

201: Navadne diferencialne enačbe: začetni problemi

Peter Rupnik
28182021

26. februar 2025

1 Naloga

1. S pomočjo podprogramov za metodo Runge-Kutta zasleduj gibanje planeta na tiru okrog sonca. Opazuj stabilnost razdalje obeh teles pri krožnem gibanju. Preveri točnost obhodnega časa ter natančnost povratka pri eliptičnih tirih, zlasti pri tistih z majhno začetno hitrostjo. Opazuj stalnost energije in vrtilne količine.
2. Razišči obnašanje planeta v krožni orbiti, če sonce nadomestite s parom polovičnih sonc, v odvisnosti od njune medsebojne razdalje. Sonci sta v krožni orbiti okrog skupnega težišča, vpliv planeta na njuno orbito zanemarimo.
3. Trk zvezde in planetnega sistema: mimo sonca s planetom na krožnem tiru pridrvi v tirni ravnini druga zvezda z enako maso. Mimobežna zvezda vpada s hitrostjo, ki je enaka dvakratni obodni hitrosti planeta in potuje po ravni črti v razdalji 1.5 radija planetnega tira (nalogo smo poenostavili z zanemaritvijo keplerskega tira prihajajoče zvezde). Razišči končno usodo planeta v odvisnosti od njegove faze. Račun začnemo, ko je vpadna zvezda še 10 radijev planetnega tira daleč od svojega perihelija in ga končamo, ko se znajde v točki, ki je simetrična na začetno. Kaj se spremeni, če smer gibanja planeta obrnemo?

2 Reševanje

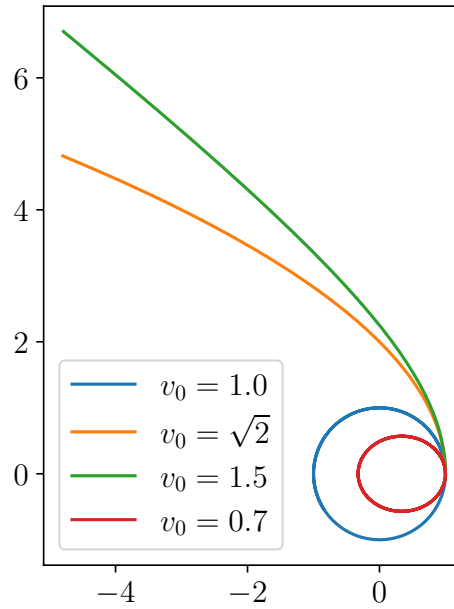
2.1 Podnaloga 1

Najprej se uverim, da lahko iz začetnih pogojev pravilno integriram časovni razvoj. Izbral sem si nekaj začetnih hitrosti, za katere vemo, kakšne orbite porodijo. Za orbite¹ velja:

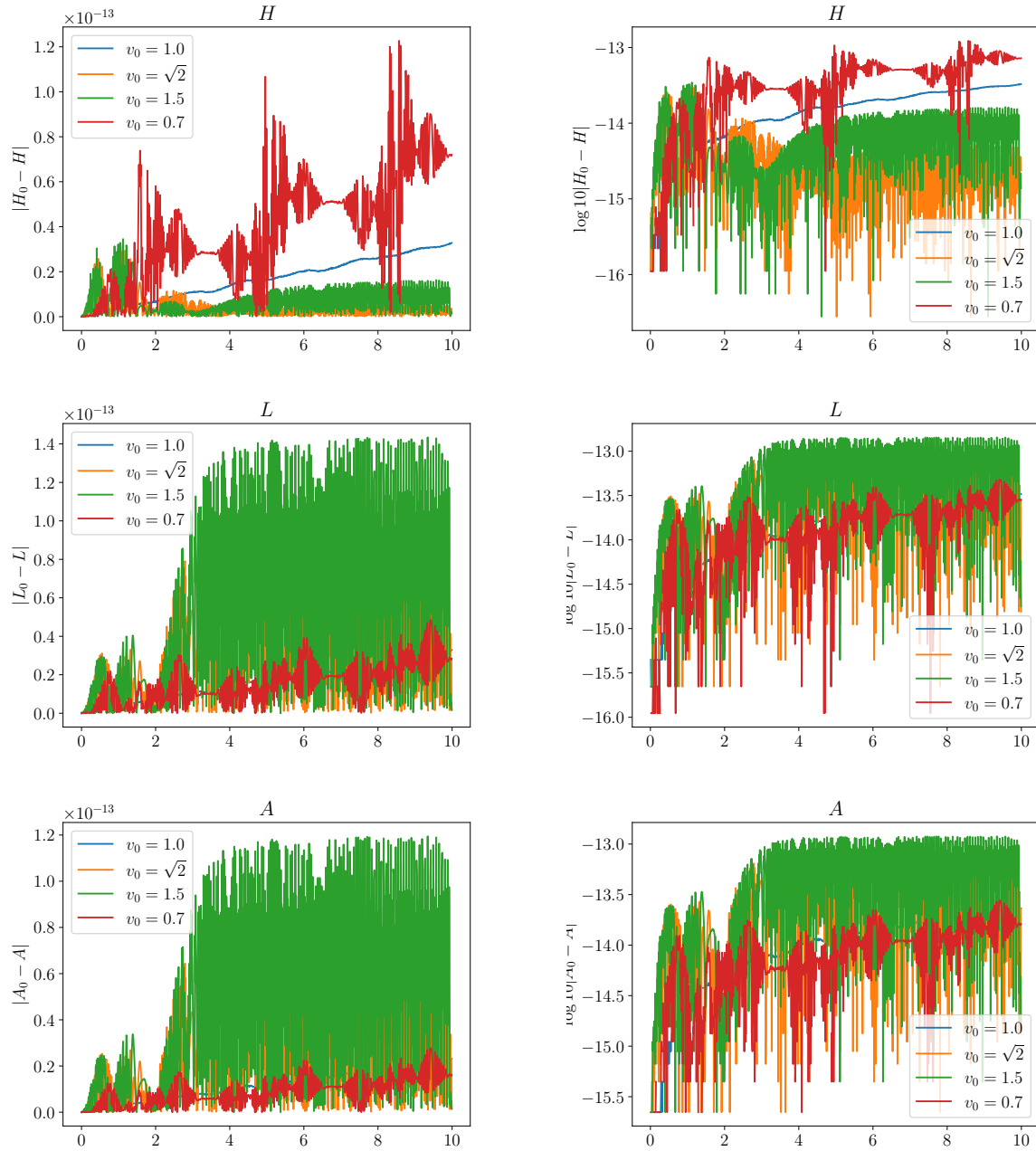
$$\text{orbita} = \begin{cases} \text{krožnica,} & v_0 = 1, \\ \text{hiperbola,} & v_0 = \sqrt{2}, \\ \text{parabola,} & v_0 > \sqrt{2}, \\ \text{elipsa,} & \text{sicer} \end{cases}$$

¹brez upoštevanja simetrije $v_0 \rightarrow -v_0$ in izrojenih elips za $v_0 = 0$

Za $v_0 \in \{1, \sqrt{2}, 1.5, 0.7\}$ sem izračunal trajektorije v časovnem intervalu $t \in [0, 10]$ z adaptivnim časovnim korakom z metodo `scipy.integrate.solve_ivp`. Na spodnji sliki vidimo, da dobimo pričakovane trajektorije:



Naslednji korak je študija invariantnih količin. Zanimalo nas bo spreminjanje polne energije H , vrtilne količine \mathbf{L} , in Laplace-Runge-Lenzovega vektorja \mathbf{A} skozi čas za različne začetne pogoje. Rezultate prikazujem na sliki 1.



Slika 1: Časovni poteki invariantnih količin. Opazimo, da za izbrano integracijsko shemo niso stabilne, marveč se skozi integracijo spreminjajo. Obnašanje količin za različne pogoje so korelirane; pri $v_0 = 1$ vedno opazimo umirjen ‘drift’ količine, za druge začetne pogoje pa je dinamika lahko bolj divja; opazimo območja konstantnosti in območja divjih fluktuacij.

