



# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Санкт-Петербург  
1999

Министерство общего и профессионального образования РФ

Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет (ЛЭТИ)

---

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

Методические указания  
к лабораторным работам по дисциплине  
"Моделирование систем управления"

Санкт-Петербург  
1999

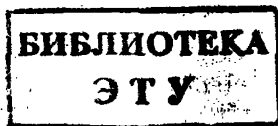
УДК 621.311.28:681.3

**Моделирование систем управления: Методические указания к лабораторным работам по дисциплине "Моделирование систем управления"/Сост.: А. Н. Мирошников, С. Н. Румянцев; СПбГЭТУ (ЛЭТИ). СПб., 1999. 32 с.**

Излагаются методы моделирования динамических систем, динамика которых описывается нелинейными алгебраическими и дифференциальными уравнениями. Расчеты выполняются с использованием персональных ЭВМ, совместимых с IBM PC, и с использованием пакета MATLAB.

Предназначены для студентов специальности 210600.

Утверждено  
редакционно-издательским советом университета  
в качестве методических указаний



© СПбГЭТУ (ЛЭТИ), 1999

## ВВЕДЕНИЕ

Методические указания содержат описание лабораторных работ по курсу "Моделирование судового электрооборудования и систем автоматики". Цикл лабораторных работ построен на основе решения отдельных задач общего процесса построения и исследования математической модели электрической машины постоянного тока. В результате выполнения цикла работ должна быть построена математическая модель электрической машины постоянного тока и проведено всестороннее исследование объекта моделирования, который является единым для каждого варианта цикла работ. Лабораторные работы представляют собой основу курсового проекта по дисциплине "Моделирование судового электрооборудования и систем автоматики".

Каждая лабораторная работа включает в себя, как правило, несколько частей и рассчитана на 2-3 лабораторных занятия. Проведению численного моделирования на ЭВМ обычно предшествуют некоторые преобразования математической модели, в результате которых становится возможным исследование на ЭВМ стандартными методами. Когда задача поставлена и определена схема исследования, требуется написать и отладить программу на языке MATLAB. Далее проводится исследование с помощью написанной программы. Последней частью работы является анализ результатов и оформление отчета.

Весь необходимый теоретический материал, включая вывод основных соотношений, как правило, излагается на практических занятиях, поэтому в методические указания включены только разделы с постановкой задачи и рекомендациями по программированию. Для получения дополнительной информации можно использовать следующие пособия:

1. Методические указания и примеры к практическим занятиям по дисциплине "Моделирование судового электрооборудования и систем автоматики" /Сост.: А. Н. Мирошников, В. Б. Шуккин; ЭТИ. СПб., 1992.

2. Методические указания к лабораторным работам по дисциплине "Моделирование судового электрооборудования и систем автоматики" /Сост.: А. Н. Мирошников, В. Б. Шуккин; ЭТИ. СПб., 1992.

Первое пособие содержит необходимый минимум по программированию на языке MATLAB, второе имеет в приложении примерные тексты программ. Однако предполагается, что программы могут быть написаны без использования второго пособия. Перечень используемых сокращений приведен в прил. 1. Данные по каждому варианту задания приведены в прил. 2.

При изложении материала в качестве примера используется математическая модель генератора постоянного тока смешанного возбуждения.

Рассмотрим математическую модель генератора постоянного тока смешанного возбуждения. Эта модель будет использована в дальнейшем для иллюстрации излагаемого материала.

Динамика объекта описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} F &= i_a w + i_r w_c; \\ \Phi &= \Lambda(F); \\ u_a &= i_a r_a + w \frac{d\Phi}{dt}; \\ c_c \Phi \omega &= i_r (r_r + R_0) + L_r \frac{di_r}{dt} + w_c \frac{d\Phi}{dt}; \\ J \frac{d\omega}{dt} &= M_a - c_M \Phi i_r, \end{aligned} \quad (B.1)$$

где  $u_a$  — напряжение обмотки возбуждения;  $i_a$  — ток возбуждения;  $w$  — число витков обмотки независимого возбуждения;  $w_c$  — число витков обмотки последовательного возбуждения;  $r_a$  — сопротивление обмотки независимого возбуждения;  $\Phi$  — магнитный поток;  $F$  — магнитодвижущая сила (МДС);  $r_r$  — сопротивление якоря, щеток и т. д.;  $L_r$  — индуктивность якоря;  $R_0$  — сопротивление нагрузки;  $M_a$  — внешний вращающий момент;  $c_c$ ,  $c_M$  — конструктивные коэффициенты;  $J$  — момент инерции якоря;  $\omega$  — угловая скорость вращения якоря;  $\Lambda(F)$  — кривая намагничивания электрической машины.

Размерность всех величин в единицах СИ.

Числовые значения этих величин следующие:  $w = 1500$ ,  $w_c = 5$ ,  $r_a = 97.2$  Ом,  $r_r = 0.054$  Ом,  $L_r = 0.03$  Гн,  $R_0 = 1.246$  Ом,  $c_c = 130$ ,  $c_M = 120$ ,  $J = 1.2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

Номинальные значения переменных, описывающих динамику объекта, следующие:  $\Phi_n = 0.01$  Вб,  $M_n = 300$  Н·м,  $i_r = 100$  А,  $\omega_n = 100$  рад/с,  $u_n = 220$  В.

Кривая намагничивания  $\Phi(F)$  задана в виде таблицы:

$F, \text{кАв}$	0.0	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	7.0
$\Phi, \text{мВб}$	0.0	0.66	0.93	1.18	1.38	1.5	1.67	1.8

Задачи цикла работ следующие:

1. Аппроксимировать обратную кривую намагничивания непрерывной функцией.
2. Рассчитать и построить графики статических характеристик.
3. Исследовать переходные процессы в системе.
4. Построить линеаризованную математическую модель и провести ее исследование.
5. Определить передаточные функции линейной системы и построить частотные характеристики.

## Лабораторная работа 1

### АППРОКСИМАЦИЯ ОБРАТНОЙ КРИВОЙ НАМАГНИЧИВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА НА ОСНОВЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

**Цель работы:** аппроксимировать нелинейную зависимость  $F(\Phi)$ , заданную таблично, в промежуточных точках. Аппроксимирующая функция ищется в виде полинома заданной степени. Результатом работы являются коэффициенты полинома. Аппроксимирующий полином используется в дальнейшем вместо таблицы для расчета значений  $F(\Phi)$ .

#### 1.1. Постановка задачи

В последующих лабораторных работах понадобится использование функции  $\Phi^{-1}(F)$ , т. е. функции  $F(\Phi)$ , которая задана таблично для некоторого числа точек  $N$ . При отыскании статических режимов, при численном интегрировании СИЛДУ, а также

при линеаризации требуется иметь возможность получения значения  $F$  при любом значении  $\Phi$  из диапазона  $[0, \Phi_{max}]$ , а не только в конечном числе точек. Поэтому ищется некоторая функция  $p(\Phi)$ , определенная на всем отрезке  $[0, \Phi_{max}]$ , обладающая свойством  $p(\Phi_i) \approx F(\Phi_i)$  в каждой  $i$ -й точке таблицы и аппроксимирующая таблицу в промежуточных точках. В данной работе используется функция  $p(\Phi)$  в виде полинома заданной степени  $n$ :

$$p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n,$$

где  $x$  - переменная.

