Halbleiter und Nanotechnologie, Übung 1, Prof. Förster

Christoph Hansen

chris@university-material.de

Ich erhebe keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Richtigkeit. Falls ihr Fehler findet oder etwas fehlt, dann meldet euch bitte über den Emailkontakt.

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

a)

$$P_1V = \nu RT_1$$
$$P_2V = \nu RT_2$$

Wir setzen ein:

$$T_2 = \frac{P_2V}{\nu R} = \frac{P_2T}{P_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot T_1$$

Wenn nun bei T_1 der Druck bekannt ist, dann kann man P_2 messen und die Temperatur T_2 berechnen. P_2 wird gemessen über:

$$P_2 = P_1 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h$$

b)

Wir setzen die Werte in SI Einheiten ein:

$$P_2 = 10^5 + 13645 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}08 = 1{,}107 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$$

Die Temperatur ist dann:

$$T_2 = \frac{1{,}107 \cdot 10^5}{10^5} \cdot 300 = 332\,\mathrm{K}$$

Aufgabe 2

Wir stellen zunächst drei Gleichungen auf, die wir dann ineinander einsetzen können, daraus erhalten wir dann die gewünschte Formel:

$$\begin{aligned}
&\text{I)} & P_TV &= \nu RT = \nu R\,(273{,}15 \cdot \theta)\\
&\text{II)} & P_{100}V &= \nu RT_{100} = \nu R\,(273{,}15 + 100)\\
&\text{III)} & P_0V &= \nu RT_0 = \nu R\,(273{,}15)
\end{aligned}$$

Nun ziehen wir III von II ab:

$$\begin{aligned}
(P_{100} - P_0)\,V &= \nu R \cdot 100\\
\Leftrightarrow \nu R &= \frac{P_{100} - P_0}{100} \cdot V
\end{aligned}$$

Wir ziehen nun I von II ab:

$$\begin{aligned} \nu R\theta &= (P_T - P_0) \cdot V \\ \Leftrightarrow \frac{P_{100} - P_0}{100} \cdot V\theta &= (P_T - P_0) \cdot V \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{P_T - P_0}{P_{100} - P_0} \cdot 100 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Wir müssen in beiden Aufgabenteilen einfach nur in die ideale Gasgleichung einsetzen.

a)

$$PV = \nu RT \Leftrightarrow V = \frac{RT}{P} = \frac{8{,}3145 \cdot 273{,}15}{1{,}013 \cdot 10^5} = 22{,}41$$

b)

$$PV = \nu RT \Leftrightarrow V = \frac{RT}{P} = \frac{8{,}3145 \cdot 298{,}15}{1{,}013 \cdot 10^5} = 24{,}791$$

Aufgabe 4

Wir nehmen an, das Raumtemperatur $300\,\mathrm{K}$ und $1\,\mathrm{atm} = 9{,}811 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$:

a)

Wir berechnen zunächst die molare Masse von CO_2:

$$M(CO_2) = 12\,\mathrm{g} + 2 \cdot 16\,\mathrm{g} = 44\,\mathrm{g}$$

Damit erhalten wir unser ν:

$$\nu = \frac{100}{44} = 2{,}27\,\mathrm{mol/l}$$

Nun können wir wieder in die ideale Gasgleichung einsetzen:

$$V = \frac{\nu RT}{P} = \frac{2{,}27 \cdot 8{,}134 \cdot 300}{9{,}811 \cdot 10^4} = 57{,}81$$

b)

$$P = \frac{\nu RT}{V} \qquad = \frac{2{,}27 \cdot 8{,}134 \cdot 300}{80 \cdot 10^{-3}} = 7{,}071 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$$

Aufgabe 5

a)

Wir lesen die Drücke aus dem Diagramm ab:

$$\begin{aligned} P_{294} &= 64{,}7\,\mathrm{bar} \\ P_{284} &= 55{,}9\,\mathrm{bar} \end{aligned}$$

b)

Wir lesen zwei markante Punkte ab und bauen daraus den Graphen:

$$\begin{aligned} P_{304} &= 73{,}4\,\mathrm{bar} \\ P_{274} &= 48{,}2\,\mathrm{bar} \end{aligned}$$

Der Graph sollte in etwa linear sein mit der Temperatur auf der x-Achse und einer Steigung von $\frac{\Delta P}{\Delta T} = 0{,}786\,\mathrm{bar/K}$

c)

