Halbleiter und Nanotechnologie, Übung 5, Prof. Förster

Christoph Hansen

chris@university-material.de

Ich erhebe keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Richtigkeit. Falls ihr Fehler findet oder etwas fehlt, dann meldet euch bitte über den Emailkontakt.

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

siehe auf die Zeichnung in Aufgabe 2.

Aufgabe 2

Die Lösung wird nur skizziert, weil die Lösung schon im Skript steht.

Wir starten mit der Schrödinger Gleichung:

$$0 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar} \cdot (E - V(x)) \cdot \Psi(x)$$

Dabei ist $\Psi(x)$

$$\Psi(x) = u(x) \cdot e^{ikx}$$

Dann gilt in den Bereichen I und II:

$$\begin{aligned} \Psi_I &= u_1(x) \cdot e^{ik_1 x} \\ \Psi_{II} &= u_2(x) \cdot e^{ik_2 x} \end{aligned}$$

Wir setzen in die Schrödinger Gleichung ein:

$$\begin{aligned} 0 &= u_1'' + 2ik_1 u_1' - \left(k_1^2 - \alpha^2\right) \qquad \text{mit} \qquad \alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar} \\ 0 &= u_2'' + 2ik_2 u_1' - \left(k_2^2 - \alpha^2\right) \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die allgemeinen Lösungen:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= A \cdot e^{i(\alpha - k_1)x} + B \cdot e^{i(\alpha - k_1)x} \qquad \text{mit} \qquad \beta^2 = \alpha^2 - \frac{2mV_0}{\hbar} \\ u_2(x) &= C \cdot e^{i(\alpha - k_2)x} + D \cdot e^{i(\alpha - k_2)x} \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit der Übergang ergeben sich folgende Randbedingungen:

$$\begin{aligned} u_1(0) &= u_2(0) \qquad & u_1(a) &= u_2(-b) \\ u_1'(0) &= u_2'(0) \qquad & u_1'(a) &= u_2'(-b) \end{aligned}$$

Aus der Vorlesunf wissen wir, das mir dieses Problem mit einer Matrix lösen müssen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}}_{\text{m}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0$$

Damit das erfüllt ist gelten $\det(m) = 0$.

Aufgabe 2

Im Prinzip ist das nur intelligentes Umformen:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad \Leftrightarrow \qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Damit wir $\mathrm{d}E$ erhalten müssen wir E nach k ableiten:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}k} = \frac{\hbar^2 k}{2m}$$
$$\Leftrightarrow \; \mathrm{d}k = \frac{\mathrm{d}E \cdot m}{\hbar k} = \frac{\mathrm{d}E \cdot m\hbar}{\hbar^2 \cdot \sqrt{2mE}} = \frac{1}{\hbar} \cdot \sqrt{\frac{m}{2E}}\,\mathrm{d}E$$

Wir können nun $\mathrm{d}k$ ersetzen:

$$D(k)\,\mathrm{d}k = \frac{\pi 2mE \cdot \sqrt{m}}{\pi^3 \hbar^3 \cdot \sqrt{2E}}\,\mathrm{d}E = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \cdot \sqrt{2E} \cdot \sqrt{m}^3\,\mathrm{d}E$$

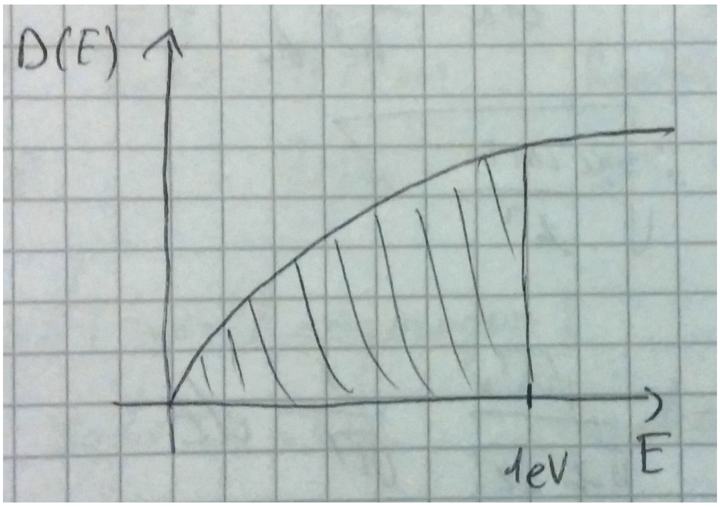
Nun haben wir:

$$D(E)\,\mathrm{d}E = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2m)^{3/2} \cdot \sqrt{E}\,\mathrm{d}E$$

