Strutture Dati

Lezione 14
Grafi

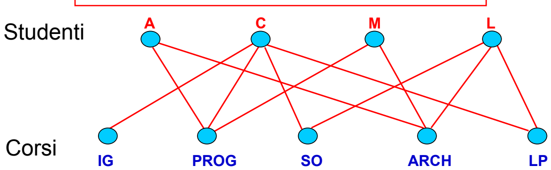
Oggi parleremo di …

- Grafi
  - cos'è
  - definizione
  - terminologia
  - rappresentazione

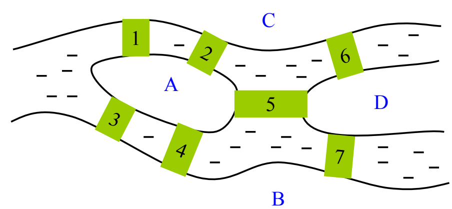
Cos'è un grafo?

Esempio:

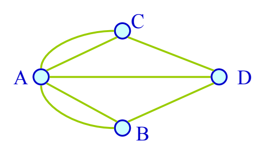
Studenti	Corsi
Marco	**PROG, ARCH**
Carla	**IG, PROG, SO, LP**
Andrea	**PROG, ARCH**
Laura	**SO, ARCH, LP**



I ponti di Königsberg



E' possibile attraversare tutti i ponti esattamente una sola volta?

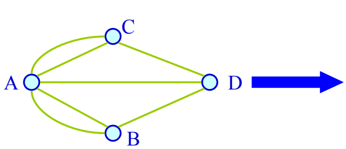


I ponti di Königsberg

Esiste un percorso chiuso che attraversa tutti gli archi del grafo una ed una sola volta?

(**Ciclo di Eulero**) Condizione necessaria e sufficiente (Eulero, 1736):

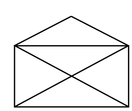
Il ciclo esiste se e solo se ogni nodo ha un numero pari di lati incidenti.



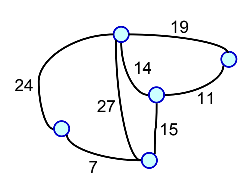
Il problema di Königsberg non ha soluzione!!

Altri problemi . . .

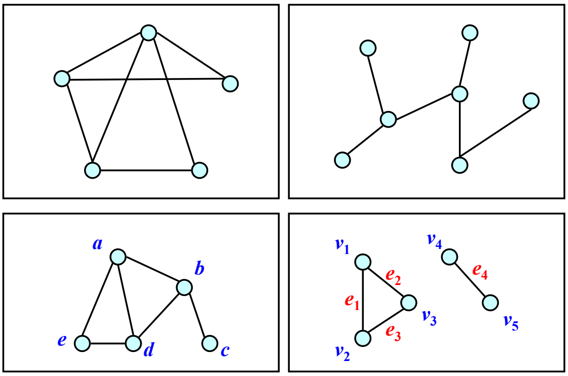
Il problema della busta da lettera: E' possibile tracciare una busta senza staccare mai la penna dal foglio e senza passare più volte su uno stesso lato?



Il problema del commesso viaggiatore: Un venditore deve compiere un viaggio fra alcune città e vuole calcolare il tragitto complessivamente più breve.

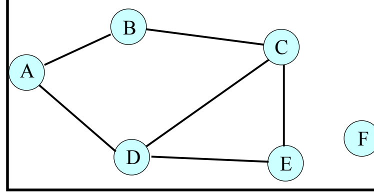


Esempi di grafi



Definizione

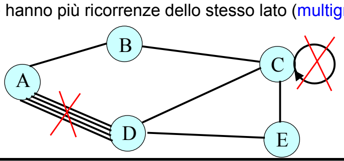
- Un grafo *G* è formato da due insiemi: un insieme finito e non vuoto di vertici *V*(*G*) ed un insieme finito ed eventualmente vuoto di lati o archi *L*(*G*). Si indica con *G* = (*V*, *L*) (o *G* = (*V*, *E*)) .



