

Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Теория надежности

Лабораторная работа №4

Марковская модель компьютерной системы с учетом двухэтапного
восстановления устройств хранения

Лабушев Тимофей

Нестеров Дали

Группа Р3402

Санкт-Петербург

2020

Вариант 8

```
lambda1 = 10^-4 # Интенсивность отказов вычислительных машин, 1/ч  
mu1 = 1 # Инт. восстановлений вычислительных машин, 1/ч  
lambda2 = 2*10^-4 # Инт. отказов устройств хранения, 1/ч  
mu21 = 1 # Инт. физического восстановления устройств хр., 1/ч  
mu22 = 0.1 # Инт. загрузки информации в устройства хр., 1/ч
```

Сравнить 11 и 21:

Модель 11



Рисунок 1. Модель 11

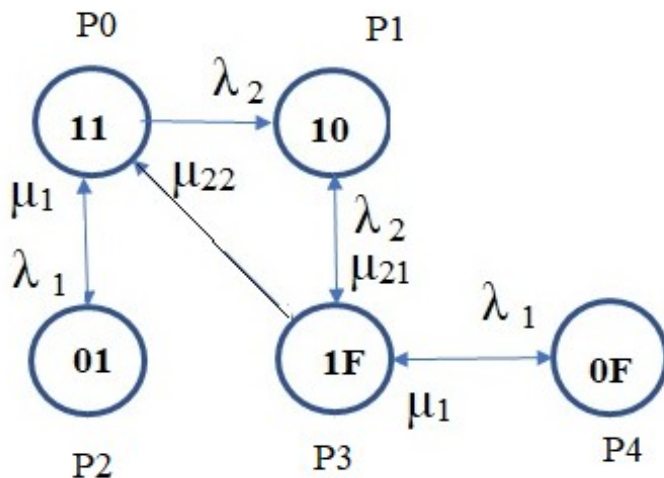


Рисунок 2. Граф состояний и переходов 11

Модель 21

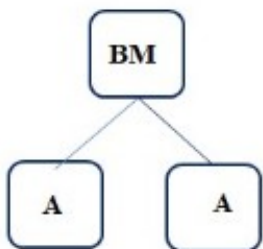


Рисунок 3. Модель 21

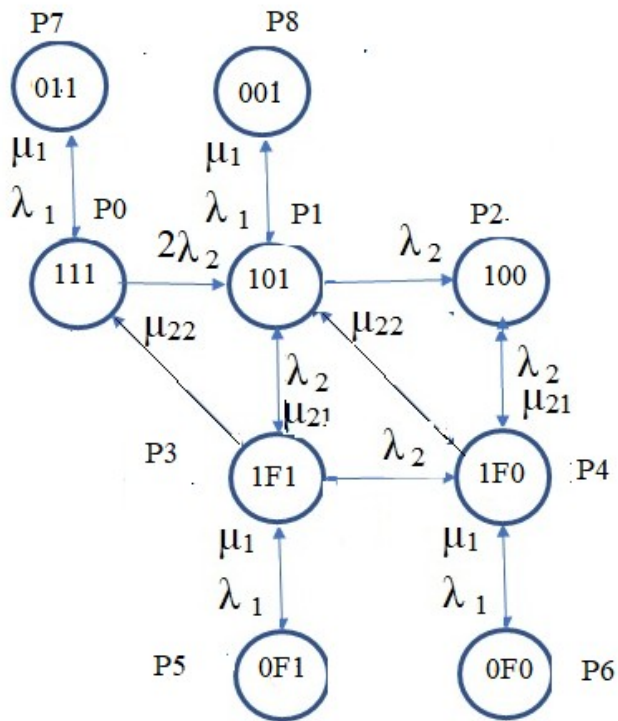


Рисунок 4. Граф состояний и переходов 21

На представленных диаграммах при кодировании состояний первая позиция соответствует ВМ, вторая – устройству хранения. Возможные состояния:

- “1”: работоспособное состояние;
- “0”: состояние отказа;
- “F”: (только для устройств хранения) состояние, при котором устройство физически восстановлено, но информация в него еще не загружена.

Задание

1. Построить диаграммы состояний и переходов марковской модели.
2. Составить алгебраические уравнения.
3. Составить систему дифференциальных уравнений.
4. Определить стационарный и нестационарный коэффициенты готовности.
5. Преобразовать граф состояний и переходов, представив все неработоспособные состояния одним финальным состоянием, что на графике позволяет оценить наработку до отказа. Составить дифференциальные уравнения.
6. По составленным системам дифференциальных уравнений построить графики коэффициента готовности и вероятности работоспособных состояний от времени для случаев с финальными состояниями. Кривые для сравниваемых вариантов желательно представить на одном графике.
7. Сделать выводы по проведенным исследованиям.

