

Optische Technologie, Übung 1, Prof. Rateike

Christoph Hansen

chris@university-material.de

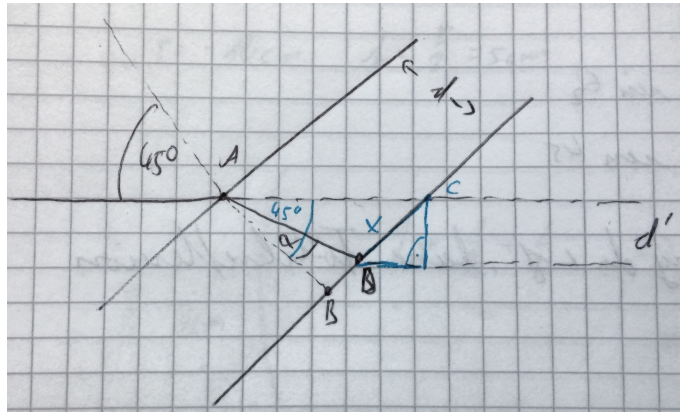
Dieser Text ist unter dieser [Creative Commons](#) Lizenz veröffentlicht.

Ich erhebe keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Richtigkeit. Falls ihr Fehler findet oder etwas fehlt, dann meldet euch bitte über den Emailkontakt.

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1	2
Aufgabe 2	2
Aufgabe 3	3
Aufgabe 4	3
Aufgabe 5	4
Aufgabe 6	4
Aufgabe 7	5
Aufgabe 8	5
Aufgabe 9	5

Aufgabe 1



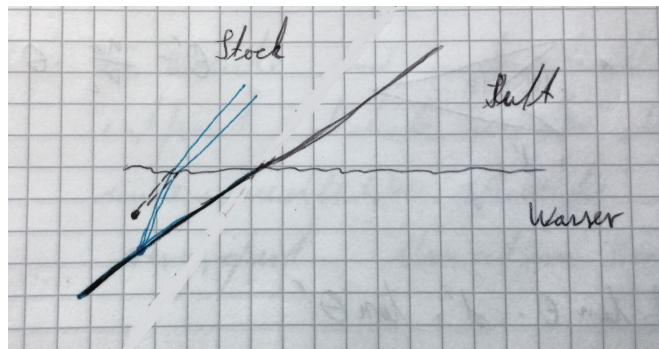
Das Dreieck $\triangle ABC$ ist gleichschenkelig. Zudem gelten für die Strecken:

$$\begin{aligned}\bar{BC} &= d = \bar{AB} \\ \bar{BD} &= d \cdot \tan(\alpha)\end{aligned}$$

Daraus folgern wir:

$$\begin{aligned}x &= d - d \cdot \tan(\alpha) \quad \text{mit} \quad \sin(45) = n \cdot \sin(n) \Leftrightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{\sin(\alpha)}{n}\right) \\ \Rightarrow d' &= x \cdot \sin(45)\end{aligned}$$

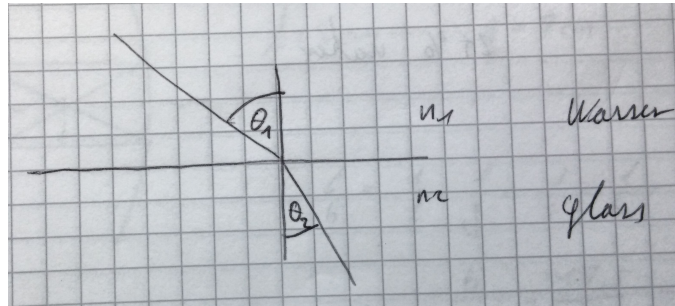
Aufgabe 2



Das Auge sieht nur den Strahlenverlauf außerhalb des Wassers und projiziert den Punkt daher an eine höhere Position als er eigentlich ist. Daher hat der Stock einen Knick.