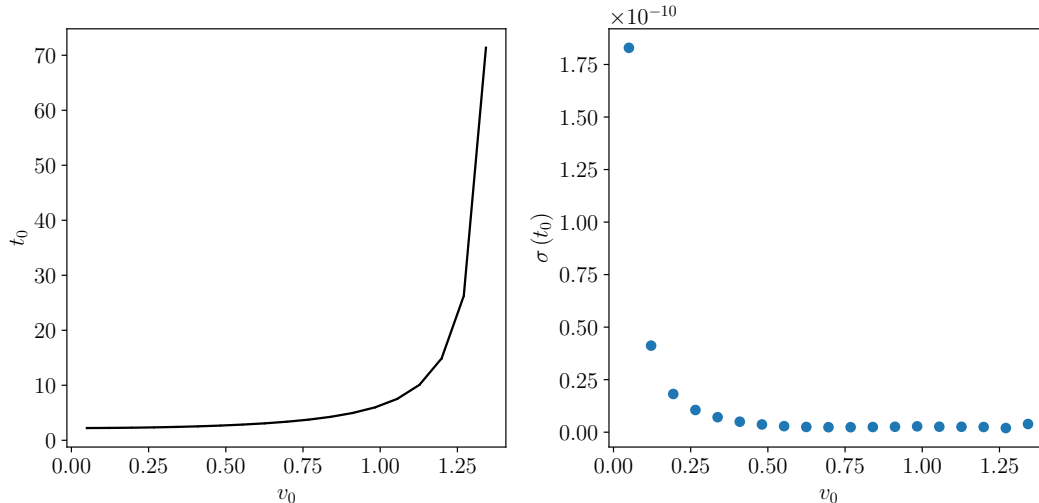
Za študijo stabilnosti obhodnih časov sem implementiral t.i. *event tracker*, funkcijo, katere koren bo integrator iskal:

```

1 initial = [1, 0, 0, v0]
2 def complete_revolution(t, y):
3     return y[1]
4 complete_revolution.terminal = False
5 complete_revolution.direction = 1
6
7 sol = solve_ivp(odes,
8     t_span=[0, 50*np.pi],
9     y0=initial,
10    dense_output=True,
11    events=complete_revolution,
12 )

```

Pri tem sem se posvetil primerom, ko $v_0 < \sqrt{2}$, da zagotovim periodičnost orbit. Uporabljena je bila sledeča metodologija: za vsak v_0 sem iskal orbito za $t \in (0, 50\pi)$, pri čemer mi je prehode čez $y = 0$ iskal integrator sam. Dobljene čase prehoda sem numerično odvajal, da dobim čase med zaporednimi prehodi, nato pa sem izračunal povprečno periodo in standardno deviacijo. Rezultate prikazujem na naslednji sliki.

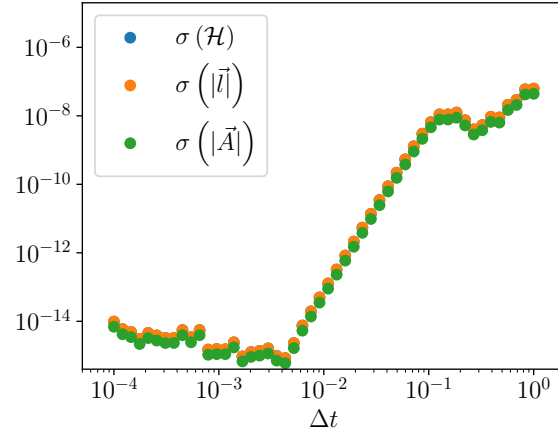


Stabilnost obhodnega časa t_0 kot funkcija začetne hitrosti planeta v_0 . [LEVO] povprečne vrednosti zaporednih obhodnih časov s standardnimi deviacijami. [DESNO] standardne deviacije intervalov med zaporednimi prehodi.

Pri nizkih začetnih hitrostih standardna deviacija zaporednih izmerkov strmo naraste, vzrok česar bi lahko bila težja integracija v bližini pola potenciala.

Ker je pri vseh integracijah doslej za časovni korak skrbel integrator sam, si pogledam še odvisnost rezultatov od izbire časovnega koraka, ki bo to pot podan eksplicitno, za integrator pa namesto `scipy.integrate.solve_ivp` uporabim metodo `scipy.integrate.ode`.

Kot prej bom integriral krožno trajektorijo in zanjo izračunal invariantne količine skozi čas integracije. Ker vemo, da bi morale biti konstantne, lahko za merilo kvalitete integracije izberemo številne metrike. V mojem primeru sem izbral standardno deviacijo in generiral spodnjo sliko:

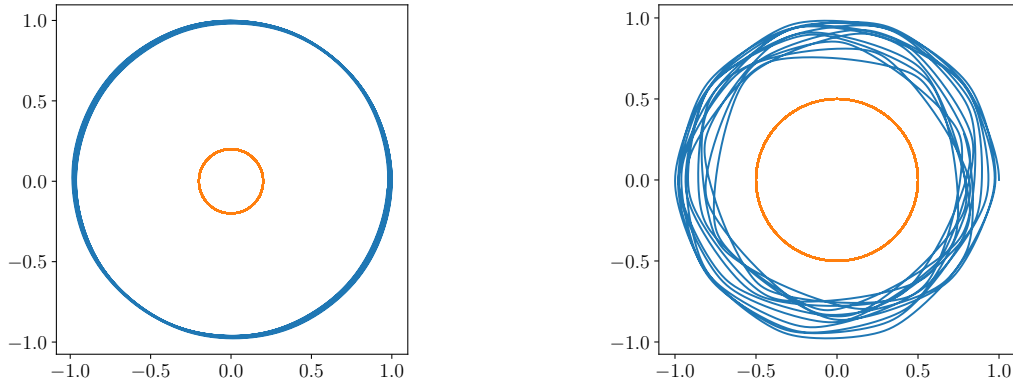


Sprva nisem pričakoval, da bo dobljen profil nemonotona funkcija časovnega koraka Δt . Visoka razpršenost izmerkov pri velikih Δt je trivialna, ponovno naraščanje v režimu $\Delta t < \Delta t_{\text{optimal}}$ pa bi lahko pripisali akumulaciji napak zaradi visokega števila korakov.

2.2 Podnaloga 2

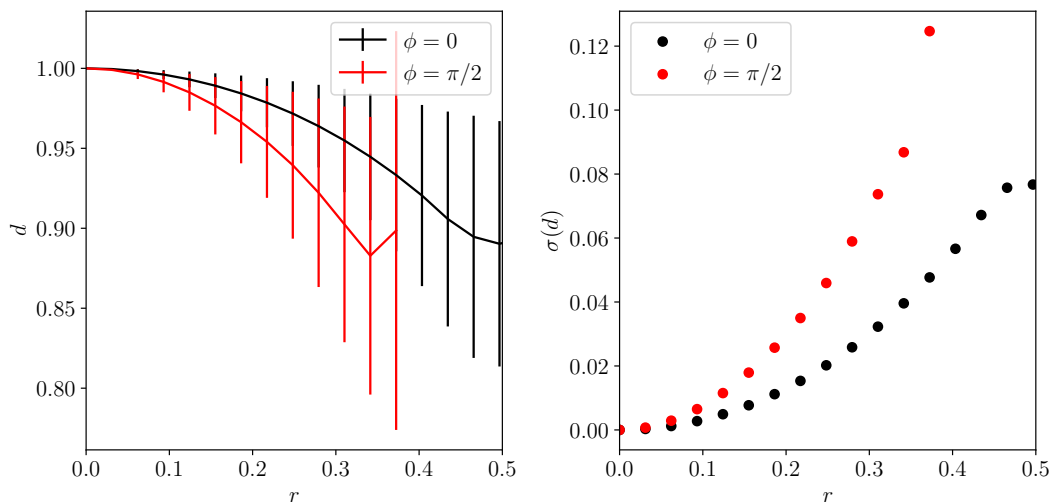
Cevovod za integracijo sem popravil tako, da je upošteval prispevek dveh polsonc, ki krožita okrog skupnega težišča z nastavljivo kotno hitrostjo, nastavljivo medsebojno razdaljo, in nastavljivim zamikom glede na planet.

Raziskal sem, kakšne orbite lahko dobim z različnimi nastavitvami začetnih parametrov. Z rumeno prikazujem orbiti sonc.



