

Halbleiter und Nanotechnologie, Übung 5, Prof. Förster

Christoph Hansen

chris@university-material.de

Dieser Text ist unter dieser [Creative Commons](#) Lizenz veröffentlicht.

Ich erhebe keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Richtigkeit. Falls ihr Fehler findet oder etwas fehlt, dann meldet euch bitte über den EMailkontakt.

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1	2
Aufgabe 2	2
Aufgabe 2	3
Aufgabe 4	3
Aufgabe 5	4

Aufgabe 1

siehe auf die Zeichnung in Aufgabe 2.

Aufgabe 2

Die Lösung wird nur skizziert, weil die Lösung schon im Skript steht.

Wir starten mit der Schrödinger Gleichung:

$$0 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar} \cdot (E - V(x)) \cdot \Psi(x)$$

Dabei ist $\Psi(x)$

$$\Psi(x) = u(x) \cdot e^{ikx}$$

Dann gilt in den Bereichen I und II:

$$\Psi_I = u_1(x) \cdot e^{ik_1 x}$$

$$\Psi_{II} = u_2(x) \cdot e^{ik_2 x}$$

Wir setzen in die Schrödinger Gleichung ein:

$$0 = u_1'' + 2ik_1 u_1' - (k_1^2 - \alpha^2) \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar}$$

$$0 = u_2'' + 2ik_2 u_2' - (k_2^2 - \alpha^2)$$

Daraus ergeben sich die allgemeinen Lösungen:

$$u_1(x) = A \cdot e^{i(\alpha-k_1)x} + B \cdot e^{i(\alpha+k_1)x} \quad \text{mit} \quad \beta^2 = \alpha^2 - \frac{2mV_0}{\hbar}$$

$$u_2(x) = C \cdot e^{i(\alpha-k_2)x} + D \cdot e^{i(\alpha+k_2)x}$$

Aus der Stetigkeit der Übergang ergeben sich folgende Randbedingungen:

$$u_1(0) = u_2(0) \quad u_1(a) = u_2(-b)$$

$$u_1'(0) = u_2'(0) \quad u_1'(a) = u_2'(-b)$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass wir dieses Problem mit einer Matrix lösen müssen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}}_m \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0$$

Damit das erfüllt ist gelten $\det(m) = 0$.

Aufgabe 2

Im Prinzip ist das nur intelligentes Umformen:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Damit wir dE erhalten müssen wir E nach k ableiten:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dk} &= \frac{\hbar^2 k}{m} \\ \Leftrightarrow dk &= \frac{dE \cdot m}{\hbar k} = \frac{dE \cdot m \hbar}{\hbar^2 \cdot \sqrt{2mE}} = \frac{1}{\hbar} \cdot \sqrt{\frac{m}{2E}} dE \end{aligned}$$

Wir können nun dk ersetzen:

$$D(k) dk = \frac{\pi 2mE \cdot \sqrt{m}}{\pi^3 \hbar^3 \cdot \sqrt{2E}} dE = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \cdot \sqrt{2E} \cdot \sqrt{m^3} dE$$

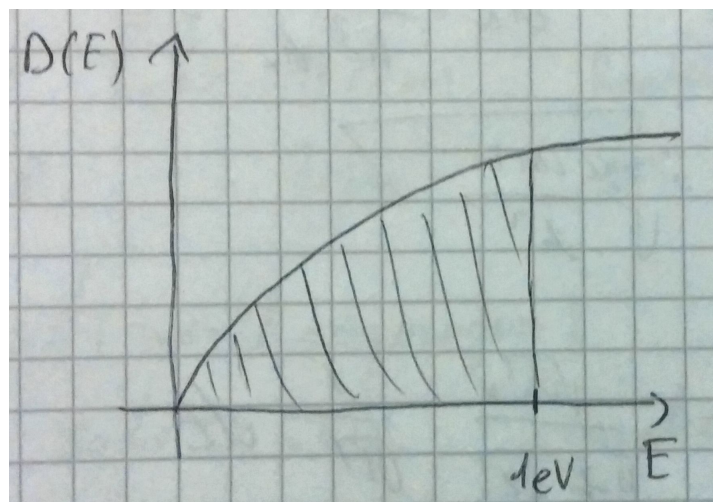
Nun haben wir:

$$D(E) dE = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2m)^{3/2} \cdot \sqrt{E} dE$$

Mit $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ erhalten wir:

$$= \frac{4\pi \cdot (2m)^{3/2} \cdot \sqrt{E}}{h^3}$$

Aufgabe 4



Wir müssen hier die Zustandsdichte über ein Intervall integrieren:

$$\begin{aligned}
 n &= \int_0^1 D(E) dE = \int_0^1 \frac{4\pi \cdot (2m)^{3/2} \cdot \sqrt{E}}{h^3} \\
 &= \frac{4\pi \cdot (2m)^{3/2}}{h^3} \cdot \frac{2}{3} \cdot E^{3/2} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{4\pi (29,11 \cdot 10^{-31})^{3/2}}{6,625 \cdot 10^{-34}} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^{3/2} = 4,5 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3}
 \end{aligned}$$

Das sind dann Zustände pro Kubikmeter

Aufgabe 5

1D

Wir definieren uns zunächst ein dz :

$$dz = \frac{\text{Strecke}}{\text{Strecke für einen Zustand}} = \frac{dk_x}{\frac{\pi}{a}} = \frac{a dk_x}{\pi}$$

Nun normieren wir dz :

$$dz' = \frac{dz}{a} = \frac{dk_x}{\pi}$$

Nun bestimmen wir k_x :

$$\begin{aligned}
 dE &= \frac{\hbar^2 k_x}{m} dk \\
 \Leftrightarrow dk &= \frac{m}{\hbar^2 k_x} dE \\
 \Leftrightarrow k_x &= \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}
 \end{aligned}$$

Nun können wir in die ursprüngliche Gleichung einsetzen:

$$dz' = \frac{m\hbar}{\pi\hbar^2 \cdot \sqrt{2mE}} dE = \frac{\sqrt{m}}{\pi\hbar \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} dE$$

2D

Wir definieren uns wieder das dz :

$$dz = \frac{\overbrace{2\pi k dk}^{\text{Fläche eines Kreisrings}}}{\left(\frac{\pi}{a}\right)} = \frac{2\pi k a^2 dk}{\pi^2}$$

Wir normieren wieder:

$$dz' = \frac{dz}{a^2} = \frac{2\pi k dk}{\pi}$$

Wir verwenden das dk aus dem vorigen Teil:

$$= \frac{2\pi}{\pi^2} \cdot \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \cdot \frac{m}{\hbar^2 \cdot k} dE = \frac{2m}{\pi\hbar^2} dE$$

Wir sehen, dass im zweidimensionalen Fall die Zustandsdichte konstant ist.