Значение  $n$  выбирается из условия обеспечения требуемой точности. Чем больше  $n$ , тем лучше точность аппроксимации. При заданном значении  $n$  полином  $p$  определяется своими коэффициентами  $c_0, \dots, c_n$ . Метод наименьших квадратов (МНК) позволяет аналитически определить коэффициенты полинома, когда критерием точности аппроксимации является функционал вида

$$I(p) = I(c_0, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^N \left( F_i - p(\Phi_i) \right)^2, \quad (1.1)$$

где  $N$  - число точек в таблице. В выражении (1.1) разность

$$\epsilon_i = F_i - p(\Phi_i)$$

называется невязкой (в  $i$ -й точке), поэтому значение функционала  $I$  есть сумма квадратов значений невязок по всем  $N$  точкам. МНК дает формулу для определения коэффициентов полинома, при которых значение функционала  $I$  будет наименьшим.

## 1.2. Порядок выполнения работы

1. Рассматривается таблица  $F(\Phi)$ . Эта таблица переписывается в виде  $\bar{F}(\bar{\Phi})$ , где  $\bar{\Phi}$  - нормированный магнитный поток  $\bar{\Phi} = \Phi/\Phi_n$ ;  $\bar{F}$  - нормированная МДС  $\bar{F} = F/F_n$ . Такое преобразование необходимо с целью обеспечения хорошей обусловленности матриц в формуле МНК. Аппроксимации подлежит таблица  $\bar{F}(\bar{\Phi})$ . Ее аппроксимирующий полином обозначим через  $\bar{p}$ . После нахождения этого полинома коэффициенты полинома  $p$  легко определяются переходом от  $\bar{\Phi}$  и  $\bar{F}$  к  $\Phi$  и  $F$  соответственно.

2. Пишется и отлаживается программа расчета коэффициентов полинома  $\bar{p}$ , т. е.  $\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_n$ , затем рассчитываются коэффициенты полинома  $p$ .

Предварительно выбирается значение степени полинома  $n$ . Следует учитывать, что график функции  $\bar{F}(\bar{\Phi})$  симметричен относительно начала координат ( $\bar{F}(\bar{\Phi})$  - нечетная функция), следовательно, полином  $\bar{p}$  будет иметь нулевые коэффициенты при нечетных степенях переменной, а также  $\bar{c}_0 = 0$ . Поэтому рассчитываются только коэффициенты  $\bar{c}_1, \bar{c}_3, \dots, \bar{c}_n$ , где  $n$  должно быть нечетным.

Расчет коэффициентов полинома  $\bar{p}$  производится следующим образом:

а) строится матрица вида  $G = [G_1, G_3, \dots, G_n]$ , где каждый столбец  $G_i$  имеет вид

$$G_i = [\bar{\Phi}_1^i, \dots, \bar{\Phi}_N^i]^T,$$

где показатель степени  $i = 1, 3, 5, \dots, n$ ;

б) рассчитываются матрицы  $A = G^T G$  и  $B = G^T \bar{F}$ , где  $\bar{F}$  - вектор-столбец, он берется из таблицы  $\bar{F}(\bar{\Phi})$ ;

в) рассчитывается вектор  $C = A^{-1}B$ . Компоненты этого вектора есть коэффициенты полинома  $\bar{p}$  при нечетных степенях, причем последний элемент вектора  $C$  есть коэффициент при старшей степени. Например, если  $n = 3$ , то вектор  $C$  будет иметь два элемента:  $\bar{c}_1$  и  $\bar{c}_3$ . В языке MATLAB полином представляется вектором, у которого первый элемент — это коэффициент при старшей степени. Поэтому при  $n = 3$  полином  $\bar{p}$  формируется в программе так:

$p = [c(2), 0, c(1), 0];$

г) рассчитываются коэффициенты полинома  $p$ ;

д) строятся графики  $F(\Phi)$  и  $p(\Phi)$  и проверяется качество аппроксимации.

### 1.3. Рекомендации по программированию

Понадобятся две функции языка MATLAB:

1)  $x = \text{inv}(y)$  — обращает квадратную невырожденную матрицу  $y$ , результат помещает в  $x$ ;

2)  $z = \text{polyval}(p, x)$  — вычисляет значение полинома  $p$  (за-



данного как вектор коэффициентов) на каждом элементе вектора  $x$ , результат помещает в соответствующий элемент вектора  $y$ , т. е. реализует расчет значений функции  $y = p(x)$  для всех точек из  $x$ .

#### 1.4. Содержание отчета

1. Формулировка цели работы.
2. Таблицы  $F(\Phi)$  и  $\bar{F}(\bar{\Phi})$ .
3. Текст программы и соответствующий ей алгоритм расчета.
4. Значения коэффициентов аппроксимирующих полиномов  $\bar{p}$  и  $p$  для  $n=3$  и  $n=5$ .
5. Графики  $F(\Phi)$  и  $p(\Phi)$  и выводы о качестве аппроксимации.

#### Лабораторная работа 2

### ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

**Цель работы:** преобразовать исходную систему уравнений в систему нелинейных алгебраических уравнений (СНЛАУ), описывающую статические режимы. Используя пакет MATLAB, решить полученную СНЛАУ и рассчитать статические характеристики динамической системы.

#### 2.1. Постановка задачи

Статический режим динамической системы, т. е. системы, представляемой в обычном виде дифференциальными уравнениями, — это ее равновесное состояние, соответствующее окончанию переходных процессов. Например, изменение напряжения возбуждения на новое постоянное значение вызывает изменение МДС, магнитного потока, тока и напряжения генератора и т. д. Переходный процесс заканчивается новыми установившимися значениями этих величин, т. е. новым статическим режимом. Статический режим будет описываться системой алгебраических уравнений, т. е. уравнений, куда не входят производные, так как последние в статическом режиме равны нулю.

На данном этапе следует провести преобразование матема-

тической модели объекта, выделив переменные состояния и входные переменные.

### Δ Пример 1.

В исходные уравнения объекта (В.1) входят следующие переменные:  $F, \Phi, i_v, i_r, u_v, \omega, M_v, R_0$ . Остальные величины суть конструктивные постоянные. Переменные  $u_v, M_v, R_0$  могут быть изменены произвольно, независимо от остальных (но остальные переменные зависят от их значений), они определяют внешнее воздействие на объект и их называют входными переменными. Переменные  $\Phi, i_r, \omega$  содержат в уравнениях объекта свои производные по времени, которые равны нулю только в статических режимах. Эти переменные называют переменными состояниями. Остаются переменные  $F$  и  $i_v$ , которые могут быть выражены через предыдущие шесть. Таким образом, в уравнениях остаются только входные переменные и переменные состояния. Их векторы обозначим так:

$$x = [x_1, x_2, x_3]^T = [\Phi, i_r, \omega]^T,$$

$$u = [u_1, u_2, u_3]^T = [u_v, M_v, R_0]^T. \quad \nabla$$

Все статические режимы описываются СНЛАУ, записанной относительно компонент векторов  $u$  и  $x$ . Конкретный статический режим определяется конкретным значением вектора  $u$  и соответствующим ему значением вектора  $x$ . Если значению вектора  $u = u^{(1)}$  соответствует значение вектора  $x = x^{(1)}$ , то при изменении вектора  $u$  на вектор  $u = u^{(2)}$ , не равный  $u^{(1)}$ , в системе произойдут переходные процессы, которые закончатся переходом системы в новый статический режим  $(u^{(2)}, x^{(2)})$ .