Aufgabe 3

Wasser / Glass



$$\frac{4}{3} \cdot \sin(45) = 1,5 \cdot \sin(\theta_2)$$
$$\Leftrightarrow \theta_2 = \arcsin\left(\frac{1,333}{1,5} \cdot \sin(45)\right) = 38,94^\circ$$

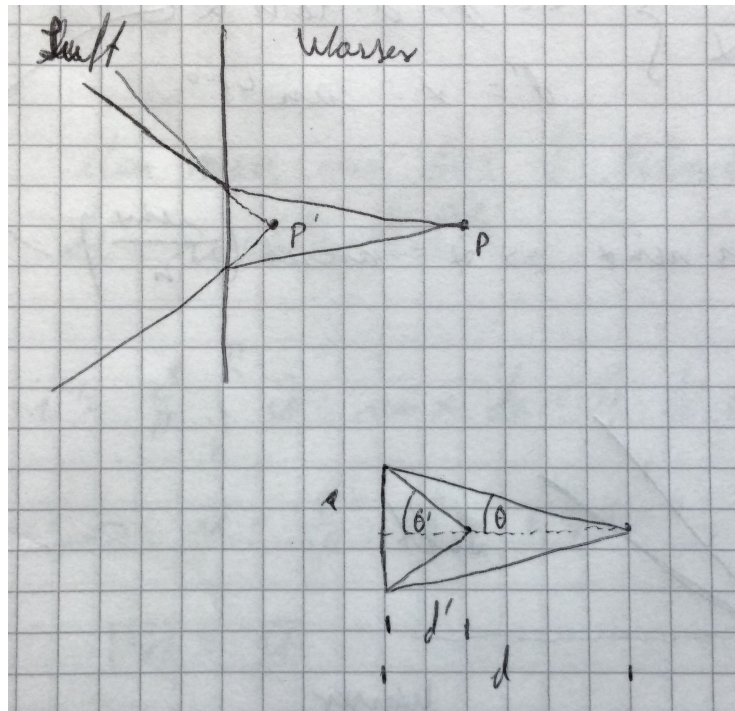
Glass / Wasser

$$1,5 \cdot \sin(45) = 1,33 \cdot \sin(\theta_2)$$
$$\Leftrightarrow \theta_2 = \arcsin\left(\frac{1,5}{1,33} \cdot \sin(45)\right) = 52,7^\circ$$

Aufgabe 4

Still missing.....

Aufgabe 5



$$\theta' = \frac{n_W}{n_L} \cdot \theta$$

Wir stellen uns eine Beziehung zur Seite a her:

$$\begin{aligned} a &= d \cdot \tan(\theta) = d' \cdot \tan(\theta') \\ &\approx d \cdot \theta = d' \cdot \theta \\ d' &= d \cdot \frac{\theta}{\theta'} = \frac{d}{\frac{n_W}{n_L}} = \frac{3}{4} \cdot d \end{aligned}$$

Der Fisch erscheint also um 25 % näher.

Aufgabe 6

Wir haben einen Radius von -10 cm, also eine Brennweite von 5 cm:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{1}{f} - \frac{1}{g} = \frac{-1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{-12}{35} \\ \Leftrightarrow b &= \frac{-35}{12} = -3 \text{ cm} \end{aligned}$$

Das Bild steht also 3 cm hinter dem Spiegel.

$$m = -\frac{b}{g} = -\frac{-3}{7} = 0,42$$

Das Bild ist also verkleinert und aufrecht. Das Bild dazu darf gerne selber gemalt werden.....

Aufgabe 7

Der Knackpunkt ist, dass man sich im Bereich von ca. einer Brennweite vom Löffel entfernt befindet. Die unterschiedlichen Bereiche des Gesichts haben nun jedes eine (nicht zu vernachlässigende) andere Entfernung vom Löffel. Daher werden die Bereiche unterschiedlich vergrößert und man hat eine Knollnase.

Aufgabe 8

Wir rechnen wie in Aufgabe 6:

Wir haben einen Radius von 10 cm, also eine Brennweite von 5 cm:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{35}{2} = 17,5 \text{ cm}$$

Das Bild steht also 17,5 cm vor dem Spiegel.

$$m = -\frac{b}{g} = -\frac{17,5}{7} = -2,5$$

Das Bild ist also vergrößert und auf dem Kopf. Das Bild dazu darf gerne selber gemalt werden.....