Wir müssen uns zunächst klarmachen was ΔV ist. ΔV ist die Volumendifferenz zwischen dem gasigen und dem flüssigen Zustand, also gilt $\Delta V = V_g - V_f$. Nun lösen wir nach der Entalpie auf:

$$\Delta H = \frac{\partial P}{\partial T} \cdot \Delta V \cdot T$$

Nun bestimmen wir die ΔV bei den angegebenen Temperaturen:

$$\begin{aligned} \Delta V(274\,\mathrm{K}) &= 2{,}22 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3/mol} \\ \Delta V(284\,\mathrm{K}) &= 1{,}601 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3/mol} \\ \Delta V(294\,\mathrm{K}) &= 1{,}1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3/mol} \end{aligned}$$

Nun berechnen wir die Enthalpie:

$$\begin{aligned} \Delta H_{274\,\mathrm{K}} &= 0{,}786 \cdot 10^5 \cdot 2{,}22 \cdot 10^{-4} \cdot 274 = 4{,}78 \cdot 10^3\,\mathrm{J/mol} \\ \Delta H_{284\,\mathrm{K}} &= 0{,}786 \cdot 10^5 \cdot 2{,}22 \cdot 10^{-4} \cdot 284 = 3{,}57 \cdot 10^3\,\mathrm{J/mol} \\ \Delta H_{294\,\mathrm{K}} &= 0{,}786 \cdot 10^5 \cdot 2{,}22 \cdot 10^{-4} \cdot 294 = 2{,}31 \cdot 10^3\,\mathrm{J/mol} \end{aligned}$$

d)

Mit der Annahme $V_g >> V_f$ vereinfacht sich die Gleichung aus dem vorigen Aufgabenteil zu:

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\Delta H}{T V_g}$$

Nutze $PV = RT$:

$$\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\Delta H \cdot P}{T^2 R}$$

Teile die Integration auf zwei Seiten auf:

$$\frac{\partial P}{P} = \frac{\Delta H \, \partial T}{T^2 R}$$

Wir führen folgende Integration aus $\int_{P_1}^{P_2}$ und $\int_{T_1}^{T_2}$ und erhalten:

$$\ln(P_2) - \ln(P_1) = -\frac{\Delta H}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial \ln(P)}{\partial \frac{1}{T}} = -\frac{\Delta H}{R}$$

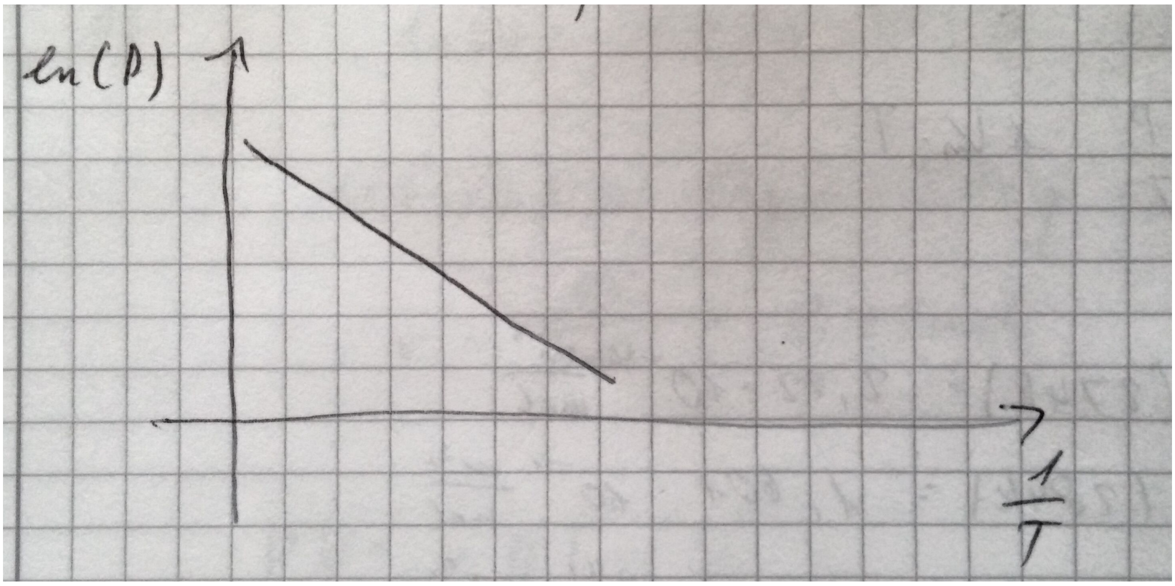

Abbildung 1: $\frac{\Delta \ln(P)}{\Delta \frac{1}{T}} = -\frac{\Delta H}{R}$

e)