Za študijo vpliva dvozvezdja na dinamiko planeta pogledam krožne orbite planeta pri $v_0 = 1$. Z variacijo razdalje med polsoncema r opazujem, kaj se dogaja s povprečjem in standardno deviacijo oddaljenosti orbite planeta od masnega središča sistema. V analizo sem vključil samo primere, kjer planet ne 'pobegne'. Kotna hitrost polsonc je v vseh poskusih znašala 2π . Trajektorije sem integriral do časa $t = 60$, začetna hitrost planeta je bila fiksirana na $v_0 = 1$.

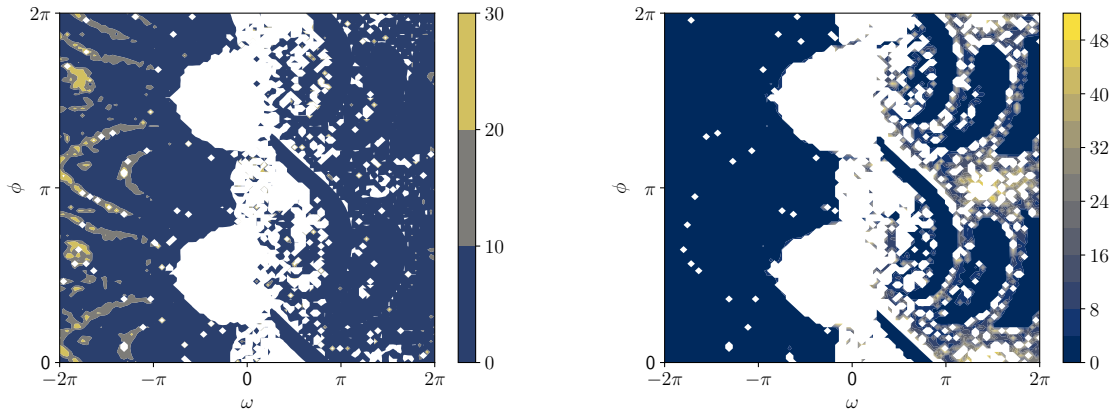
Kot pričakovano je vpliv večji pri večjih medzvezdnih razdaljah, ko $r \rightarrow d$, viden pa je že pri majhnih. Presenetljivo je vpliv dvozvezdja bolj opazen, ko je ob času 0 zveznica med polsoncema navpična.



Če definiramo vezanost planeta preko polne energije

$$H = T - \frac{0.5}{d_1} - \frac{0.5}{d_2} = \begin{cases} > 0 & \implies \text{nevezan;} \\ \leq 0 & \implies \text{vezan} \end{cases},$$

lahko za fiksni čas integracije in fiksne začetne pogoje pogledamo odvisnost ‘usode’ planeta v ravnini (ω, ϕ) . Pri pregledu ravnine sem kot poprej fiksiral začetne pogoje na $y_0 = [1, 0, 0, 1]$, medsebojno razdaljo polsonc pa nastavil na $r = 0.5$. V koordinati ϕ pričakujemo simetrijo, saj je konfiguracija s $\phi = 2\pi$ enaka kot $\phi = 0$, poleg tega pa sta polsonci enaki, zato dobimo pri $\phi = \pi$ enake pogoje kot pri $\phi = 0$. V koordinati ω take simetrije nimamo, in po predhodno prikazanih trajektorijah gre sklepati, da lahko pričakujemo bogato in netrivialno dinamiko.



Obravnava ‘usode’ planeta. [LEVO] Polna energija planeta po času $t = 50$. Bela barva označuje vezano stanje z nepozitivno polno energijo, ostale barve pa nevezano stanje s pozitivno polno energijo. [DESNO] Čas, pri katerem dosežemo nevezano stanje.