Составление систем алгебраических уравнений

Системы представлены в виде матриц интенсивностей переходов.

Модель 11

```
states_11 <- c("11", "10", "01", "1F", "0F")
transition_rate_11 <- matrix(
  data = c(
    0, lambda2, lambda1, 0, 0,
    0, 0, 0, mu21, 0,
    mu1, 0, 0, 0, 0,
    mu22, lambda2, 0, 0, lambda1,
    0, 0, 0, mu1, 0
  ),
  byrow = T, ncol = length(states_11), dimnames = list(states_11, states_11))
diag(transition_rate_11) <- -rowSums(transition_rate_11)
transition_rate_11

##           11          10          01          1F          0F
## 11 -3e-04  2e-04  1e-04  0.0000  0e+00
## 10  0e+00 -1e+00  0e+00  1.0000  0e+00
## 01  1e+00  0e+00 -1e+00  0.0000  0e+00
## 1F  1e-01  2e-04  0e+00 -0.1003  1e-04
## 0F  0e+00  0e+00  0e+00  1.0000 -1e+00
```

Стационарные вероятности:

```
mc_11 <- as(expm(transition_rate_11), "markovchain")
steady_11 <- steadyStates(mc_11)
steady_11

##           11          10          01          1F          0F
## [1,] 0.9977047 0.00019994 9.977047e-05 0.001995409 1.995409e-07
```

Модель 21

```
states_21 <- c("111", "101", "100", "1F1", "1F0", "0F1", "0F0", "011", "001")
transition_rate_21 <- matrix(
  data = c(
    0, 2*lambda2, 0, 0, 0, 0, 0, lambda1, 0,
    0, 0, lambda2, mu21, 0, 0, 0, 0, lambda1,
    0, 0, 0, 0, mu21, 0, 0, 0, 0,
    mu22, lambda2, 0, 0, lambda2, lambda1, 0, 0, 0,
    0, mu22, lambda2, 0, 0, 0, lambda1, 0, 0,
    0, 0, 0, mu1, 0, 0, 0, 0, 0,
    0, 0, 0, 0, mu1, 0, 0, 0, 0,
    mu1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
    0, mu1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
  ),
  byrow = T, ncol = length(states_21), dimnames = list(states_21, states_21))
diag(transition_rate_21) <- -rowSums(transition_rate_21)
transition_rate_21
```

```
##           111           101           100           1F1           1F0           0F1           0F0           011           001
## 111 -5e-04  0.0004  0e+00  0.0000  0.0000  0e+00  0e+00  1e-04  0e+00
## 101 0e+00 -1.0003  2e-04  1.0000  0.0000  0e+00  0e+00  0e+00  1e-04
## 100 0e+00  0.0000 -1e+00  0.0000  1.0000  0e+00  0e+00  0e+00  0e+00
## 1F1 1e-01  0.0002  0e+00 -0.1005  0.0002  1e-04  0e+00  0e+00  0e+00
## 1F0 0e+00  0.1000  2e-04  0.0000 -0.1003  0e+00  1e-04  0e+00  0e+00
## 0F1 0e+00  0.0000  0e+00  1.0000  0.0000 -1e+00  0e+00  0e+00  0e+00
## 0F0 0e+00  0.0000  0e+00  0.0000  1.0000  0e+00 -1e+00  0e+00  0e+00
## 011 1e+00  0.0000  0e+00  0.0000  0.0000  0e+00  0e+00 -1e+00  0e+00
## 001 0e+00  1.0000  0e+00  0.0000  0.0000  0e+00  0e+00  0e+00 -1e+00
```

Стационарные вероятности:

```
mc_21 <- as(expm(transition_rate_21), "markovchain")
steady_21 <- steadyStates(mc_21)
steady_21
```

```
##           111           101           100           1F1           1F0           0F1
## [1,] 0.9955093 0.0003997965 8.171204e-08 0.003982037 8.763668e-06 3.982037e-07
##           0F0           011           001
## [1,] 8.763668e-10 9.955093e-05 3.997965e-08
```