Wir bauen uns zuerst eine Tabelle mit ein paar Eckdaten, die wir schon kennen:

T	P_D	$\ln(P_D)$	$\frac{1}{T}$
274	$48{,}2 \cdot 10^5$	15,39	$3{,}65 \cdot 10^{-3}$
284	$55{,}9 \cdot 10^5$	15,54	$3{,}52 \cdot 10^{-3}$
294	$64{,}7 \cdot 10^5$	15,68	$3{,}4 \cdot 10^{-3}$

Man erhält dann diesen Graphen:

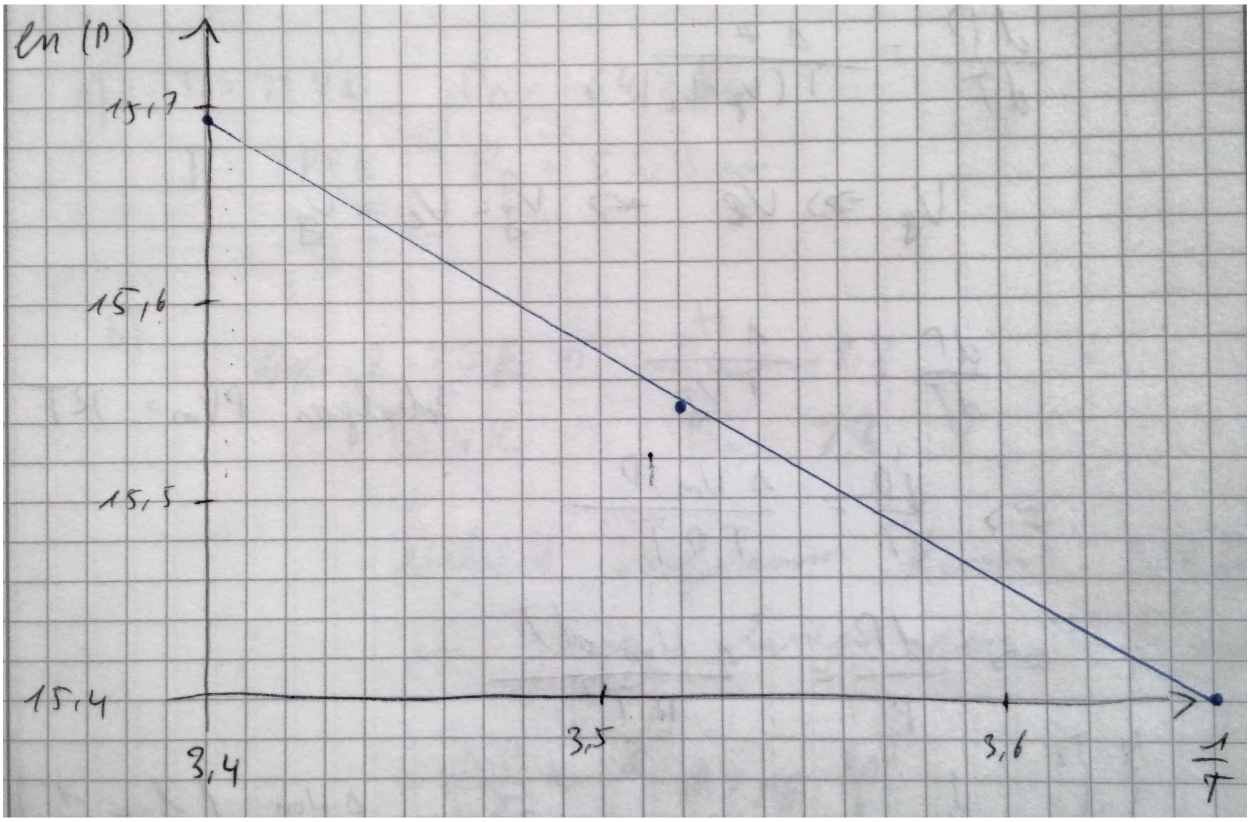

Abbildung 2: $\frac{\Delta \ln(P)}{\Delta \frac{1}{T}} = -1{,}16 \cdot 10^{-3}$

$$\Delta H = R \cdot 1{,}16 \cdot 10^3 = 9{,}64\,\text{kJ/mol} = 219\,\text{kJ/kg}$$

f)

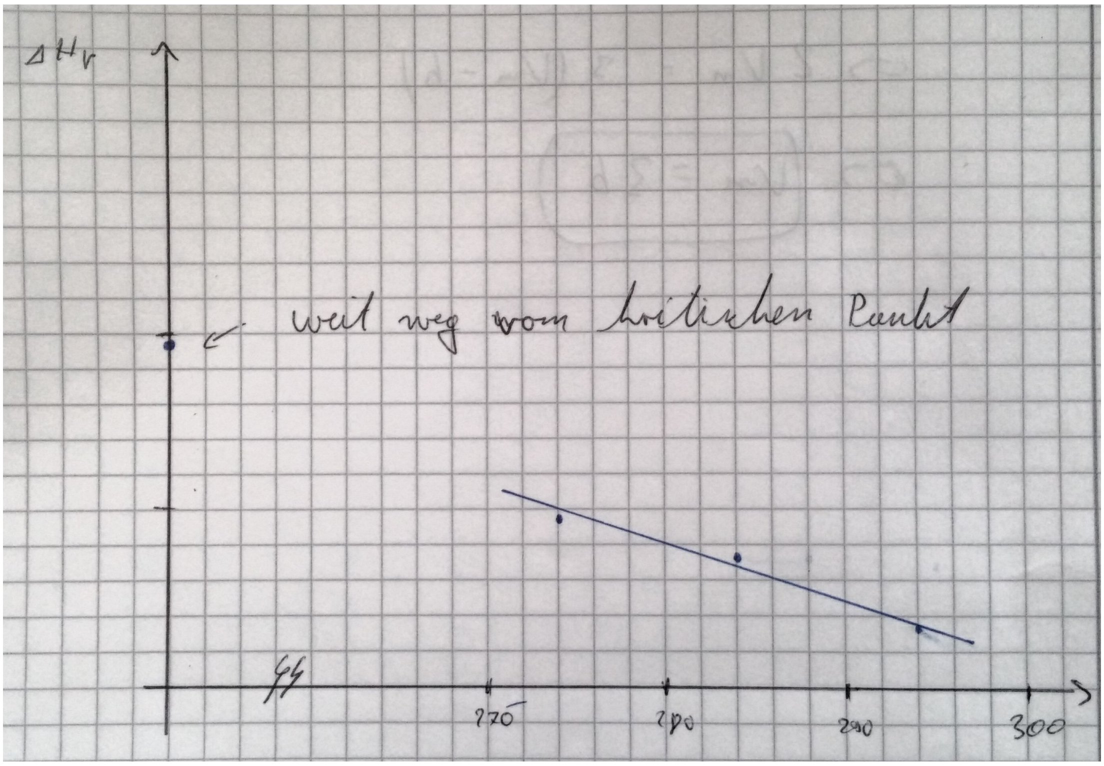

Abbildung 3:

Aufgabe 6

Wir stellen die Gleichung zunächst nach dem Druck um:

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

Weil bei kitischem Volumen ein Sattelpunkt vorliegt, müssen die ersten beiden Ableitungen nach dem Volumen Null sein:

$$\frac{\partial P}{\partial V} = 0 \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial^2 V} = 0$$
$$\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}$$
$$\Leftrightarrow RT \cdot V^2 = 2a(V-b)^2$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial^2 V} = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4}$$
$$\Leftrightarrow RT \cdot V^4 = 3a(V-b)^3$$
$$RTV^3 \cdot V = 3a(V-b)^3$$

Wir setzen nun die erste Ableitung in die zweite ein:

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 2a(V-b)^2 \cdot V &= 3a(V-b)^3 \\ \Leftrightarrow 2V &= 3(V-b) \\ \Leftrightarrow V &= 3b\end{aligned}$$

Durch einsetzen können wir nun schnell die anderen beiden Terme herleiten:

$$\begin{aligned}RT \cdot V^3 &= 2a \cdot (B-b)^2 \\ \Leftrightarrow RT \cdot (3b)^3 &= 2a \cdot (3b-b)^2 \\ \Leftrightarrow RT \cdot 27b^3 &= 2a \cdot 4b^2 \\ T &= \frac{8}{27b} \cdot \frac{a}{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} &= \frac{RT}{3b-b} - \frac{a}{3b^2} \\ &= \frac{RT}{2b} - \frac{a}{9b^2} = \frac{8 \cdot Ra}{27 \cdot Rb \cdot 2b} - \frac{a}{9b^2} \\ &= \frac{4a-3a}{27b^2} = \frac{a}{27b^2}\end{aligned}$$