2.3 Podnalogi 3

Za študijo preleta mimobežne zvezde sem spet pripravil cevovod za integracijo. Tokrat sem poleg koordinat in impulzov planeta integral še vodoravno koordinato mimobežne zvezde, kar sem lahko uporabil kot signal za končanje terminacije (kot opisano v prvi podnalogi.) Za začetne pogoje vzamem

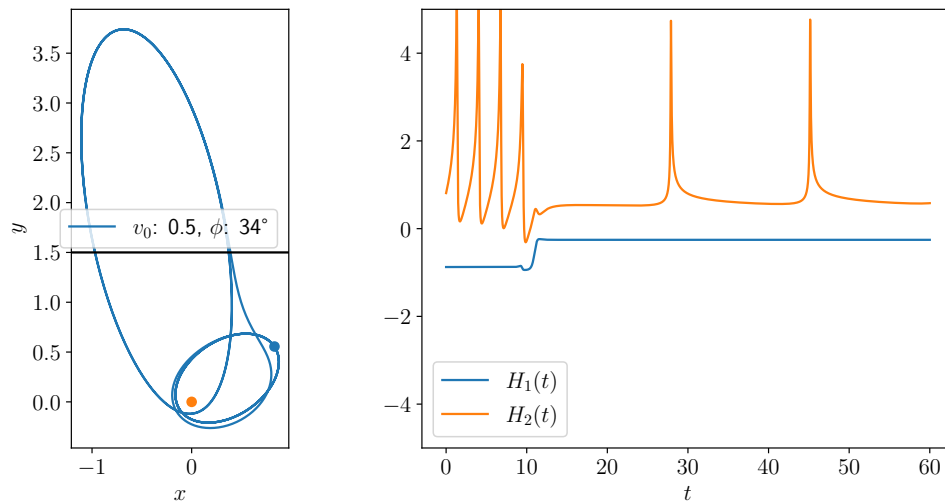
$$y_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ v \\ u \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ -v_0 \sin \phi \\ v_0 \cos \phi \\ -10 \end{bmatrix},$$

kjer je x_2 vodoravna koordinata mimobežne zvezde. Parametra ϕ in v_0 si pustim prosta za eksperimentacijo. Za boljši uvid integracijo pustim teči dlje kot naloga zahteva, nato

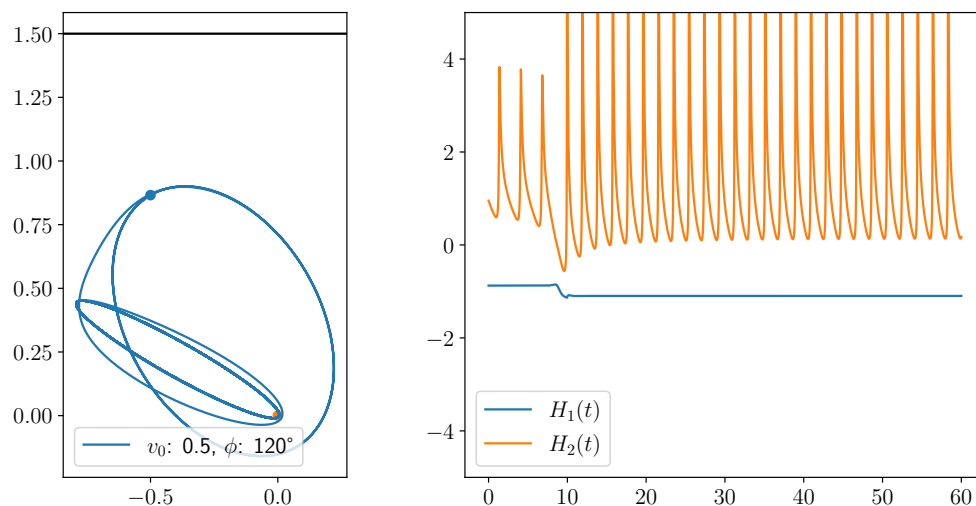
pa po izračunanih trajektorijah izračunam energije H , H_1 , in H_2 , definirane kot:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{u^2 + v^2}{2} \\ T_2 &= \frac{(u - u_2)^2 + (v - v_2)^2}{2} \\ d_1 &= \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} \\ d_2 &= \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - 1.5)^2} \\ H_1 &= T_1 - \frac{0.5}{d_1} \\ H_2 &= T_2 - \frac{0.5}{d_2}, \end{aligned}$$