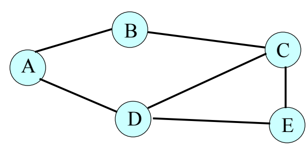
V = {A, B, C, D, E, F}
L = {(A,B), (A,D), (B,C), (C,D), (C,E), (D,E)}

Definizione

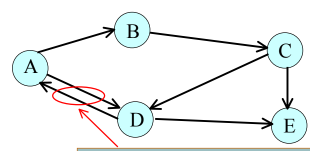
- Un grafo non orientato è un grafo in cui la coppia di vertici che rappresentano un lato qualsiasi non è ordinata.
- Un grafo orientato è un grafo in cui un lato è rappresentato da una coppia ordinata di vertici. In questo caso si parla di coda e testa del lato.
- Non si considerano le seguenti tipologie di grafi:
  - grafi in cui un lato ritorna dal vertice da cui è uscito (ciclo di feedback)
  - grafi che hanno più ricorrenze dello stesso lato (multigrafi).



Grafo non orientato e grafo orientato



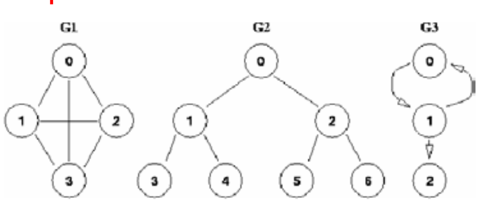
V = {A, B, C, D, E, F}
L = {(A,B), (A,D), (B,C), (C,D), (C,E), (D,E)}



<A,D> e <D,A> denotano due lati diversi

V = {A, B, C, D, E, F}
L = {<A,B>, <A,D>, <B,C>, <C,D>, <C,E>, <D,E>, <D,A>}

Esempi



Un albero è un particolare grafo!

V(G1) = {0, 1, 2, 3}; *L*(G1) = {(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)};

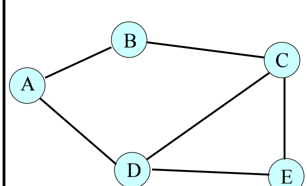
V(G2) = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}; *L*(G2) = {(0, 1), (0, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (2, 6)};

V(G3) = {0, 1, 2}; *L*(G3) = {<0, 1>, <1, 0>, <1, 2>};

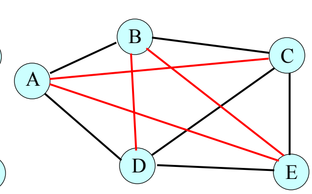
Si utilizzano rappresentazioni differenti

Definizione

- Un grafo completo è un grafo con il massimo numero possibile di lati.



Questo grafo non è completo



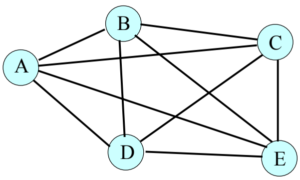
Questo grafo è completo

Definizione

Un grafo completo è un grafo che ha un lato tra ogni coppia di vertici.

Supponiano che $G = (V, L)$ sia completo. É possibile esprimere $|L|$ come funzione di $|V|$?

Grafo completo



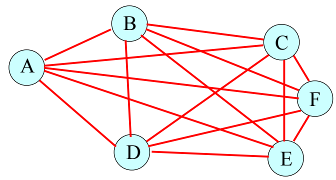
Questo grafo ha $|V| = 5$ vertici e $|L| = 10$ lati.

Definizione

Un grafo completo è un grafo che ha un lato tra ogni coppia di vertici.

Supponiano che $G = (V, L)$ sia completo. É possibile esprimere $|L|$ come funzione di $|V|$?

Grafo completo



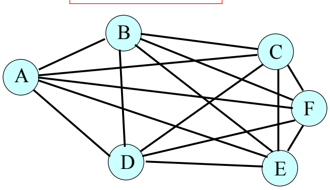
$\|V\|$	$\|L\|$
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15

Definizione

Un grafo completo è un grafo che ha un lato tra ogni coppia di vertici.

Supponiano che $G = (V, L)$ sia completo. É possibile esprimere $|L|$ come funzione di $|V|$?

Grafo completo



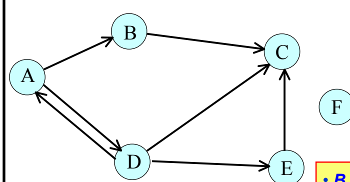
Per ottenere un grafo con n vertici da un grafo con $n-1$, si devono aggiungere $n-1$ nuovi lati ...

…quindi il numero totale di lati, quando $|V| = n$ è

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Terminologia

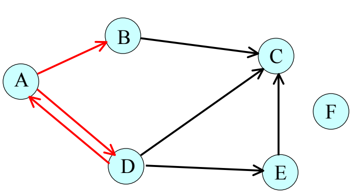
- Due vertici di un grafo si dicono adiacenti se esiste un lato che li unisce.



- ***B*** è adiacente ad ***A***
- ***C*** è adiacente a ***B***, a ***D*** e ad ***E***
- ***A*** è adiacente a ***D*** e viceversa
- ***B*** NON è adiacente a ***D*** NÉ a ***C***
- ***F*** NON è adiacente ad alcun vertice

Terminologia

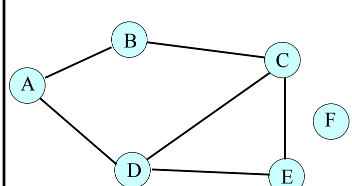
- Un lato (V1, V2) (o <V1,V2> o <V2,V1>) si dice incidente nei vertici V1 e V2.



- ***< A,B >*** è incidente da ***A*** a ***B***
- ***< A,D >*** è incidente da ***A*** a ***D***
- ***< D,A >*** è incidente da ***D*** a ***A***

Terminologia

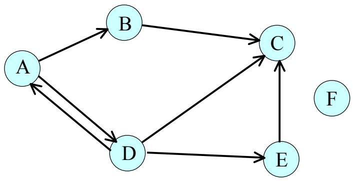
- Si definisce grado di un vertice il numero di lati che incidono sul vertice.



- ***A***, ***B*** ed ***E*** hanno grado **2**
- ***C*** e ***D*** hanno grado **3**
- ***F*** ha grado **0**

Terminologia

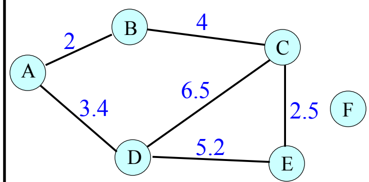
- Nei grafi orientati si distingue tra grado di uscita (o uscente) e grado di entrata (o entrante).



- ***A*** ha grado uscente **2** e grado entrante **1**
- ***B*** ha grado uscente **1** e grado entrante **1**
- ***C*** ha grado uscente **0** e grado entrante **3**
- ***D*** ha grado uscente **3** e grado entrante **1**

Terminologia

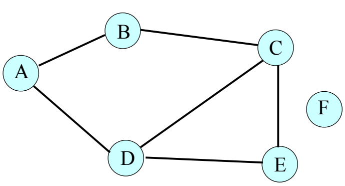
- In alcuni casi ogni lato ha un peso (o costo) ***c*** associato.
- Quando tra due vertici non esiste un arco, si dice che il costo è infinito.



Es. ***c*(A, B) = 2**,
***c*(D,E) = 5.2**,
ecc.
***c*(E,F) = ∞**

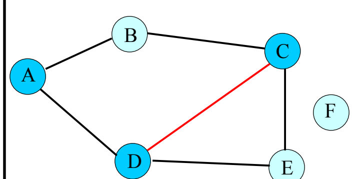
Terminologia

- Un grafo è un sottografo di un altro grafo se gli insiemi di vertici e lati coincidono o sono un sottoinsieme del secondo grafo.
- Sia $G = (V, E)$ un grafo
  - un sottografo di G è un grafo $H = (V^*, E^*)$ tale che $V^* \subseteq V$ e $E^* \subseteq E$. (e poiché H è un grafo, deve valere che $E^* \subseteq V^* \times V^*$).



Terminologia

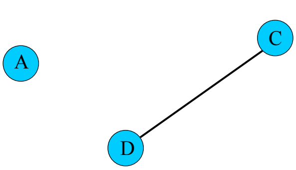
- Un grafo è un sottografo di un altro grafo se gli insiemi di vertici e lati coincidono o sono un sottoinsieme del secondo grafo.
- Sia $G = (V, E)$ un grafo
  - un sottografo di G è un grafo $H = (V^*, E^*)$ tale che $V^* \subseteq V$ e $E^* \subseteq E$. (e poiché H è un grafo, deve valere che $E^* \subseteq V^* \times V^*$).



V* **= {A, C, D},**
E* **= {(C, D)}.**

Terminologia

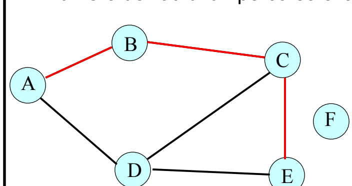
- Un grafo è un sottografo di un altro grafo se gli insiemi di vertici e lati coincidono o sono un sottoinsieme del secondo grafo.
- Sia $G = (V, E)$ un grafo
  - un sottografo di G è un grafo $H = (V^*, E^*)$ tale che $V^* \subseteq V$ e $E^* \subseteq E$. (e poiché H è un grafo, deve valere che $E^* \subseteq V^* \times V^*$).



V* **= {A, C, D},**
E* **= {(C, D)}.**

Terminologia

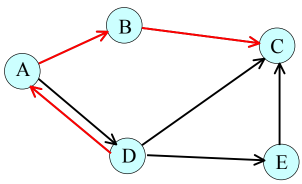
- Si definisce percorso dal vertice Vp al vertice Vq la sequenza di vertici <Vp, V1, ..., Vn, Vq> tali che (Vp,V1), ..., (Vn, Vq) siano lati del grafo (per i grafi orientati <Vp, V1>, …, <Vn, Vq>).
- Il numero dei lati di un percorso è la sua lunghezza.



<A, B, C, E>
è un percorso nel grafo
con lunghezza 3

Terminologia

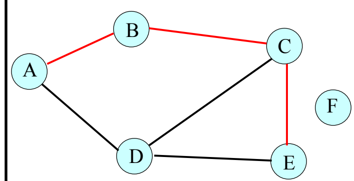
- Si definisce percorso dal vertice Vp al vertice Vq la sequenza di vertici <Vp, V1, ..., Vn, Vq> tali che (Vp,V1), ..., (Vn, Vq) siano lati del grafo (per i grafi orientati <Vp, V1>, …, <Vn, Vq>).
- Il numero dei lati di un percorso è la sua lunghezza.



<D, A, B, C>
è un percorso nel grafo
con lunghezza 3

Terminologia

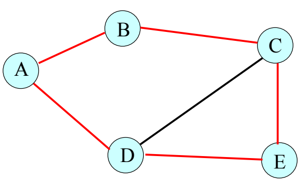
- Un percorso si dice semplice se tutti i vertici sono distinti ad eccezione, eventualmente, del primo e dell'ultimo.



Il percorso **<A,B,C,E>**
è semplice.

Terminologia

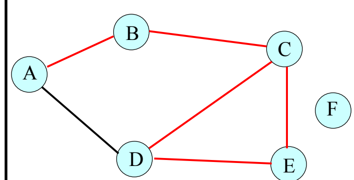
- Un percorso si dice semplice se tutti i vertici sono distinti ad eccezione, eventualmente, del primo e dell'ultimo.



Il percorso **<A,B,C,E,D,A>**
è semplice.

