连续对连续

1.单调性

随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$,则对于 $Y=g(X)$ 的概率密度求法为:

$$P\{Y\leq y_0\}=P\{g(X)\leq y_0\} \tag{1}$$

如果存在唯一的反函数使得 $x=h(y)$,并且 $g(x)$ 严格单调的,那么

$$f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)| \tag{2}$$

其中积分区域和 x 有关.

2.复杂函数

如果 $g(x)$ 不是单调的,是一个复杂的函数,例如分段函数,则求法如下,因为

$$P\{Y\leq y_0\}=P\{g(X)\leq y_0\} \tag{3}$$

利用图形结合:
1.判断 $g(x)$ 的定义域(X 的**密度函数**不为 0 的时候)
2.画出 $y=g(x)$ 的图像
3.画出 $y=y_0$,将 $g(x)\leq y_0$ 时的区域.
4.将面积区域的 x 轴的范围作为积分区域.
注意:最后一步确定范围,只是利用**有意义的面积**投影到 x 轴上的**长度区域**.同理对于二维随机变量,将**有意义的体积**投影到 xoy 面的**二维面积区域**.

例题

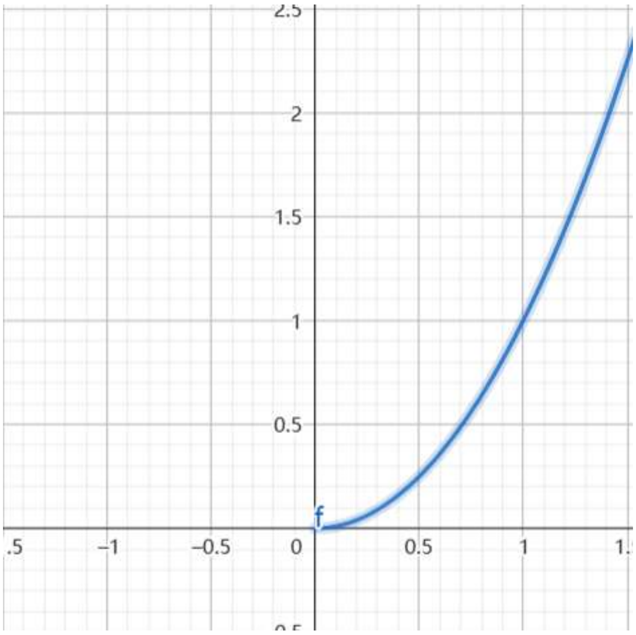
1.设 X 是指数分的随机变量,求 $Y=X^2$ 的分布函数和密度函数.

解:
因为:

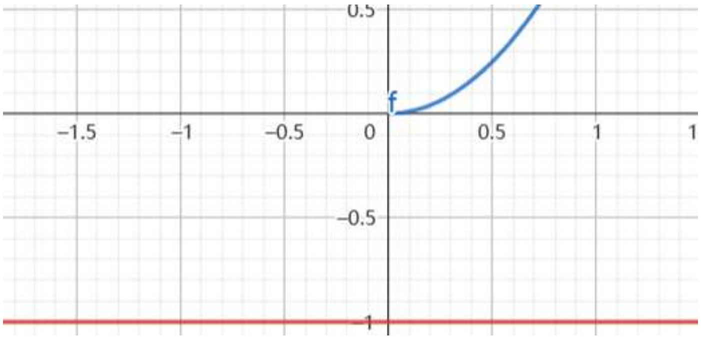
$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x},x\geq 0\\0,x<0\end{cases} \tag{4}$$

$$P\{Y\leq y_0\}=P\left\{X^2\leq y_0\right\} \tag{5}$$

1.定义域 $x\geq 0$
2.图像

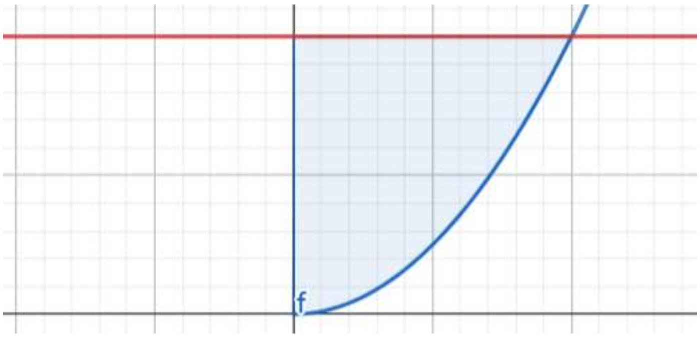


3.讨论
3.1 $y<0$ 时



无面积,故 $F_Y(y)=0$

3.2 $y\leq 0$ 时



将有意义的面积投影到 x 轴上,此时 $x\in(0,\sqrt{y_0})$,则:

$$\begin{aligned} P\{X\leq\sqrt{y_0}\} &= \int_0^{\sqrt{y_0}}\lambda e^{-\lambda x}dx \quad (6) \\ &= 1-e^{-\lambda\sqrt{y_0}} \quad (7) \end{aligned}$$

则:

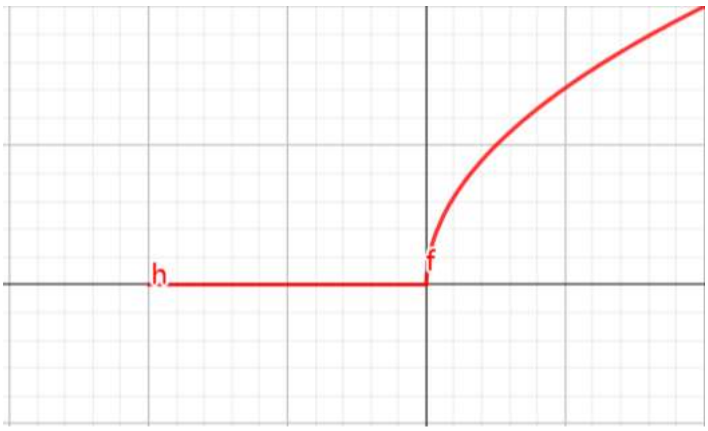
$$F_Y(y)=\begin{cases}0,y<0\\1-e^{-\lambda\sqrt{y}},y\geq 0\end{cases}\rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}\lambda e^{-\lambda\sqrt{y}},y\geq 0\\0,else\end{cases} \quad (8)$$

2.已知 X 是服从 $U[-1,1]$ 的随机变量, $y=g(x)=\begin{cases}\sqrt{x},0\leq x\leq 1\\0,-1\leq x<0\end{cases}$,求 $Y=G(X)$的分布函数.

解:

1.定义域 $x\in[-1,1]$

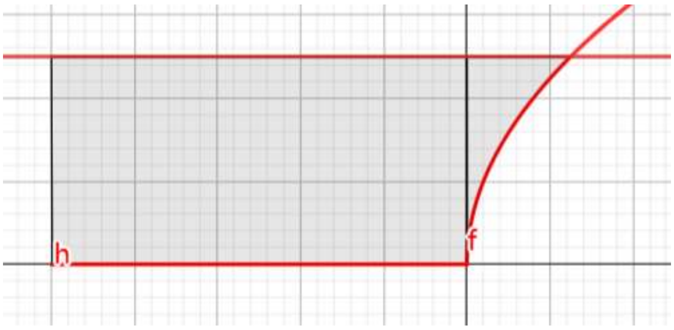
2.图像



3.分类讨论

3.1 $y<0$ 时, $F_Y(y)=0$

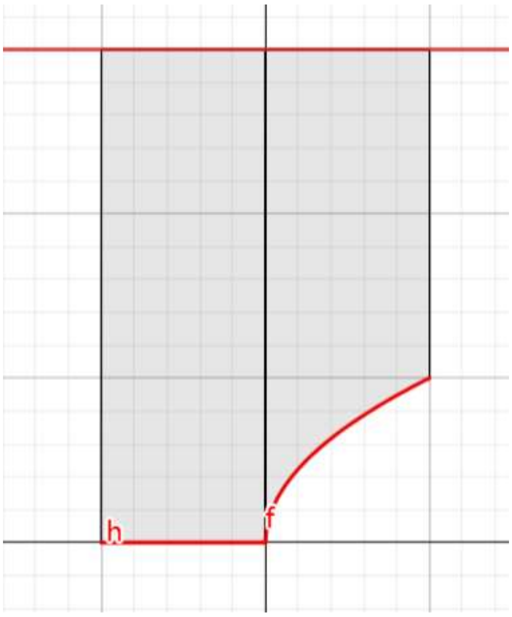
3.2 $0\leq y<1$ 时



此时投影下来的 $x \in (-1, y^2)$,则

$$P_Y\{Y \leq y\} = P\{-1 \leq X \leq 0\} + P\{0 \leq X \leq y^2\} \tag{9}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{y^2}{2} \tag{10}$$
$$= \frac{1+y^2}{2} \tag{11}$$

3.3 $y \geq 1$ 时



可以看到,$x \in [-1, 1]$,已经是将 x 的投影区域填满了,故 $F_Y(y) = 1$
故:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, y < 0 \\ \frac{1+y^2}{2}, 0 \leq y < 1 \\ 1, y \geq 1 \end{cases} \tag{12}$$

总结:
1.对于单调函数,利用公式法
2.对于复杂函数,我们可以采用 求定义域,定区间,画面积,做投影区域的方式来计算.同时要强调,复杂函数我们关注的更多的是对 x 的定义域和投影区间.