Aufgabe 7

a)

$$\begin{aligned}T_k &= 304{,}02\,\mathrm{K} \\ P_k &= 73{,}8\,\mathrm{mbar} \\ V_k &= 0{,}129\,\mathrm{l/mol}\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}V_{m,k} &= 3b \Leftrightarrow b = 0{,}043\,\mathrm{l/mol} \\ P_k &= \frac{a}{27b^2} \Leftrightarrow a = P_k \cdot 27b^2 = 0{,}368\,\mathrm{Pa m^6/mol^2}\end{aligned}$$

c)

Wir teilen das Volumen von einem Mol CO_2 Moleküle durch die Anzahl der Moleküle und erhalten dadurch das Volumen:

$$V_{CO_2} = \frac{0{,}043 \cdot 10^{-3}}{6{,}022 \cdot 10^{23}} = 7{,}14 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{m}^3$$

Nun rechnen wir auf den Radius zurück:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 7{,}14 \cdot 10^{-24}}{4\pi}} = 0{,}257\,\mathrm{nm}$$

d)

Hier habe ich nur eine schematische Zeichnung des Verlaufs gemacht.

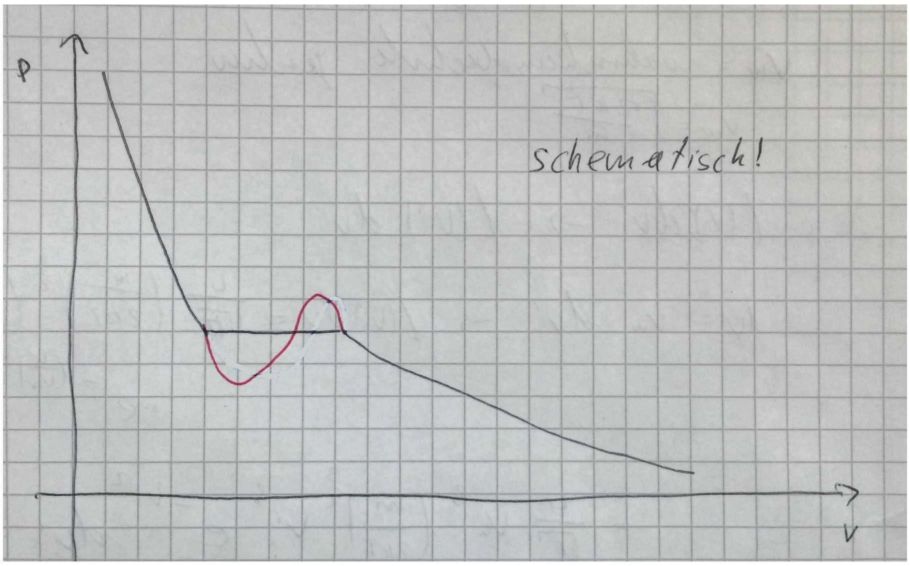

Abbildung 4: In der Theorie sollte die Fläche über und unter der Linie grade Null ergeben

Aufgabe 8

a)

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

b)

Wir machen eine Taylorentwicklung dieser Form:

$$P_{(b)} = P_{b=0} = \frac{\partial P}{\partial b} \cdot b + \frac{\partial^2 P}{\partial^2 b} \cdot b^2 + \cdots$$

Wir bestimmen die ersten 3 Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial b} &= \frac{RT}{(V_m - b)^2} \\
\frac{\partial^2 P}{\partial^2 b} &= \frac{2RT}{(V_m - b)^3} \\
\frac{\partial^3 P}{\partial^3 b} &= \frac{6RT}{(V_m - b)^4}
\end{aligned}$$

Nun setzen wir ein:

$$\begin{aligned}
P_b &= \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} + \frac{RT}{(V_m - b)^2} \cdot b + \frac{1}{2}\frac{2RT}{(V_m - b)^3} \cdot b^3 + \frac{1}{6} \cdot \frac{6RT}{(V_m - b)^4} \cdot b^3 \\
&= RT \cdot \left(1 + \left(b - \frac{a}{RT}\right)\frac{1}{V_m} + \frac{b^2}{V_m^2} + \frac{b^3}{V_m^3} + \cdots\right)
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir a_1 und a_2:

$$a_1 = b - \frac{a}{RT} \qquad a_2 = b^2$$