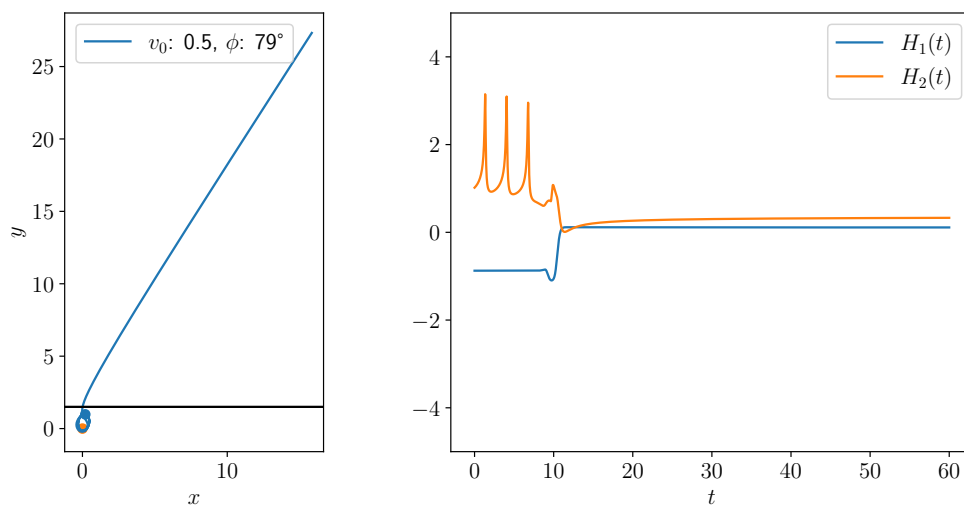
S preletom parametrskega prostora lahko najdem nekaj zanimivih primerov, kjer mimo-leteče sonce spremeni orbito planeta, s svojim gravitacijskim privlakom izbije planet iz prvotne orbite, ali pa potegne planet za seboj. Najdem lahko tudi nekaj primerov, kjer planet trči v mimobežno sonce, kar v praksi izgleda kot odpoved integratorja zaradi numerične nestabilnosti



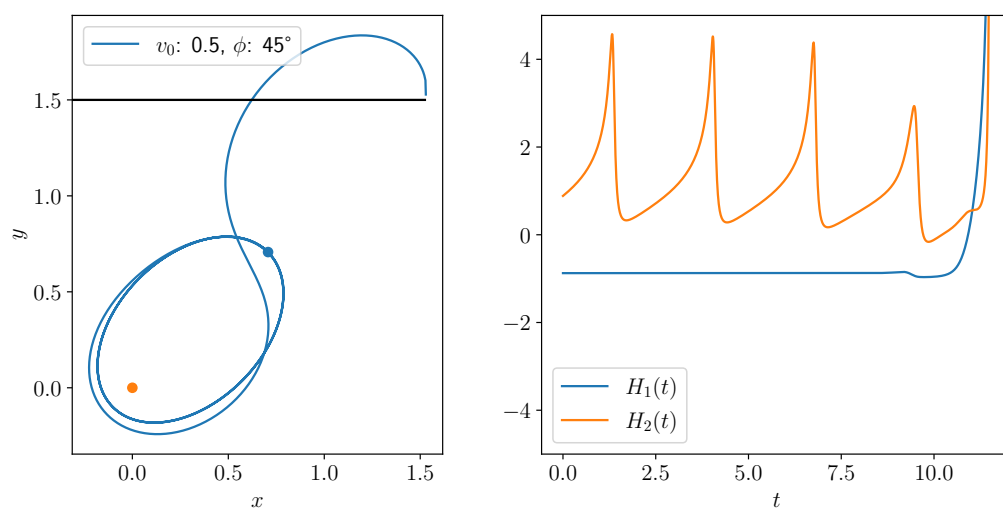
Zaradi privlaka zvezde mimobežnice se spremeni polna energija in vrtilna količina planeta, vendar še vedno ostane vezan na prvotno zvezdo.



Sličen primer, vendar v tem primeru mimobežnica 'zavre' planet.



Prelet mimobežne zvezde povzroči razpad prvotnega binarnega sistema.



Primer trka planeta v mimobežno zvezdo.