Aufgabe 9

Ich verweise hierzu auf die in der Mail angehängte und hier eingefügt Erklärung:

Spielwiese

Das Bild vom Bild – der Zauberspiegel Mirage

CHRISTIAN UCKE

Ein Griff ins Leere, wo man etwas deutlich sieht – das verblüfft schon. Möglich macht das eine einfache optische Konstruktion, die aus zwei parabolischen Hohlspiegeln zusammengesetzt ist. Damit entsteht das reelle Bild eines Gegenstandes, das man auf den ersten Blick nicht von der Wirklichkeit unterscheiden kann.

Eine Fata Morgana ist eine optische Illusion. Versucht man, sich ihr zu nähern, so wandert sie scheinbar weg oder verschwindet ganz. Bei dem Zauberspiegel Mirage ist es noch schlimmer: Deutlich sieht man zum Greifen nah und dreidimensional einen Gegenstand – und kann ihn doch nicht anfassen. Dieser Illusion kann man sich selbst mit dem Wissen um ihr Zustandekommen nicht entziehen.

Dieses Verwirrspiel erzeugt ein Zauberspiegel, Mirage genannt. Er besteht aus zwei gleichen, annähernd parabolischen Hohlspiegeln, die mit der Öffnung aufeinander liegen. Die kommerziell erhältlichen Spiegel haben üblicherweise einen Durchmesser von 23 cm (Abbildung 1). Der

obere Hohlspiegel hat zentral ein Loch von sechs Zentimetern Durchmesser. Befindet sich in der Mitte des unteren Spiegels ein kleiner Gegenstand von nicht mehr als etwa einem Zentimeter Größe, so erscheint er bei optimal schrägem Einblick als dreidimensionales, reelles und seitenrichtiges Bild genau in der Öffnung des oberen Spiegels. Das Loch selbst verhält sich wie ein Spiegel. Das Schweinchen in Abbildung 1 spiegelt sich darin. Nähert man dem Loch eine Fingerspitze, spiegelt sie sich darin: Man kann mit dem Finger durch den imaginären Spiegel hindurchstoßen. Es spiegelt sich sozusagen Etwas an Nichts.

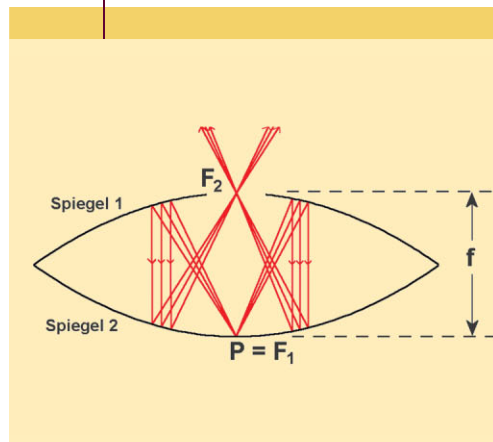
Entdeckung per Zufall

Die Entdeckung eines solchen Zauberspiegels geschah – wie nicht selten – durch puren Zufall. Etwa 1970 säuberte der Angestellte Caliste Landry ein Labor in Santa Barbara in der Universität von Kalifornien und stieß dabei auf einige sehr große Hohlspiegel von Suchscheinwerfern. Sie lagen zufällig so wie beim Zauberspiegel Mirage aufeinander. Landry wollte den Staub in der Öffnung des einen Spiegels wegwischen – da war aber nichts. Sofort benachrichtigte er den Physikprofessor Virgil Elings über den verblüffenden Effekt. Beide zusammen patentierten dann 1972 diese Entdeckung [1]. Im gleichen Jahr kaufte Virgil Elings seinem Patentkollegen alle Rechte ab und verkaufte sie 1977 weiter an die amerikanische Firma Optigone, die seither das Original herstellt. Sie hat auch ein Modell „Giant Mirage“ mit einem Durchmesser von 56 cm im Angebot. Da das Patent mittlerweile ausgelaufen ist, sind jetzt Nachbauten auf dem Markt, bei denen die Krümmung der Spiegel nicht immer ausreichend gleichmäßig ist, wodurch Verzerrungen bei den optischen Erscheinungen auftreten.