Значение вектора  $x$  в статическом режиме может быть найдено как решение СНЛАУ, когда  $u$  задано, а  $x$  является неизвестным. Решение СНЛАУ ищется, как правило, численными методами, в данном случае методом Ньютона. Для использования метода Ньютона необходимо представление уравнений объекта в виде

$$\begin{aligned} f_1(x, u) &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$f_n(x, u) = 0.$$

( $x \in R^n$ ,  $u \in R^l$ ), т. е. число уравнений должно совпадать с числом неизвестных (числом компонент вектора  $x$ ).

### Δ Пример 2.

Исключаем из исходных уравнений (В.1) члены, содержащие производные, так как в статическом режиме

$$d\Phi(t)/dt = di_r(t)/dt = d\omega(t)/dt = 0.$$

Затем выразим переменную  $F$  через  $\Phi$ ,  $F = \Lambda^{-1}(\Phi)$ , а зависимость  $F = \Lambda^{-1}(\Phi)$  выразим через аппроксимирующий полином  $p(\Phi)$ , полученный в работе 1. Далее ток возбуждения  $i_b$  выразим через  $u_b$  и  $r_b$ .

В результате получим систему вида (2.1). В заключение произведем нормирование переменных, используя их номинальные значения  $\Phi_n$ ,  $i_{rn}$ ,  $\omega_n$ ,  $u_{bn}$ ,  $M_{bn}$ :

$$\bar{\Phi} = \Phi/\Phi_n, \quad \bar{i}_r = i_r/i_{rn}, \quad \bar{\omega} = \omega/\omega_n, \quad \bar{u}_b = u_b/u_{bn}, \quad \bar{M}_b = M_b/M_{bn},$$

а затем разделим первое уравнение (уравнение для  $F$  в (В.1)) на  $F_n$ . В результате получим следующую СНЛАУ для расчета статических режимов:

$$p(\bar{\Phi}) - u_{bn}w/(r_b F_n)\bar{u}_b - i_{rn}w_c/F_n\bar{i}_r = 0;$$

$$c_c\Phi_n\omega_n\bar{\Phi}\bar{\omega} - i_{rn}(r_r + R_0)\bar{i}_r = 0;$$

$$M_{bn}\bar{M}_b - c_M\Phi_n i_{rn}\bar{\Phi}\bar{i}_r = 0.$$

Эта система легко переписывается через переменные  $x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3$ . ▽

Множеству всех возможных значений вектора  $u$  соответствует множество значений вектора  $x$ . Множество пар вида  $(u, x)$  есть множество всех статических режимов данной динамической системы. На практике для описания этого множества пользуются статическими характеристиками. Статической характеристикой называется зависимость вида  $x(u_i)$ ,  $u_j = u_j^{(0)} = \text{const}$ ,  $j \neq i$ . Например, это могут быть три графика  $\Phi(u_b)$ ,  $i_r(u_b)$ ,  $\omega(u_b)$  при некоторых постоянных значениях  $M_b$  и  $R_0$ .

Статическая характеристика строится следующим образом.

### △ Пример 3.

Выбирается варьируемая переменная, например,  $u_2$ . Определяется диапазон ее изменения и в этом диапазоне более или менее равномерно выбирается  $M$  значений  $u_2^{(1)}, \dots, u_2^{(M)}$ . Значения остальных входных переменных фиксируются:  $u_1 = u_1^{(0)}, u_3 = u_3^{(0)}$ . Далее для каждого вектора вида  $[u_1^{(0)}, u_2^{(i)}, u_3^{(0)}]^T, i = 1, \dots, M$ , решается СНЛАУ и находится вектор  $[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}]^T, i = 1, \dots, M$ . Зависимости  $x_1(u_2), x_2(u_2), x_3(u_2)$  при  $u_1 = u_1^{(0)}$  и  $u_3 = u_3^{(0)}$  представляют собой статические характеристики объекта. Потом можно выбрать новые значения для  $u_1$  и  $u_3$  и построить новые характеристики. Затем выбирается новая варьируемая переменная, например  $u_3$ , и весь процесс повторяется. ▽

### 2.2. Порядок выполнения работы

1. В исходных уравнениях объекта (В.1) выделяются переменные состояния и входные переменные. Исключаются промежуточные переменные и записывается СНЛАУ вида (2.1) в нормированном виде.
2. По (2.1) записывается аналитическое выражение для матрицы частных производных  $G(x, u)$  в формуле метода Ньютона.
3. Определяется состав рассчитываемых статических характеристик (по согласованию с преподавателем).
4. Для каждой статической характеристики выбирается диапазон изменения и набор промежуточных значений варьируемой входной переменной, а также фиксированные значения остальных входных переменных (например, номинальные значения).
5. Пишется программа на языке MATLAB, осуществляющая расчет статических характеристик с помощью решения СНЛАУ методом Ньютона.
6. С помощью написанной программы рассчитываются и строятся графики статических характеристик.

### 2.3. Рекомендации по программированию

Далее приводится простая структура программы, позволяющей построить статические характеристики типа  $x_1(u_2), x_2(u_2), x_3(u_2)$  при  $u_1 = \text{const}$  и  $u_3 = \text{const}$ .

```
% определение констант и присвоение их значений
rw = 97.2;
global rw
```

```
% определение аппроксимирующего полинома
```

```
p = [0.23; 0; 0.15; 0];
```

```
% формирование набора значений вектора входов при
% постоянных значениях первой и третьей координат
```

```
u2 = 1.2:-0.2:0.2; % набор значений u2 с шагом 0.2
```

```
u = [u1*ones(u2); % строка из значений u1
```

```
u2; % строка из значений u2
```

```
u3*ones(u2)]; % строка из значений u3
```

```
% задание начальных значений вектора x
```

```
x0 = [1; 1; 1]; % при нормированных переменных это
% соответствует номинальному режиму
```

```
% цикл расчета значений вектора x
```

```
xx = [];
```

```
for i = 1:length(u2),
```

```
    x = newton('fun_F','grad_G',x0,u(:,2),eps);
```

```
    xx = [xx x];
```

```
    x0 = x;
```

```
end
```

```
% построение графиков x1(u2), x2(u2), x3(u2)
```

```
% вычисление значения функции f(x,u)
```

```
function z = fun_F(x,u)
```

```
z = [...]; % формируется вектор-столбец из 3-х компонент
```

```
% вычисление значения функции G(x,u)
```

```
function z = fun_G(x,u)
```

```
z = [...]; % формируется матрица строения 3 на 3
```

*Комментарии к программе:*

1. Запись global rw означает, что переменная с именем rw доступна в любой функции, в том числе в fun\_F() и в fun\_G().

2. Функция ones(u2) возвращает матрицу такого же строения, как матрица u2, но каждый элемент равен 1 (см. команду help ones).

3. Переменным u1 и u3 должны быть ранее присвоены, соответственно, значения  $u_1^{(0)}$ ,  $u_3^{(0)}$ .

4. Запись  $xx = [xx \ x]$  означает: справа к матрице  $xx$  приписать матрицу  $x$ , результат поместить в  $xx$ . Объявление  $xx = []$  (пустая матрица) в этом случае является обязательным. Таким образом в цикле формируется набор столбцов вектора  $x$  для соответствующих столбцов вектора  $u$ .

5. Назначение функции `length()` см. по команде `help length`.

6. Запись  $x0 = x$  вполне разумна и означает, что следующий статический режим ищется, стартуя от последнего найденного. Это ускоряет процесс его нахождения.

7. В функции `fun_F()` и `fun_G()` следует записать их аналитические выражения.