Mit $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ erhalten wir:

$$= \frac{4\pi \cdot (2m)^{3/2)} \cdot \sqrt{E}}{h^3}$$

Aufgabe 4



Wir müssen hier die Zustandsdichte über ein Intervall integrieren:

$$
\begin{aligned}
n &= \int_0^1 D(E)\,\mathrm{d}E = \int_0^1 \frac{4\pi \cdot (2m)^{3/2)} \cdot \sqrt{E}}{h^3} \\
&= \frac{4\pi \cdot (2m)^{3/2}}{h^3} \frac{2}{3} \cdot E^{3/2}\Big|_0^1 \\
&= \frac{4\pi \left(29{,}11 \cdot 10^{-31}\right)^{3/2}}{6{,}625 \cdot 10^{-34}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^{3/2} = 4{,}5 \cdot 10^{27}\,\mathrm{m}^{-3}
\end{aligned}
$$

Das sind dann Zustände pro Kubikmeter

Aufgabe 5

1D

Wir definieren uns zunächst ein $\mathrm{d}z$:

$$
\mathrm{d}z = \frac{\text{Strecke}}{\text{Strecke für einen Zustand}} = \frac{\mathrm{d}k_x}{\frac{\pi}{a}} = \frac{a\,\mathrm{d}k_x}{\pi}
$$

Nun normieren wir $\mathrm{d}z$:

$$
\mathrm{d}z' = \frac{\mathrm{d}z}{a} = \frac{\mathrm{d}k_x}{\pi}
$$

Nun bestimmen wir k_x:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}E &= \frac{\hbar^2 k_x}{m}\,\mathrm{d}k \\
\Leftrightarrow\ \mathrm{d}k &= \frac{m}{\hbar^2 k_x}\,\mathrm{d}E \\
\Leftrightarrow\ k_x &= \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}
\end{aligned}
$$

Nun können wir in die ursprüngliche Gleichung einsetzen:

$$
\mathrm{d}z' = \frac{m\hbar}{\pi\hbar^2 \cdot \sqrt{2mE}}\,\mathrm{d}E = \frac{\sqrt{m}}{\pi\hbar \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}}\,\mathrm{d}E
$$

2D

Wir definieren uns wieder das $\mathrm{d}z$:

$$
\mathrm{d}z = \frac{\overbrace{2\pi k\,\mathrm{d}k}^{\text{Fläche eines Kreisrings}}}{\left(\frac{\pi}{a}\right)} = \frac{2\pi k a^2\,\mathrm{d}k}{\pi^2}
$$

Wir normieren wieder:

$$\mathrm{d}z' = \frac{\mathrm{d}z}{a^2} = \frac{2\pi k\,\mathrm{d}k}{\pi}$$

Wir verwenden das $\mathrm{d}k$ aus dem vorigen Teil:

$$= \frac{2\pi}{\pi^2} \cdot \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \cdot \frac{m}{\hbar^2 \cdot k}\,\mathrm{d}E = \frac{2m}{\pi\hbar^2}\,\mathrm{d}E$$

Wir sehen, das im zweidimensionalen Fall die Zustandsdichte konstant ist.