Составление системы дифференциальных уравнений

Модель 11

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P_{01}(t) &= -\mu_1 P_{01}(t) + \lambda_1 P_{11}(t), \\ \frac{d}{dt}P_{11}(t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2)P_{11}(t) + \mu_1 P_{01}(t) + \mu_{22}P_{1F}(t), \\ \frac{d}{dt}P_{10}(t) &= -\mu_{21}P_{10}(t) + \lambda_2 P_{1F}(t) + \lambda_2 P_{11}(t), \\ \frac{d}{dt}P_{1F}(t) &= -(\mu_{22} + \lambda_2 + \lambda_1)P_{1F}(t) + \mu_{21}P_{10}(t) + \mu_1 P_{0F}(t), \\ \frac{d}{dt}P_{0F}(t) &= -\mu_1 P_{0F}(t) + \lambda_1 P_{1F}(t)\end{aligned}$$

Модель 21

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P_{011}(t) &= -\mu_1 P_{011}(t) + \lambda_1 P_{111}(t), \\ \frac{d}{dt}P_{001}(t) &= -\mu_1 P_{001}(t) + \lambda_1 P_{101}(t), \\ \frac{d}{dt}P_{111}(t) &= -(\lambda_1 + 2\lambda_2)P_{111}(t) + \mu_1 P_{011}(t) + \mu_{22}P_{1F1}(t), \\ \frac{d}{dt}P_{101}(t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_{21})P_{101}(t) + \mu_1 P_{001}(t) + 2\lambda_2 P_{111}(t) + \lambda_2 P_{1F1}(t) + \mu_{22}P_{1F0}(t), \\ \frac{d}{dt}P_{100}(t) &= -\mu_{21}P_{100}(t) + \lambda_2 P_{101}(t) + \lambda_2 P_{1F0}(t), \\ \frac{d}{dt}P_{1F1}(t) &= -(\mu_{22} + \lambda_2 + \lambda_2 + \lambda_1)P_{1F1}(t) + \mu_{21}P_{101}(t) + \mu_1 P_{0F1}(t), \\ \frac{d}{dt}P_{1F0}(t) &= -(\mu_{22} + \lambda_2 + \lambda_1)P_{1F0}(t) + \mu_{21}P_{100}(t) + \lambda_2 P_{1F1}(t) + \mu_1 P_{0F0}(t), \\ \frac{d}{dt}P_{0F1}(t) &= -\mu_1 P_{0F1}(t) + \lambda_1 P_{1F1}(t), \\ \frac{d}{dt}P_{0F0}(t) &= -\mu_1 P_{0F0}(t) + \lambda_1 P_{1F0}(t)\end{aligned}$$

Определение стационарного коэффициента готовности

Готовность системы определяется как сумма ее работоспособных состояний. Для определения стационарного коэффициента готовности просуммируем стационарные вероятности рабочих состояний:

Модель 11

$$K_r = P_{11}$$

```
steady_11[, "11"]
```

```
##          11  
## 0.9977047
```

Модель 21

$$K_r = P_{111} + P_{101} + P_{1F1}$$

```
steady_21[, "111"] + steady_21[, "101"] + steady_21[, "1F1"]
```

```
##          111  
## 0.9998912
```

Определение нестационарного коэффициента готовности

```
p_m11 <- function(t, s) expm(t*transition_rate_11)["11", s]  
p_m21 <- function(t, s) expm(t*transition_rate_21)["111", s]
```

```
k_r_m11 <- function(t) p_m11(t, "11")  
k_r_m21 <- function(t) p_m21(t, "111") + p_m21(t, "101") + p_m21(t, "1F1")
```

График коэффициента готовности в зависимости от времени:

```
t <- seq(0, 80, 0.4)  
k_r_t_m11 <- sapply(t, k_r_m11)  
k_r_t_m21 <- sapply(t, k_r_m21)  
  
par(mar = c(4, 8, 2, 2))  
plot(t, k_r_t_m11, type="l", col="red", axes = F, xlab="Время, ч", ylab="",  
ylim=c(0.9976, 1.0000000000000001))  
lines(t, k_r_t_m21, col="blue")  
axis(1, at=c(0, 10, 40, 80))  
axis(2, at=c(0.9976, 0.9999, 1.000000000000000), labels=c(0.9976, 0.9999,  
1.000000000000000), las = 2)  
title(ylab = "Коэффициент готовности", line = 6)  
legend("right", c("Модель 11", "Модель 21"), fill=c("red", "blue"))
```