8. Для решения системы уравнений методом Ньютона легко написать собственную функцию в соответствии с формулой МНК. Однако для наших целей такая функция предусмотрена: это функция `newton()`. Параметры этой функции следующие:

- `fun_F` — имя файла с программой вычисления значения вектор-функции  $f(x, u)$  по значениям  $x$  и  $u$ ;
- `fun_G` — имя файла с программой вычисления значения матрицы частных производных  $G(x, u)$ ;
- `x0` — значение вектора начального приближения;
- `u` — вектор-столбец входных переменных;
- `eps` — заданная точность решения (евклидова норма отличия значения  $f(x, u)$  от нулевого вектора).

## 2.4. Содержание отчета

1. Исходные уравнения объекта и СНЛАУ относительно нормированных переменных в общем виде (без подстановки значений параметров), а также все промежуточные выкладки.

2. Выражение для матрицы  $G(x, u)$  для нормированных переменных (без подстановки значений параметров), а также все промежуточные выкладки.

3. Система алгебраических уравнений и матрица  $G(x, u)$  после подстановки численных значений параметров объекта.

4. Перечень статических характеристик, подлежащих расчету. По каждой характеристике: состав и значения фиксированных входных переменных, набор значений варьируемых входных переменных, значение  $x_0$  на момент начала расчетов.

5. Программа на языке MATLAB.

6. Графики статических характеристик и таблицы результатов их расчетов.

7. Выводы по работе.

### Лабораторная работа 3

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

**Цель работы:** исследовать характер переходных процессов, используя численное интегрирование СНЛДУ объекта. Для проведения численного интегрирования написать программу на языке MATLAB.

### 3.1. Постановка задачи

В этой работе исследуются процессы перехода динамической системы из одного статического режима в другой. Исходные уравнения объекта (В.1) описывают всю динамику объекта, в том числе и переходные процессы. Исследование переходных процессов подразумевает расчет изменения во времени всех переменных в уравнениях (В.1), что может быть осуществлено любым численным методом. Однако для решения численным методом необходимо, во-первых, избавиться от алгебраических уравнений (исключив промежуточные переменные), во-вторых, записать дифференциальные уравнения в канонической форме Коши:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (3.1)$$

т. е. разрешить их относительно производных. Эти преобразования выполняются аналогично преобразованиям, выполненным в лабораторной работе 2, но с той поправкой, что производные от переменных состояния не равны нулю и выписываются в левую часть системы уравнений (3.1).

### Δ Пример 1.

Для исходных уравнений объекта (В.1) система (3.1) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\Phi}(t)}{dt} &= \frac{1}{\bar{\Phi}_n w} \left[ -\frac{r_n}{w} (F_n \bar{p}(\bar{\Phi}) - i_{gn} w c_{\bar{r}}) + u_{nn} \bar{u}_n \right]; \\ \frac{di_{\bar{r}}(t)}{dt} &= \frac{1}{L_r i_{gn}} \left[ c_c \bar{\Phi}_n \omega_n \bar{\Phi} \bar{\omega} - i_{gn} (r_r + R_0) - \frac{w_c}{w} \left( \frac{r_n}{w} (F_n \bar{p}(\bar{\Phi}) - i_{gn} w c_{\bar{r}}) + u_{nn} \bar{u}_n \right) \right]; \\ \frac{d\bar{\omega}(t)}{dt} &= \frac{1}{J \omega_n} \left[ M_{nn} \bar{M}_n - c_M \bar{\Phi}_n i_{gn} \bar{\Phi} \bar{i}_r \right]. \quad \nabla\end{aligned}$$

Обычно уравнения (3.1) дополняют уравнениями выхода

$$y(t) = g(x(t), u(t)), \quad (3.2)$$

где функция  $g(x, u)$  действует из  $R^{n+m}$  в  $R^l$  и является в общем случае нелинейной. Переменная  $y \in R^l$  есть вектор выходных координат, т. е. переменных, значения которых доступны измерению. Ситуация, когда непосредственно измерить все компоненты вектора  $x$  невозможно, встречается в большинстве случаев. Измерениям доступна, как правило, лишь некоторая функция переменных состояния и управления. Значение этой функции в любой момент времени  $t$ , т. е.  $y(t)$ , есть вектор измеряемых переменных (информация, по которой можно судить о том, что происходит в системе). Заметим, что (3.2) — это система нелинейных алгебраических уравнений.

### Δ Пример 2.

Система (3.2) запишется следующим образом:

$$i_n = \frac{F_n}{w} \bar{p}(\bar{\Phi}) - \frac{i_{gn} w c_{\bar{r}}}{w} \bar{i}_r; \quad \bar{F} = \bar{p}(\bar{\Phi}),$$

если в качестве выходных переменных принять  $i_n$  и  $\bar{F}$ . ▽

Представление уравнений динамической системы в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)); \\ y(t) &= g(x(t), u(t))\end{aligned} \quad (3.3)$$

общепринято. Стандартные методы и пакеты программ для исследования динамических систем ориентированы на такое представление. При этом функция  $g(x, u)$  может быть сформирована какой угодно.



Для исследования переходного процесса необходимо выбрать статический режим, характеризующийся неизменяющимися во времени значениями  $x(t) \equiv x^{(0)}$  и  $u(t) \equiv u^{(0)}$ . Переходный процесс в системе возникает, когда вектор входов принимает новое постоянное значение  $u^{(1)} \neq u^{(0)}$ . В этом случае происходит изменение вектора  $x$  от значения  $x^{(0)}$  к значению  $x^{(1)}$ . Переходный процесс в статический режим  $(u^{(1)}, x^{(1)})$  практически заканчивается за конечное время. Поэтому построение кривых переходного процесса заключается в следующем: для СНЛДУ (3.5) вектор  $x^{(0)}$  принимается в качестве начальных условий  $x(t_0) = x^{(0)}$ , далее численным методом находится решение этой системы на отрезке  $[t_0, t_1]$  при входном векторе  $u(t) \equiv u^{(1)}$  на  $[t_0, t_1]$ . Поскольку статические режимы рассчитаны ранее, то значение вектора  $x$  к моменту окончания переходного процесса также известно.

По графикам переходного процесса  $x(t)$  и  $y(t)$  оцениваются время переходного процесса и его характер (колебательность и пр.).

### 3.2. Порядок выполнения работы

1. Записывается СНЛДУ вида (3.1) в нормированном виде.
2. Пишется и отлаживается программа на языке MATLAB, предназначенная для решения СНЛДУ численным методом и построения графиков переходных процессов.
3. Выбирается статический режим  $(u^{(0)}, x^{(0)})$ , из которого начинается переходный процесс (например, номинальный режим).
4. Выбираются статические режимы  $(u^{(i)}, x^{(i)})$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , в которые будет осуществляться переход системы. Режимы задаются следующим образом: 1)  $(u^{(1)}, x^{(1)})$ :  $u^{(1)}$  отличается от  $u^{(0)}$  только первой компонентой (на 15-20 %); 2)  $(u^{(2)}, x^{(2)})$ :  $u^{(2)}$  отличается от  $u^{(0)}$  только второй компонентой и т. д. Дополнительно следует выбрать 1-2 режима, где векторы входа изменены по всем компонентам относительно значения  $u^{(0)}$ .
5. С помощью программы для каждого статического режима рассчитываются графики  $x(t)$  и  $y(t)$  при переходе системы в этот режим. При этом шаг и время интегрирования подбираются экспериментально из условий обеспечения устойчивого решения и окончания переходных процессов.

6. Построить графики переходных процессов.
7. Построить фазовые портреты  $x_i(x_j)$ ,  $i \neq j$  для нескольких режимов.
8. Изменить исходные данные — увеличить в 10 раз значение индуктивности якоря. Выполнить пп. 6, 7.

### 3.3. Рекомендации по программированию

Понадобится следующая функция языка MATLAB, реализующая решение СНЛДУ численными методами:

$[y, x] = \text{nsim}('ff', 'gg', t, u, x0, 'eiler')$ ,

где

- 'ff' — имя файла с программой вычисления значения вектор-функции правых частей  $f(x, u)$ ;
- 'gg' — имя файла с программой вычисления значения вектор-функции выходов  $g(x, u)$ ;
- t — вектор-строка моментов времени, для которых рассчитываются значения  $x(t)$  и  $u(t)$ ;
- u — матрица, столбцы которой есть значения вектора входа  $u$  в моменты времени, заданные в векторе-строке t;
- x0 — вектор начальных условий;
- 'eiler' — численный метод интегрирования, в данном случае метод Эйлера, причем возможны 'eulermod' — модифицированный метод Эйлера и 'rk4s' — метод Рунге — Кутты 4-го порядка точности;
- x — матрица, столбцы которой есть значения вектора состояния  $x$  в моменты времени, заданные в векторе-строке t;
- y — матрица, столбцы которой есть значения вектора выхода  $y$  в моменты времени, заданные в векторе-строке t.

Далее приводится простая структура программы, позволяющей рассчитать графики  $x(t)$ :

```

% определение констант и присвоение их значений
rw = 97.2;
global rw

% определение аппроксимирующего полинома
p = [0.23; 0; 0.15; 0];
global p

% формирование набора значений моментов времени
t = 0.0:0.01:1.0; % набор значений t из [0 с, 1 с]
                % с шагом 0.01 с

% формирование значений вектора u(t), t из [0 с, 1 с]
u = [u1*ones(t); % строка из значений u1
     u2*ones(t); % строка из значений u2
     u3*ones(t)]; % строка из значений u3

% задание начальных значений вектора x
x0 = [1; 1; 1]; % при нормированных переменных это
                % соответствует номинальному режиму

% интегрирование с шагом 0.01 с
[y,x] = psim('fun_F','fun_G',t,u,x0,'euler');
% построение графиков x(t), y(t)
...

% вычисление значения функции f(x,u)
function z = fun_F(x,u)
z = [...]; % z - вектор-столбец значений правых частей
% вычисление значения функции g(x,u)
function z = fun_G(x,u)
z = [...]; % z - вектор-столбец значений выходных переменных

```

### 3.4. Содержание отчета

1. Формулировка цели работы.
2. Исходные уравнения объекта и система (3.3) относительно нормированных переменных (без подстановки значений параметров), а также все промежуточные выкладки.
3. Система (3.3) после подстановки числовых значений параметров объекта.
4. Программа на языке MATLAB.
5. Графики переходных процессов. Для каждого переход-

ного процесса указать статический режим, задающий начальные условия, а также статический режим, которым переходный процесс окончился. Сравнить, согласуется ли конечный статический режим с результатами работы 2.

6. Оценка характера переходных процессов и выводы по работе.

## Лабораторная работа 4

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

**Цель работы:** произвести линеаризацию СНЛДУ в окрестности статического режима, получить матрицы линеаризованной математической модели, описывающей динамику системы при малых отклонениях входных переменных от рассматриваемого статического режима. Исследовать линеаризованную модель на ее соответствие нелинейной модели. Исследовать устойчивость системы и характер переходных процессов.

#### 4.1. Постановка задачи

В этой работе исследуется новый тип математической модели — математическая модель, линеаризованная в окрестности статического режима.

Рассматривается СНЛДУ, записанная в форме Коши:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)); \\ y(t) &= g(x(t), u(t)).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Выбирается статический режим  $(x^{(0)}, y^{(0)})$ , в окрестности которого производится линеаризация.

Далее определяются матрицы частных производных: матрица состояния

$$A = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} \right|_{x=x^{(0)}, y=y^{(0)}} & \dots & \left. \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_n} \right|_{x=x^{(0)}, y=y^{(0)}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left. \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial x_1} \right|_{x=x^{(0)}, y=y^{(0)}} & \dots & \left. \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial x_n} \right|_{x=x^{(0)}, y=y^{(0)}} \end{bmatrix};$$

матрица входов

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u_1} \Big|_{x=x^{(0)}, y=y^{(0)}} \cdots \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u_l} \Big|_{x=x^{(0)}, y=y^{(0)}} \\ \dots \dots \dots \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial u_1} \Big|_{x=x^{(0)}, y=y^{(0)}} \cdots \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial u_l} \Big|_{x=x^{(0)}, y=y^{(0)}} \end{bmatrix}.$$

Матрицы  $A$  и  $B$  имеют постоянные коэффициенты, зависящие от статического режима, т. е. от  $u^{(0)}$  и  $x^{(0)}$ . Для СНЛДУ рассматриваемого типа коэффициенты этих матриц могут быть определены аналитически, так как для каждой частной производной аналитическое выражение записывается достаточно просто. Если аналитическое выражение для какого-либо коэффициента записать невозможно или сложно, то этот коэффициент можно определить численно, например:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial u_3} \Big|_{x=x^{(0)}, y=y^{(0)}} &\approx \\ &\approx \frac{1}{\delta} [f_2(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)} + \delta, u_4^{(0)}, \dots, u_m^{(0)}) - \\ &\quad - f_2(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u_1^{(0)}, \dots, u_m^{(0)})], \end{aligned}$$

где значение  $\delta$  должно быть малым. Система линейных неоднородных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \Delta x_1(t) \\ \dots \\ \frac{d}{dt} \Delta x_n(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \dots \\ \Delta x_n(t) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \Delta u_1(t) \\ \dots \\ \Delta u_l(t) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

записанная относительно переменных, обозначенных через  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n, \Delta u_1, \dots, \Delta u_l$ , называется системой, полученной из первого уравнения системы (4.1) путем линеаризации функции  $f$  в окрестности статического режима  $(u^{(0)}, x^{(0)})$ .

Для СНЛАУ выхода (второе уравнение системы (4.1)) также находят ее линейный аналог, используя линеаризацию в окрестности статического режима. В итоге получается СЛАУ вида

$$\Delta y(t) = C \Delta x(t) + D \Delta u(t), \quad (4.3)$$

где  $\Delta y(t) = y(t) - y^{(0)}$ , а матрицы  $C$  и  $D$  получаются как матрицы частных производных функции  $G(x, u)$  по компонентам векторов  $x$  и  $u$ , взятые в точке  $(x^{(0)}, u^{(0)})$ . Здесь матрица  $[C|D]$  с размерами  $l \times (n + m)$  суть матрица дифференциала функции  $G$  в точке  $(x^{(0)}, u^{(0)})$ . Система (4.3) достаточно точно описывает зависимость вектора  $y$  от векторов  $x$  и  $u$  в окрестности статического режима.

Поэтому в окончательной форме линейная модель записывается в виде

$$\begin{aligned}\Delta x(t) &= A\Delta x(t) + B\Delta u(t); \\ \Delta y(t) &= C\Delta x(t) + D\Delta u(t).\end{aligned}\tag{4.4}$$

Здесь матрица  $C$  называется матрицей выхода, а матрица  $D$  — матрицей обхода.

Система (4.4) обладает следующим замечательным качеством. Если рассмотреть решение системы (4.1) при некоторых начальных условиях  $x(t_0) = x^*$  и при некотором изменении вектора входов  $u(t)$  на интервале  $t \in [t_0, t_1]$ , то полученное решение  $x(t)$  обладает свойством

$$x(t) \approx x^* + \Delta x(t), \quad t \in [t_0, t_1],\tag{4.5}$$

где  $\Delta x(t)$  — решение системы (4.2) при начальных условиях  $\Delta x(t_0) = x^* - x^{(0)}$  и при входном векторе  $\Delta u(t) = u(t) - u^{(0)}$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ . Другими словами, соответствие математических моделей (4.1) и (4.2) выражается соотношениями

$$x_i(t) \approx x_i^{(0)} + \Delta x_i(t), \quad u_j(t) \approx u_j^{(0)} + \Delta u_j(t), \quad y_k(t) \approx y_k^{(0)} + \Delta y_k(t),\tag{4.6}$$

где  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ ;  $k = 1, \dots, l$ .

Переменные  $\Delta x_i$ ,  $\Delta u_j$  называются приращениями (или отклонениями) переменных  $x_i$ ,  $u_j$  относительно значений  $x_i^{(0)}$ ,  $u_j^{(0)}$ .

Таким образом, в окрестности статического режима динамика исходного объекта (4.1) с большой точностью описывается динамикой объекта (4.2). Знак приближенного равенства в (4.5) означает, что при значительном отклонении значений вектора  $u(t)$  от значения  $u^{(0)}$  (т. е. при больших значениях компонент вектора  $\Delta u(t)$ ) схожесть будет меньше. В результате процесса исследования

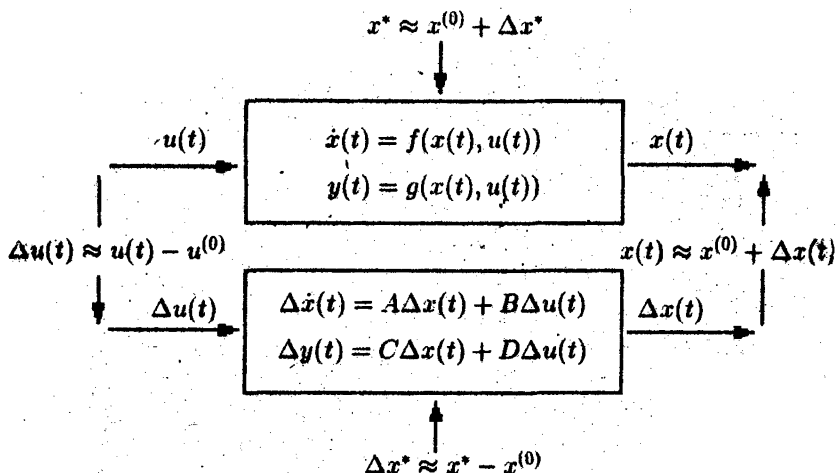


Рис. 4.1. Соответствие нелинейной и линеаризованной моделей

динамики нелинейного объекта (4.1) в окрестности его статического режима может быть осуществлен по схеме, показанной на рис. 4.1.

Запись (4.4) является общепринятой. Практически все стандартные методы и программные средства для работы с линейными системами используют такое представление. В частности, пакет MATLAB ориентирован именно на такое представление, когда объект исследования описан в пространстве состояний.

СЛДУ есть частный случай СНЛДУ, поэтому к объекту (4.4) применимо все, что изложено в работах 2 и 3 по отношению к нелинейным объектам, т. е. можно определить статические режимы и рассчитать переходные процессы теми же методами. Однако для линейных объектов набор методов исследования значительно проще и разнообразнее.

В этой работе рассчитываются переходные процессы в линейной системе (4.4) и исследуется их соответствие переходным процессам в нелинейной системе (4.1) согласно соотношениям (4.5). Если в работе 3 был рассчитан переходный процесс из статического режима  $(u^{(0)}, x^{(0)})$  в статический режим  $(u^{(1)}, x^{(1)})$ ,

то для линеаризованной системы это означает переход из статического режима  $(\Delta u^{(0)}, \Delta x^{(0)})$  в статический режим  $(\Delta u^{(1)}, \Delta x^{(1)})$ . При этом  $\Delta u^{(0)} = 0 \in R^m$ ,  $\Delta x^{(0)} = 0 \in R^n$ ,  $\Delta u^{(1)} = u^{(1)} - u^{(0)}$ ,  $\Delta x^{(1)} = x^{(1)} - x^{(0)}$ . Расчет переходного процесса для линейной системы означает расчет решения СЛДУ (4.2), т. е. вектор-функции  $\Delta x(t)$  на  $[t_0, t_1]$  при начальных условиях  $\Delta x(t_0) = \Delta x^{(0)}$  и при входной вектор-функции  $\Delta u(t) \equiv \Delta u^{(1)}$  на  $[t_0, t_1]$ . Решение  $\Delta x(t)$  соответствует решению  $x(t)$  для системы (4.1). Решение  $\Delta x(t)$  может быть определено любым численным методом. Однако для линейных систем используют специальные методы, позволяющие осуществить интегрирование с большим шагом.

Поясним, почему использование линеаризованной модели дает преимущества при исследовании динамической системы:

1. Решение СЛДУ всегда проще найти; в ряде случаев оно может быть найдено аналитически.
2. Для линейных систем определены такие понятия, как передаточные функции и частотные характеристики. Для оценки устойчивости движения в окрестности положения равновесия достаточно рассчитать собственные числа матрицы  $A$ . Кроме того, для линейных систем справедлив принцип суперпозиции, что позволяет, например, использовать методы спектрального анализа.
3. Методы теории автоматического управления наиболее полно разработаны для линейных систем. Это позволяет строить законы управления для линеаризованных объектов и переносить их на исходные нелинейные объекты с учетом преобразования (4.5).

Необходимо для системы (4.1) найти ее линейный аналог (4.2) в окрестности выбранного статического режима, сравнить исследования нелинейной и линеаризованной моделей и убедиться, что соответствие, выраженное схемой на рис. 4.1, выполняется. Затем необходимо определить устойчивость системы.

#### 4.2. Порядок выполнения работы

1. Найти аналитические выражения для коэффициентов матриц  $A, B, C, D$ .
2. Для статического режима  $(u^{(0)}, x^{(0)})$ , рассмотренного в работе 3, когда рассчитывались переходные процессы, рассчитать



значение коэффициентов матриц, подставив числовые значения  $u^{(0)}$ ,  $x^{(0)}$  в аналитические выражения.

3. Написать и отладить программу на языке MATLAB для расчета переходных процессов в линейной системе.

4. Рассчитать переходные процессы из статического режима ( $\Delta u^{(0)} = 0$ ,  $\Delta x^{(0)} = 0$ ) в статические режимы ( $\Delta u^{(1)}$ ,  $\Delta x^{(1)}$ ) и т. д., соответствующие статическим режимам ( $u^{(1)}$ ,  $x^{(1)}$ ) и т. д. в работе 3. Построить графики переходных процессов.

5. Проверить соответствие графиков  $\Delta x(t)$  и  $x(t)$ ,  $\Delta u(t)$  и  $u(t)$ ,  $\Delta y(t)$  и  $y(t)$  согласно соотношениям (4.5).

Определить устойчивость системы по собственным числам матрицы  $A$ .