Abb. 1 Der Zauberspiegel Mirage besteht aus zwei gleich großen Hohlspiegeln. Nur in der linken Abbildung, in der die beiden Hälften aufgeklappt sind, sieht man das reale Schweinchen im Hohlspiegel. Bei den beiden anderen Abbildungen handelt es sich um das reelle Bild der Figur.

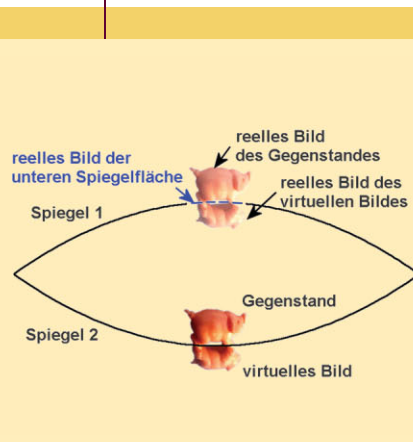


ABB. 2 | STRAHLENGANG



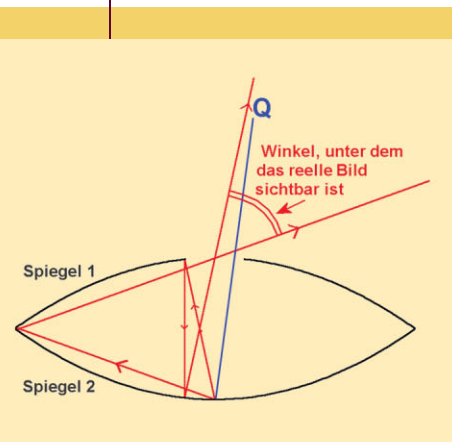
Strahlengang in den Hohlspiegeln mit Brennweite f .

ABB. 3 | MEHRERE BILDER



Reelle und virtuelle Bilder an den Hohlspiegeln.

ABB. 4 | BLICKWINKEL



Die Illusion ist nur unter gewissen Blickwinkeln sichtbar.

Die Erklärung dieser optischen Illusion macht man sich an Hand einiger Überlegungen zum Strahlengang in Hohlspiegeln klar. Die mir bekannten Modelle von Hohlspiegeln haben übrigens weder eine eindeutig parabolische, noch eine eindeutig sphärische Form, sondern liegen irgendwo dazwischen. Der prinzipielle Unterschied zwischen beiden Formen liegt darin, dass ein parabolischer Hohlspiegel einen exakten Brennpunkt für ein Parallelstrahlenbündel hat, während ein sphärischer Hohlspiegel eine so genannte

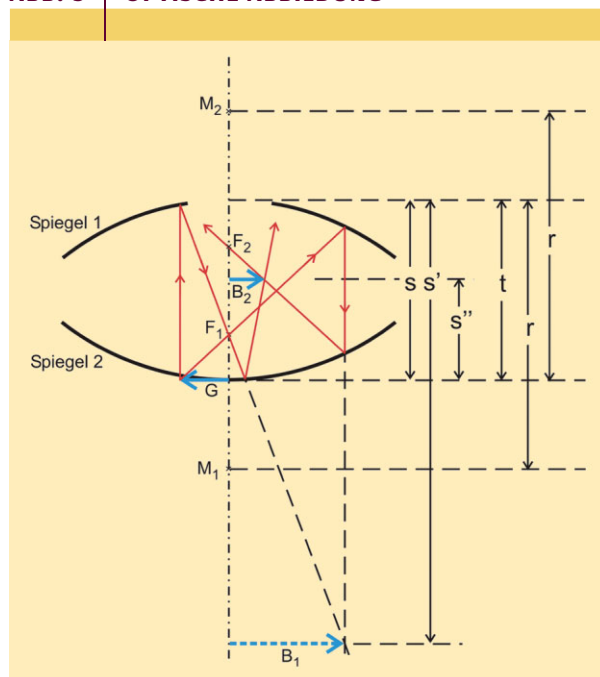
Kaustik aufweist: Ein Parallelstrahlenbündel vereinigt sich nicht genau in einem Punkt. Für die Illusion ist das praktisch nicht von Bedeutung, da eine optische Verzerrung der für die Abbildung verwendeten kleinen Gegenstände kaum sichtbar ist. Die folgenden optischen Konstruktionen beziehen sich auf einen parabolisch geformten Hohlspiegel, lassen sich aber ohne wesentliche Änderungen auf sphärische übertragen.