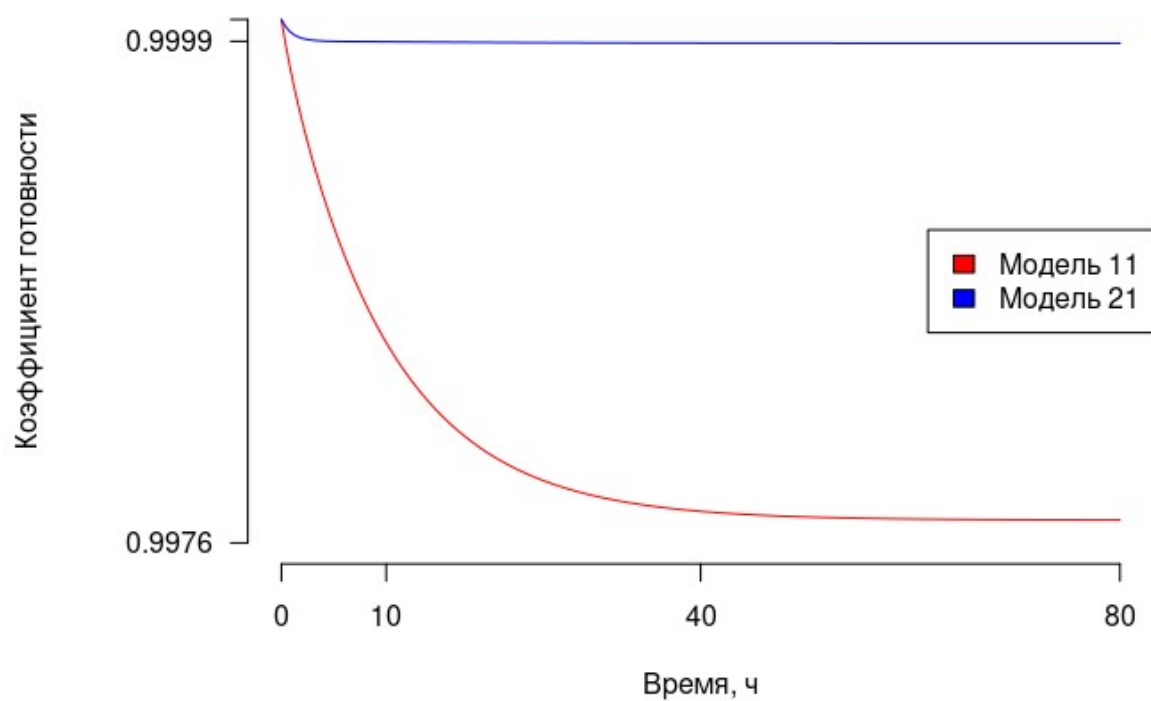


Рисунок 5. График зависимости нестационарного коэффициента готовности от времени

Составление системы с одним финальным состоянием

Граф состояний и переходов

Определим μ_2 как интенсивность полного восстановления устройств хранения:

$$\mu_2 = \frac{1}{\frac{1}{\mu_{21}} + \frac{1}{\mu_{22}}} = \frac{\mu_{21}\mu_{22}}{\mu_{21} + \mu_{22}}$$

```
mu2 = (mu21 * mu22) / (mu21 + mu22)
```