#### 4.3. Рекомендации по программированию

Понадобится следующая функция языка MATLAB, реализующая решение СЛДУ численным методом:

$[y, x] = \text{lism}(a, b, c, d, t, x_0, u)$ ,

где  $a, b, c, d$  суть матрицы  $A, B, C, D$  соответственно;  $t$  — вектор-строка моментов времени, для которых рассчитываются значения  $x(t)$  и  $u(t)$ ;  $x_0$  — вектор начальных условий;  $u$  — матрица, столбцы которой есть значения вектора входа  $u$  в моменты времени, заданные в векторе-строке  $t$ .

Эта функция предназначена только для линейных систем, представленных в виде (4.4).

Далее приводится фрагмент программы, позволяющей рассчитывать графики  $\Delta x(t)$ ,  $\Delta u(t)$ :

```
% формирование набора значений моментов времени
t = 0.0:0.01:1.0; % набор значений t из [0 с, 1 с]
                % с шагом 0.01 с
% формирование значений вектора u(t), t из [0 с, 1 с]
u = [u1*ones(t); % строка из значений u1_
     u2*ones(t); % строка из значений u2_
     u3*ones(t)]; % строка из значений u3_
% задание начальных значений вектора x
x0 = [0; 0; 0]; % при нормированных переменных это
                % соответствует номинальному режиму
[y,x] = lism(a,b,c,d,t,x0,u):
```

Расчет коэффициентов характеристического полинома матрицы  $A$  и его корней, а также вывод графика расположения корней на комплексной плоскости можно осуществить следующим образом:

```
p = poly(a)
lmd = roots(p)
plot(real(lmd),imag(lmd),'*'), grid, pause
```

Отметим, что для определения корней характеристического полинома матрицы  $A$  можно либо использовать функцию `poly`, а затем функцию `roots`, либо только функцию `eig()`. Исчерпывающее описание этих функций можно получить по справке в среде MATLAB (например, набрав `help poly /BВОД`).

#### 4.4. Содержание отчета

1. Формулировка цели работы.
2. Аналитические выражения для уравнений (4.1) и матриц системы (4.4) относительно нормированных переменных (без подстановки значений параметров), а также все промежуточные выкладки.
3. Матрицы системы (4.4) после подстановки числовых значений параметров объекта.
4. Программа на языке MATLAB.
5. Графики переходных процессов. Для каждого переходного процесса указать статический режим, из которого процесс начался, а также статический режим, которым переходный процесс окончился. Сравнить, согласуются ли переходные процессы с результатами работы 2.
6. Оценка степени соответствия переходных процессов.
7. Коэффициенты характеристического полинома матрицы  $A$  и график расположения корней полинома на комплексной плоскости.
8. Выводы по работе.

## Лабораторная работа 5

### РАСЧЕТ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ И ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

**Цель работы:** в соответствии с уравнениями линеаризованной математической модели определить передаточные функции от каждого входа к каждой переменной состояния при условии, что в начальный момент времени система находится в состоянии равновесия. Исследовать переходные процессы и частотные характеристики линейной системы по ее скалярным ПФ.

#### 5.1. Постановка задачи

Для объекта (4.4) (при нулевых начальных условиях) матричная ПФ от векторного входа  $\Delta u$  к векторному выходу  $\Delta y$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

представляет собой  $l \times m$ -матрицу, ее элементами являются дробно-рациональные функции комплексной переменной — скалярные передаточные функции  $W_{y_j/\Delta u_i}(s)$  от компонент вектора  $\Delta u$  к компонентам вектора  $\Delta y$ . Матричная ПФ  $W(s)$  соответствует схеме на рис. 5.1.

ПФ позволяют, в частности, рассчитывать частотные характеристики объекта и анализировать реакцию объекта на типовые воздействия.

Основной задачей этой работы является расчет матричной ПФ объекта (4.4) и расчет частотных характеристик по всем скалярным ПФ. Также рассматриваются переходные процессы, происходящие после изменения в векторе входов одной компоненты (эти переходные процессы должны соответствовать работам 3 и 4). Такое исследование эквивалентно исследованию реакции системы на ступенчатое скалярное воздействие. Реакция системы на другие воздействия не рассматривается.

Итак, пусть нелинейный объект (3.3) находится в статическом режиме ( $u^{(0)}$ ,  $x^{(0)}$ ). При некоторой вектор-функции входов  $u_i \neq u^{(0)}$  на интервале  $[t_0, t_1]$  решение системы (3.3)  $x(t)$  при на-

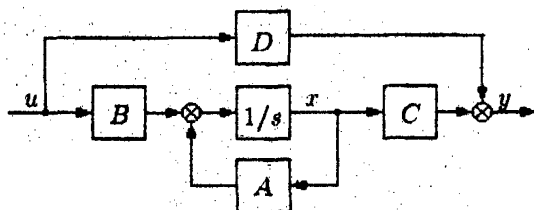


Рис. 5.1. Структурная схема матричной ПФ  
от входа  $\Delta u$  к выходу  $\Delta y$

начальных условиях  $x(t_0) = x^{(0)}$  есть вынужденное движение динамической системы. Это же решение (с учетом поправок (4.6)) может быть получено как решение системы (4.4) при нулевых начальных условиях  $\Delta x(t_0) = 0$  и при вектор-функции входов  $\Delta u(t) = u(t) - u^{(0)}$ . Если вектор-функция входов такова, что в ней изменяется только одна компонента (пусть  $u_i$ ), то реакция системы (3.3), т. е. ее вынужденное движение, может быть описана с помощью скалярных ПФ линейной системы (4.6) от  $i$ -го входа  $\Delta u_i$  к компонентам вектора  $\Delta y$ . Иначе говоря,  $y_j(t) \approx \Delta y_j(t) + y_j^{(0)}$ , где  $\Delta y_j(t)$  есть результат прохождения сигнала  $\Delta u_i(t) = u_i(t) - u_i^{(0)}$  через звено с ПФ  $W_{\Delta y_j / \Delta u_i}(s)$ . По этой ПФ могут быть определены АЧХ и ФЧХ этого звена, что позволяет давать качественную оценку для входных сигналов произвольной формы.

В нашем случае мы рассматриваем переход системы (3.3) из статического режима ( $u^{(0)}$ ,  $x^{(0)}$ ) в другой режим и интерпретируем это как реакцию соответствующей системы (4.6), находящейся в нулевых начальных условиях, на вектор-функцию входов, где изменяется только одна компонента. Поэтому нам достаточно сделать следующее:

1. Считать вектор выхода равным вектору состояния и сформировать единичную  $n \times n$ -матрицу  $C$ . Матрицу  $D$  сформировать нулевой с размерами  $l \times m$ .
2. Рассчитать  $W(s)$  и выбрать из нее  $i$ -й столбец, т. е. скалярные ПФ  $W_{\Delta y_1 / \Delta u_i}(s), \dots, W_{\Delta y_n / \Delta u_i}(s)$ .
3. Рассчитать  $x_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$  как результаты прохождения входного сигнала  $\Delta u_i(t)$  через соответствующие скалярные ПФ.

Поскольку сигнал  $\Delta u_i(t)$  представляет собой ступенчатое воздействие, то  $x_j(t)$  подобна переходной характеристике соответствующей ПФ, т. е. реакции на единичное ступенчатое воздействие. Отличие только в постоянном множителе, так как скачок  $\Delta u_i(t)$  в общем случае не равен единице.

Очевидно, что для исследования только  $x(t)$  матрицу  $C$  выбрали единичной. Когда вектор выхода не совпадает с вектором состояния, то следует корректно сформировать другие матрицы  $C$  и  $D$ .

Изложенный материал иллюстрирует взаимосвязь всех основных методов преобразования и исследования динамических систем, рассматриваемых в настоящих работах.