Die Hohlspiegel liegen so aufeinander, dass sich die Brennpunkte beider Spiegel jeweils gerade im Scheitel des gegenüberliegenden Spiegels befinden. Vom Punkt P (Brennpunkt F_1 des Spiegels 1) ausgehende Strahlen werden deshalb am Spiegel 1 parallel reflektiert und dann am Spiegel 2 in den Brennpunkt F_2 des Spiegels 2 fokussiert (Abbildung 2). Dort entsteht deswegen ein reelles Bild eines Gegenstandes, der sich im Punkt P befindet.

Da beim Punkt P jedoch außerdem ein virtuelles Bild des Gegenstandes am Spiegel 2 entsteht (Abbildung 3), ergibt sich zusätzlich ein reelles Bild des virtuellen Bildes. Das Schweinchen scheint auf einem Spiegel zu stehen. Die reellen Bilder sind aufgrund der Mehrfachreflexion in den Spiegeln kontrastschwächer als die Originale.

Aus dem Strahlengang in den Hohlspiegeln ergibt sich außerdem, dass die Illusion nur unter gewissen Winkeln sichtbar ist. Bei zu steilem Hineinblicken in das Loch erkennt man nur das Original, bei zu flachem Einblick sieht man nur eine Spiegelfläche (Abbildung 4). In einem sehr schmalen Winkelbereich relativ nah am Loch sind Illusion und Original gleichzeitig (beispielsweise in Punkt Q) erkennbar. Je nach Objektgröße können die eingezeichneten Winkelbereiche noch schmalere sein.

ABB. 5 | OPTISCHE ABBILDUNG



Berechnung der optischen Abbildung. Hierin sind M_1 und M_2 die Krümmungsmittelpunkte der Spiegel, F_1 und F_2 Brennpunkte, r der Krümmungsradius und t der Abstand der Scheitelpunkte der Spiegel.

Geometrische Optik am Zauberspiegel

Mit der grundlegenden Formel (1) für die Abbildung an sphärischen Hohlspiegeln lassen sich einfache Berechnungen durchführen, die zu überraschenden Resultaten führen [2, 3].

In ihr bedeuten s die Gegenstandsweite, s' die Bildweite, f die Brennweite und r der Krümmungsradius des Spiegels:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} = \frac{2}{r}. \quad (1)$$

Ein reelles Bild im Loch des oberen Spiegels kann grundsätzlich nur durch eine gerade Anzahl von Reflexionen an den Spiegeln entstehen. Betrachten wir zunächst nur zwei Reflexionen (Abbildung 5). Ein Gegenstand G erzeugt am Hohlspiegel 1 ein reelles Bild B_1 , das aber nicht realisiert wird, weil Spiegel 2 im Weg ist. Da der Abstand t der Spiegel gleich der Gegenstandsweite s ist, gilt

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}. \quad (2)$$

Damit ergibt sich $s' = tr/(2t - r)$.

Das Bild B_1 ist der „Gegenstand“ für die nächste Reflexion an Spiegel 2. Wir substituieren $s = t - s'$ und benutzen wieder Formel (1)

$$\frac{1}{t - s'} + \frac{1}{s''} = \frac{2}{r}. \quad (3)$$

Daraus folgt $s'' = 2tr(t - r)/(r^2 - 6tr + 4t^2)$.

Das Bild B_2 befindet sich genau dann im Loch des ersten Spiegels, wenn $s'' = t$ ist. Damit ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für den Abstand t :

$$4t^2 - 8rt + 3r^2 = 0. \quad (4)$$

Diese quadratische Gleichung liefert zwei Lösungen:

$$t_1 = 0,5r \text{ und } t_2 = 1,5r.$$

Die erste Lösung stellt den schon diskutierten Fall dar, dass das Loch des Spiegels 1 genau im Brennpunkt des Spiegels 2 liegt. Die zweite Lösung ist jedoch überraschend. Befinden sich die Spiegel im dreifachen Abstand der Brennweite (Abbildung 6), so ergibt sich ebenfalls ein reelles Bild. Dieses lässt sich auch tatsächlich – mit etwas Aufwand – beobachten. Man muss den oberen Spiegel nur vorsichtig bis zu dem gegebenen Abstand hochheben. Dabei sollte man seitlich einfallendes Streulicht möglichst vermeiden, da das Bild sonst kontrastschwach wird.