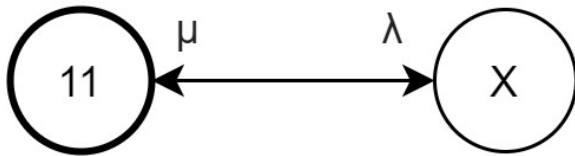


Рисунок 6. Граф состояний и переходов 11 с одним финальным состоянием

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \mu = \mu_1 + \mu_2$$

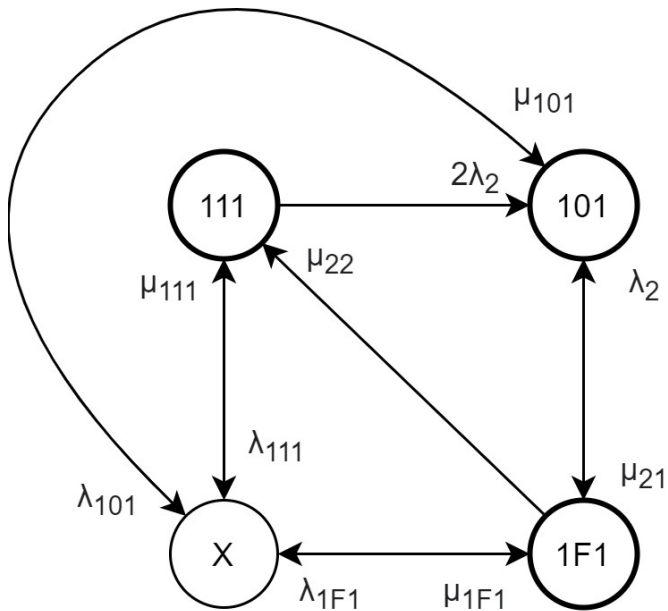


Рисунок 7. Граф состояний и переходов 21 с одним финальным состоянием

$$\begin{aligned} \lambda_{111} &= \lambda_1, \mu_{111} = \mu_1, \\ \lambda_{101} &= \lambda_1 + \lambda_2, \mu_{101} = \mu_1 + \mu_2, \\ \lambda_{1F1} &= \lambda_1 + \lambda_2, \mu_{1F1} = \mu_1 + \mu_2 \end{aligned}$$

Составление систем алгебраических уравнений

Системы представлены в виде матриц интенсивностей переходов.

Модель 11

Матрица интенсивностей переходов:

```
states_11x <- c("11", "X")
transition_rate_11x <- matrix(
  data = c(
    0, (lambda1 + lambda2),
    (mu1 + mu2), 0
  ),
  byrow = T, ncol = length(states_11x), dimnames = list(states_11x, states_11x))
diag(transition_rate_11x) <- -rowSums(transition_rate_11x)
transition_rate_11x

##           11           X
## 11 -0.000300  0.000300
## X   1.090909 -1.090909
```

Стационарные вероятности:

```
mc_11x <- as(expm(transition_rate_11x), "markovchain")
steady_11x <- steadyStates(mc_11x)
steady_11x

##           11           X
## [1,] 0.9997251 0.0002749244
```

Модель 21

Матрица интенсивностей переходов:

```
states_21x <- c("111", "101", "1F1", "X")
transition_rate_21x <- matrix(
  data = c(
    0, 2*lambda2, 0, lambda1,
    0, 0, mu21, (lambda1 + lambda2),
    mu22, lambda2, 0, (lambda1 + lambda2),
    mu1, (mu1 + mu2), (mu1 + mu2), 0
  ),
  byrow = T, ncol = length(states_21x), dimnames = list(states_21x, states_21x))
diag(transition_rate_21x) <- -rowSums(transition_rate_21x)
transition_rate_21x

##           111           101           1F1           X
## 111 -5e-04  0.000400  0.000000  0.000100
## 101 0e+00 -1.000300  1.000000  0.000300
## 1F1 1e-01  0.000200 -0.100500  0.000300
## X   1e+00  1.090909  1.090909 -3.181818
```

Стационарные вероятности:

```
mc_21x <- as(expm(transition_rate_21x), "markovchain")
steady_21x <- steadyStates(mc_21x)
steady_21x

##           111           101           1F1           X
## [1,] 0.994878 0.0004333862 0.004656914 3.174754e-05
```

Составление систем дифференциальных уравнений

Модель 11

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P_{11}(t) &= -\lambda P_{11}(t) + \mu P_X(t), \\ \frac{d}{dt}P_X(t) &= -\mu P_X(t) + \lambda P_{11}(t)\end{aligned}$$

Модель 21

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P_{111}(t) &= -(2\lambda_2 + \lambda_{111})P_{111}(t) + \mu_{22}P_{1F1}(t) + \mu_{111}P_X(t), \\ \frac{d}{dt}P_{101}(t) &= -(\mu_{21} + \lambda_{101})P_{101}(t) + 2\lambda_2P_{111}(t) + \lambda_2P_{1F1}(t) + \mu_{101}P_X(t), \\ \frac{d}{dt}P_{1F1}(t) &= -(\lambda_2 + \mu_{22} + \lambda_{1F1})P_{1F1}(t) + \mu_{21}P_{101}(t) + \mu_{1F1}P_X(t), \\ \frac{d}{dt}P_X(t) &= -(\mu_{101} + \mu_{111} + \mu_{1F1})P_X(t) + \lambda_{111}P_{111}(t) + \lambda_{101}P_{101}(t) + \lambda_{1F1}P_{1F1}(t)\end{aligned}$$

Определение нестационарного коэффициента готовности

```
p_m11x <- function(t, s) expm(t*transition_rate_11x)["11", s]
p_m21x <- function(t, s) expm(t*transition_rate_21x)["111", s]

k_r_m11x <- function(t) p_m11x(t, "11")
k_r_m21x <- function(t) p_m21x(t, "111") + p_m21x(t, "101") + p_m21x(t, "1F1")

t <- seq(0, 80, 0.4)
k_r_t_m11x <- sapply(t, k_r_m11x)
k_r_t_m21x <- sapply(t, k_r_m21x)

par(mar = c(4, 8, 2, 2))
plot(t, k_r_t_m11x, type="l", col="red", axes = F, xlab="Время, ч", ylab="",
ylim=c(0.9997, 1.0000000000000001))
lines(t, k_r_t_m21x, col="blue")
axis(1, at=c(0, 10, 40, 80))
axis(2, at=c(0.9997, 0.99997, 1.000000000000000), labels=c(0.9997, 0.99997,
1.000000000000000), las = 2)
title(ylab = "Коэффициент готовности", line = 6)
legend("right", c("Модель 11", "Модель 21"), fill=c("red", "blue"))
```

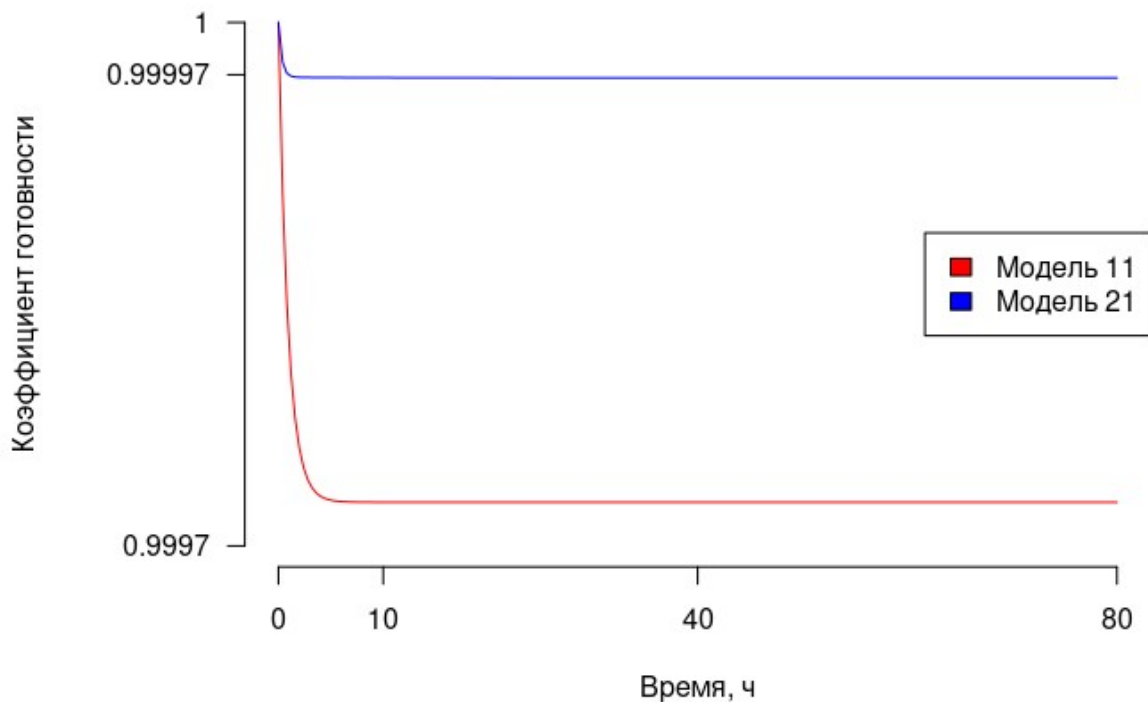


Рисунок 8. График зависимости нестационарного коэффициента готовности от времени, вариант с финальными состояниями.

Вывод

В ходе выполнения работы был проведен сравнительный анализ двух систем, содержащих вычислительный модуль и модули хранения. Коэффициент готовности для модели 11, содержащей один модуль хранения, оказался ниже, чем у модели 21, имеющей два модуля хранения. Соответственно, можно сделать вывод, что система, имеющая дополнительный резервный модуль хранения, обладает большей надежностью.

Были также рассмотрены схемы, в которых все неработоспособные состояния представлены одним финальным состоянием. Используемые приближения позволили рассчитать верхнюю границу зависимости нестационарного коэффициента готовности от времени.