathbb{F}_q$ est super singulière $\Rightarrow k \leqslant \begin{cases} 2 & \text{si } p \geqslant 5 \\ 4 & \text{si } p = 2 \\ 6 & \text{si } p = 3 \end{cases}$ et ces bornes sont atteintes $\Rightarrow$ construction utile si $q = 3^*$.

2. Construction 2 : Courbes ordinaires (non super singulières) $\Rightarrow$ multiplication complexe
$\#E(\mathbb{F}_q) = q + 1 - t = 0 \mod n$
$q^k = 1 \mod n$, $q^i \neq 1 \mod n$, $0 < i < k$ $(*)$

Définition

Soit $d \geqslant 1$ un entier on pose :

$$\Phi_d(X) = \prod \left(X - e^{\frac{2i\Pi}{d} \times k}\right)$$

avec $PGCD(k,d) = 1$.
Proprits :
– $\Phi_d(X) \in \mathbb{Z}[X]$

– $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$
$q^k - 1 = 0 \mod n \Leftrightarrow \prod_{d|k} \Phi_d(q) = 0 \mod n$
Si n est premier, on déduit de $(*)$ que $\Phi_k(q) = 0 \mod n$. On veut $\Phi_k(t-1) = 0 \mod n$.
CM : pour construire $E/\mathbb{F}_q$ tel que $\#E(\mathbb{F}_q) = q + 1 - t \Longleftrightarrow$ résoudre $t^2 - \delta V^2 = 4q$ $(**)$ avec $\delta < 0$ et $(t, V) \in \mathbb{Z}^2$ + Calcul de H_D : il faut δ petit. V et δ sont fixés si t l'est.

$$q = cn + t - 1$$
$$\Phi_k(t-1) = c'n$$

avec $c, c' \in \mathbb{Z}$.
L'équation $(**)$ devient :

$$\delta V^2 = (t-2)^2 - 4\frac{c}{c'}\Phi_k(t-1)$$

pour $k = 6$, c'est une équation quadratique en t qu'on sait résoudre si $V^2\delta$, c, c' sont fixés.

Chapitre 6

Premier complément : $E(\mathbb{F}_q) = (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z})P_1 \oplus (\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z})P_2$

c'est-à-dire tout $P \in E(\mathbb{F}_q)$ s'écrit de façon unique :

$$P = [\lambda_1]P_1 \oplus [\lambda_2]P_2$$

avec $\lambda_i \in (\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z})$ et P_i est d'ordre n_i.

Remarque
Si P est d'ordre n et $\bar{\lambda} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $[\bar{\lambda}]P = [\lambda]P$ est bien défini.

Proprit
On peut supposer que :

$$\left.\begin{array}{l} n_2|n_1 \\ n_2|(q-1) \end{array}\right\} n_2|PGCD(n_1, q-1)$$

Remarque
$\#E(\mathbb{F}_q) = n_1 \times n_2$. Donc si $\#E(\mathbb{F}_q) = af^2$ où a est sans facteur carré alors $n_2|PGCD(f, q-1)$.

Remarque
n_1 est l'exposant du groupe $E(\mathbb{F}_q)$ c'est-à-dire n_1 est le plus petit entier $n > 0$ tel que $[n]P = 0$, $\forall P \in E(\mathbb{F}_q)$.

Remarque
Si G est un groupe abélien fini et si $Q, R \in G$, alors il existe S d'ordre $PPCM(\text{ordre}(Q), \text{ordre}(R))$ et on peut construire S simplement.
$expo(G) = PPCM\{\text{ordre}(Q) : Q \in G\}$

Lemme

Si $PGCD(\text{ordre}(Q), \text{ordre}(R)) = 1$ alors $Q + R$ est d'ordre ordre$(R) \times$ ordre(Q).

Théorème

Si a, b deux entiers alors on a :

$$PPCM(a, b) = a'b'$$

avec :

- $a'|a$
- $b'|b$
- $PGCD(a', b') = 1$

Si $a = o(Q)$, $b = o(R)$ (o est l'ordre), alors :

$$S = \left(\frac{a}{a'}\right) Q + \left(\frac{b}{b'}\right) R$$

Algorithme 19 Algorithme

Entrées: Equation de E, $\#E(\mathbb{F}_q) = af^2$, a sans facteur carré.

Sorties: n_1, n_2, P_1, P_2

1: $n_1 \leftarrow 1$; $P_1 \leftarrow 0$;

2: **répéter**

3: tirer $P \in E(\mathbb{F}_q)$ et calculer $o(P)$

4: remplacer $n_1 \leftarrow PPCM(n_1, o(P))$, $P_1 \leftarrow$ un point d'ordre n_1.

5: **jusqu'à** $n_2 = \frac{\#E(\mathbb{F}_q)}{n_1}$ ne divise pas $PGCD(f, q-1)$

6: { on veut trouver $P_2 \in E(\mathbb{F}_q)$ tel que ordre$(\bar{P_2}) = n_2$ dans $\#E(\mathbb{F}_q)/(P_1)$}

7: On tire $P \in \#E(\mathbb{F}_q)$ et si ordre$(\bar{P})$ dans $\#E(\mathbb{F}_q)/(P_1) = n_2$, on pose $P_2 \leftarrow P$ et on renvoie (n_1, n_2), (P_1, P_2). Sinon on revient au 1).

Chapitre 7

Deuxime complément : Retour sur $Cl(D)$ et sur $U^2 - DV^2 = 4p$, $D < 0$

$(a, b, c) \Leftrightarrow ax^2 + bxy + cy^2 = q(x, y)$ et $disc(q) = b^2 - 4ac$. Si :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{Z})$$

on a $\delta\alpha - \beta\gamma = 1$, on pose $(M \cdot q)$ la forme quadratique $q(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ et on a :

$$disc(M \cdot q) = disc(q)$$

Donc on a un action du groupe $Sl_2(\mathbb{Z})$ sur $\{q = ax^2 + bxy + cy^2, disc(q) = D\}/Sl_2(\mathbb{Z})$. C'est un ensemble fini.