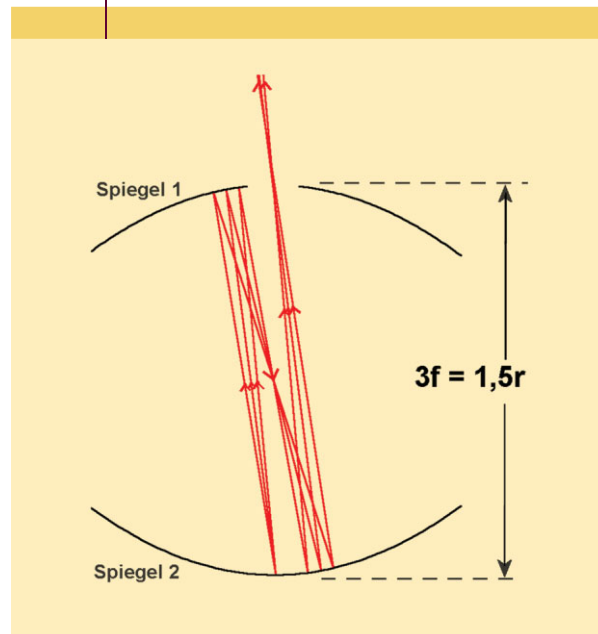
Noch überraschender ist jedoch, dass man beim Hochheben des oberen Spiegels noch viele weitere reelle Bilder sieht. Diese entstehen beispielsweise durch vierfache Reflexion. Mit der gleichen Vorgehensweise wie oben lassen sich die entsprechenden Abstände der Spiegel berechnen. Allerdings wird das Verfahren schnell unübersichtlich und führt im Weiteren zu Polynomen höherer Ordnung, die dann keine geschlossene Lösung mehr ermöglichen.

Mit geeigneten Spiegeln von Autoscheinwerfern oder Ähnlichem lässt sich der Doppelspiegel auch selbst bauen.

Zusammenfassung

Der Zauberspiegel, *Mirage* genannt, besteht aus zwei gleichen, annähernd parabolischen Hohlspiegeln. Diese liegen mit der Öffnung aufeinander. Der obere Spiegel hat ein zen-

ABB. 6 DREIFACHER ABSTAND



Auch im dreifachen Abstand der Spiegel ist ein reelles Bild zu beobachten.

trales Loch, in dem zwei reelle Bilder eines Gegenstandes erscheinen, die man auf den ersten Blick nicht von der Wirklichkeit unterscheiden kann. Der Gegenstand selbst befindet sich am Boden des unteren Spiegels. Mit den Gesetzen der geometrischen Optik lässt sich dieses Phänomen erklären.

Stichworte

Zauberspiegel, Mirage, geometrische Optik, optische Täuschung.

Literatur

- [1] V. Elings et al., Optical Display Device, United States Patent 3,647,284, Mar. 7, 1972
- [2] A. Sieradzan, The Physics Teacher **1990**, 28, 534.
- [3] J. Becker, Zauberspiegel Mirage. In: Physik-Boutique, Unterrichtsanregungen für Lehrkräfte, Freising, Stark-Verlag 1994.

Bezugsquellen

Der Doppelhohlspiegel ist erhältlich bei
www.optigone.com
www.hund-hersbruck.de
 (unter Sortiment, physikalisches Spielzeug)
www.wissenschaft-shop.de

Die Abbildungen 2, 4 und 6 wurden mit dem Programm Raytrace und parabolischen Spiegeln erstellt.

Der Autor

Christian Ucke hat zusammen mit Hans-Joachim Schlichting die Serie Spielwiese begründet.

Anschrift

Dr. Christian Ucke, Technische Universität München, FMI, Abt. Physik, Boltzmannstraße 3, 85748 Garching, ucke@mytum.de