**Formelsammlung Konstruktionselemente**

# Römerturm Version 1.4.3

Stefan Bürgel Andreas Jendrzey
Christoph Hansen
chris@university-material.de

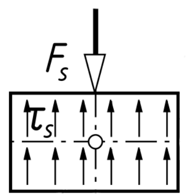
Ich erhebe keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Richtigkeit. Falls ihr Fehler findet oder etwas fehlt, dann meldet euch bitte über den Emailkontakt.

## Inhaltsverzeichnis

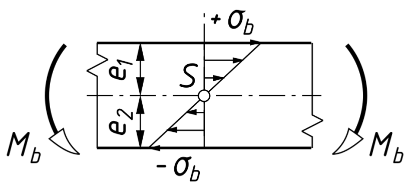
# 1 Festigkeitslehre

## 1.1 Spannungen

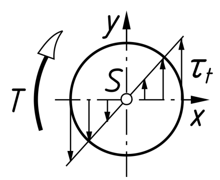
| | | |
|---|---|---|
| **Umrechnung zwischen Schubmodul $G$ und Elastizitätsmodul $E$** | $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ <br> Für Stähle gilt $\mu = 0,33$ | (1) |




Scherspannungen




Biegespannungen




Torsionsspannungen

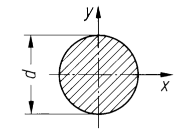
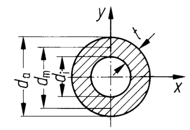
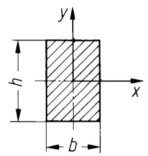
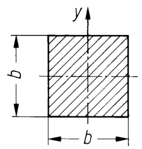
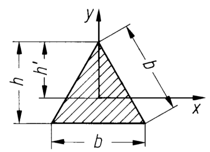
| | | |
|---|---|---|
| **Biegespannungen** | $\sigma_\mathrm{B} = \frac{M_\mathrm{B}}{W_\mathrm{ax}}$ | (2) |
| **Torsionsspannungen** | $\tau_\mathrm{t} = \frac{M_\mathrm{t}}{W_\mathrm{t}}$ <br> Für Kreis- und Rohrgeometrien ist $W_\mathrm{t} = W_\mathrm{p}$ | (3) |
| **Scherspannungen** | $\tau_\mathrm{A} = \frac{F_\mathrm{A}}{A}$ | (4) |

# 8 Sonstiges

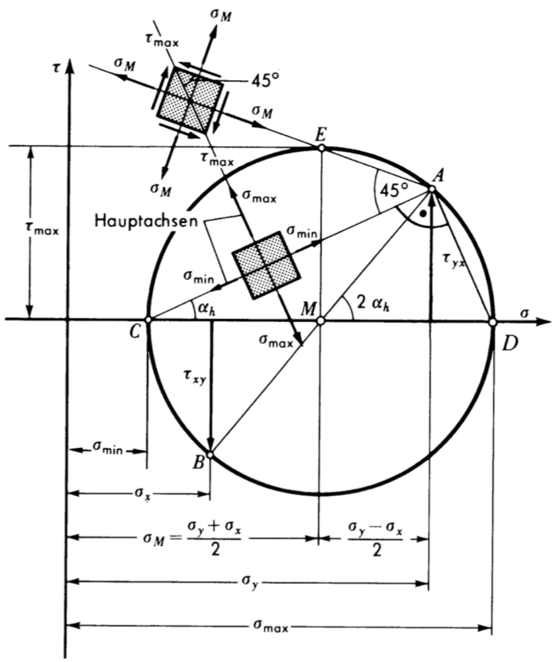
| | | |
|---|---|---|
| **Reibung an Kreisringen** | $M_\mathrm{R} = F_\mathrm{S} \cdot r_\mathrm{m} \cdot \mu$ | (145) |
| | $r_\mathrm{m} = \dfrac{D_\mathrm{a} + D_\mathrm{i}}{4}$ | (146) |
| | Das Reibmoment $M_\mathrm{R}$ entspricht einem Drehmoment, dass ensteht wenn ein Kreisring auf einer Oberfläche gedreht wird. Es wirkt der eigentlichen Drehbewegung entgegen. | |
| **Pressung auf nicht ebene Flächen** | $P = \dfrac{F}{A_\mathrm{proj}}$ | (147) |
| **mehrschnittige Scherspannugen** | Wenn ein Element an $n$ Stellen gleichzeitig angeschert wird, spricht man von einer $n$-schnittigen Verbindung: | |
| | $\tau_\mathrm{A} = \dfrac{F}{A \cdot n}$ | (148) |
| **Seilreibung (Eytelwein'sche Reibung)** | Wenn ein Seil eine Achse mit dem Winkel $\alpha$ umschlingt, gilt für die Reibung: | |
| | $\dfrac{S_1}{S_2} = e^{\mu \cdot \alpha}$ | (149) |
| **Sicherheitsbeiwert** | $S = \dfrac{F}{F_\mathrm{zul}}$ | (150) |



## 1.2 Widerstandsmomente

| Geometrie | $I$ | $W$ |
|---|---|---|
|   | $I_\mathrm{ax} = \dfrac{\pi d^4}{64}$ <br> $I_\mathrm{p} = \dfrac{\pi d^4}{32}$ | $W_\mathrm{ax} = \dfrac{\pi d^3}{32}$ <br> $W_\mathrm{p} = \dfrac{\pi d^3}{16}$ |
|   | $I_\mathrm{ax} = \dfrac{\pi(d_\mathrm{a}^4 - d_\mathrm{i}^4)}{64}$ <br> $I_\mathrm{p} = \dfrac{\pi(d_\mathrm{a}^4 - d_\mathrm{i}^4)}{32}$ | $W_\mathrm{ax} = \dfrac{\pi(d_\mathrm{a}^4 - d_\mathrm{i}^4)}{32 \cdot d_\mathrm{a}}$ <br> $W_\mathrm{p} = \dfrac{\pi(d_\mathrm{a}^4 - d_\mathrm{i}^4)}{16 \cdot d_\mathrm{a}}$ |
|   | $I_\mathrm{x} = \dfrac{bh^3}{12}$ <br> $I_\mathrm{y} = \dfrac{b^3 h}{12}$ | $W_\mathrm{x} = \dfrac{bh^2}{6}$ <br> $W_\mathrm{y} = \dfrac{b^2 h}{6}$ |
|   | $I_\mathrm{ax} = \dfrac{b^4}{12}$ | $W_\mathrm{ax} = \dfrac{b^3}{6}$ |
|   | $I_\mathrm{x} = \dfrac{bh^3}{36}$ <br> $I_\mathrm{y} = \dfrac{b^3 h}{48}$ | $W_\mathrm{x} = \dfrac{bh^2}{24}$ <br> $W_\mathrm{y} = \dfrac{b^2 h}{24}$ |

## 1.3 Mohr'scher Spannungskreis




Mohrischer Spannungskreis

**max/min Spannnungen**

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \tag{5}$$

Im Mohr'schem Spannungskreis befinden sich diese Spannungen bei den Nullstellen auf der Spannungsachse, auch Hauptspannungen genannt.

**gedrehte Spannungen**

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{6}$$

Der Winkel $\alpha$ gibt an, um wie viel Grad das Koordinatensystem gedreht wird. Setzt man $\tau_{xy} = 0$, erhält man den Winkel unter dem die Hauptspannungen auftreten.



$$M = 2 \cdot F_S \cdot \frac{a + k}{b} \cdot \mu \cdot D_F \tag{137}$$

$$P = \frac{F_{N3}}{l \cdot D_F} \tag{138}$$

In der Verbindung treten folgende Kräfte auf:

$$F_{N\,1,2} = S \cdot \frac{a + k}{b} \tag{139}$$

**geschlitzte Klemmverbindung**

$$F_{N3} \approx 2 \cdot F_{N\,1,2} \tag{140}$$

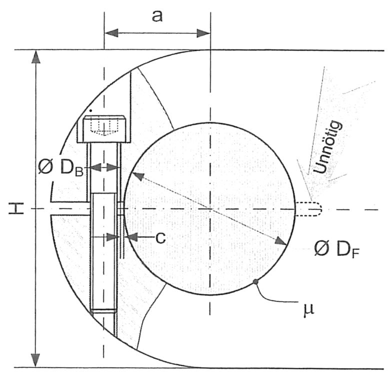
Für die Konstanten $a, b, k$ gelten folgende Näherungen:

$$a \approx 0,5 \cdot D_B + 0,5 \cdot D_F + c \tag{141}$$

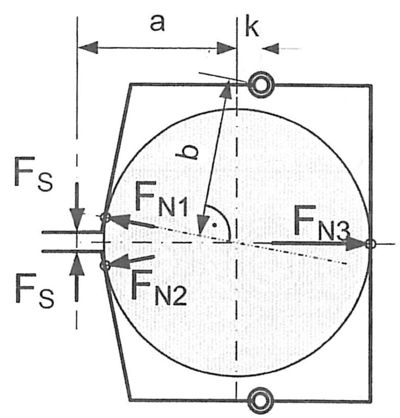
$$c \approx 0,1 \cdot D_F \tag{142}$$

$$b \approx \frac{H + D_F}{4} \tag{143}$$

$$k \approx 0,1 \cdot D_F \qquad (k \approx 0,05 \cdot D_F \ldots 0,2 \cdot D_F) \tag{144}$$




Geschlitze Klemmverbindung




Krafteinwirkung

## 7.3 Klemmverbindungen

**Nomenklatur**

| | |
|---|---|
| $D_F$ Durchmesser der Fuge | $F_N$ Gesamte Radiale Spannkraft |
| $D_B$ Bohrungsdurchmesser für die Schraube | $H$ Höhe der Klemmverbindung |

**geteilte (biegesteife) Klemmverbindung**

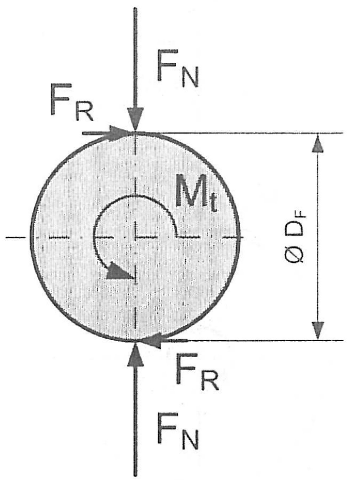
$$M = \mu \cdot F_N \cdot D_F \quad (135)$$

Die Klemmen werden bei diesem Typ auf Spielpassung ausgelegt. Die Krafteinleitung erfolgt über zwei Punkte.

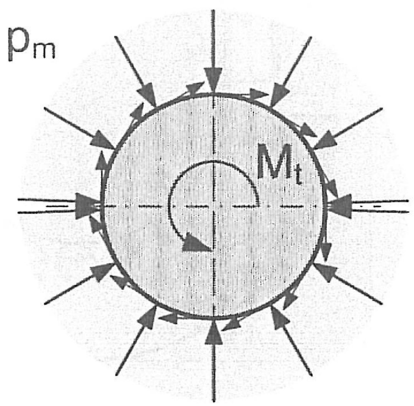
**geteilte (biegeweiche) Klemmverbindung**

$$M = \mu \cdot F_N \cdot D_F \cdot \frac{\pi}{2} \quad (136)$$

Die Klemmen werden bei diesem Typ auf Presspassung ausgelegt. Die Krafteinletung erfolgt über die gesamte Mantelfläche der Welle.



Biegestarre Klemmverbindung



Biegeweiche Klemmverbindung



## 1.4 Vergleichsspannungshypothesen

**Normalspannungshypothese (NSH)**

$$\sigma_v = \frac{|\sigma_x + \sigma_y|}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (7)$$

Die Vergleichsspannung $\sigma_v$ entspricht der maximalen Normalspannung.

**Schubspannungshypothese (SSH)**

$$\sigma_1 > \sigma_2 > 0: \quad \sigma_v = \sigma_1 \quad (8)$$
$$\sigma_1 > 0 > \sigma_2: \quad \sigma_v = \sigma_1 - \sigma_2 \quad (9)$$
$$0 > \sigma_1 > \sigma_2: \quad \sigma_v = |\sigma_2| \quad (10)$$

Die Vergleichsspannung $\sigma_v$ entspricht der maximalen Schubspannung.

**Gestaltänderungshypothese (GEH)**

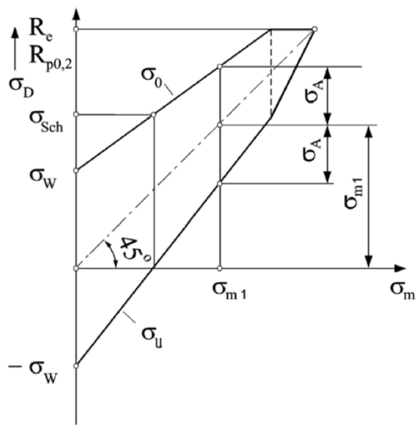
$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (11)$$

Diese Formel entspricht einem zweiachsigen Spannungszustand. Für mehrachsige Spannungszustände siehe Skript. I.d.R: $\tau_{xy}^2 = \tau_A^2 + \tau_t^2$

## 1.5 Dauerfestigkeit

**Nomenklatur**

- $\beta_k$ Kerbwirkungsfaktor
- $b_1$ Oberflächenbeiwert (siehe Diagramm: ad gegen $R_m$)
- $b_2$ Größenbeiwert (siehe Diagramm: Wellendruchmesser)
- $\sigma_{z,\,sch}$ Maximal auftretende Spannungen bei reiner Zugschwellbelastung
- $\sigma_{gak}$ Ausschlagsspannung unter Berücksichtigung von Gestalt und Kerbwirkung
- $\sigma_{gk,zdw}$ Zug- Druck Wechselspannung unter Berücksichtigung von Gestalt und Kerbwirkung




Dauerfestigkeitsdiagramm nach Smith

**1. Reduktion**

$$\sigma^*_{z,\,zul} = R_e \cdot b_2 \tag{12}$$
$$\sigma^*_{zdw} = \sigma_{zdw} \cdot b_2 \tag{13}$$
$$\sigma^*_{z,\,sch} = \sigma_{z,\,sch} \cdot b_2 \tag{14}$$
$$\sigma^*_a = \sigma_a \cdot b_2 \tag{15}$$

**2. Reduktion**

$$K = \frac{b_1}{\beta_k} \tag{16}$$
$$\sigma_{gak} = \sigma^*_a \cdot K \tag{17}$$
$$\sigma_{gzdw} = \sigma^*_{zdw} \cdot K \tag{18}$$



**Mittlerer Durchmesser**

$$D_m = \frac{D_0 + D_1}{2} \tag{130}$$

**Kegelgeometrie**

Kegelverhältnisse werden als $\triangleright\, x : y$ angegeben. Dies entspricht:

$$C = \frac{x}{y} = \frac{D_0 - D_1}{L} \tag{131}$$

Beispiel: $\triangleright\, 1 : 10 \Rightarrow C = 0,1$
Um den halben Öffnungswinkel $\beta$ zu erhalten nutzt man:

$$\beta = \arctan \frac{C}{2} \tag{132}$$

**Übertragbares Drehmoment**

$$M = \frac{S_E \cdot \mu \cdot D_m}{2 \cdot (\sin\beta + \mu \cdot \cos\beta)} \tag{133}$$

Auslegungsgleichung für Kegel-Welle Verbindungen

**Kegelpressung**

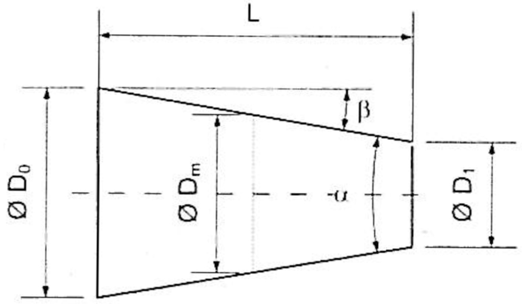
$$P = \frac{2 \cdot M \cdot \cos\beta}{\mu \cdot \pi \cdot L \cdot D_m^2} \tag{134}$$

Pressung in der Fuge einer Kegel-Welle Verbindung

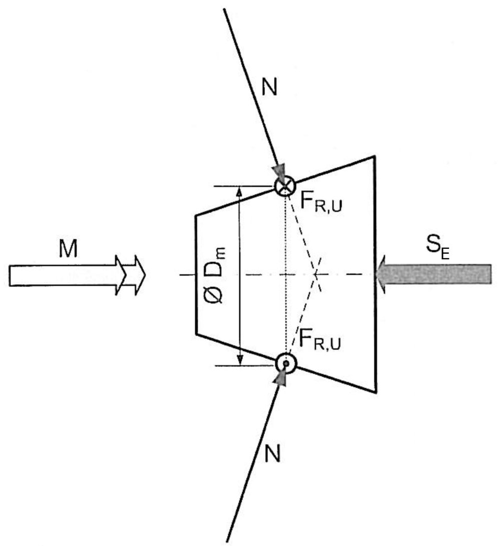
## 7.2 Kegelpressverbindungen

**Nomenklatur**

| | |
|---|---|
| $\beta$ Halber Öffnungswinkel des Kegels | $S_\mathsf{E}$ Anpresskraft des Kegels |
| $D_\mathsf{m}$ Mittlerer Durchmesser des Kegels | $L$ Länge des Kegels |




Geometrie des Kegels




Krafteinwirkung auf den Kegel



# 2 Achsen und Wellen

## 2.1 Auslegung von Achsen

**erforderlicher Durchmesser**

$$d_{\mathrm{erf}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\mathrm{B,\,max}}}{\pi \cdot \sigma_{\mathrm{B,zul}}}} \tag{19}$$

Wenn sich der erforderliche Durchmesser dynamisch zum momentanen Biegemoment bestimmt werden soll, ergibt sich für $d_{\mathrm{erf}} = d_{\mathrm{erf}}(x)$ und $M_{\mathrm{B}} = M_{\mathrm{B}}(x)$.

## 2.2 Auslegung von Wellen

**Nomenklatur**

| | |
|---|---|
| $P$ Leistung, die die Welle überträgt. | $n$ Drehzahl in $\mathrm{min}^{-1}$ |
| $\omega$ Winkelgeschwindigkeit. | $M_\mathsf{v}$ Vergleichsmoment |

**Drehzahl**

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} \tag{20}$$

**Drehmoment**

$$M = \frac{P}{\omega} \tag{21}$$

**erforderlicher Durchmesser**

$$M_{\mathrm{v}} = \sqrt{M_{\mathrm{B}}^2 + \frac{3}{4} \cdot M_{\mathrm{t}}^2} \tag{22}$$

$$d_{\mathrm{erf}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\mathrm{v}}}{\sigma_{\mathrm{zul}} \cdot \pi}} \tag{23}$$

Die Wirkung von Torsion $M_{\mathrm{t}}$ und Biegung $M_{\mathrm{B}}$ werden im Vergleichsmoment $M_{\mathrm{v}}$ kombiniert.

# 3 Federn

## 3.1 Grundlagen

**Hook'sches Gesetz**

Normalfedern: $F = c \cdot x \quad [c] = \mathrm{N/mm}$ (24)

Torsionsfedern: $M = c \cdot \alpha \quad [c] = \mathrm{Nmm}$ (25)

**Federarbeit**

Normalfedern: $$W = \frac{1}{2} \cdot c \cdot x^2 \quad (26)$$

Torsionsfedern: $$W = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \alpha^2 \quad (27)$$

**Reihenschaltung**

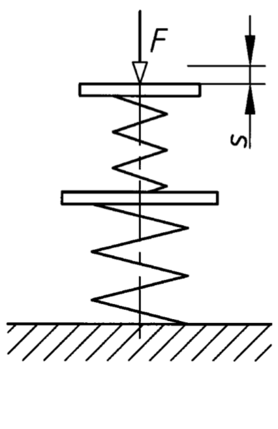
$$\frac{1}{c_{\mathrm{ges}}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_{\mathrm{n}}} \quad (28)$$

Für die Reihenanordnung von Federn gilt die Bedingung, dass auf alle beteiligten Federn die selbe Kraft wirkt. ($F_1 = F_2 = \dots = F_{\mathrm{n}}$)

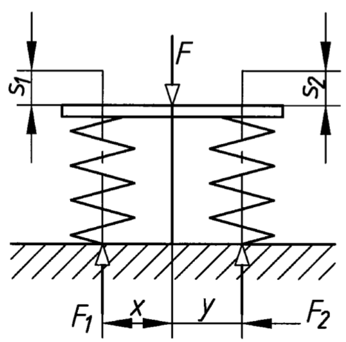
**Parallelschaltung**

$$c_{\mathrm{ges}} = c_1 + c_2 + \dots + c_{\mathrm{n}} \quad (29)$$

Für die Reihenanordnung von Federn gilt die Bedingung, dass alle beteiligten Federn den selben Weg zurücklegen. ($s_1 = s_2 = \dots = s_{\mathrm{n}}$)




Reihenschaltung




Parallelschaltung

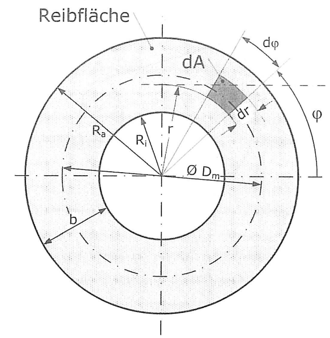


# 7 Kupplungen

## 7.1 Einscheibenkupplungen

**Nomenklatur**

| | |
|---|---|
| $R_{\mathrm{a}}$ Außenradius der Kupplungsscheibe | $d_{\mathrm{m}}$ Mittlerer Durchmesser der Kupplungsscheibe |
| $R_{\mathrm{i}}$ Innenradius der Kupplungsscheibe | $b$ Breite der Kupplungsscheibe |
| $S$ Axiale Betriebskraft | |




Geometrie der Kupplung

**Hilfsgrößen**

$$b = \frac{D_{\mathrm{a}} - D_{\mathrm{i}}}{2} = R_{\mathrm{a}} - R_{\mathrm{i}} \quad (125)$$

$$d_{\mathrm{m}} = \frac{D_{\mathrm{A}} + D_{\mathrm{i}}}{2} = R_{\mathrm{a}} + R_{\mathrm{i}} \quad (126)$$

**Moment im Neuzustand der Kupplung**

$$M = \frac{2 \cdot S \cdot \mu}{3 \cdot d_{\mathrm{m}} \cdot b} \cdot \left(R_{\mathrm{a}}^3 - R_{\mathrm{i}}^3\right) \quad (127)$$

**Moment im Gebrauchtzustand der Kupplung**

$$M = S \cdot \mu \cdot \frac{d_{\mathrm{m}}}{2} \quad (128)$$

**Auslegung von Kupplungen**

Kupplungen werden immer auf den Gebrauchtzustand ausgelegt, anschließend wird dann das Moment im Neuzustand überprüft.
Wenn bei der Kupplung $N$ Reibflächen entstehen, gilt für das gesamte übertragbare Moment $M_{\mathrm{zul}}$:

$$M_{\mathrm{ges}} = N \cdot M \quad (129)$$

**Biegemomente in Gabel-Stange Verbindungen**

Unterschiedliche Passungsverhältnisse für Gabel-Stange Verbindungen

| Passung Gabel | Passung Stange | $M_B$ |
|---|---|---|
| Spiel | Spiel | $\frac{F \cdot (L + 2 \cdot s)}{8}$ |
| Pressung | Spiel | $\frac{F \cdot L}{8}$ |
| Spiel | Pressung | $\frac{F \cdot s}{4}$ |

**Gabel-Stange Verbindung**

Zwischen Bolzen und Stange wirkt die Pressung $P_{\text{Stange}}$:

$$P_{\text{Stange}} = \frac{F}{L \cdot d} \tag{120}$$

Zwischen Bolzen und Gabel wirkt die Pressung $P_{\text{Gabel}}$:

$$P_{\text{Gabel}} = \frac{F}{2 \cdot s \cdot d} \tag{121}$$

Die Montagepressung $P_{\text{Montage}}$ wird beim auf Pressung beanspruchtem Element addiert. Der Bolzen erleidet Scher- und Biegespannungen:

$$\tau_A = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \tag{122}$$

$$\sigma_B = \frac{32 \cdot M_B}{\pi \cdot d^3} \tag{123}$$

**Beanspruchung der Gabel**

Wenn auf einen Bolzen, der in einer Gabel gelagert ist, eine radiale Betriebskraft $F$ wirkt, entsteht in der Gabel eine Zugbeanspruchung $\sigma_z$:

$$\sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{F}{2 \cdot s \cdot (D - d)} \tag{124}$$

Hierbei hat die Gabel den Durchmesser $D$ und eine Dicke $s$. Der Bolzen hat den Durchmesser $d$.



## 3.2 Blattfedern

**Nomenklatur**

$b$ maximale Breite der Feder.
$b'$ minimale Breite der Feder.
$b_0$ Breite der geschichteten Blattfeder.
$z$ Gesamtzahl der Blätter.
$z'$ Anzahl der Blätter mit der Gesamtlänge $L$.
$s$ Dicke der Feder.
$f$ Federweg

| | Max. Biegesp. $\sigma_{b,max}$ | Max. Durchb. $f$ | Federrate $c$ |
|---|---|---|---|
| Rechteckfeder $b = b'$ | $\frac{6 \cdot F \cdot L}{b \cdot s^2}$ | $4 \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot b \cdot s^3}$ | $\frac{b \cdot s^3 \cdot E}{4 \cdot l^3}$ |
| Trapezfeder | $\frac{6 \cdot F \cdot L}{b \cdot s^2}$ | $4 \cdot X \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot b \cdot s^3}$ | $\frac{b \cdot s^3 \cdot E}{4 \cdot X \cdot l^3}$ |
| Dreiecksfeder $b' = 0$ | $\frac{6 \cdot F \cdot L}{b \cdot s^2}$ | $6 \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot b \cdot s^3}$ | $\frac{b \cdot s^3 \cdot E}{6 \cdot l^3}$ |

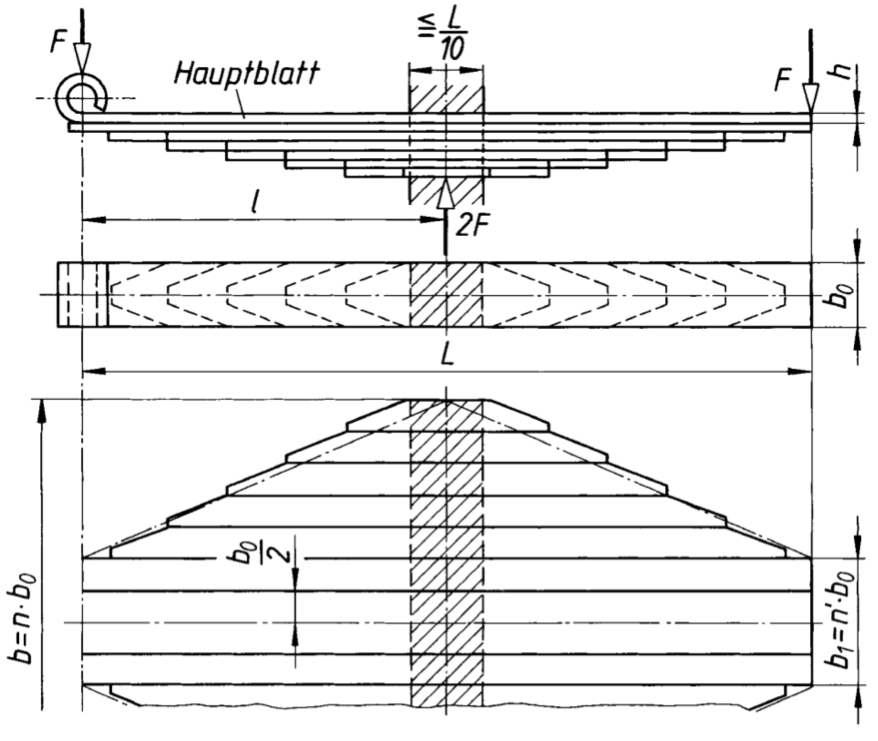
| $b'/b$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 1,5 | 1,39 | 1,315 | 1,25 | 1,202 | 1,16 | 1,121 | 1,085 | 1,054 | 1,025 | 1 |

**Federweg (noch wichtig????)**

$$f = q_1 \cdot \frac{L^3}{b \cdot s^3} \cdot \frac{F}{E} \tag{30}$$

**maximaler Federweg**

$$f_{\max} = X \cdot \sigma_{B,\text{zul}} \cdot \frac{2 \cdot l^2}{3 \cdot s \cdot E} \tag{31}$$




Geschichtete Blattfedern

Geschichtete Blattfedern verhalten sich wie Trapezfedern mit folgenden Einschränkungen:

**geschichtete Blattfedern**

$$q_1 = \frac{12}{2 + \frac{z'}{z}} \tag{32}$$

$$b' = z' \cdot b_0 \tag{33}$$

$$b = z \cdot b_0 \tag{34}$$



Wenn auf die Welle das Moment $M$ wirkt, entsteht in der Narbe die Pressung $P_\mathrm{N}$ und in der Welle die Pressung $P_\mathrm{W}$:

**Querstiftsverbindung**

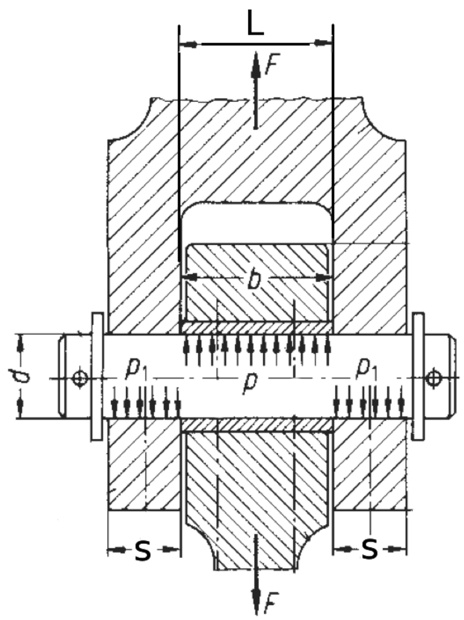
$$P_\mathrm{N} = \frac{4 \cdot M}{d \cdot (D_\mathrm{a}^2 - D_\mathrm{i}^2)} \tag{117}$$

$$P_\mathrm{W} = \frac{6 \cdot M}{d \cdot D_\mathrm{i}^2} \tag{118}$$

Der Stift erleidet Scherspannungen:

$$\tau_\mathrm{A} = \frac{4 \cdot M}{\pi \cdot d^2 \cdot D_\mathrm{i}} \tag{119}$$