## 5.2. Порядок выполнения работы

1. Рассчитать коэффициенты ПФ  $W_{y_j/u_i}(s)$  от каждого входа к каждому выходу.

2. Рассчитать АЧХ и ФЧХ для каждой скалярной ПФ.

3. Выбрать из работ 3 и 4 переходные процессы, где конечный статический режим отличается от начального изменением только одной компоненты вектора входа  $u_i^1$  (или  $\Delta u_i^1$ ),  $i = 1, \dots, m$ . Проверить по графикам АЧХ от каждого входа, что коэффициенты передачи к каждому выходу (значение АЧХ в нуле) равны коэффициентам передачи для линейной системы (т. е. отношению  $|\Delta y|/|\Delta u|$  на момент окончания переходных процессов).

4. Для тех же исходных статических режимов построить переходные характеристики (реакции на единичное ступенчатое воздействие) с помощью функции `step()` для каждой выходной координаты. Убедиться, что переходный процесс точно соответствует переходному процессу, рассчитанному с помощью функции `lsim()` (точнее, отличается только на постоянный множитель, так как `step()` предполагает входной сигнал  $u_i(t) \equiv 1, t \in [t_0, t_1]$ ).

## 5.3. Рекомендации по программированию

Используются следующие функции языка MATLAB:

- `ss2tf()` — расчет матричной ПФ (State Space  $\rightarrow$  Transfer Function);

- `bode()` — расчет частотных характеристик (диаграмм Боде);
- `step()` — расчет переходной характеристики.

Описание функций см. по команде `help`.

## 5.4. Содержание отчета

1. Формулировка цели работы.
2. Значение коэффициентов всех скалярных ПФ из матричной ПФ  $W_{y_j/u_i}(s)$ . Значения корней знаменателя этих ПФ. Значения корней числителей этих ПФ.
3. Графики АЧХ и ФЧХ для каждой ПФ.
4. Графики переходных процессов, построенные с помощью функции `step()`.
5. Тексты написанных и использованных программ.
6. Характеристика результатов и выводы по работе.

## Список рекомендуемой литературы

- Чаки Ф. Современная теория управления. М.: Мир, 1975.
- Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. М.: Высш. шк., 1994.
- Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. 3-е изд., испр. М.: Наука, 1975.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### 1. Список обозначений

ГПТ	— генератор постоянного тока.
ДПТ	— двигатель постоянного тока.
НВ	— независимое возбуждение.
ПВ	— последовательное возбуждение.
ПарВ	— параллельное возбуждение.
СВ	— самовозбуждение.
ОВ	— обмотка возбуждения.
МНК	— метод наименьших квадратов.
СНЛАУ	— система нелинейных алгебраических уравнений.
СНЛДУ	— система нелинейных дифференциальных уравнений.

- СЛАУ — система линейных алгебраических уравнений.  
 СЛДУ — система линейных дифференциальных уравнений  
 ПФ — передаточная функция.  
 АЧХ, ФЧХ — амплитудно- и фазочастотные характеристики.  
 $\Delta, \nabla$  — начало и конец примера.

## 2. Данные по вариантам математических моделей электромеханических систем

### Перечень объектов моделирования

№ п/п	Объект моделирования
1	ГПТ НВ, работающий на нагрузку
2	ГПТ НВ, работающий на сеть
3	ГПТ ПВ, работающий на сеть
4	ГПТ СВ, работающий на нагрузку
5	Управление ДПТ НВ со стороны коллектора
6	Управление ДПТ НВ со стороны ОВ
7	Работа ДПТ ПВ
8	Работа ДПТ ПарВ

### Параметры объектов моделирования

№ п/п	$R_w$ , Ом	$R_a$ , Ом	$R_c$ , Ом	$w$ , вит.	$w_c$ , вит.	$L_a$ , Гн	$R_0$ , Ом	$c_c$	$c_m$	$\Phi_0$ , % $\Phi_n$	$J$ , кг·м <sup>2</sup>
1	145	0.3	—	4000	—	0.01	4.0	205	200	—	0.35
2	145	0.3	—	4000	—	0.01	—	205	200	—	0.35
3	415	1.39	—	8600	—	0.02	—	300	300	—	0.12
4	97.2	0.05	—	3000	—	0.03	4.0	130	120	10.0	1.2
5	145	0.3	—	4000	—	0.01	4.0	205	200	—	0.35
6	97.2	0.05	—	3000	—	0.03	—	130	120	—	1.2
7	—	—	0.14	—	60	—	—	290	230	—	0.1
8	415	1.39	—	8000	—	0.02	—	300	300	—	0.12

### Входные, выходные и нормировочные переменные

№ п/п	$\Phi_n$ , Вб	$\omega_n$ , рад/с	$I_n$ , А	$M_{сн}$ , Н·м	$M_{вн}$ , Н·м	$u_{вн}$ , В	$u_c$ , В	Вход	Выход
1	0.007	100	50	—	70	220	—	$u_b, M_b, R_0$	$\Phi, I, \omega$
2	0.007	100	50	—	70	—	220	$u_b, M_b, R_0$	$\Phi, I, \omega$
3	0.005	100	30	—	50	—	220	$u_c, M_b$	$\Phi, I, \omega$
4	0.01	100	100	—	300	—	—	$M_b, R_0$	$\Phi, I, \omega$
5	0.007	100	50	50	—	220	220	$u_c, M_b$	$\Phi, I, \omega$
6	0.01	100	100	300	—	220	220	$u_c, M_b$	$\Phi, I, \omega$
7	0.01	100	50	470	—	—	220	$u_c, M_b$	$\Phi, I, \omega$
8	0.006	1.39	30	50	—	—	220	$u_c, M_b$	$\Phi, I, \omega$

### Кривые намагничивания

#### Варианты 1, 2

$F, Aw$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
$\Phi/\Phi_n$	0	0.3	0.52	0.67	0.78	0.86	0.92	0.96	1.01	1.02

#### Варианты 3, 8

$F, Aw$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
$\Phi/\Phi_n$	0	0.4	0.8	0.98	1.08	1.17	1.19	1.21

#### Варианты 4, 6

$F, Aw$	0	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	5.0
$\Phi/\Phi_n$	0	0.66	0.93	1.18	1.38	1.5	1.6	1.67	1.79

#### Вариант 5

$F, Aw$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
$\Phi/\Phi_n$	0	0.35	0.57	0.72	0.83	0.91	0.97	1.01	1.06	1.07

#### Вариант 7

$I, A$	0	20	30	40	60	80	100	120	140
$\Phi/\Phi_n$	0	0.58	0.8	0.91	1.07	1.21	1.35	1.47	1.58

Приведенное значение  $F$ : для вариантов 1, 2, 3, 8, 5 поделено на 4000; для вариантов 4, 6 поделено на 1000.



## Содержание

Введение . . . . .	3
Лабораторная работа 1 . . . . .	5
Лабораторная работа 2 . . . . .	8
Лабораторная работа 3 . . . . .	14
Лабораторная работа 4 . . . . .	19
Лабораторная работа 5 . . . . .	26
Список рекомендуемой литературы . . . . .	29
Приложения . . . . .	29

Редактор И. Г. Скачек

Лицензия ЛР N 020617 от 24.06.98

---

Подписано в печать 29.04.99. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 2,0.

Тираж 100. Заказ 97.

Издательско-полиграфический центр СПбГЭТУ (ЛЭТИ)

---

197376, Санкт-Петербург; ул. Проф. Попова, 5