Aufgabe 6

a)

Wir wissen das für die Energie der Elektonen $E = 3kT + E_F$ gilt. Wir können dies nun in die Zustandswahrscheinlichkeit einsetzen:

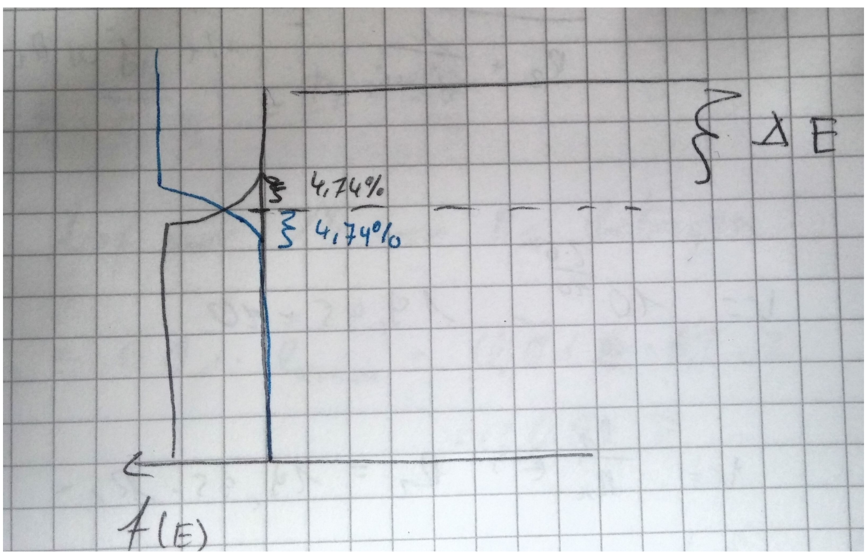
$$f_h(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}} = \frac{1}{1 + e^{\frac{3kT}{kT}}} = \frac{1}{1 + e^3}$$
$$= 0{,}0474 = 4{,}47\,\%$$

b)

Hier sieht das ganze rech ähnlich aus:

$$f_h(E)1 - f(E) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{E-E_F}{kT}}} = 0{,}0474 = 4{,}74\,\%$$

schematisch sieht das ungefähr so aus:



Aufgabe 7

Wir nehmen die Fermiverteilung von oben und setzen sie mit der Bolzmanverteilung gleich:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}} = \frac{1}{1+e^x} \qquad \text{mit} \qquad x = \frac{E-E_F}{kT}$$

Wir setzen gleich:

$$f_B(E) = e^{-\frac{E-E_F}{kT}} = e^{-x}$$

Dabei solle nur $5\,\%$ Fehler gemacht werden:

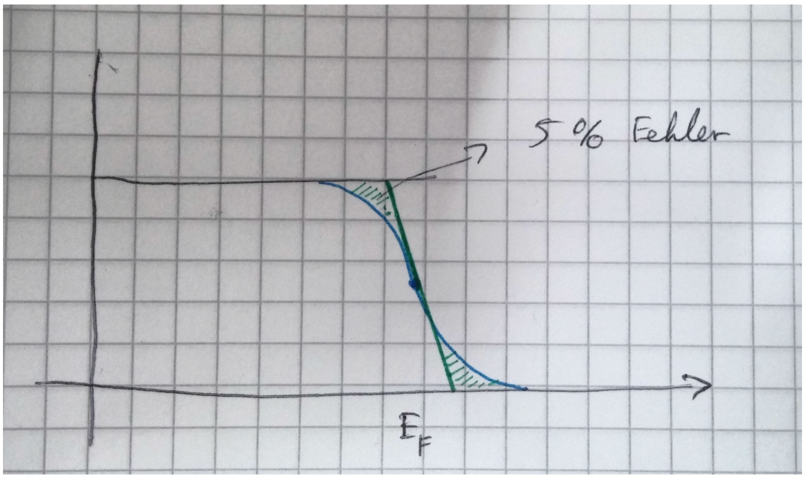
$$\frac{5}{100} = \frac{f_B(E) - f(E)}{f(E)} = \frac{e^{-x} + \frac{1}{1+e^x}}{\frac{1}{1+e^x}} = \frac{\frac{e^{-x}+e^0-1}{1+e^x}}{\frac{1}{1+e^x}}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = \frac{5}{100}$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{5}{100}\right) \approx 3$$

$$\Rightarrow \frac{E-E_F}{kT} = 3 \qquad \rightarrow \qquad \Delta E = 3kT$$

Verbildlicht sieht das ca so aus:



Aufgabe 8

Alle Informationen sind in diesem Bild zusammengefasst: