

# 102: Linearna optimizacija

Peter Rupnik

15. oktober 2018

## 1 Naloga

Med tipične primere, ki jih lahko učinkovito rešimo z metodami linearnega programiranja, sodi sestavljanje diet za hujšanje, zdravljenje ali športne aktivnosti. Za dani nabor živil določamo njihove količine, pri čemer moramo zadostiti različnim omejitvam. Med drugim moramo zagotoviti priporočene dnevne odmerke mineralov, vitaminov in hranilnih snovi, omejiti pri vnos maščob, ogljikovih hidratov ter telesu škodljivih snovi, hkrati pa zagotoviti, da energijska vrednost ustreza zahtevam posameznika. Vnos vsake izmed hranilnih snovi je linearna funkcija količin živil in je natanko določena z njihovo sestavo. Od vrste diete pa je odvisno, katere parametre omejimo in katere minimiziramo.

1. Datoteka `tabela-zivil.dat` na strani <http://predmeti.fmf.uni-lj.si/modelska/podatki> vsebuje podatke o energijski vrednosti ter vsebnosti maščob, ogljikovih hidratov, proteinov, kalcija in železa v nekaj živilih. Minimiziraj količino kalorij, če je priporočen minimalni dnevni vnos 70 g maščob, 310 g ogljikovih hidratov, 50 g proteinov, 1000 mg kalcija ter 18 mg železa. Upoštevaj tudi, da naj dnevni obroki količinsko ne presežejo dveh kilogramov hrane. Upoštevate lahko še minimalne vnose za vitamin C (60 mg), kalij (3500 mg) in sprejemljiv interval za natrij (500 mg – 2400 mg), ki so tudi na voljo v tabeli.
  2. Kako se rezultat razlikuje, če zahtevamo minimalno 2000 kcal in namesto energije minimiziramo vnos maščob?
  3. Ker rešujemo poenostavljen problem z malo parametri na živilo, so lahko rezultati nerealistični. Lahko z omejitvijo količine posameznih živil v obroku izboljšaš uravnovešenost prehrane?
- \* (neobvezno) Poišči cene živil in poskusi namesto kalorij minimizirati ceno. Kako se varčevanje odraža na zdravi prehrani?

## 2 Prvi del – minimizacija energije

Naloge sem se lotil z uvozom podatkov iz podane datoteke. Na prvi pogled so podatki izgledali epileptično razmetani po datoteki, vendar se je izkazalo, da so formatirani s tabulatorjem, z veseljem sem ugotovil, da nimam ne manjkajočih ne odvečnih podatkov v podatkovni strukturi. Uporabil sem Pythonovo knjižnjico Pandas<sup>1</sup>, ki mi je omogočila,

---

<sup>1</sup>Poleg vsega drugega poskrbi Pandas tudi za  $\text{\LaTeX}$  formatiranje rezultatov, ki jih lahko nato direktno vključimo v poročilo.

da sem na bolj razviden način manipuliral s podatki. Za primer navajam prvi del, kodo 1. Pripravil sem si tudi pomožno funkcijo, ki mi je rezultat oklestila ničelnih elementov in sortirala po količini posameznega živila.

```

1  c = zivila["energija[kcal]"]      #minimizirana količina
2  b_ub = np.array([                #stolpec maksimalnih vrednosti
3      -70,
4      -310,
5      -50,
6      -1000,
7      -18,
8      20])
9  A = np.array([                  #matrika A maksimalnih vrednosti
10     -zivila["mascobe[g]"],
11     -zivila["ogljikovihidrati[g]"],
12     -zivila["proteini[g]"],
13     -zivila["Ca[mg]"],
14     -zivila["Fe[mg]"],
15     np.ones((len(zivila))))])

```

Koda 1: Prvi del; priprava matrike  $A_{\max}$ , stolpca  $b_{\max}$  in minimizirane količine  $c$ . Zaradi uporabe knjižnice Pandas se priprava matrike poenostavi, tudi po nekaj dneh pa je hitro razvidno, kaj sem v posameznem primeru minimiziral in kakšne omejitve sem zahteval. Zadnji pogoj, `np.ones((len(zivila)))`, poskrbi za omejitev skupne mase na manj kot 20 enot (saj imamo podatke za 100 g) tako, da ustvari novo vrstico tabele  $A$  in jo napolni z enicami.

## 2.1 Minimalne omejitve

Pričel sem z enostavnimi zahtevami kot v navodilu; minimiziral sem energijo, zahteval pa vsaj 70 g maščob, 50 g proteinov, 310 g OH, 1000 mg kalcija in 18 mg železa. Rezultat je silno zanimiv in še bolj silno neuporaben, najdete ga v tabeli 1.

Živilo	Količina[kg]
Sol	1,430661
Kakav	0,495628
Marmelada	0,056219
Pomfri	0,017492

Tabela 1: Prvi del, minimizacija energije z minimalnimi omejitvami. Hitro vidimo, da je rezultat izrojen; taka dieta nam sicer res ponudi majhen vnos energije (1288.991842 kcal, od tega sol ne prispeva nič, prispeva pa nekaj železa, kalcija in kalija), a je tako milorečeno neokusna kot tudi smrtno nevarna. V nadaljevanju bom uvedel več omejitev, ki bodo poskrbele za bolj zdravo in realno prehrano.

## 2.2 Dodatne omejitve

Dalje lahko iz navodil poberemo še nekaj namigov za manj smrtonosno prehrano; dodal sem minimalne vnose za vitamin C, kalij in sprejemljiv interval za natrij, zaradi česar pričakujemo, da se bo sol poslovila z vrha jedilnika. Vrednost energijskega vnosa se je sicer povečala s prejšnje vrednosti, a ne prav dosti. Spet je na vrhu jedilnika pristalo presenetljivo živilo. Rezultat podaja tabela 2. Ta jedilnik upošteva 10 omejitev, a tudi to ne zadošča za dosego zdrave in uravnotežene prehrane. Potrebni bodo še dodatni pogoji.

Živilo	Količina[kg]
Radenska	1,280673
Kakav	0,508940
Pomaranca	0,096621
Solata	0,079671
Marmelada	0,029733
Sol	0,004362

Tabela 2: Dodane smiselne omejitve porodijo jedilnik, s katerim bi morda preživeli nekaj dni, je pa očitno daleč od smernic zdrave in uravnotežene prehrane kljub precej omejitvam. Vrednost energijskega vnosa je malenkost višja in znaša za ta primer 1297.2737 kcal.

## 3 Drugi del — minimizacija vnosa maščob

### 3.1 Minimalne omejitve

Zahteval sem minimalen vnos 2000 kcal in minimalizacijo vnosa maščob in nič drugega, čeprav že vemo, da to ne vodi v smiselne jedilnike. Pričakujemo torej živilo, ki nam bo zagotovilo zahtevano energijo in čim manj maščob. Poglejmo v tabelo 3.

Živilo	Količina[kg]
Med	0,657895

Tabela 3: Dieta vrčka medu dnevno nam zagotovi 0 g maščob in pokrite energijske potrebe, a bi verjetno še Medvedek Pu čez čas izgubil voljo in posegel še po drugih živilih.

### 3.2 Dodatne omejitve

V obravnavo vključim še omejitve, ki smo jih upoštevali pri minimizaciji maščob, dobim tabelo 4.

## 4 Tretji del – omejitve posameznih količin

V tem delu sem obdržal vse omejitve iz prvega dela, torej sem minimiziral vnos energije, nato pa sem iterativno dodajal še omejitve posameznih količin. V ta namen sem v faznem prostoru živil dodal enotske vektorje v smeri posameznega živila, na tak način sem lahko

Živilo	Količina[kg]
Solata	1,156932
Marmelada	0,490572
Fizol	0,245238
Kruh_bel	0,102225
Puran	0,005033

Tabela 4: Dodane omejitve iz prejšnjega dela, vnos maščob se poveča na 7.4376 g dnevno. Spet so rezultati nerealni, bralci naj sodijo sami, ali bi jim večji problem predstavljalo zaužitje dobrega kilograma solate ali pol kilograma marmelade s 100 g kruha.

omejih produkt vrstice matrike in matrike vektorja živil  $A_{\max}\vec{x} < \vec{b}$ . Največje ‘dovoljene’ količine posameznih živil sem določil po lastnem okusu, omejitve pa sem postavljaj, dokler nisem bil zadovoljen s ponujenim jedilnikom. Rezultate najdemo v tabeli 5.

Živilo	Količina[kg]
Pomfri	0,300000
Brokoli	0,200000
Pomaranca	0,200000
Jagode	0,200000
Strocji_fizol	0,200000
Radenska	0,192389
Kruh_bel	0,131007
Torta	0,112841
Paprika	0,100000
Korenje	0,100000
Solata	0,100000
Zelje	0,100000
Marmelada	0,027502
Sir_edamec	0,026032
Kakav	0,010000
Sol	0,000229

Tabela 5: Minimiziram energijo (energijski vnos v tem primeru znaša 1658.9285 kcal), obdržim minimalne količine posameznih prehranskih skupin in mikrohranil, omejim tudi vnos posameznih živil. Omejene količine, ki so dosegle maksimalno vrednost, zlahka prepoznamo po natančnosti, denimo 0.100000 kg, kar pomeni, da smo na robu simpleksa, ki ga odreže pogoj, da količina živila ne sme presegati 0.100000 kg.

## 5 Dodatek

Ogledal sem si še nekaj diet, ki krožijo po internetu in med ljudmi, in poskušal doseči različne rezultate.

## 5.1 Dieta z nizkim vnosom ogljikovih hidratov

Takozvana ‘low carb’ dieta je definirana s prepovedjo oziroma omejevanjem vnosa ogljikovih hidratov, pri čemer vnos drugih prehranskih skupin ni omejen, torej lahko zaužijemo neomejeno maščob in proteinov.

Pri tem primeru sem iz lastne radovednosti omejil vnos energije na *točno* 2000 kcal, saj doslej še nisem uporabil pogojev, ki bi fiksirali neko količino. Obdržal sem tudi pogoje iz prvega dela (maksimalna dovoljena zaužita masa, minimalne maščobe, proteini, mikrohranila...), minimiziral pa sem vnos ogljikovih hidratov. Rezultat najdemo v 6.

Živilo	Količina[kg]
Postrv	1,238202
Radenska	0,685145
Sir_edamec	0,044690
Paprika	0,029324
Sol	0,002639

Tabela 6: Low carb dieta. Zaradi vsebnosti mikrohranil se je pri vrhu spet pojavila Radenska, drugače pa nepresenetljivo prednjači meso, malce pa me preseneča nizek delež sira. Pri tem jedilniku dnevno vnesemo 2.4923 g ogljikovih hidratov.

Spet lahko dodamo omejitve količin posameznih živil (po lastnem okusu). Dobimo tabelo 7.

Živilo	Količina[kg]
Postrv	0,600000
Puran	0,600000
Radenska	0,400000
Sir_edamec	0,078592
Govedina	0,046077
Paprika	0,031063
Skusa_soljena	0,005247
Sol	0,001319

Tabela 7: S količinami posameznih živil omejen jedilnik. Dnevni vnos OH se rahlo poveča na 3.08703 g.

## 5.2 Paleo dieta

Na zahodu veje prepričanje, da je skrivnost dolgega življenja prehrana, enaka prehrani naši prednikom, ki so pred odkritjem poljedeljstva in živinoreje romali po savanah, obirali prilične sadeže in lovili vse živali, ki so se pustile uloviti.

Na <https://ultimatepaleoguide.com/paleo-diet-food-list/> sem našel kratek seznam dovoljene in prepovedane hrane in popravil seznam živil tako, da je vseboval le presek originalne tabele in dovoljene hrane. Dolžina tabele se je skrčila na 26 vnosov.

Pri prvem poskusu sem minimiziral energijo z omejitvami iz prvega dela (minimalen vnos skupin hranil in mikrohranil, omejitve natrija...), vendar sem ugotovil, da rešitve ne najdem.

Prvi korak proti uspešnem paleo jedilniku je bila odstranitev vseh omejitev razen osnovnih (minimalen vnos ogljikovih hidratov, proteinov in maščob). Ob teh pogojih najdem jedilnik v tabeli 8.

Živilo	Količina[kg]
Paprika	4,848691
Olivno_olje	0,059619
Brokoli	0,053656

Tabela 8: Paleo dieta. S takim jedilnikom zadostimo trem najosnovnejšim zahtevam človeške prehrane, energijski vnos znaša 1854.423 kcal. Presenetljivo lahko dobimo minimalne količine proteinov tudi brez mesa.

Nadaljeval sem z dodajanjem omejitev (Ca, Fe, vitamin C, K, Na...) in dobil tabelo 9.

Živilo	Količina[kg]
Paprika	3,476048
Solata	1,140690
Jabolko	0,377267
Olivno_olje	0,059778
Sol	0,005176

Tabela 9: Paleo dieta, s katero dnevno vnesemo 1857.063 kcal energije in zadostimo minimalnim zahtevam makro— in mikrohranil. V kolikor zahtevamo še omejitev vnosa hrane na 2 kg dnevno, rešitve ne moremo več najti. Tudi tukaj mesa ne potrebujemo za minimalen vnos proteinov.

### 5.3 Vpliv cene

Dodal sem še cene izdelkov, prav tako preračunane na 100 g živila. Ceno sem minimiziral, istočasno pa sem spet fiksiral vnos energije na 2000 kcal. Ko minimiziramo ceno (glej tabelo 10), na jedilniku opazimo nekaj novih živil, ki se prej niso pojavljala na njem, presenetljivo pa na njem še vedno najdemo olivno olje, ki se pojavlja tako pogosto, da izgleda skoraj kot čudežna hrana, ki je nepogrešljiva v domala vsakem zamišljenem scenariju.

Denimo, da imamo invertirano situacijo, čeprav precej za lase privlečeno; na srečelovu zadenemo doživljensko rento v nekem supermarketu, vsak dan lahko skozi vrata brezplačno odnesemo 2000 kcal, želimo pa si jedilnik, ki bo upošteval dosedanje zdravstvene omejitve, obenem pa bo maksimiziral naš 'izplen'. Rezultat najdemo v tabeli 11.

### 5.4 Maksimizacija pice

Za konec si pogledjmo še scenarij, kjer zahtevamo vsa priporočila zdrave prehrane, ki smo jih upoštevali do tega trenutka, dnevni vnos hrane naj znaša točno 2000 kcal, maksimizirali pa bomo količino pice, ker si tako pač želimo. Rezultat prikazuje tabela 12.

Živilo	Količina[kg]
Mleko	0,397879
Ovseni_kosmici	0,234738
Zelje	0,163092
Kruh_bel	0,154156
Kakav	0,108812
Olivno_olje	0,022068

Tabela 10: Minimizacija cene pri pogojih iz prve naloge, upoštevan je najmanjši dopusten vnos mikro— in makrohranil, količina hrane je omejena na 2 kg. Minimalnim prehranskim standardom zadostimo z 1.8524 € dnevno.

Živilo	Količina[kg]
Solata	1,057054
Losos	0,508260
Kakav	0,297228
Med	0,137370
Sir_edamec	0,000088

Tabela 11: Maksimizacija cene. Za 30 € dnevno lahko tako pokrijemo zadostimo omejitvam količine, minimalnemu vnosu vseh prehranskih skupin in mikrohranil. Solata rahlo preseneča, dopuščam možnost večjih odstopanj pri ceni, saj sem našel cene le za glavo solate, težo pa sem nato ocenil izkustveno. Očigledno sem imel v življenju še premalokrat opravka s solato.

Živilo	Količina[kg]
Pica	0,463866
Banana	0,253553
Pomaranca	0,200000
Riz	0,160029
Kakav	0,106063
Olivno_olje	0,009989

Tabela 12: Jedilnik s točno 2000 kcal, ki upošteva omejitve zdrave prehrane in maksimizira zaužito pico. Omejil sem tudi vnos pomaranč, da dosežem, da se pica umesti v sam vrh jedilnika, kot ji pritiče.

## Viri podatkov

- <https://trgovina.mercator.si/market/> cene hrane razen postrvi
- <https://www.tuscc.si/iskanje?q=postrv> cena postrvi
- [https://www.calorieking.com/foods/calories-in-pizzas-slice-pepperoni-pizza\\_f-ZmlkPTE3NTA30A.html](https://www.calorieking.com/foods/calories-in-pizzas-slice-pepperoni-pizza_f-ZmlkPTE3NTA30A.html) povprečne hranilne vrednosti pice