Terminologia

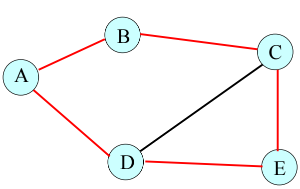
- Un percorso si dice semplice se tutti i vertici sono distinti ad eccezione, eventualmente, del primo e dell'ultimo.



Il percorso
<A,B,C,E,D,C>
non è semplice, poiché
C è ripetuto.

Terminologia

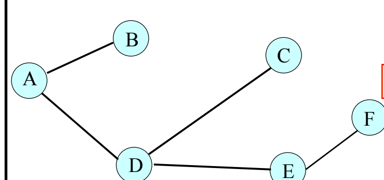
- Un percorso semplice costituisce una maglia o un ciclo se il primo e l'ultimo vertice coincidono.



Il percorso **<A,B,C,E,D,A>**
è un ciclo.

Terminologia

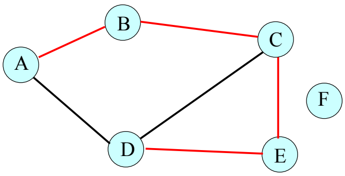
- Un grafo senza cicli è detto aciclico.



Questo grafo è aciclico.

Terminologia

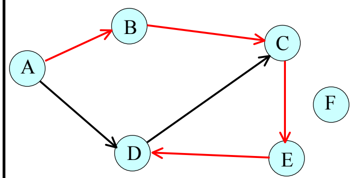
- Se esiste un percorso p tra i vertici v e w, si dice che w è raggiungibile da v tramite p , $\boxed{v \xrightarrow[p]{} w}$, e che i due vertici v e w sono connessi.



A **è raggiungibile da** ***D*** e viceversa

Terminologia

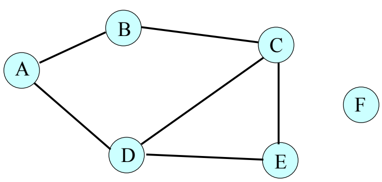
- Se esiste un percorso p tra i vertici v e w, si dice che w è raggiungibile da v tramite p , $\boxed{v \xrightarrow[p]{} w}$



D è raggiungibile da ***A*** ma non viceversa

Terminologia

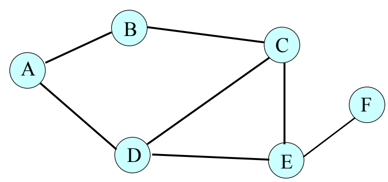
- Un grafo non orientato è connesso se qualsiasi coppia di suoi vertici è connessa, ovvero se esiste un percorso da ogni vertice ad ogni altro vertice.



Questo grafo non orientato non è connesso.

Terminologia

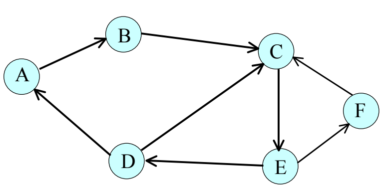
- Un grafo non orientato è connesso se qualsiasi coppia di suoi vertici è connessa, ovvero se esiste un percorso da ogni vertice ad ogni altro vertice.



Questo grafo non orientato è connesso.

Terminologia

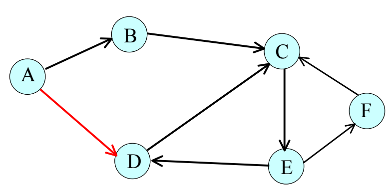
- Un grafo orientato è fortemente connesso se per ogni coppia di vertici esiste un percorso orientato che li unisce.



Questo grafo orientato è fortemente connesso.

Terminologia

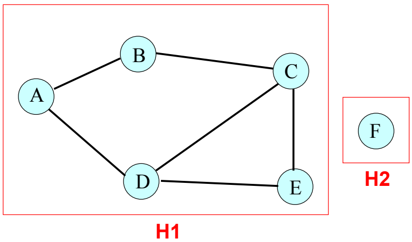
- Un grafo orientato è fortemente connesso se per ogni coppia di vertici esiste un percorso orientato che li unisce.



Questo grafo orientato non è fortemente connesso: ad es. non esiste percorso da **D** a **A**.

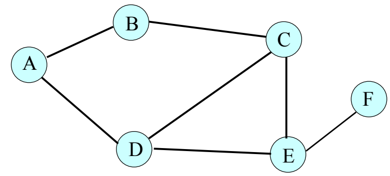
Terminologia

- Si definisce componente (fortemente) connessa di un grafo un sottografo massimo (fortemente) connesso.



Terminologia

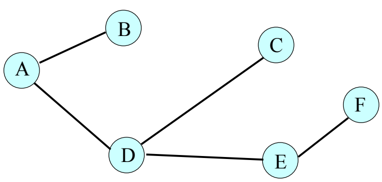
- Un albero è un grafo connesso e aciclico.



Questo grafo non è un albero.

Terminologia

- Un albero è un grafo connesso e aciclico.



Questo grafo è un albero.

Il tipo di dati astratto *Grafo*

```
Struttura Grafo
   oggetti: un insieme non vuoto di vertici e un insieme di lati non orientati,
        dove ogni lato è una coppia di vertici.

   funzioni: per ogni grafo ∈ Grafo, v, v1, v2 ∈ Vertici

    Grafo Create( )               ::= return un grafo vuoto.
    Booleano IsEmpty(grafo)       ::= if(grafo == grafo vuoto) return TRUE
                                      else return FALSE.
    Grafo InsertVertice(grafo,v)  ::= return un grafo con v inserito;
                                      v non ha lati incidenti.
    Grafo InsertLato(grafo,v1,v2) ::= return un grafo con un nuovo lato tra v1 e
                                      v2.
    Grafo DeleteVertice(grafo,v)  ::= return un grafo in cui il vertice v e tutti
                                      i lati incidenti in tale vertice sono stati
                                      eliminati.
    Grafo DeleteLato(grafo,v1,v2) ::= return un grafo in cui il lato (v1,v2) è
                                      eliminato. I vertici collegati da tale nodo
                                      restano nel grafo.
    List Adiacente(grafo,v)       ::= return una lista di tutti i vertici
                                      collegati al vertice v.
end Grafo
```

Rappresentazione dei grafi

- La rappresentazione dei grafi può essere fatta tramite
  - matrici di adiacenza
  - liste di adiacenza
    - concatenate
    - sequenziali
  - multiliste di adiacenza.

Le matrici di adiacenza

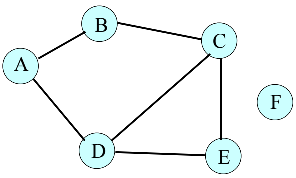
- La matrice di adiacenza M di un grafo con $n \geq 1$ vertici è una matrice $n \times n$ dove l'elemento i, j assume valore non nullo se esiste il lato (i, j) (oppure $<i, j>$):

$$M(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in E \text{ o } <i,j> \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Lo spazio occupato è $O(n^2)$.

Le matrici di adiacenza

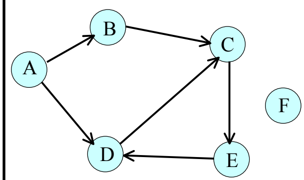
- Per grafi non orientati le matrici di adiacenza sono simmetriche.
- E' possibile risparmiare spazio considerando solo il triangolo superiore.



$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Le matrici di adiacenza

- La somma di riga o colonna ci dà il grado di uscita o di ingresso per un vertice.



$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Le matrici di adiacenza

- L'analisi di un grafo richiede di rispondere a domande del tipo:
  - quanti lati ci sono?
  - il grafo è connesso?
- In questi casi dovrò analizzare $n^2 - n$ valori e quindi ricado in algoritmi di ordine $O(n^2)$.
- Le matrici di adiacenza non sono efficienti per grafi sparsi.