

202: Navadne diferencialne enačbe: robni problemi

Peter Rupnik
28182021

6. marec 2024

- Izračunaj obliko vrvi, ki je obešena v dveh točkah na vrteči se navpični osi. Znan sistem

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} \left(F \frac{\partial x}{\partial s} \right) + \rho \omega^2 x &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} \left(F \frac{\partial y}{\partial s} \right) - \rho g &= 0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 &= 1\end{aligned}$$

pretvorimo s substitucijami $s \rightarrow s/l$, $x \rightarrow x/l$, $y \rightarrow y/l$, $F \rightarrow F/\rho gl$, $x/s = \cos \alpha$, $y/s = \sin \alpha$, $\beta = \omega^2 l/g$, če je l dolžina vrvi, v sistem

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial s} &= -\beta x \cos \alpha + \sin \alpha & \frac{\partial x}{\partial s} &= \cos \alpha \\ F \frac{\partial \alpha}{\partial s} &= \beta x \sin \alpha + \cos \alpha & \frac{\partial y}{\partial s} &= \sin \alpha\end{aligned}$$

Zanj poznamo koordinate enega obesišča $(0, 0)$ in bi radi zadeli drugo obesišče, pri čemer pa ne poznamo začetnega naklona vrvi $\alpha(0)$ in sile v pritrdišču $F(0)$. Razišči mnogoterost dobljenih rešitev.

- Pri študiju gibanja zvezd skozi galaksijo sta Hénon in Heiles vpeljala 3-števno simetrični potencial

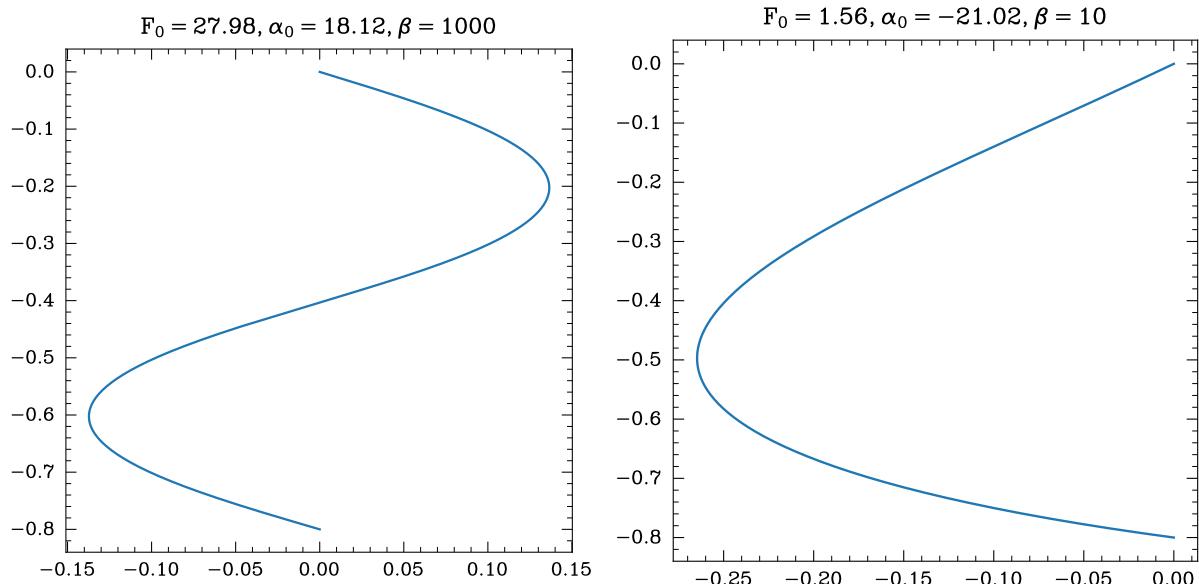
$$U(x, y) = (x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3} y^3.$$

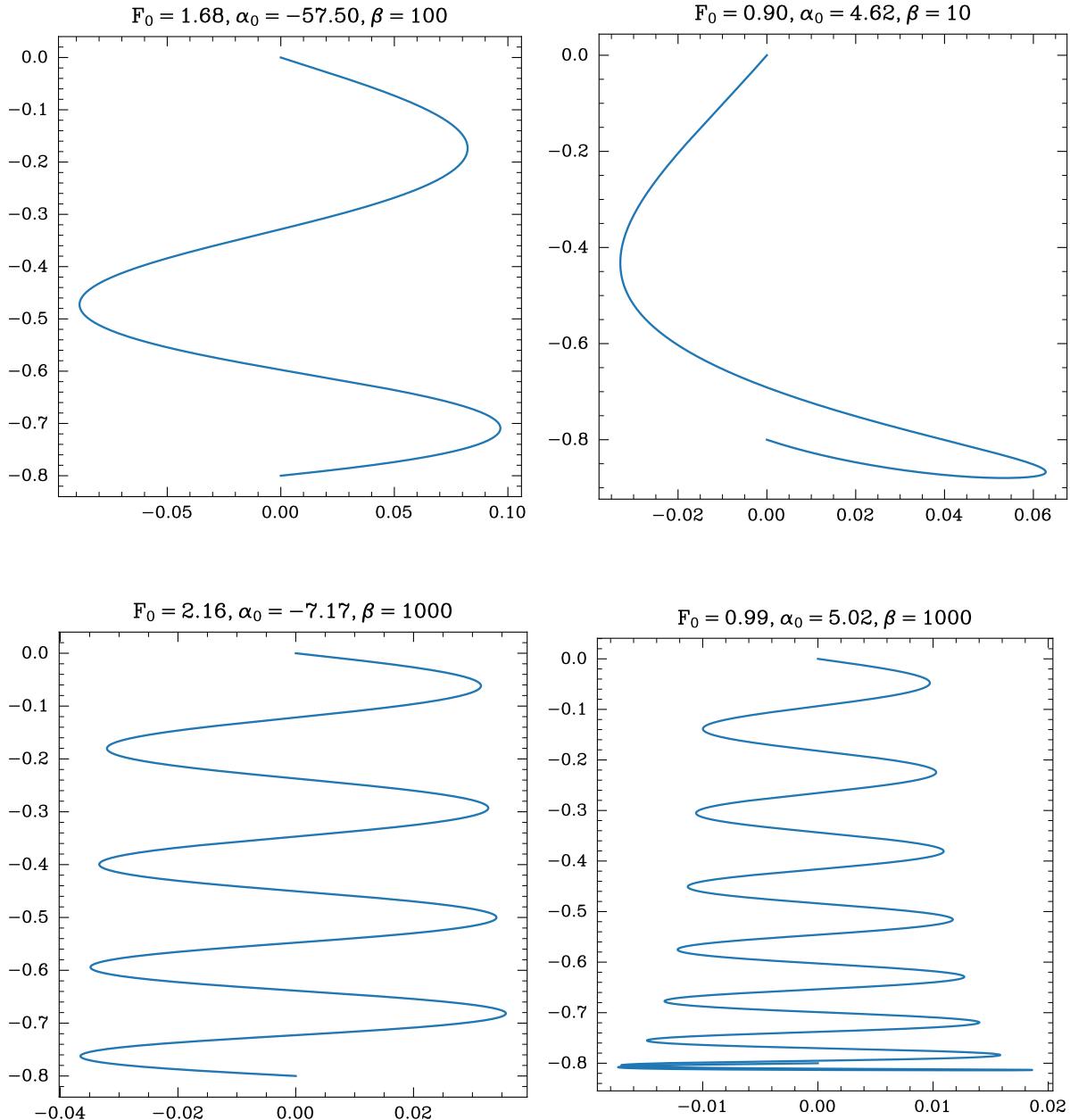
Za energije $E < \frac{1}{6}$ je gibanje omejeno znotraj enakostraničnega trikotnika. V odvisnosti od energije in začetnih pogojev je gibanje periodično, kvaziperiodično ali kaotično.

S strelsko metodo določi periodične tire pri različnih energijah. Zaradi simetrije lahko začetni pogoj omejiš na daljico med izhodiščem in točko $(0, 1)$. Poskusi najti količine, s pomočjo katerih lahko tire razporediš v razrede – na primer obhodno število.

1 1. naloga

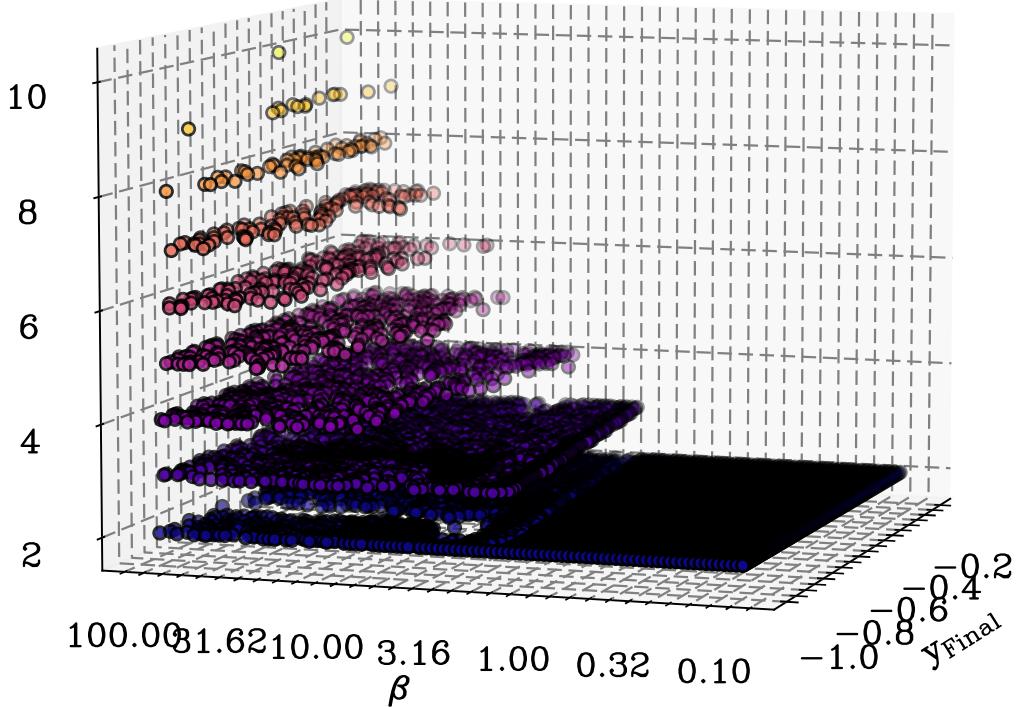
K reševanju sem pristopil z zapisom diferencialnih enačb, ki pogojujejo obliko vrvice. Pripravil sem funkcijo, ki iz začetnih pogojev integrira silo, kot in prostorski koordinati po brezdimenzijski ločni dolžini. Pri tem sem uporabil integrator z adaptivnim korakom (`scipy.integrate.ode`), za iskanje ničel pa vektorsko funkcijo `scipy.optimize.root`, ki mi je omogočala hkratno iskanje končnega pogoja $x_{-1} = 0$ in $y_{-1} = y_f$. Ko sem s strelske metodo določil začetna pogoja F_0 in α_0 pri želeni spremenljivki β , sem za 200 točk na vrvi izračunal njihove pozicije in jih prikazal. Za iskanje ničel sem potreboval začetne ocene za F_0 in α_0 , kar sem rešil tako, da sem uporabil generator naključnega števila med 0 in 1 za začetno silo, za začetni kot pa sem generiral število med 0 in 2π . Če rutina ni našla ničle, sem generacijo začetnih približkov pognal ponovno, pri čemer sem poskušanje omejil na 100 poskusov. Kot se je izkazalo, sem le izjemoma potreboval več kot 1 poskus. Prednost takega postopka je bolj pestra in netrivialna oblika vrvi. Nekaj oblik prikazujem spodaj. Opazimo, da tudi pri nehvaležnih oblikah, ki na slikah izgledajo špičasto, integrator ne odpove in nas verno pripelje v končno točko; slika je špičasta zgolj zaradi prikaza končnega števila točk s fiksним korakom.





Prikazane oblike so skalirane v vodoravni smeri. Hitro opazimo, da lahko pri isti vrednostih β in y_f najdemo več kvalitativno različnih oblik vrvi. Da bi korektno raziskal oblike vrvi, sem sestavil funkcije, ki preštejejo število sprememb predznaka, določijo maksimalen absolutni odmik od osi y in maksimalno globino vrvi. Ker so ponekod oblike degenerirane, sem za različne β in y_f najprej poiskal rešitve in jih opisal s funkcijami, vrednosti funkcij pa prikazal na 3D grafih.

Oblika – spremembe predznaka



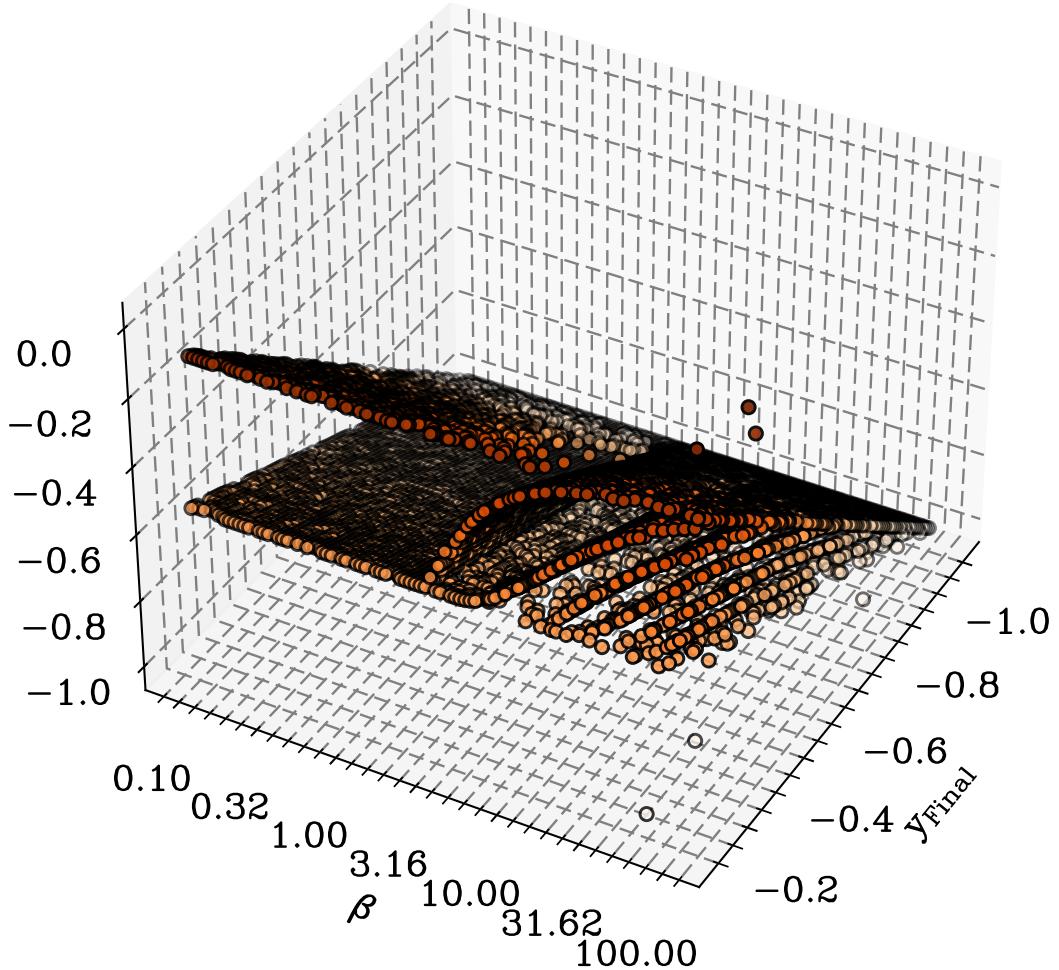
Pri spremembi predznaka je opazen globalen minimum pri vrednosti 2, kar lahko pojasnimo z definicijo funkcije

$$\text{Signum } (x) = \begin{cases} -1 & \text{če } x < 0, \\ 0 & \text{če } x = 0, \\ 1 & \text{če } x > 1. \end{cases}$$

Ker integracijo vedno začnemo in končamo pri $x = 0$, nam vsaka oblika prinese najmanj 2 spremembi predznaka, razen v primeru, da celotna trajektorija leži na $x = 0$. Opazimo, da z naraščanjem kotne frekvence najdemo vedno bolj pestre rešitve, vpliv končnega pritrdišča točke pa na pestrost ne vpliva dosti. Pri visokih β je opaziti polje, kjer v nobenem primeru ne najdemo rešitev, ki bi dvakrat spremenile predznak.

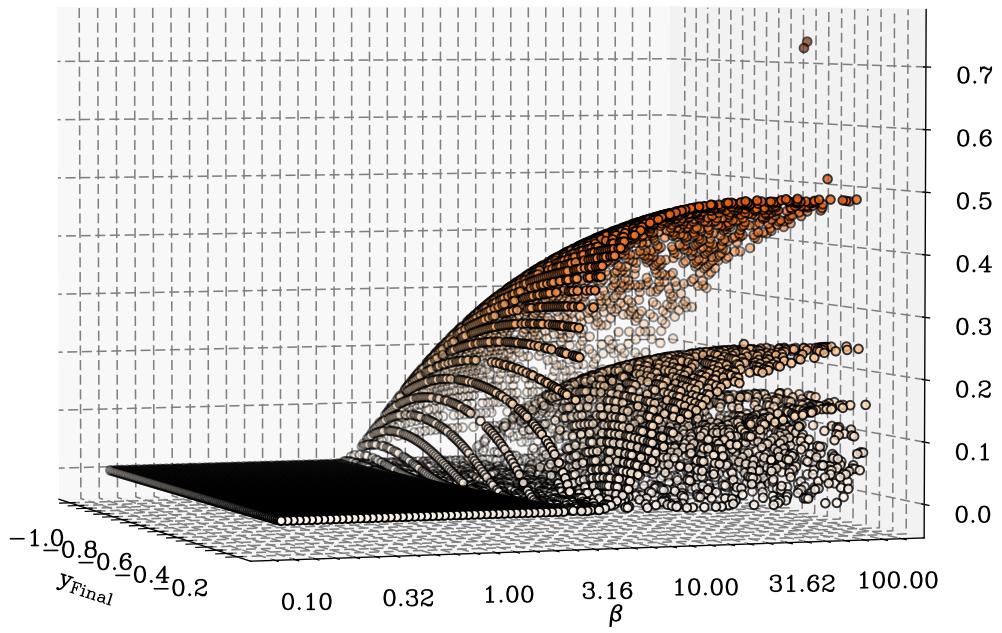
Za maksimalno globino t.j. minimalno vrednost y koordinate velja, da je pri *razpeti* neraztegljivi vrvi (torej ko je $y_f = -1$) enaka ne glede na vrednost parametra β . Tedaj je vrv polnoma raztegnjena, vsaka trajektorija je zgolj zveznica med izhodiščem in točko $(0, y_f) = (0, -1)$. Če spodnje pritrdišče variiramo, opazimo dve ravnini rešitev. V ravnini (β, y_{\min}) dobimo zanimive vzorce, ki pa se pojavijo šele, ko β preseže kritično vrednost:

y_{\min}

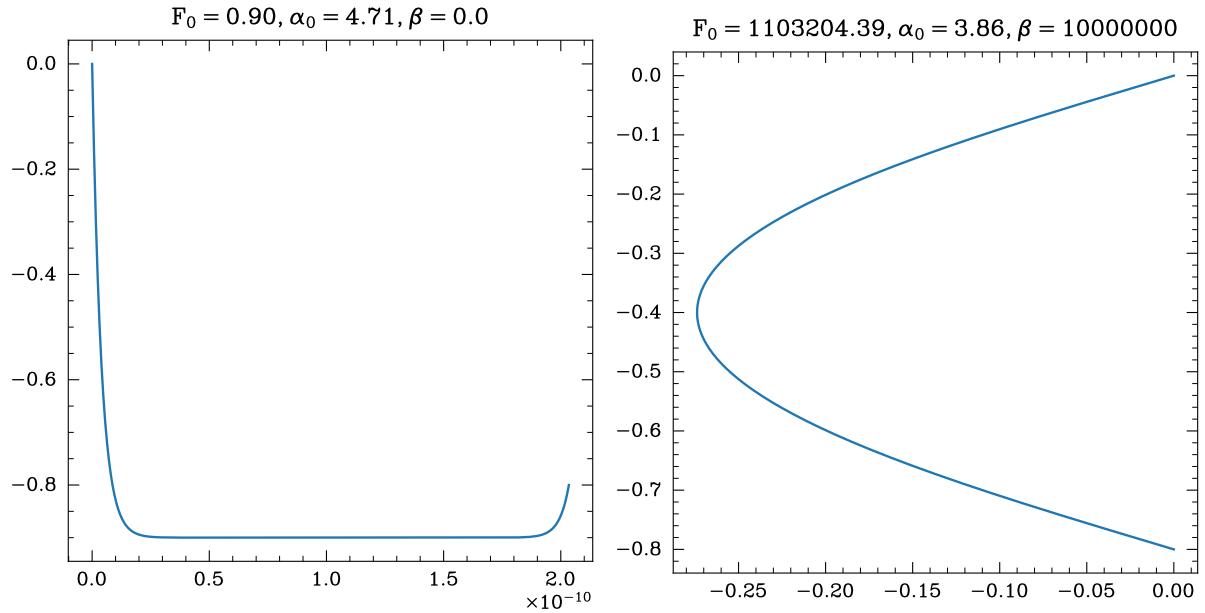


Za maksimalen odmik od navpične osi velja podobno: pri nizkih β se ne dogaja kaj dosti zanimivega, nad neko kritično vrednostjo pa lahko najdemo več ploskev rešitev, ki so presenetljivo zvezne in distinktno ločene med seboj. Tudi tu vpliv spodnjega pritrdišča ni močen, razen pri distalnem robu slike, ko $y_{Final} \rightarrow -1$. Tu je vrv napeta, in deviacija od navpične osi ni mogoča.

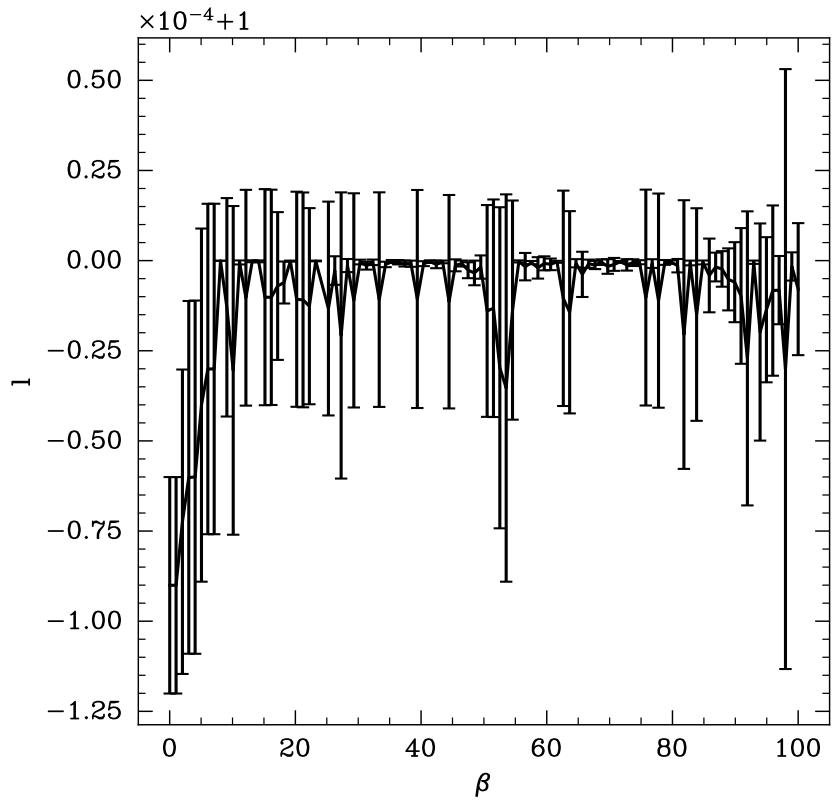
\mathbf{x}_{\max}



Preverim lahko še obnašanje v limitah $\omega \rightarrow \infty$ in $\omega \rightarrow 0$. Za slednji primer lahko uporabim doslej uporabljeni cevovod, za velike vrednosti ω pa moram popraviti žrebanje začetnih približkov tako, da se sila v pritrdišču žreba iz bistveno večjega intervala, kar mi omogoča najti najbolj razpete vrvi. Pri $\beta = 0$ opazimo, da vrv ne konča več v $x = 0$, ampak $2e-10$ stran, ker za ta limitni primer optimizator odpove.



Preveril sem tudi ohranitev dolžine. Pri diskretizaciji z 2000 elementi se dolžina ohrani na $0.5\text{e}-4$, pri določenih vrednostih β še dosti bolj, opazen pa je tudi trend pri nizkih vrednostih β , kjer konsistentno in monotono 'izgubljamo' dolžino med integracijo.



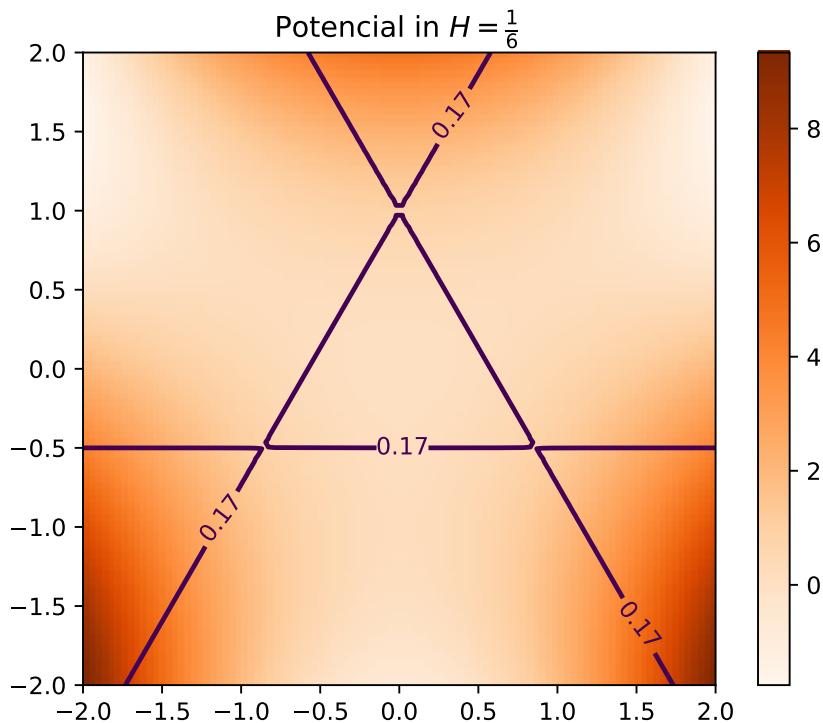
2 2. naloga

Najprej sem si pripravil cevovod za integracijo trajektorij. Za Poincaréjeve preseke sem spet implementiral event tracker funkcijo, ki v vektorju

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

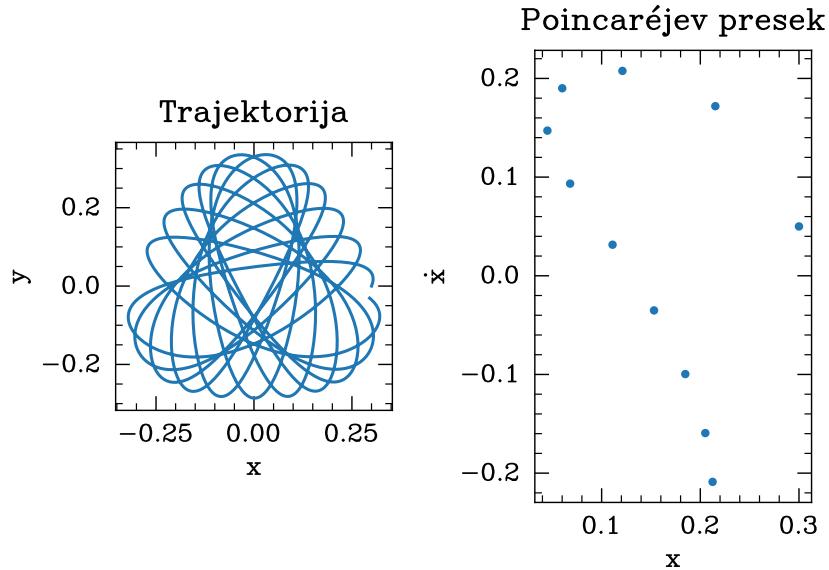
izlušči samo komponento y in išče njene ničle, kjer y preide iz negativnega znaka v pozitivnega. To pomeni, da lahko s tako dobljenimi dogodki najdem vse čase prehodov in vse \vec{X} pri prehodih čez os x .

Za orientacijo sem si izrisam skico potenciala in ekvipotencialne črte pri $\mathcal{H} = \frac{1}{6}$.



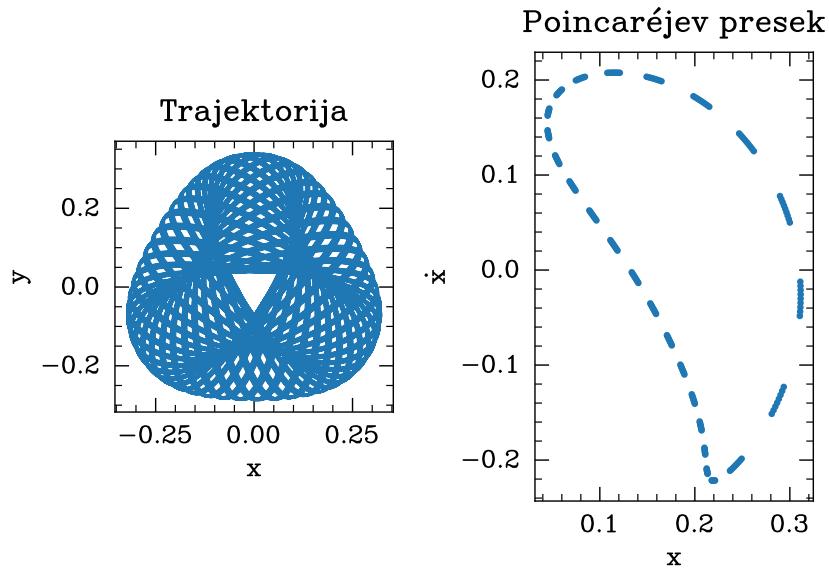
Moj prvi poskus je bila integracija trajektorije in ekstrakcija podatkov za Poincaréjeve preseke za poljubne začetne pogoje. Pri integraciji od $t = 0$ do $t = 70$ dobim naslednjo sliko.

$$\mathbf{v}_0 = [0.3 \ 0. \ 0.05 \ 0.12] \\ t_{\max} = 70$$



Zanimalo me je, kaj se zgodi s Poincaréjevim presekom, če čas integracije še podaljšam. Izkaže se, da se namesto distinktnih izoliranih točk le-te pričnejo združevati v sklenjen presek torusa:

$$\mathbf{v}_0 = [0.3 \ 0. \ 0.05 \ 0.12] \\ t_{\max} = 1400$$

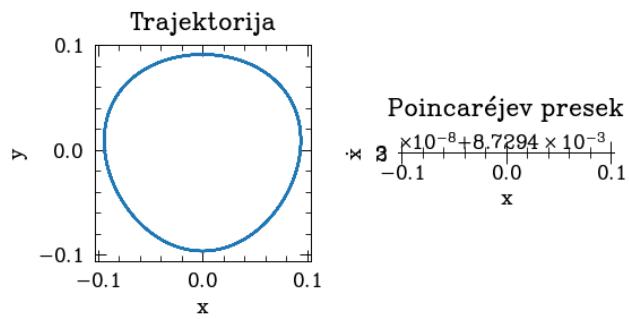


Pri še daljših časih se presledki med otoki točk še bolj manjšajo.

Pri implementaciji strelske metode sem prav tako izkoristil točke, ki jih potrebujem za Poincaréjeve preseke. Z metodo `scipy.optimize.root` sem iskal začetne pogoje, pri katerih razlika $\vec{X}_1 - \vec{X}_2$ nič, vektorja \vec{X} pa sta vektorja v faznem prostoru pri prvem in drugem prehodu čez abscisno os. Izkaže se, da je to za optimizacijsko metodo precej težko; vsaka iteracija traja precej časa in konvergenco ne moremo zagotoviti v vsakem primeru. Vseeno mi je uspelo najti sklenjene orbite, kjer optimizator stisne Poincaréjev presek v eno samo točko, vse pa izgledajo kot 'kroženje' okrog centra:

$$\mathbf{v}_0 = [0.00061335 \ 0.09082925 \ -0.09983497 \ 0.00050733]$$

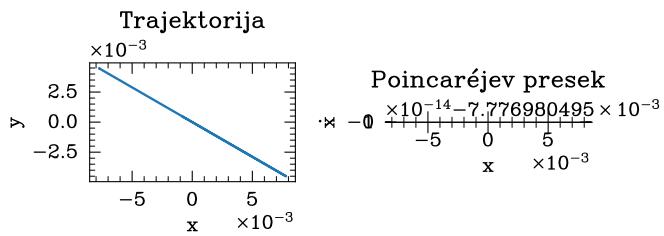
$$t_{\max} = 70$$



Bolj pogosto kot sklenjene 'krožne' orbite pa je optimizacija vrnila začetne pogoje, kjer orbita ne kroži, marveč le niha v potencialu okrog izhodišča:

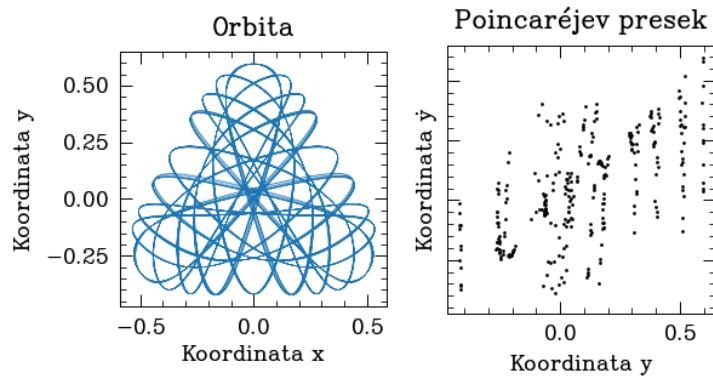
$$\mathbf{v}_0 = [-0.0077488 \ 0.00447377 \ -0.00028175 \ 0.00016267]$$

$$t_{\max} = 30$$



Za poenostavitev problema sem začetni vektor nastavil drugače, tako da namesto dveh začetnih koordinat eno od njih fiksiram na $x_0 = 0$ in variiram le drugo, namesto začetnih hitrosti pa sem uvedel energijo \mathcal{H} in začetni kot α . Tudi v tej poenostavitevi mi ni uspelo najti bolj pestrih orbit kot kroženje okrog izhodišča, uspelo pa mi je najti začetne pogoje, ki določijo gibanje, za katerega lahko upravičeno sumimo, da je kaotično:

parametri: $y_0 = 0.107$, $\alpha_0 = 0.935$, $H = 0.123$



V tem primeru je čas integracije znašal 1000, Poincaréjev presek pa za razliko od prvega primera zgoraj ne izgleda kot lep prerez torusa v faznem prostoru, ampak izkazuje bistveno večjo kompleksnost.