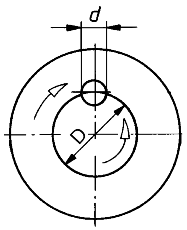
## 6.2 Bolzenverbindungen



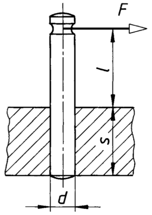

Gabel-Welle Verbindung mit einem Bolzen

# 6 Bolzen- und Stiftverbindungen

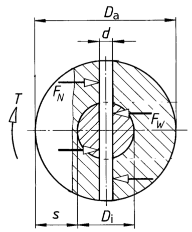
## 6.1 Stiftverbindungen



Längsstift



Steckstift



Querstift

**Längsstiftverbindung**

$$P = \frac{4 \cdot M}{L \cdot D \cdot d} \qquad (110)$$

$$\tau_{\mathrm{A}} = \frac{2 \cdot M}{L \cdot D \cdot d} \qquad (111)$$

---

**Steckstiftverbindung**

$$P_{\max} = \frac{2 \cdot F}{d \cdot s} \cdot \left(3 \cdot \frac{l}{s} + 2\right) + P_{\mathrm{Montage}} \qquad (112)$$

Maximale Pressung einer Steckstiftverbindung, die im Sitz zu erwarten ist.
Beanspruchung des Stifts:

$$\tau_{\mathrm{A}} = \frac{F}{A} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \qquad (113)$$

$$\sigma_{\mathrm{B}} = \frac{M_{\mathrm{B}}}{W_{\mathrm{ax}}} = \frac{32 \cdot F \cdot l}{\pi \cdot d^3} \qquad (114)$$

Wenn beide Enden des Steckstifts versenkt sind, gilt (siehe Aufgabe 44):

$$P = \frac{F}{d \cdot s} \qquad (115)$$

$$\sigma_{\mathrm{B}} = \frac{M_{\mathrm{B}}}{W_{\mathrm{ax}}} = \frac{32 \cdot F \cdot s}{\pi \cdot d^3 \cdot 2} \qquad (116)$$

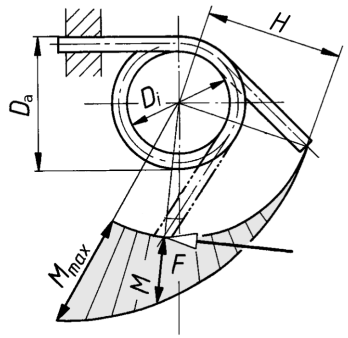
---



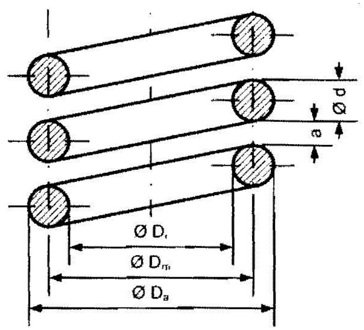
## 3.3 Drehfedern (Biegefedern)

**Nomenklatur**

- $L$ Länge der abgewickelten Feder (Drahtlänge)
- $L^*$ Länge einer Windung
- $i_{\mathsf{F}}$ Anzahl der Windungen
- $\alpha_0$ Winkel der Federenden zueinander.
- $a$ Abstand der unbelasteten Windungen (in Rad)
- $d$ Drahtdurchmesser
- $D_{\mathsf{a}}$ Außendurchmesser der Feder
- $D_{\mathsf{i}}$ Innendurchmesser der Feder
- $D_{\mathsf{m}}$ Mittlerer Durchmesser der Feder
- $L_{\mathsf{K}}$ Gesamtlänge des Federkörpers



Belastung einer Drehfeder



Geometrie einer Drehfeder

---

**Wicklungsverhältnis**

$$W = \frac{D_m}{d} \qquad (35)$$

---

**Federgeometrie**

$$D_{\mathrm{a}} = D_{\mathrm{m}} + d \qquad (36)$$

$$D_{\mathrm{i}} = D_{\mathrm{m}} - d \qquad (37)$$

$$L = i_{\mathrm{F}} \cdot L^* \qquad (38)$$

---

**Länge einer Windung**

Wenn $(a + d) \leq 0,25 \cdot D_{\mathrm{m}}$, dann gilt:

$$L^* = \pi \cdot D_{\mathrm{m}} \qquad (39)$$

anderenfalls gilt:

$$L^* = \sqrt{(D_{\mathrm{m}} \cdot \pi)^2 + (a + d)^2} \qquad (40)$$

**Korrekturfaktor durch Spannnungserhöhungen an der Innenseite**

$$q = \frac{W + 0,07}{W - 0,75} \tag{41}$$

Beim Auslegen von Federn wird $q = 1$ gesetzt, später wird dann der tatsächliche Wert von $q$ bestimmt.

---

**Spannungen in der Feder**

$$\sigma_{\mathrm{B}} = \frac{F \cdot H \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \cdot q \tag{42}$$

Hierbei entspricht $H$ dem Hebelarm, welcher die Kraft $F$ zum Mittelpunkt der Feder aufweist. Alternativ kann auch $M = F \cdot H$ gesetz werden.

---

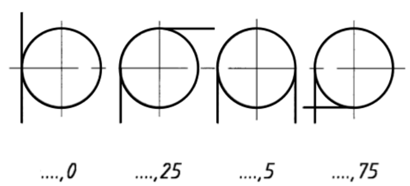
**Federrate**

$$c = \frac{I_{\mathrm{ax}} \cdot E}{L} = \frac{M}{\alpha} \tag{43}$$

---

**Winkel der Federenden zueinander**

Die Nachkommerstellen von $i_{\mathrm{F}}$ geben an, in welchem Winkel die Enden der Feder zueinander stehen. Diesen Winkel nennt man auch gewickelten Grundwinkel.




---

**Gesamtlänge Federköper**

Bei anliegenden Windungen:

$$L_{\mathrm{K}} = (i_{\mathrm{F}} + 1,5) \cdot d \tag{44}$$

Bei Windungsabstand:

$$L_{\mathrm{K}} = i_{\mathrm{F}} \cdot (a + d) + d \tag{45}$$

---



**Auf die Keile wirkende Pressung**

$$P = \frac{2 \cdot M}{d_{\mathrm{m}} \cdot h' \cdot L \cdot n \cdot \varphi} \tag{109}$$

Für den Lastverteilungsfaktor gilt:

Flankenzentrierung : $\varphi = 0,9$

Innenzentrierung : $\varphi = 0,75$

---

**mehrere Passfedern**

Wenn $l_{tr} \leq 1,5 \cdot d$:

$$P_N = \frac{2 \cdot M}{(h - t_1) \cdot l_{tr} \cdot d \cdot \varphi \cdot n} \quad (105)$$

Für den Lastverteilungsfaktor gilt:

$n = 2 : \quad \varphi = 0,75$

$n = 3 : \quad \varphi = 0,6$

Der Term $n \cdot \varphi$ konvergiert gegen den Wert 2. Die Erhöhung der Anzahl der Passfedern ist deshalb wenig effizient, wenn die tragende Länge $l_{tr}$ reduziert werden soll.

**Scherung in der Passfeder**

$$\tau_a = \frac{F_u}{b \cdot l_{tr}} = \frac{2 \cdot M}{d \cdot b \cdot l_{tr}} \quad (106)$$

In der Regel ist die Berechnung der Scherspannung nicht erforderlich, da die wirkenden Pressungen viel größere sind.

## 5.2 Keilwellenverbindung

**Nomenklatur**

| | |
|---|---|
| $h'$ tragende Höhe (Anteil der Höhe der Flanken, die die Drehmomente übertragen) | $d$ Innendurchmesser der Keilwelle |
| $D$ Außendurchmesser der Keilwelle | $d_m$ Mittlerer Durchmesser der Keilwelle |
| | $L$ Verzahnte Länge der Keile |
| | $n$ Anzahl der Flanken |

**tragende Höhe**

$$h' = 0,4 \cdot (D - d) \quad (107)$$

**Mittlerer Durchmesser**

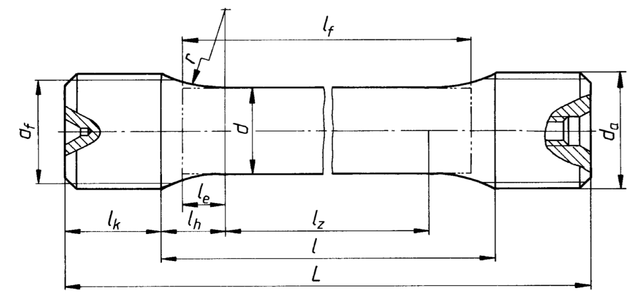
$$d_m = \frac{D + d}{2} \quad (108)$$



## 3.4 Drehstabfedern

**Nomenklatur**

| | |
|---|---|
| $l_k$ Kopflänge | $l_h$ Hohlkehlenlänge |
| $l_f$ federnde Länge (Länge eines reinen Torsionsstab, der die selbe Federwirkung hätte) | $l_e$ Ersatzlänge |
| | $l_k$ Kopflänge |
| | $d$ Durchmesser im federnden Bereich |




Drehstabfeder

**Federgeometrie**

$$l_h = \frac{d_f - d}{2} \cdot \sqrt{\frac{4r}{d_f - d} - 1} \quad (46)$$

$$l_z = l - 2 \cdot l_h \quad (47)$$

$$l_e = \nu \cdot l_h \quad (48)$$

$$l_f = l_z + 2 \cdot l_e \quad (49)$$

**Federrate**

$$c = \frac{M_t}{\alpha} = \frac{G \cdot I_p}{l_f} \quad (50)$$

Der Winkel ist in **rad**, zum umrechnen nutze:

$$[Grad] = [rad] \cdot \frac{360}{2\pi} \quad (51)$$

**Auslegung der Feder**

Die maximale Belastung der Feder ergibt sich aus der maximalen Torsionsspannung, die aus der Verdrillung resultiert.

$$M_{\max} = \tau_{\text{zul}} \cdot \frac{\pi \cdot d^3}{16} \quad (52)$$

## 3.5 Schraubenfedern (Zug-/Druckfedern)

**Nomenklatur**

- $s^*$ Federweg pro Windung
- $s$ Federweg der gesamten Feder
- $d$ Drahtdurchmesser
- $D_m$ Mittlerer Durchmesser der Feder
- $S_a$ Restspielsumme (Sicherheitsabstand)
- $i_s$ Anzahl der eingerollten oder eingeschraubten Windungen
- $L_c$ Blocklänge der Feder (Alle Windungen liegen aufeinander)
- $L_n$ Nennlänge der Feder (minimale Federlänge)
- $i_G$ Gesamtwindungszahl
- $i_F$ Anzahl federnder Windungen

**Federgeometrie**

siehe 3.3 auf Seite 11

**Federrate**

$$c = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot i_{\text{F}} \cdot D_{\text{m}}^3} \quad (53)$$

**Federkraft**

$$F = c \cdot s \qquad s \text{ ist der Federweg} \quad (54)$$

**Federweg**

$$s^* = \frac{8 \cdot F \cdot D_{\text{m}}^3}{G \cdot d^4} \quad (55)$$

$$s = i_{\text{F}} \cdot s^* \quad (56)$$

**Wicklungsverhältnis**

$$W = \frac{D_m}{d} \quad (57)$$

**Korrekturfaktor durch Spannnungserhöhungen an der Innenseite**

$$q = \frac{W + 0,5}{W - 0,75} \quad (58)$$

Beim Auslegen von Federn wird $q = 1$ gesetzt, später wird dann der tatsächliche Wert von $q$ bestimmt.



# 5 Passfedern und Keilwellen

## 5.1 Passfedern

**Nomenklatur**

- $d$ Wellendruchmesser
- $b$ Passfederbreite
- $h$ Passfederhöhe
- $t_1$ Nuttiefe Welle
- $t_2$ Nuttiefe Narbe
- $P_N$ Pressung zwischen Passfeder und Narbe
- $P_W$ Pressung zwischen Passfeder und Welle
- $l$ Gesamtlänge der Passfeder
- $l_{tr}$ tragende Länge der Passfeder
- $\varphi$ Lastverteilungsfaktor (wie gleichmäßig werden die Passfedern belastet)
- $n$ Anzahl der Passfedern
- $F_u$ Umfangskraft
- $M$ Moment auf die Welle

**tragende Länge**

rundstrinige Passfedern: $l = l_{\text{tr}} + b$ (101)

gradstirnige Passfedern: $l = l_{\text{tr}}$ (102)

**Pressung der Narbe auf die Passfeder**

Wenn $l_{\text{tr}} \leq 1,5 \cdot d$:

$$P_{\text{N}} = \frac{2 \cdot M}{(h - t_1) \cdot l_{\text{tr}} \cdot d} \quad (103)$$

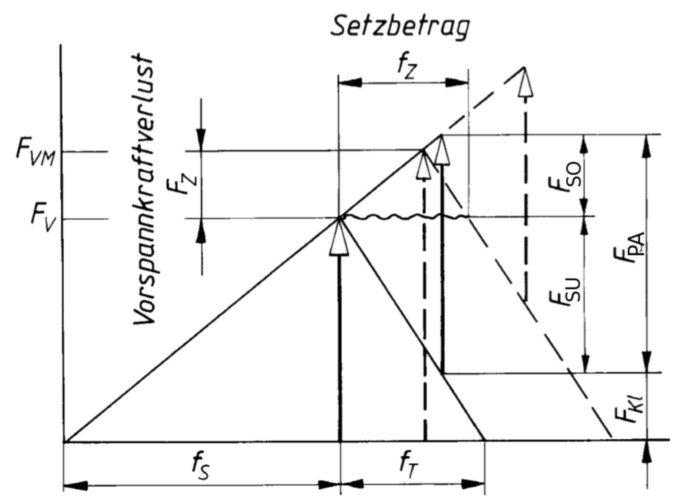
$t_1$ aus Tabelle

**Pressung der Welle auf die Passfeder**

Wenn $l_{\text{tr}} \leq 1,5 \cdot d$:

$$P_{\text{W}} = \frac{2 \cdot M}{d \cdot l_{\text{tr}} \cdot t_1} \quad (104)$$

Es gilt der Grundsatz, dass Passfedern normalerweise auf die Belastungen in der Narbe ausgelegt werden.




Schraubendiagramm einer dynamisch belasteten Schraube mit Setzerscheinung

## Auslegung von Schrauben

1. Wahl der Festigkeitsklasse (wenn nicht anders angegeben: 8.8 / $R_e = 640\,\mathrm{N/mm^2}$) und errechnen von $R_e$.
2. Ermittlung der zulässigen Spannung gemäß der Römerformel ($\mu_{\mathrm{Stahl}} = 0,15$):

$$\sigma_{\mathrm{zul}} = (0,85 - \mu) \cdot R_e \tag{99}$$

3. Bestimmung des Spannungsquerschnitts bei gegebener Schraubenkraft $F_S = F_{KL} + F_A$ (Beim Auslegen gilt, wenn nichts anderes angegeben: $F_A = 0$; $\alpha_A = 1$):

$$A_S \geq \frac{\alpha_A \cdot F_S}{\sigma_{\mathrm{zul}}} \tag{100}$$

4. Aus Tabellen kann mit dem gefundenen Spannungsquerschnnitt eine Schraube ausgewählt werden. Mit der gewählten Schraube sollten Pressung und Spannungen überschlagsmäßig überprüft werden, hierfür muss zunächst die Schraubenauflagefläche $A_K$ berechnet werden.



## Spannungen in der Feder

Alle Spannungen in der Feder ausschließlich durch Torsion:

$$\tau_t = q \cdot \frac{8 \cdot F \cdot D_m}{\pi \cdot d^3} \tag{59}$$

Das in diesem Belastungsfall wirkende Moment ergibt sich aus:

$$M_t = F \cdot \frac{D_m}{2} \tag{60}$$

## Kaltgeformte Druckfedern

$$i_g = i_f + 2 \tag{61}$$

$$S_a = i_f \cdot \left(0,0015 \cdot \frac{D_m^2}{d} + 0,1 \cdot d\right) \tag{62}$$

$$L_n = L_C + S_a \tag{63}$$

angelegte Enden:

$$L_C = (i_g + 1,5) \cdot d \tag{64}$$

angelegte und plangeschliffene Enden:

$$L_C = i_g \cdot d \tag{65}$$

ungespannte Länge der Feder:

$$L_0 = L_n + \frac{F}{c} \tag{66}$$

man braucht $F$ zum erreichen der minimalen Nennlänge

Blockkraft:

$$F_c = F + c \cdot S_a \tag{67}$$

man braucht $F$ zum erreichen der minimalen Nennlänge

(68)

**Warmgeformte Druckfedern**

$$i_{\mathrm{g}} = i_{\mathrm{f}} + 1,5 \tag{69}$$
$$S_{\mathrm{a}} = 0,02 \cdot D_{\mathrm{a}} \cdot i_{\mathrm{f}} \tag{70}$$

angelegte Enden:

$$L_{\mathrm{C}} = (i_{\mathrm{g}} + 1,1) \cdot d \tag{71}$$

angelegte und plangeschliffene Enden:

$$L_{\mathrm{C}} = (i_{\mathrm{g}} - 0,3) \cdot d \tag{72}$$

**Warmgeformte Zugfedern**

abgebogene Ösen:

$$i_{\mathrm{g}} = i_{\mathrm{f}} \tag{73}$$
$$L_{\mathrm{C}} = (i_{\mathrm{g}} + 1) \cdot d \tag{74}$$

eingerollt oder eingeschraubte Enden:

$$i_{\mathrm{g}} = i_{\mathrm{f}} + i_{\mathrm{s}} \tag{75}$$

Ösen:

Parallel $\quad i_{\mathrm{f}} = x,0$ oder $x,5$ (76)

Versetzt $\quad i_{\mathrm{f}} = x,25$ oder $x,75$ (77)



**Spannungen in der Schraube**

$$\sigma_{\mathrm{v}} = \sqrt{\left(\frac{F_{\mathrm{VM}} + F_{\mathrm{SA}}}{A_{\mathrm{S}}}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{16 \cdot M_{\mathrm{G}}}{\pi \cdot d_3^3}\right)^2} \tag{94}$$

Es gilt $F_{\mathrm{SA}} = F_{\mathrm{A}} \cdot \Phi_{\mathrm{n}}$. Die erhaltenen Vergleichsspannung muss kleiner sein als die Streckgrenze $R_{\mathrm{e}}$ der Schraube. Diese ergibt sich aus den Festigkeitsangaben der Schraube bzw. Mutter. Die Bezeichnung lautet immer $x.y$ wobei $x = R_{\mathrm{m}}/100$ und $y = R_{\mathrm{e}}/R_{\mathrm{m}}$ (es ist immer $y < 1$). Es gilt:

$$R_{\mathrm{e}} = x \cdot 100 \cdot y \ \mathrm{N/mm^2} \tag{95}$$

**dynamisch belastete Schrauben**

1. Berechnung der Schraubenzusatzkräfte für beide Amplituden ($F_{\mathrm{SA,1}}$, $F_{\mathrm{SA,1}}$):

$$F_{\mathrm{SA}} = \frac{F_{\mathrm{A}}}{1 + \left(\frac{c_p}{c_s}\right)} \tag{96}$$

2. Berechnung der Mittelspannung $\sigma_{\mathrm{v}}$ mit der größeren Schraubenzusatzkraft gemäß Formel 94.
3. Ermitteln der mittlere Schraubenzusatzkraft $F_{\mathrm{SA,m}}$:

$$F_{\mathrm{SA,m}} = \frac{F_{\mathrm{SA,1}} + F_{\mathrm{SA,2}}}{2} \tag{97}$$

Diese ergibt mit dem Spannungsquerschnitt die Ausschlagsspannung $\sigma_{\mathrm{a}}$:

$$\sigma_{\mathrm{a}} = \frac{F_{\mathrm{SA,m}}}{A_{\mathrm{S}}} \tag{98}$$

4. Im Betriebszustand pendelt die Spannung um $\pm\sigma_{\mathrm{a}}$ und hat die Mittelspannung $\sigma_v$.

Umso kleiner $\Phi_{\mathrm{n}}$ ist, desto besser ist die Schraubverbindung für dynamische Belastungen geeignet (Die Ausschlagsspannugen sind kleiner bei kleinem $\Phi_{\mathrm{n}}$). Es gilt die Römerformel $\sigma_{\mathrm{a}} \leq 0,07 \cdot R_{\mathrm{E}}$, ist diese Bedingung nicht erfüllt, müssen entweder mehr Schrauben verwendet werden oder der Faktor $\Phi_{\mathrm{n}}$ verkleinert werden.

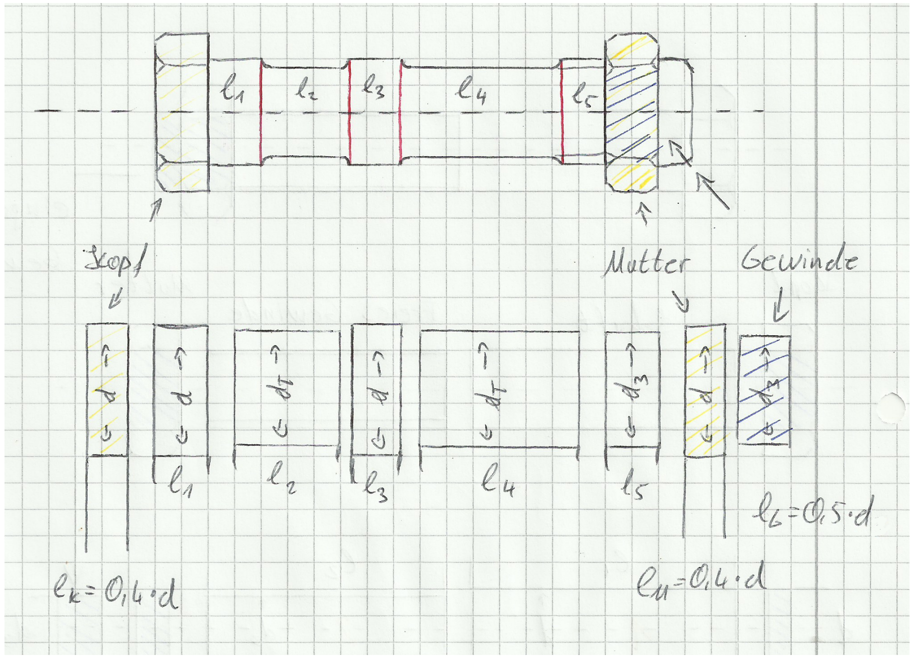



Abbildung 2: Dünnschaftschraube

Die Berechnung erfolgt dann zuerst pro Zylinder so:

$$C = \frac{E \cdot A}{l} \qquad \text{mit} \qquad A = \frac{\pi}{4} \cdot D^2$$

Im oben dargestellten Fall würde sich die Gesamtfederrate so ergeben:

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_K} + \frac{1}{C_M} + \frac{1}{C_G}$$
$$\Leftrightarrow C_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_K} + \frac{1}{C_M} + \frac{1}{C_G}}$$



# 4 Schraubenverbindungen

## Nomenklatur

- $P$ Steigung in mm (Höhenunterschied bei einem Umlauf)
- $\alpha$ Windungssteigungswinkel
- $\beta$ Flankenöffnungswinkel (bei metrischen Schrauben $\beta = 60\,°$)
- $d_2$ mittlerer Flankendruchmesser
- $d_3$ Kerndurchmesser
- $d$ Nenndruchmesser (Gewindeaußendruchmesser)
- $d_K$ Kopfdruchmesser (=Schlüsselweite)
- $D_B$ Bohrungsdurchmesser (Da wo die Schraube rein soll, am besten kleiner als Kopfdurchmesser)
- $r_A$ Mittlerer belasteter Durchmesser des Schraubenkopfs
- $A_K$ Schraubenkopfauflagefläche
- $A_S$ gefährdeter Spannungsquerschnitt der Schraube (tabelliert)
- $\varrho'$ Winkel des Reibungskegels
- $\mu$ Reibungskoeffizient
- $c_s$ Federrate der Schraube
- $c_p$ Federrate der Zwischenlage
- $\Phi$ Kraftverhältnis
- $\Phi_n$ Kraftverhältnis unter Berücksichtigung des Krafteinleitungsfaktor
- $F_{KL}$ Klemmkraft (Kraft in der Verbindungsfuge)
- $F_A$ Axiale Betriebskraft (Kraft, die die verbundenen Teile auseinander zieht; immer Zugkraft!)
- $F_S$ Schraubenkraft (Kraft in der Schraube, die die Schraube dehnt)
- $F_{SA}$ Schraubenzusatzkraft
- $F_{PA}$ Kraft der Zwischenlage
- $F_{VM}$ Montagevorspannkraft
- $F_z$ Vorspannkraftverlust durch Setzerscheinung
- $f_z$ Setzbetrag
- $M_G$ Moment am Gewinde
- $M_K$ Moment am Kopf
- $M_A$ Anziehmoment
- $n$ Krafteinleitungsfaktor
- $\alpha_A$ Anziehfaktor (Unschärfe bei der Montage der Schraube)

**Windungssteigungswinkel**

$$\alpha = \arctan\left(\frac{P}{\pi \cdot d_2}\right) \tag{78}$$

**Reibungswinkel**

$$\varrho' = \arctan\left(\frac{\mu}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}\right) \tag{79}$$

**Kraftverhältnis**

$$\Phi = \frac{c_s}{c_s + c_p} \tag{80}$$

Wenn die Krafteinleitungstiefe berücksichtigt wird (immer im Zusammenhang mit $F_A$)

$$\Phi_n = \frac{c_s}{c_s + c_p} \cdot n \tag{81}$$

**Geometrie des Schraubenkopfs**

$$r_{\mathrm{A}} = \frac{d_{\mathrm{K}} + D_{\mathrm{B}}}{4} \quad (82)$$

$$A_{\mathrm{K}} = \frac{\pi}{4} \cdot (d_{\mathrm{k}}^2 - D_{\mathrm{B}}^2) \quad (83)$$

Es muss auf eventuelle Fasen an der Bohrung geachtet werden, der Bohrungsdurchmesser $D_{\mathrm{B}}$ vergrößert sich entsprechend.

---

**Wirkungsgrad**

$$\eta = \frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha + \varrho')} \quad (84)$$

---

**Setzkraftverlust**

$$F_{\mathrm{Z}} = f_z \cdot c_{\mathrm{p}} \cdot \Phi \quad (85)$$

Durch Mikroplastizitäten in den Kontaktflächen der Verbindung findet eine Entlastung der selbigen statt.

---

**Montagevorspannkraft**

$$F_{\mathrm{VM,min}} = F_{\mathrm{KL}} + F_{\mathrm{A}} \cdot (1 - \Phi_{\mathrm{n}}) + F_{\mathrm{Z}} \quad (86)$$

$$F_{\mathrm{VM}} = \alpha_{\mathrm{A}} \cdot F_{\mathrm{VM,min}} \quad (87)$$

---

**Moment zum Lösen der Schraube**

$$F_{\mathrm{S}} = F_{\mathrm{KL}} + F_{\mathrm{A}} \cdot (1 - \Phi_{\mathrm{n}}) \quad (88)$$

$$M_{\mathrm{Lös}} = F_{\mathrm{s}} \cdot \tan(\alpha - \varrho') \cdot \frac{d_2}{2} \quad (89)$$

Moment am Gewinde ohne den Anteil des Setzbetrags

---

**Moment am Kopf**

$$M_{\mathrm{K}} = F_{\mathrm{VM}} \cdot \mu \cdot r_{\mathrm{A}} \quad (90)$$

---

**Moment am Gewinde**

$$M_{\mathrm{G}} = F_{\mathrm{VM}} \cdot \frac{d_2}{2} \cdot \tan(\alpha + \varrho') \quad (91)$$

---

**Anziehmoment**

$$M_{\mathrm{A}} = M_{\mathrm{K}} + M_{\mathrm{G}} \quad (92)$$

---

**Pressung am Kopf der Schraube**

$$P = \frac{F_{\mathrm{VM}} + F_{\mathrm{A}} \cdot \Phi_{\mathrm{n}}}{A_{\mathrm{K}}} \quad (93)$$

---



Um die Federrate einer Schraube zu berechnen muss man sie zerlegen. Das geschieht je nach Schraubenart wie unten dargestellt:

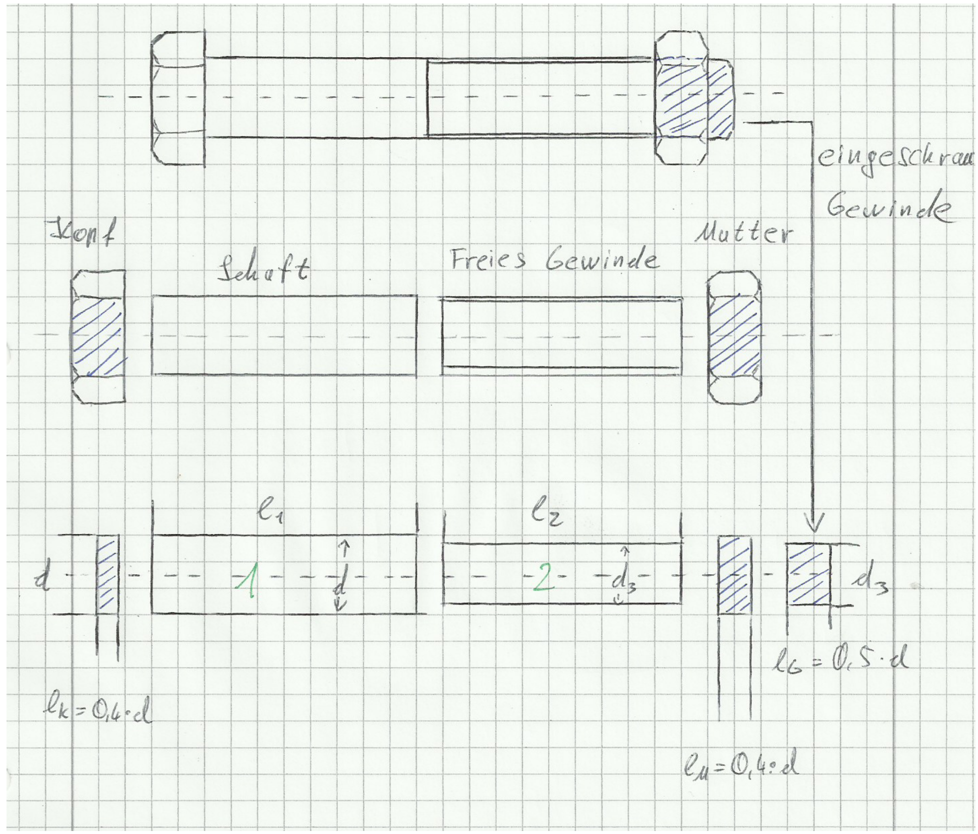



Abbildung 1: Normalschaftschraube

Die Berechnung erfolgt dann zuerst pro Zylinder so:

$$C = \frac{E \cdot A}{l} \qquad \text{mit} \qquad A = \frac{\pi}{4} \cdot D^2$$

Im oben dargestellten Fall würde sich die Gesamtfederrate so ergeben:

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_K} + \frac{1}{C_M} + \frac{1}{C_G}$$

$$\Leftrightarrow C_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_K} + \frac{1}{C_M} + \frac{1}{C_G}}$$