

Halbleiter und Nanotechnologie, Übung 1, Prof. Förster

Christoph Hansen

chris@university-material.de

Dieser Text ist unter dieser [Creative Commons](#) Lizenz veröffentlicht.

Ich erhebe keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Richtigkeit. Falls ihr Fehler findet oder etwas fehlt, dann meldet euch bitte über den Emailkontakt.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|------------------|----------|
| Aufgabe 1 | 2 |
| Aufgabe 2 | 2 |
| Aufgabe 3 | 3 |
| Aufgabe 4 | 3 |
| Aufgabe 5 | 4 |
| Aufgabe 6 | 7 |
| Aufgabe 7 | 8 |
| Aufgabe 8 | 9 |

Aufgabe 1

a)

$$P_1 V = \nu R T_1$$

$$P_2 V = \nu R T_2$$

Wir setzen ein:

$$T_2 = \frac{P_2 V}{\nu R} = \frac{P_2 T}{P_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot T_1$$

Wenn nun bei T_1 der Druck bekannt ist, dann kann man P_2 messen und die Temperatur T_2 berechnen. P_2 wird gemessen über:

$$P_2 = P_1 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h$$

b)

Wir setzen die Werte in SI Einheiten ein:

$$P_2 = 10^5 + 13645 \cdot 9,81 \cdot 0,08 = 1,107 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Die Temperatur ist dann:

$$T_2 = \frac{1,107 \cdot 10^5}{10^5} \cdot 300 = 332 \text{ K}$$

Aufgabe 2

Wir stellen zunächst drei Gleichungen auf, die wir dann ineinander einsetzen können, daraus erhalten wir dann die gewünschte Formel:

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & P_T V = \nu R T = \nu R (273,15 \cdot \theta) \\ \text{II)} & P_{100} V = \nu R T_{100} = \nu R (273,15 + 100) \\ \text{III)} & P_0 V = \nu R T_0 = \nu R (273,15) \end{array}$$

Nun ziehen wir III von II ab:

$$\begin{aligned} (P_{100} - P_0) V &= \nu R \cdot 100 \\ \Leftrightarrow \nu R &= \frac{P_{100} - P_0}{100} \cdot V \end{aligned}$$

Wir ziehen nun I von II ab:

$$\begin{aligned} \nu R \theta &= (P_T - P_0) \cdot V \\ \Leftrightarrow \frac{P_{100} - P_0}{100} \cdot V \theta &= (P_T - P_0) \cdot V \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{P_T - P_0}{P_{100} - P_0} \cdot 100 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Wir müssen in beiden Aufgabenteilen einfach nur in die ideale Gasgleichung einsetzen.

a)

$$PV = \nu RT \Leftrightarrow V = \frac{RT}{P} = \frac{8,3145 \cdot 273,15}{1,013 \cdot 10^5} = 22,41$$

b)

$$PV = \nu RT \Leftrightarrow V = \frac{RT}{P} = \frac{8,3145 \cdot 298,15}{1,013 \cdot 10^5} = 24,791$$

Aufgabe 4

Wir nehmen an, das Raumtemperatur 300 K und $1 \text{ atm} = 9,811 \cdot 10^4 \text{ Pa}$:

a)

Wir berechnen zunächst die molare Masse von CO_2 :

$$M(\text{CO}_2) = 12 \text{ g} + 2 \cdot 16 \text{ g} = 44 \text{ g}$$

Damit erhalten wir unser ν :

$$\nu = \frac{100}{44} = 2,27 \text{ mol/l}$$

Nun können wir wieder in die ideale Gasgleichung einsetzen:

$$V = \frac{\nu RT}{P} = \frac{2,27 \cdot 8,134 \cdot 300}{9,811 \cdot 10^4} = 57,81$$

b)

$$P = \frac{\nu RT}{V} = \frac{2,27 \cdot 8,134 \cdot 300}{80 \cdot 10^{-3}} = 7,071 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

Aufgabe 5

a)

Wir lesen die Drücke aus dem Diagramm ab:

$$P_{294} = 64,7 \text{ bar}$$

$$P_{284} = 55,9 \text{ bar}$$

b)

Wir lesen zwei markante Punkte ab und bauen daraus den Graphen:

$$P_{304} = 73,4 \text{ bar}$$

$$P_{274} = 48,2 \text{ bar}$$

Der Graph sollte in etwa linear sein mit der Temperatur auf der x-Achse und einer Steigung von $\frac{\Delta P}{\Delta T} = 0,786 \text{ bar/K}$

c)

Wir müssen uns zunächst klarmachen was ΔV ist. ΔV ist die Volumendifferenz zwischen dem gasigen und dem flüssigen Zustand, also gilt $\Delta V = V_g - V_f$. Nun lösen wir nach der Enthalpie auf:

$$\Delta H = \frac{\partial P}{\partial T} \cdot \Delta V \cdot T$$

Nun bestimmen wir die ΔV bei den angegebenen Temperaturen:

$$\Delta V(274 \text{ K}) = 2,22 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{mol}$$

$$\Delta V(284 \text{ K}) = 1,601 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{mol}$$

$$\Delta V(294 \text{ K}) = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{mol}$$

Nun berechnen wir die Enthalpie:

$$\Delta H_{274 \text{ K}} = 0,786 \cdot 10^5 \cdot 2,22 \cdot 10^{-4} \cdot 274 = 4,78 \cdot 10^3 \text{ J/mol}$$

$$\Delta H_{284 \text{ K}} = 0,786 \cdot 10^5 \cdot 2,22 \cdot 10^{-4} \cdot 284 = 3,57 \cdot 10^3 \text{ J/mol}$$

$$\Delta H_{294 \text{ K}} = 0,786 \cdot 10^5 \cdot 2,22 \cdot 10^{-4} \cdot 294 = 2,31 \cdot 10^3 \text{ J/mol}$$

d)

Mit der Annahme $V_g \gg V_f$ vereinfacht sich die Gleichung aus dem vorigen Aufgabenteil zu:

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\Delta H}{TV_g}$$

Nutze $PV = RT$:

$$\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\Delta H \cdot P}{T^2 R}$$

Teile die Integration auf zwei Seiten auf:

$$\frac{\partial P}{P} = \frac{\Delta H \partial T}{T^2 R}$$

Wir führen folgende Integration aus $\int_{P_1}^{P_2}$ und $\int_{T_1}^{T_2}$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \ln(P_2) - \ln(P_1) &= -\frac{\Delta H}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \ln(P)}{\partial \frac{1}{T}} &= -\frac{\Delta H}{R} \end{aligned}$$

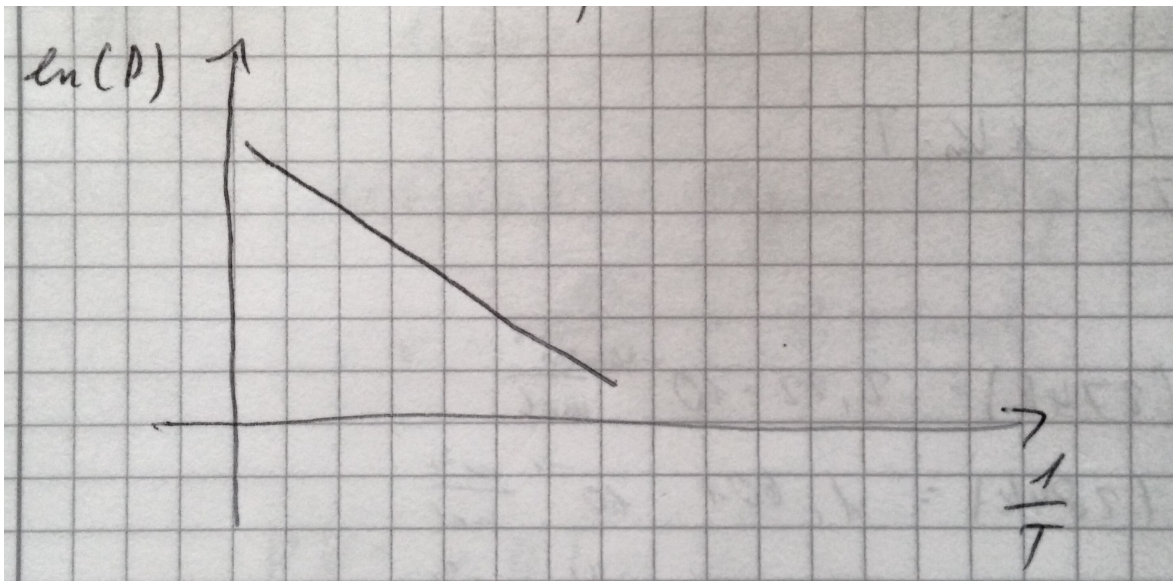


Abbildung 1: $\frac{\Delta \ln(P)}{\Delta \frac{1}{T}} = -\frac{\Delta H}{R}$

e)

Wir bauen uns zuerst eine Tabelle mit ein paar Eckdaten, die wir schon kennen:

| T | P_D | $\ln(P_D)$ | $\frac{1}{T}$ |
|-----|-------------------|------------|----------------------|
| 274 | $48,2 \cdot 10^5$ | 15,39 | $3,65 \cdot 10^{-3}$ |
| 284 | $55,9 \cdot 10^5$ | 15,54 | $3,52 \cdot 10^{-3}$ |
| 294 | $64,7 \cdot 10^5$ | 15,68 | $3,4 \cdot 10^{-3}$ |

Man erhält dann diesen Graphen:

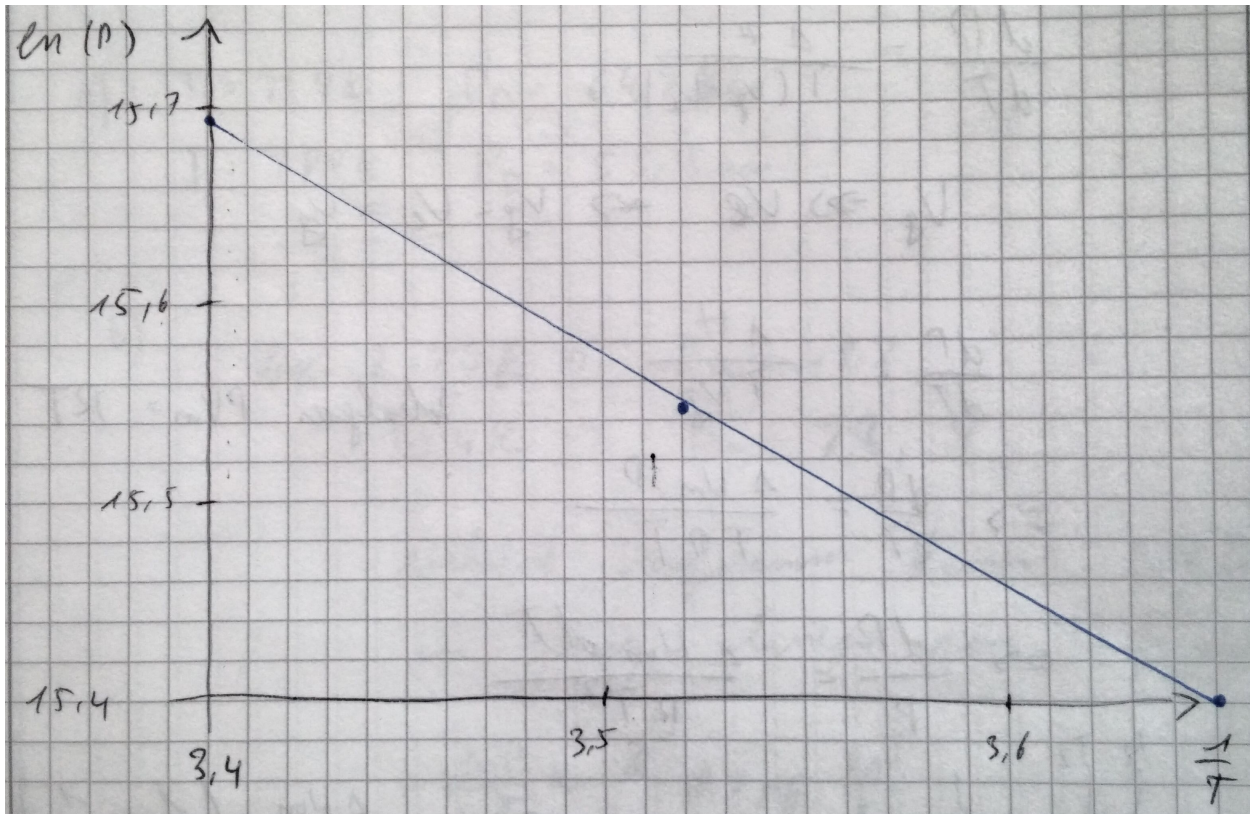


Abbildung 2: $\frac{\Delta \ln(P)}{\Delta \frac{1}{T}} = -1,16 \cdot 10^{-3}$

$$\Delta H = R \cdot 1,16 \cdot 10^3 = 9,64 \text{ kJ/mol} = 219 \text{ kJ/kg}$$

f)

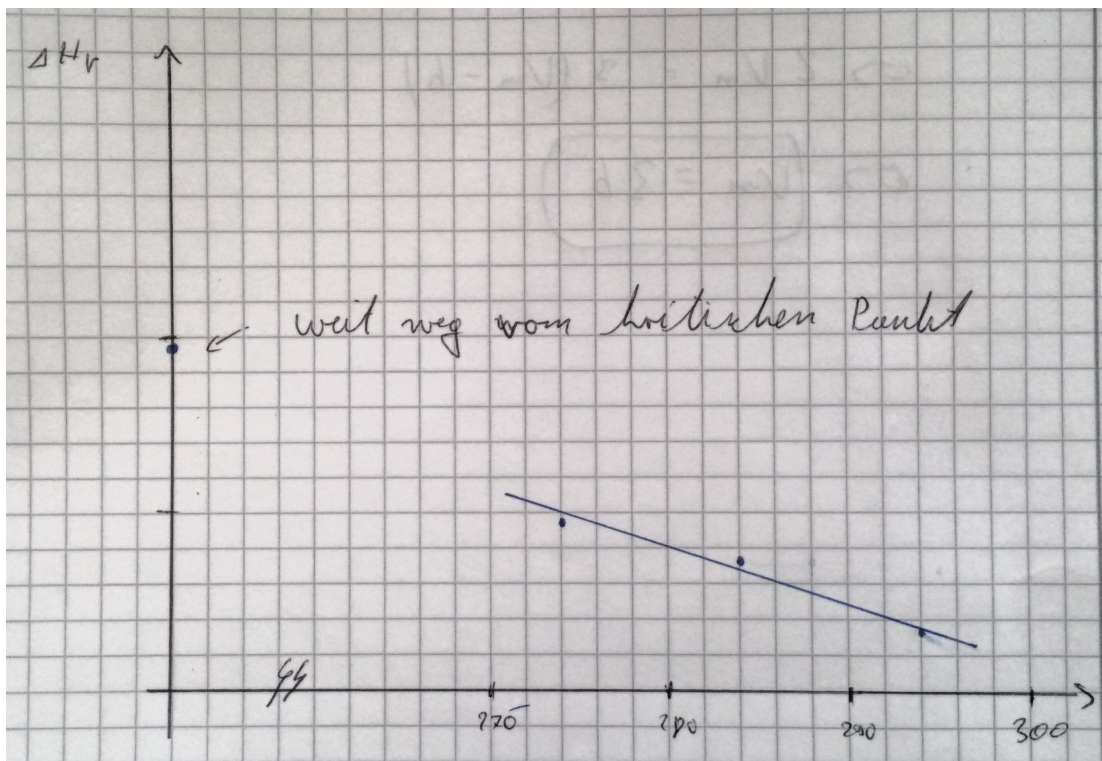


Abbildung 3:

Aufgabe 6

Wir stellen die Gleichung zunächst nach dem Druck um:

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

Weil bei kritischem Volumen ein Sattelpunkt vorliegt, müssen die ersten beiden Ableitungen nach dem Volumen Null sein:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial V} &= 0 & \frac{\partial^2 P}{\partial^2 V} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial V} &= -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} \\ \Leftrightarrow RT \cdot V^2 &= 2a(V-b)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial^2 V} &= \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4} \\ \Leftrightarrow RT \cdot V^4 &= 3a(V-b)^3 \\ RTV^3 \cdot V &= 3a(V-b)^3 \end{aligned}$$

Wir setzen nun die erste Ableitung in die zweite ein:

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 2a(V-b)^2 \cdot V &= 3a(V-b)^3 \\ \Leftrightarrow 2V &= 3(V-b) \\ \Leftrightarrow V &= 3b\end{aligned}$$

Durch einsetzen können wir nun schnell die anderen beiden Terme herleiten:

$$\begin{aligned}RT \cdot V^3 &= 2a \cdot (V-b)^2 \\ \Leftrightarrow RT \cdot (3b)^3 &= 2a \cdot (3b-b)^2 \\ \Leftrightarrow RT \cdot 27b^3 &= 2a \cdot 4b^2 \\ T &= \frac{8}{27b} \cdot \frac{a}{b} \\ P &= \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} = \frac{RT}{3b-b} - \frac{a}{3b^2} \\ &= \frac{RT}{2b} - \frac{a}{9b^2} = \frac{8 \cdot Ra}{27 \cdot Rb \cdot 2b} - \frac{a}{9b^2} \\ &= \frac{4a-3a}{27b^2} = \frac{a}{27b^2}\end{aligned}$$

Aufgabe 7

a)

$$\begin{aligned}T_k &= 304,02 \text{ K} \\ P_k &= 73,8 \text{ mbar} \\ V_k &= 0,129 \text{ l/mol}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}V_{m,k} = 3b &\Leftrightarrow b = 0,043 \text{ l/mol} \\ P_k = \frac{a}{27b^2} &\Leftrightarrow a = P_k \cdot 27b^2 = 0,368 \text{ Pam}^6/\text{mol}^2\end{aligned}$$

c)

Wir teilen das Volumen von einem Mol CO_2 Moleküle durch die Anzahl der Moleküle und erhalten dadurch das Volumen:

$$V_{\text{CO}_2} = \frac{0,043 \cdot 10^{-3}}{6,022 \cdot 10^{23}} = 7,14 \cdot 10^{-24} \text{ m}^3$$

Nun rechnen wir auf den Radius zurück:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 7,14 \cdot 10^{-24}}{4\pi}} = 0,257 \text{ nm}$$

d)

Hier habe ich nur eine schematische Zeichnung des Verlaufs gemacht.

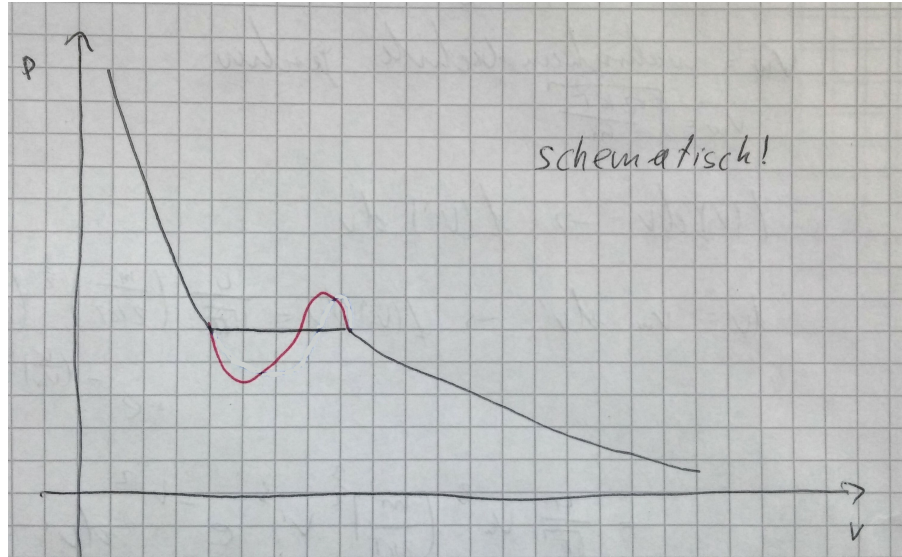


Abbildung 4: In der Theorie sollte die Fläche über und unter der Linie grade Null ergeben

Aufgabe 8

a)

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

b)

Wir machen eine Taylorentwicklung dieser Form:

$$P_{(b)} = P_{b=0} = \frac{\partial P}{\partial b} \cdot b + \frac{\partial^2 P}{\partial^2 b} \cdot b^2 + \dots$$

Wir bestimmen die ersten 3 Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial b} &= \frac{RT}{(V_m - b)^2} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial^2 b} &= \frac{2RT}{(V_m - b)^3} \\ \frac{\partial^3 P}{\partial^3 b} &= \frac{6RT}{(V_m - b)^4}\end{aligned}$$

Nun setzen wir ein:

$$\begin{aligned}P_b &= \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2} + \frac{RT}{(V_m - b)^2} \cdot b + \frac{1}{2} \frac{2RT}{(V_m - b)^3} \cdot b^3 + \frac{1}{6} \cdot \frac{6RT}{(V_m - b)^4} \cdot b^3 \\ &= RT \cdot \left(1 + \left(b - \frac{a}{RT} \right) \frac{1}{V_m} + \frac{b^2}{V_m^2} + \frac{b^3}{V_m^3} + \dots \right)\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir a_1 und a_2 :

$$a_1 = b - \frac{a}{RT} \quad a_2 = b^2$$