

# 202: Navadne diferencialne enačbe: robni problemi

Peter Rupnik

3. marec 2020

1. Izračunaj obliko vrvi, ki je obešena v dveh točkah na vrteči se navpični osi. Znan sistem

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} \left( F \frac{\partial x}{\partial s} \right) + \rho \omega^2 x &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} \left( F \frac{\partial y}{\partial s} \right) - \rho g &= 0 \\ \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 &= 1\end{aligned}$$

pretvorimo s substitucijami  $s \rightarrow s/l$ ,  $x \rightarrow x/l$ ,  $y \rightarrow y/l$ ,  $F \rightarrow F/\rho g l$ ,  $x/s = \cos \alpha$ ,  $y/s = \sin \alpha$ ,  $\beta = \omega^2 l/g$ , če je  $l$  dolžina vrvi, v sistem

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial s} &= -\beta x \cos \alpha + \sin \alpha & \frac{\partial x}{\partial s} &= \cos \alpha \\ F \frac{\partial \alpha}{\partial s} &= \beta x \sin \alpha + \cos \alpha & \frac{\partial y}{\partial s} &= \sin \alpha\end{aligned}$$

Zanj poznamo koordinate enega obesišča  $(0, 0)$  in bi radi zadeli drugo obesišče, pri čemer pa ne poznamo začetnega naklona vrvi  $\alpha(0)$  in sile v pritrdišču  $F(0)$ . Razišči mnogoterost dobljenih rešitev.

2. Pri študiju gibanja zvezd skozi galaksijo sta Hénon in Heiles vpeljala 3-števno simetrični potencial

$$U(x, y) = (x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3} y^3.$$

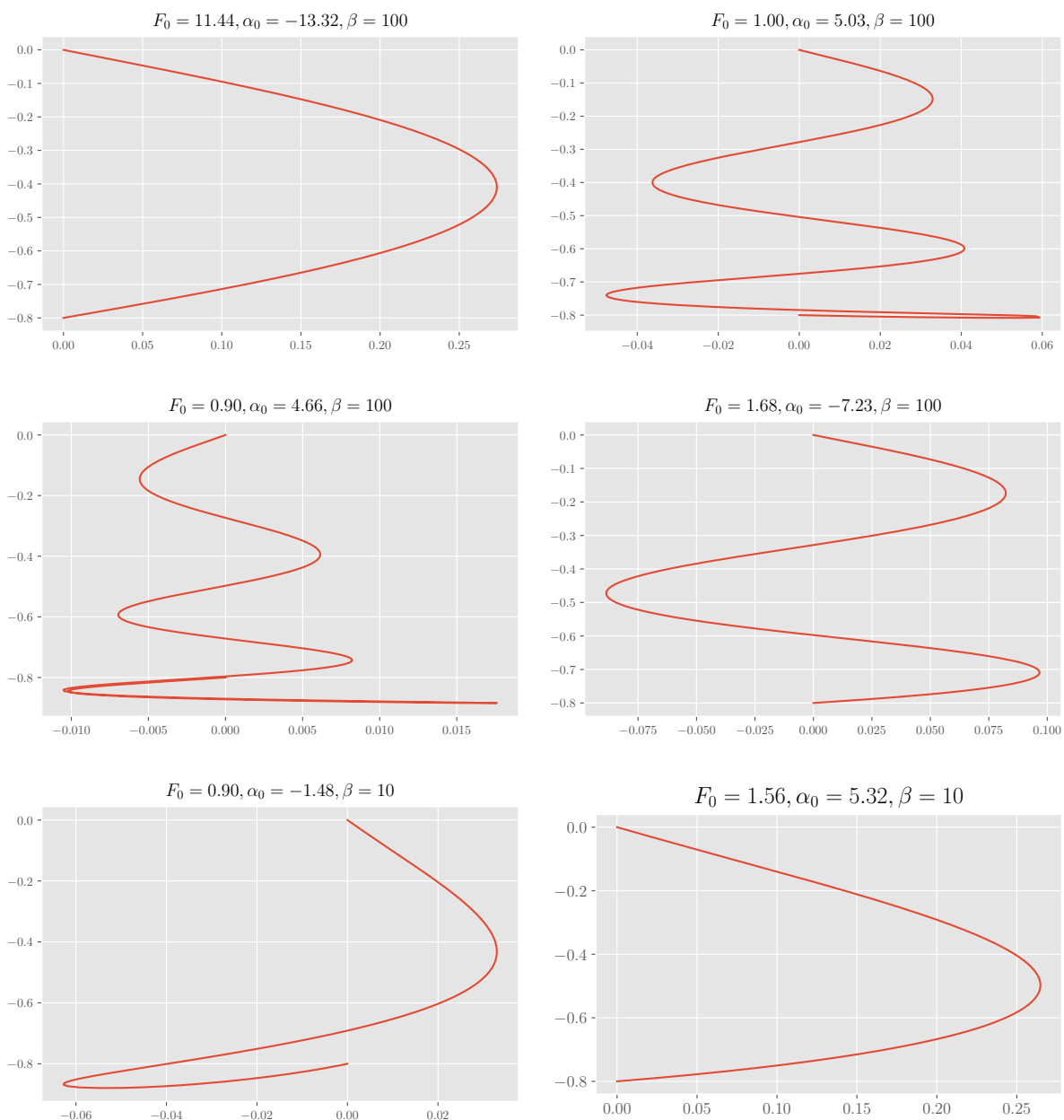
Za energije  $E < \frac{1}{6}$  je gibanje omejeno znotraj enakostraničnega trikotnika. V odvisnosti od energije in začetnih pogojev je gibanje periodično, kvaziperiodično ali kaotično.

S strelsko metodo določi periodične tire pri različnih energijah. Zaradi simetrije lahko začetni pogoj omejiš na daljico med izhodiščem in točko  $(0, 1)$ . Poskusi najti količine, s pomočjo katerih lahko tire razporediš v razrede – na primer obhodno število.

## 1 Prva naloga

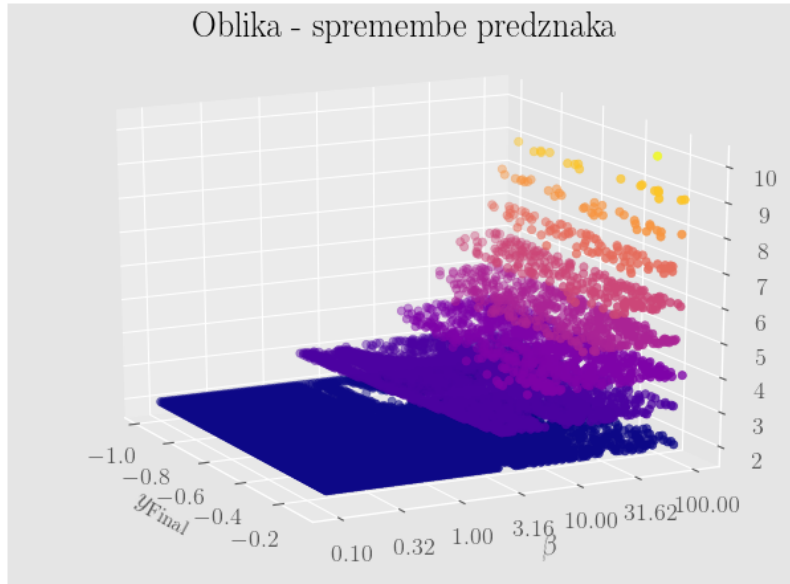
K reševanju sem pristopil z zapisom diferencialnih enačb, ki pogojujejo obliko vrvice. Pripravil sem funkcijo, ki iz začetnih pogojev integrira silo, kot in prostorski koordinati

po brezdimenzijski ločni dolžini. Pri tem sem uporabil integrator z adaptivnim korakom (`scipy.integrate.ode`), za iskanje ničel pa vektorsko funkcijo `scipy.optimize.root`, ki mi je omogočala *hkratno* iskanje končnega pogoja  $x_{-1} = 0$  in  $y_{-1} = y_f$ . Ko sem s strelsko metodo določil začetna pogoja  $F_0$  in  $\alpha_0$  pri želeni spremenljivki  $\beta$ , sem za 200 točk na vrvi izračunal njihove pozicije in jih prikazal. Za iskanje ničel sem potreboval začetne ocene za  $F_0$  in  $\alpha_0$ , kar sem rešil tako, da sem uporabil generator naključnega števila med 0 in 1 za začetno silo, za začetni kot pa sem generiral število med 0 in  $2\pi$ . Če rutina ni našla ničle, sem generacijo začetnih približkov pognal ponovno, pri čemer sem poskušanje omejil na 100 poskusov. Kot se je izkazalo, sem le izjemoma potreboval več kot 1 poskus. Prednost takega postopka je bolj pestra in netrivialna oblika vrvi. Nekaj oblik prikazujem spodaj. Opazimo, da tudi pri nehvaležnih oblikah, ki na slikah izgledajo špičasto, integrator ne odpove in nas verno pripelje v končno točko; slika je špičasta zgolj zaradi prikaza končnega števila točk s fiksnim korakom.



Prikazane oblike so raztegnjene ali skrčene v vodoravni smeri, hitro opazimo tudi, da lahko pri isti vrednostih  $\beta$  in  $y_f$  najdemo več kvalitativno različnih oblik vrvi. Da bi

korektno raziskal oblike vrvi, sem sestavil funkcije, ki preštejejo število sprememb predznaka, določijo maksimalen absolutni odmik od osi  $y$  in maksimalno globino vrvi. Ker so ponekod oblike degenerirane, sem za različne  $\beta$  in  $y_f$  najprej poiskal rešitve in jih opisal s funkcijami, vrednosti funkcij pa prikazal na 3D grafih.

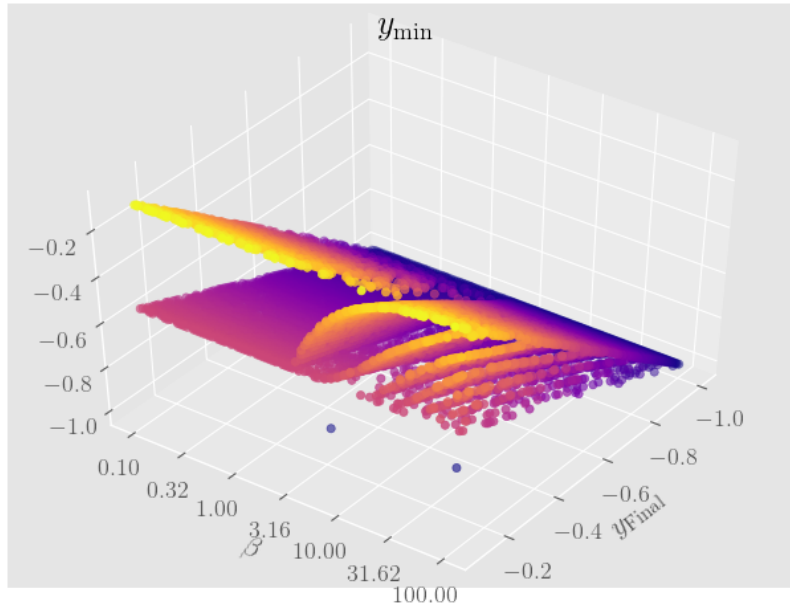


Pri spremembi predznaka je opazen globalen minimum pri vrednosti 2, kar lahko pojasnimo z definicijo funkcije

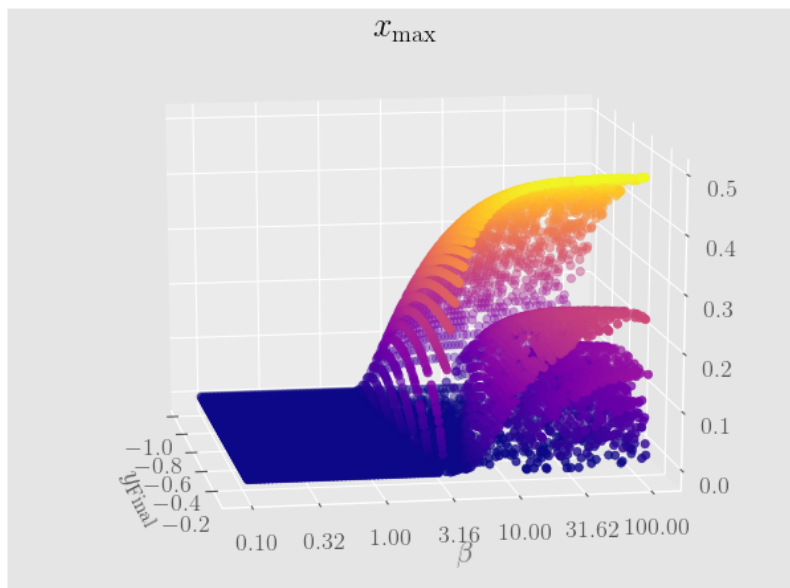
$$\text{Signum}(x) = \begin{cases} -1 & \text{če } x < 0, \\ 0 & \text{če } x = 0, \\ 1 & \text{če } x > 0. \end{cases}$$

Ker integracijo vedno začnemo in končamo pri  $x = 0$ , nam vsaka oblika prinese najmanj 2 spremembi predznaka, razen trivialne rešitve, ko vrv samo obvisi v navpični smeri. Opazimo, da z naraščanjem kotne frekvence najdemo vedno bolj pestre rešitve, vpliv končnega pritrdišča točke pa na pestrost ne vpliva dosti.

Za maksimalno globino t.j. minimalno vrednost  $y$  koordinate velja, da je pri *razpeti* neraztegljivi vrvi (torej ko je  $y_f = 1$ ) fiksirana ne glede na vrednost parametra  $\beta$ . Tedaj je vrv popolnoma raztegnjena, vsaka trajektorija je zgolj ravna črta med izhodiščem in točko  $(0, y_f)$ . Če spodnje pritrdišče premikamo višje, opazimo dve ravnini rešitev, ki pa se s povečevanjem  $\beta$  porušita. V ravnini  $(\beta, y_{\min})$  dobimo zanimive vzorce, ki pa se pojavijo šele nad neko kritično vrednostjo:

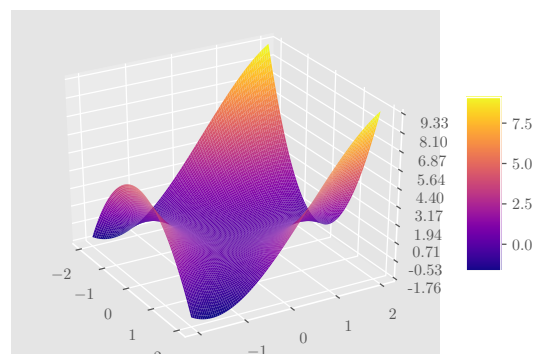
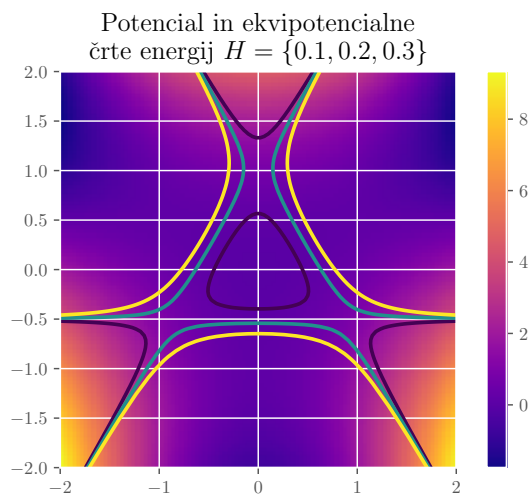


Za maksimalen odklik od navpične osi velja podobno: pri nizkih  $\beta$  se ne dogaja kaj dosti zanimivega, nad neko kritično vrednostjo pa lahko najdemo več rešitev, ki so (vsaj pri moji resoluciji) presenetljivo zvezne in distinktno ločene med seboj. Tudi tu vpliv spodnjega pritrdišča ni močen, razen pri distalnem robu slike, ko je vrv napeta, kjer je rob vseh najdenih ploskev fiksiran, saj deviacija od navpične osi ni mogoča.

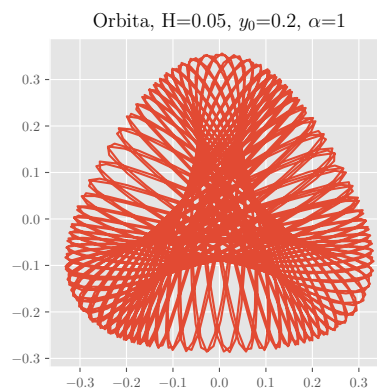
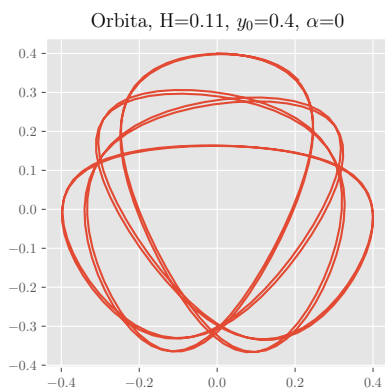


## 2 Druga naloga

Za lažjo vizualizacijo narišimo potencial, o katerem teče beseda.

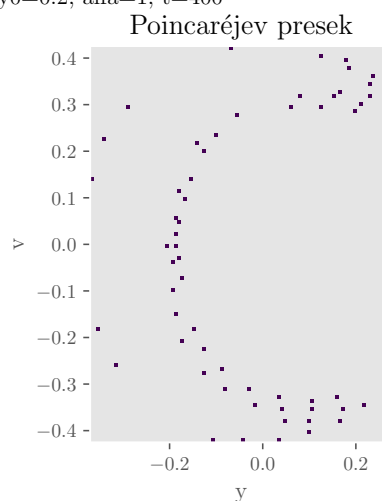
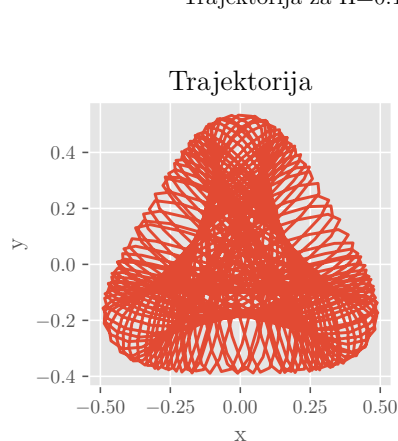


Narisati znam tudi kakšno testno orbito:



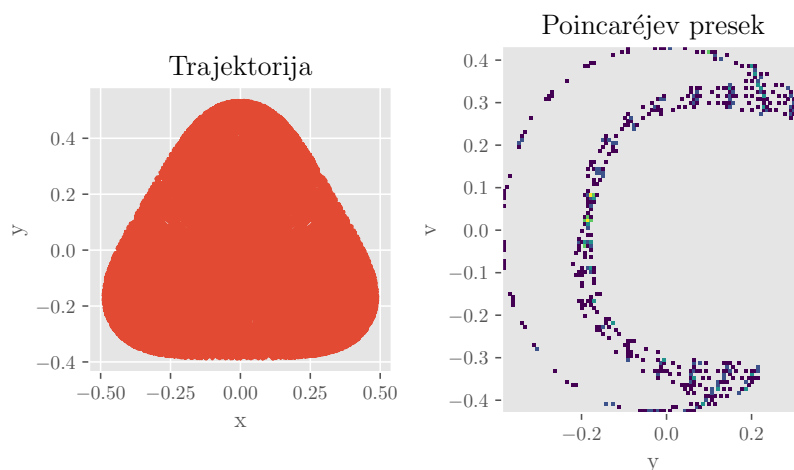
Zanimajo me tudi Poincaréjevi preseki, katere sem tokrat računal že med samo integracijo. Najdem lahko nekaj zanimivih primerov, zanimalo me je tudi, ali je izgled Poincaréjevega preseka od časa integracije. Najprej prikazujem relativno kratek čas integracije:

Trajektorija za  $H=0.1, y_0=0.2$ ,  $\alpha=1$ ,  $t=400$



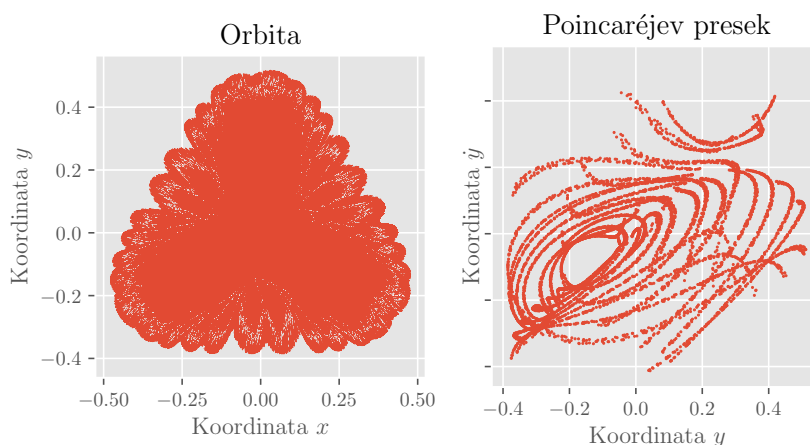
Čas integracije sem nato podeseteril.

Trajektorija za  $H=0.1, y_0=0.2$ ,  $\alpha=1$ ,  $t=4000$

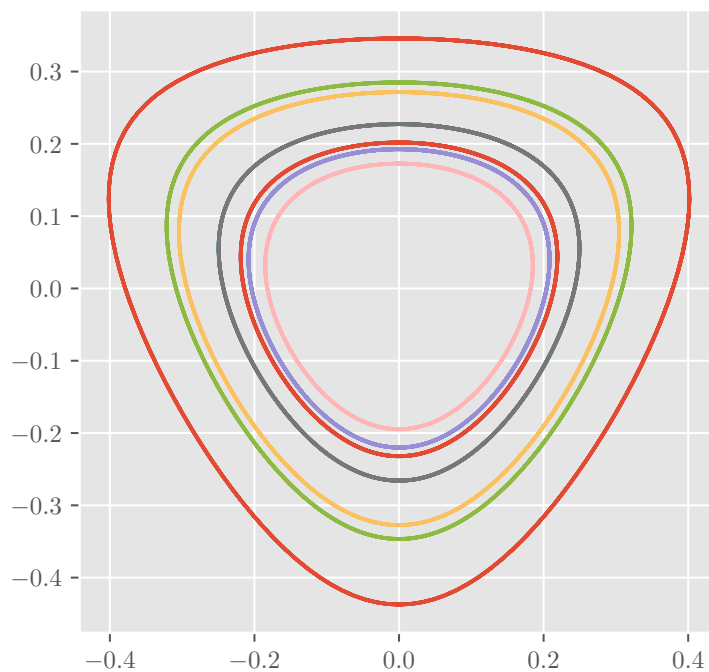


Našel sem tudi druge oblike orbit, ki izkazujejo kaotičnost.

Testna orbita,  
parametri:  $y_0 = 0.1$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $H = 0.1$



S streljanjem sem imel več težav kot pri prvi nalogi; za razliko od konca vrvi tu ne vemo, kam postaviti točko, ki jo streljamo. Imel sem mnogotero idej, denimo spremljanje obodnega kota okrog izhodišča in iskanje Poincaréjevega preseka s pametnim integriranjem okrog časa, ko orbita sklene  $n \cdot 2\pi$  in nato streljanje tako, da se začetni pogoji ponovijo v tej točki, a mi implementacija ni uspela. Naposled sem uporabil brute-brute-force tehniko: iz enakomerne porazdelitve sem žrebal začetno energijo, začetno koordinato  $y_0$  in začetni kot  $\alpha$ , pa tudi obhodni čas, po katerem se mora orbita ponoviti. Tako nažrebane približke sem nato napadel s strelsko metodo in upal na konvergenco rezultatov, kar se kajpada ni zgodilo pogosto. Na sto poskusov sem pridelal  $\mathcal{O}(5)$  parametrov, veliko pa je bilo tudi duplikatov. Na žalost nisem našel orbit, ki bi bile bolj eksotične kot kroženje v trikotnem potencialu.



Ko sem ugibanje začetnih parametrov nastavil bolje, sem našel tudi sklenjene orbite, ki se ponovijo šele po večkratnem obkrožanju izhodišča:

