

# 111: Stohastični populacijski modeli

Peter Rupnik

9. januar 2019

## 1 Prva naloga

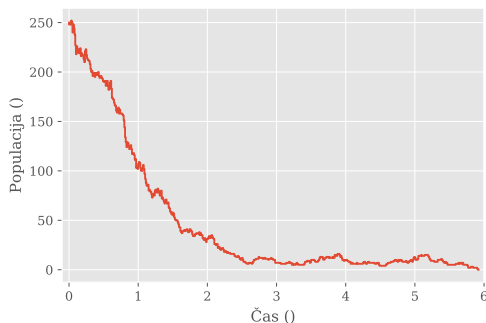
Napravi statistiko časov izumrtja za preprosti eksponentni model ( $\beta = 1.0/\text{enota časa}$ ) za majhno ( $N = 25$ ) in veliko ( $N = 250$ ) populacijo. Ali je ta čas odvisen od velikosti časovnega koraka? Primerjaj z modelom, ki vključuje rojstva in smrti ( $\beta_r = 4\beta$ ,  $\beta_s = 5\beta$ )!

### 1.1 Tipanje problema

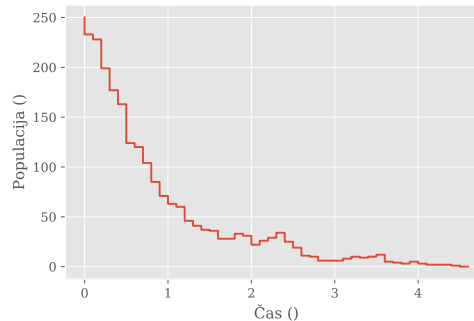
Najprej sem se prepričal, da moja koda pravilno opiše pričakovano obnašanje, torej pri podanih pogojih (približno) eksponentno padanje prebivalstva. Že spočetka sem uporabil model, ki vključuje rojstva in smrti. Rezultat najdete na slikah 1 in 1.1. Opomba: po moji definiciji je populacija izumrla, ko pade število prebivalcev pod 1.

### 1.2 Merjenje časov izumrtja

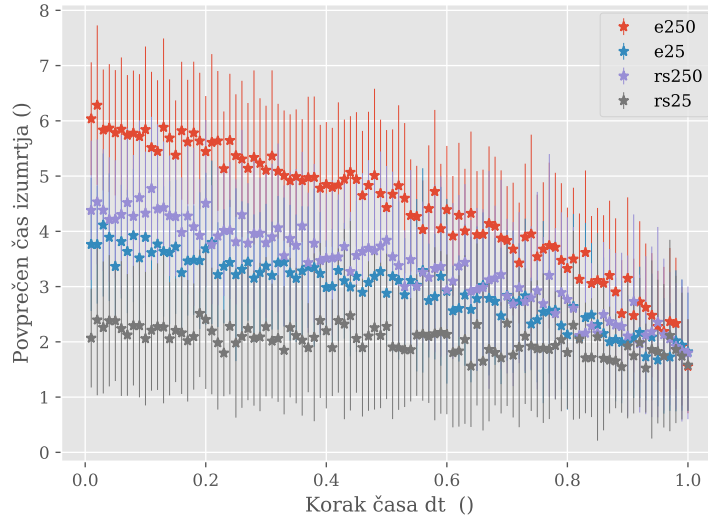
Za merjenje časov izumrtja se programska koda še poenostavi, saj ne potrebujemo časovnega poteka, ampak v spominu držimo le populacijo in čas. Za vrednosti  $N \in \{25, 250\}$  in za 100 linearno posejanih korakov  $dt \in [0.01, 1]$  sem po  $10^5$ -krat pognal simulacijo in pogledal povprečno vrednost časa, pri katerem populacija izumre. Izračunal sem tudi standardni odklon dobljenih rezultatov in ga prikazal kot negotovost na izmerkih. Dobljena odvisnost je sicer precej podobna



Slika 1: Pravilno obnašanje simulacije. Z začetnega števila prebivalcev ob času  $t=0$  dobimo stohastično padanje približno eksponentno proti 0. Časovni razmik je znašal 0.01.



Slika 2: Ponovitev simulacije, tokrat z bolj grobim časovnim korakom, ki je znašal 0.1. Opazimo že rahlo skrajšanje časa do izumrtja, to odvisnost nameravamo v nadaljevanju naloge dokazati.



Slika 3: Čas izumrtja pri različnih začetnih številih  $N_0$  in pri različnih modelih. Prefiks **e** predstavlja enostaven model, prefiks **rs** pa dvorazdelčni model z rojstvi in smrti.

odvisnosti na gradivu, ki smo ga dobili na predavanju, a je dosti bolj raztresena. Problem sem poskušal reševati z večimi točkami in *seedanjem* generatorja z `/dev/urandom` na pričetku simulacije, a se raztresenosti nisem znebil.

## 2 Druga naloga

Za zgornji model poišči matriko prehodov in z njo oceni čas izumrtja. Za preprost eksponentni model izumiranja lahko zapišeš enačbe za verjetnostno porazdelitev v odvisnosti od časa. Kako se efektivni odmik te porazdelitve spreminja s časom?

S predavanj vemo, da lahko stanje sistema, ki ga simuliramo (torej naše obravnavane populacije) zapišemo tudi kot vektor  $\vec{X}$ :

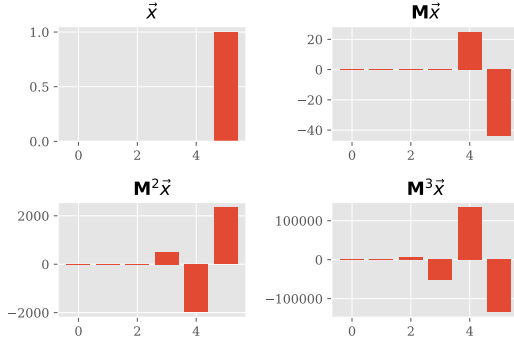
$$\vec{X}(t=0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

Namesto stohastičnega časovnega razvoja lahko na ta vektor delujemo z matriko  $\mathbf{M}$ :

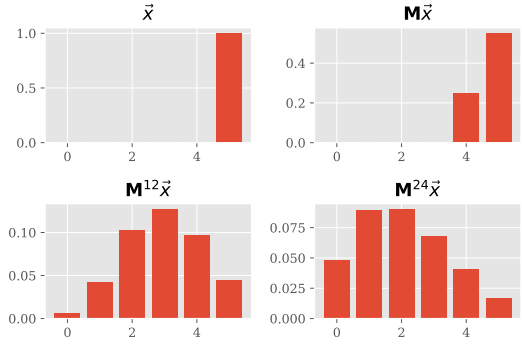
$$\vec{X}(t+\Delta t) = \mathbf{M}\vec{X}(t), \quad (2)$$

ta matrika pa izgleda tako:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1-(R_0+S_0) & S_1 & & \\ R_0 & 1-(R_1+S_1) & S_2 & \\ & R_1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (3)$$



Slika 4: Pri koraku  $\Delta t = 1$  in zgoraj opisanih drugih parametrih dobim takšen časovni razvoj. Že po prvem koraku je očitno, da je nekje usodna napaka.



Slika 5: Primer, opisan zgoraj.  $\Delta t = 0.01$ , vsota vseh komponent vektorja  $\vec{X}$  na zadnji sliki znaša približno 0.35.

Za parametre  $R_n, S_n$  velja:

$$R_n = \beta_r n \Delta t \quad (4)$$

$$S_n = \beta_s n \Delta t. \quad (5)$$

V svojem delu bom obravnaval populacijo z  $N_0 = 250$ .

## 2.1 Prvi poskus

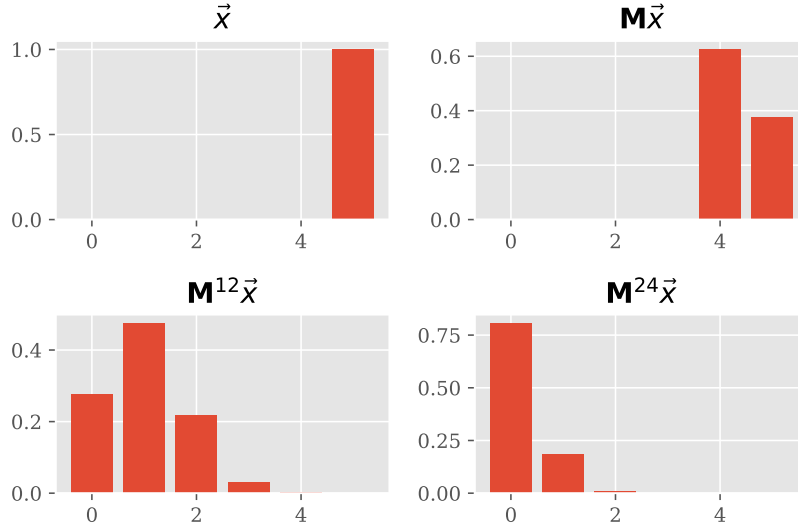
Pri implementaciji sem imel nekaj zanimivih problemov. Pri množenju vektorja  $\vec{X}$  z matriko  $\mathbf{M}$  sem opazil, da se včasih določene komponente preslikajo v negativne vrednosti, kar pa je očiten nesmisel, saj te komponente predstavljajo verjetnost, da ob času  $t$  populacijo najdemo pri določenem  $N$ . Problem sem diagnosticiral dalje s študijo primerov z manjšimi dimenzij, tako sem pri parametrih  $N_0 = 5$ ,  $\beta_r = 4$ ,  $\beta_s = 5$  in  $\Delta t = 0.01$  dobil matriko

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1. & 0.05, 0. & 0. & 0. & 0. & \\ 0. & 0.91 & 0.1 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.04 & 0.82 & 0.15 & 0. & 0. \\ 0. & 0., & 0.08 & 0.73 & 0.2 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0.12 & 0.64 & 0.25 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0.16 & 0.55 \end{bmatrix},$$

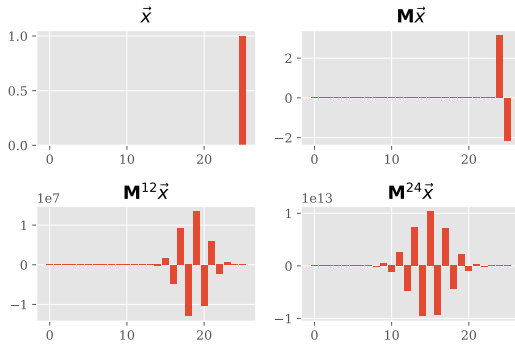
kar izgleda super, stolpci se seštevajo v 1, kot pričakovano, vendar pa z nekajkratnim delovanjem na vektor  $\vec{X} = [0, 0, 0, 0, 0, 1]^T$  dobimo na pogled pričakovane, vendar očitno nepravilne porazdelitve, saj se vsota vseh verjetnosti ne seštevajo v 1 (slika 5).

Problem sem rešil tako, da sem model oklestil; namesto simulacije rojevanja in umiranja sem uvedel nadomestni  $\beta_r \leftarrow \frac{\beta_r}{\beta_s} = 4/5$ . Na tak način sem rešil svojo idiopatsko težavo, a kot se je izkazalo kasneje, samo za majhne populacije.

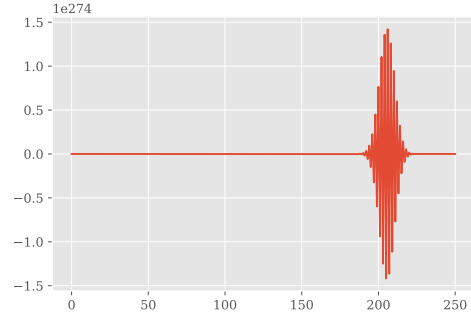
Zagato sem končno razrešil z rede velikosti nižjim  $\Delta t$ . Vzrok za to lahko verjetno najdemo v predpostavkah našega formalizma, saj smo že tam zahtevali dovolj majhne časovne korake. Če časovni korak zmanjšam, dobim sliko 9.



Slika 6: Uspešen poskus časovnega razvoja populacije za  $N_0 = 5$ , časovni korak  $\Delta t = 0.1$ . Histogrami prikazujejo začetno stanje vektorja  $\vec{X}$ , porazdelitev po enkratnem delovanju nanj z matriko  $\mathbf{M}$  in porazdelitvi po dvanajstem in štiriindvajsetem delovanju.



Slika 7: Pri  $N_0 = 25$  se pojavljajo podobne težave, kot sem jih imel na začetku te naloge. Evidentno je torej, da napaka še zdaleč ni odpravljena. Časovni korak je znašal 0.1.

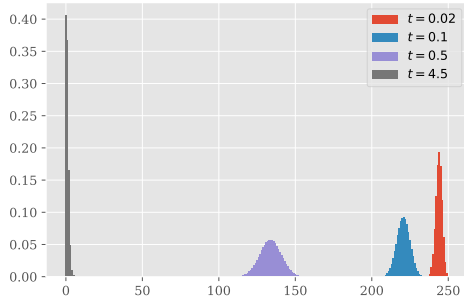


Slika 8: Za začetno stanje  $N_0 = 250$  in  $\Delta t = 1$  dobim sicer lepe sličice, ki pa drugega kot svoje estetske vrednosti ne morejo ponuditi.

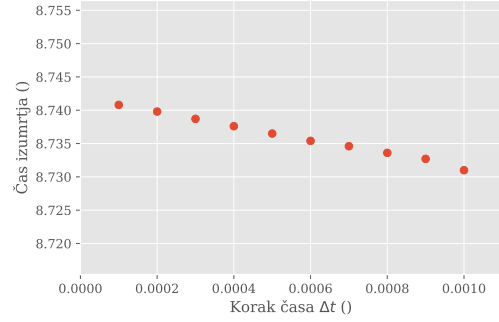
## 2.2 Ocena časa izumrtja

Če definiramo čas izumrtja kot čas, v katerem je živa le še ena oseba, lahko s pomočjo zgornjega formalizma ocenim čas izumrtja. Vektor  $\vec{X}$  bom zato razvijal in iskal trenutek, ko bo vsota verjetnosti prvih dveh elementov enaka 1, tedaj je populacija spolno razmnožujočih se osebkov zagotovo izumrla ali obsojena na izumrtje.

Zanimala me je odvisnost časa izumrtja od izbire časovnega koraka, zato sem napravil sliko 2.1. Odvisnost ni posebej zanimiva, zanimivo bi jo bilo raziskati na širšem območju, a smo navzgor omejeni s problemi, ki sem jih opisal v pričetku tega poglavja, navzdol pa s časovno zahtevnostjo; če želimo spraviti začetni vektor do izumrtja, ga moramo preslikati čim večkrat, tem manjši časovni korak smo izbrali. Zaradi tega se množenja matrik hitro množijo, vsako množenje pa seveda zahteva svoj čas. Mogoča rešitev tega problema bi bila rekurzivno množenje matrik in uporaba *dinamičnega programiranja*, kjer bi si že izračunane vrednosti potenc prehodne matrike shranili in jih klicali po potrebi, ne da bi čakali, da se rekurzija odvije do konca. Vendar se mi zdi,



Slika 9: Uspešen potek časovnega razvoja. Prikazujem komponente vektorja  $\vec{X}$  ob različnih časih. Preveril sem tudi, ali se komponente vsakega časovno razvitega vektorja seštevajo v 1, in ugotovil, da temu pogoju do strojne natančnosti pri vseh časih zadostim. Časovni korak sem zmanjšal na  $\Delta t = 0.001$ .



Slika 10: Odvisnost časa izumrtja od časovnega koraka. Čase izumrtja sem računal v 10 linearno porazdeljenih točkah med  $10^{-4}$  in  $10^{-3}$ .

da to ni bil namen naloge, zato si to implementacijo puščam za kak deževen dan v prihodnosti.

## 2.3 Časovni razvoj efektivnega odmika porazdelitve

S pomočjo enačbe s predavanj

$$\mu_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^i X_n(t) \quad (6)$$

sem izračunal simulirana težišča porazdelitve skozi čas ter njen drugi moment. Po enačbah

$$\mu_1(t) = \mu_1(0) e^{-(\beta_s - \beta_r)t} \quad (7)$$

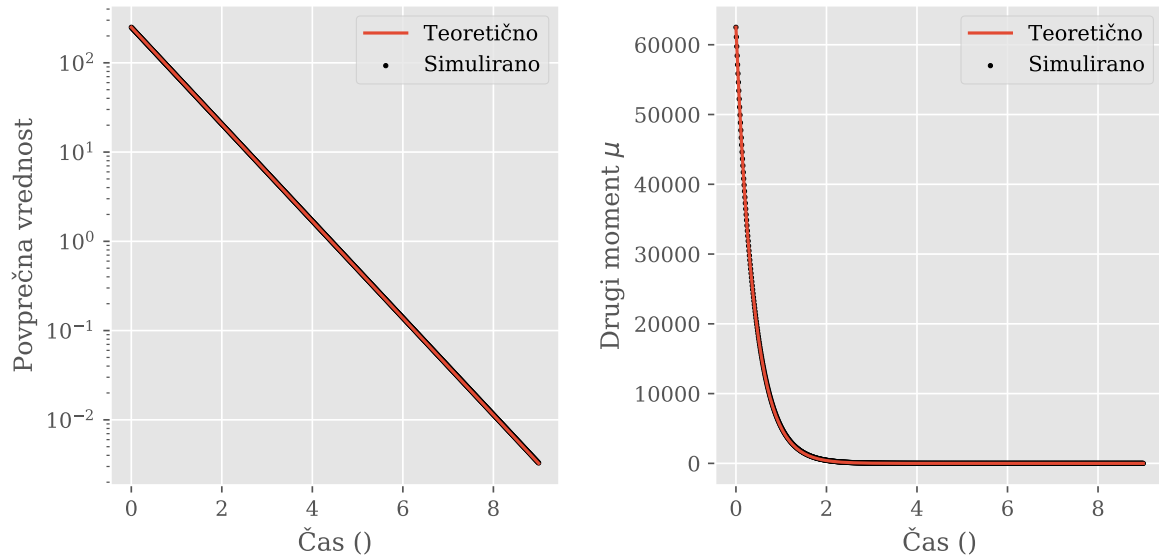
$$\mu_2(t) = \mu_2(0) e^{-2(\beta_s - \beta_r)t} + \mu_1(0) e^{-(\beta_s - \beta_r)t} [e^{-(\beta_s - \beta_r)t} - 1] \frac{\beta_r + \beta_s}{\beta_r - \beta_s} \quad (8)$$

sem izračunal tudi teoretično napovedane poteke obeh količin (glej sliko 11).

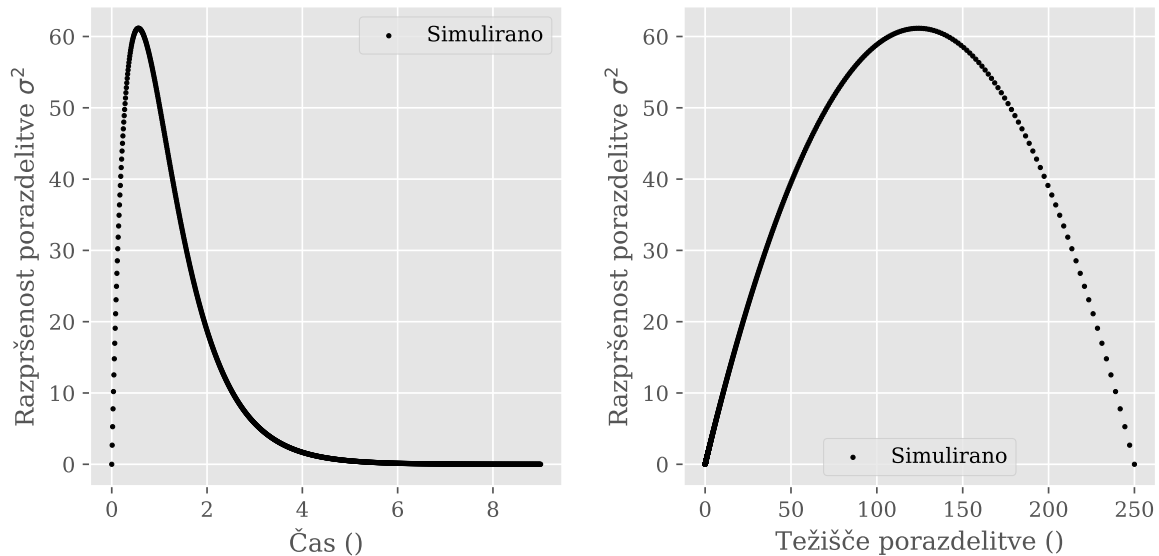
Z izračunanimi momenti lahko izračunam tudi razpršenost porazdelitve kot

$$\sigma^2(t) = \mu_2(t) - (\mu_1(t))^2 \quad (9)$$

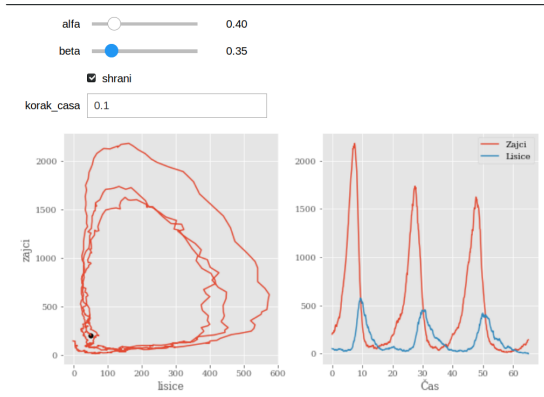
. Razpršenost sem na dva načina prikazal na sliki 12.



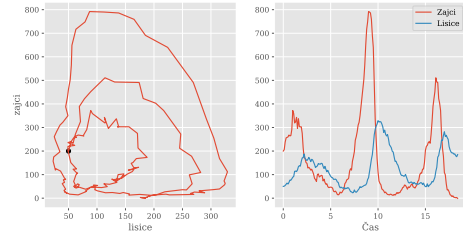
Slika 11: Simulirani poteki momentov in teoretične napovedi le-teh. [LEVO:] časovni potek povprečja. Navpična os, ki predstavlja koordinate vektorja  $\vec{X}$ , je v logaritemskem merilu. Vidimo, da se izumrtju težišče porazdelitve približuje eksponentno. Teoretična napoved se odlično prilega mojim podatkom. [DESNO:] potek drugega momenta.



Slika 12: Efektivni odmik  $\sigma^2$ . Posamezne točke so bile vzorčene linearno enakomerno v časovnem prostoru. Kot pričakujemo, je na začetku efektiven odmik porazdelitve majhen, tekom časovnega razvoja se porazdelitev razširi, nato pa se proti izumrtju populacije spet združi v  $\delta$ -funkcijo. To prikazujeta oba grafa. Število točk na časovni osi znaša  $10^3$ , časovni korak pa  $10^{-4}$ . [LEVO:] Potek efektivnega odmika v odvisnosti od časa. Simulacijo pričnemo pri času  $t=0$ , vidimo, da se odmik hitro poveča, nato pa počasi pada nazaj proti 0. [DESNO:] efektivni odmik kot funkcija težišča porazdelitve. Na začetku simulacije je težišče na desni strani grafa, porazdelitev je  $\delta$ -funkcija pri  $N=250$ , nato pa se razmaže in spet skomponira v  $\delta$ -funkcijo. Ker hitrost porazdelitve ni enakomerna, z levega grafa nismo mogli sklepati o simetričnosti efektivnega odmika, ki se tu pokaže v vsej svoji lepoti.



Slika 13: Skromen panel za *fiddlanje* s parametroma  $\alpha$  in  $\beta$ , spreminjanje časovnega koraka in shranjevanje lepih primerkov.



Slika 14: Zanimiv primerek, kjer (vsaj na pogled) trajektorija v faznem prostoru povozi svoje izhodišče (črna pika v faznem diagramu), vendar se dalje seveda odvija povsem po drugi poti, kot se je prvokrat.

### 3 Tretja naloga

V stohastičnem modelu zajci-lisice določi povprečno življenjsko dobo sistema, če začnemo v ravnovesnem stanju. Za boljšo primerjavo med rezultati uporabi stacionarno stanje z 200 zajci in 50 lisicami in razmerje rodnost/smrtost 5/4 za zajce in obratno za lisice.

Kot v nalogi z začetka semestra lahko zapišem diferencialni enačbi za obe populaciji:

$$\dot{Z} = 5\alpha Z - 4\alpha Z - \frac{\alpha}{L_0} ZL \quad (10)$$

$$\dot{L} = 4\beta L - 5\beta L - \frac{\beta}{Z_0} ZL, \quad (11)$$

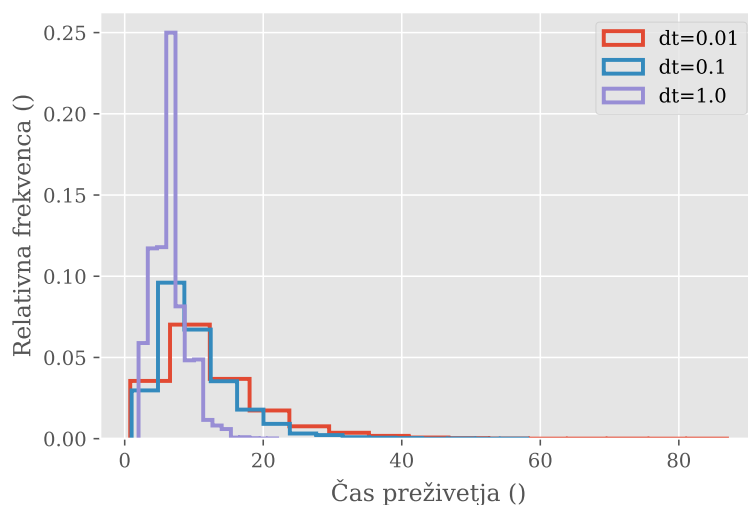
kar se v stohastični obravnavi prepiše v:

$$Z_{n+1} = Z_n + \mathcal{P}(5\alpha Z_n \Delta t) - \mathcal{P}(4\alpha Z_n \Delta t) - \mathcal{P}\left(\frac{\alpha}{L_0} Z_n L_n \Delta t\right) \quad (12)$$

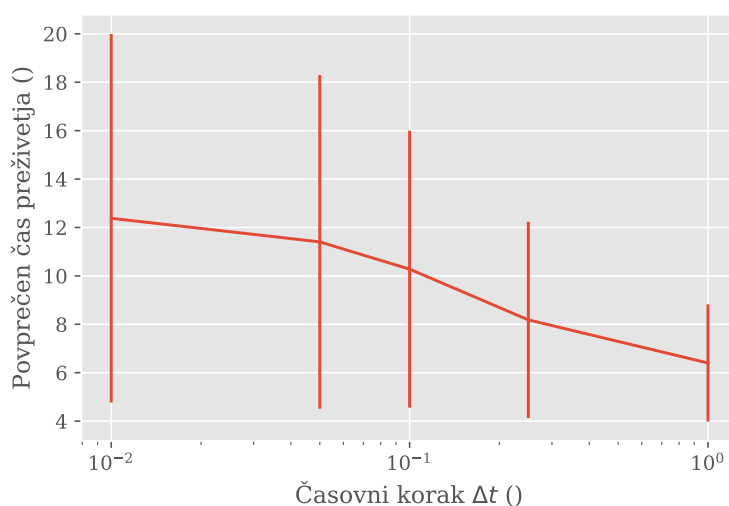
$$L_{n+1} = L_n + \mathcal{P}(4\beta L_n \Delta t) - \mathcal{P}(5\beta L_n \Delta t) - \mathcal{P}\left(\frac{\beta}{Z_0} Z_n L_n \Delta t\right), \quad (13)$$

kjer z  $\mathcal{P}$  označujem po Poissonovi porazdelitvi generirano število. Za raziskovanje časovnega razvoja teh enačb in faznega portreta, ki ga porodijo, sem si pripravil majhen uporabniški vmesnik (slika 13), s katerim sem iskal najlepše primerke. Za avtomatsko shranjevanje slik mi je precej prav prišla rutina `time.monotonic()`, ki vrača vedno naraščajoč čas, ki je nadvse prikladen za pripenjanje na konec imen, pod katere spravljamo grafe. Na ta način si nobene datoteke ne prepišemo, odpade pa tudi potreba po ročnem popravljanju imen, pod katere shranjujemo rezultirajoče slike. Dva zanimiva primera najdemo na slikah 13 in 3.

Pogledal sem tudi povprečne čase preživetja pri posameznih časovnih korakih in jih prikazal na sliki 16.



Slika 15: Časi preživetja najbolj kratkožive populacije. Opazimo, da so pri grobih časovnih korakih časi izumrtja stisnjeni v ozko porazdelitev, zelo dolgoživih *outlierjev* praktično ni, saj je zaradi velikega časovnega koraka verjetnost za *fluktuacijsko smrt* velika. Nasprotno pri najmanjših korakih opazimo razmazanost porazdelitev po večjem časovnem intervalu, najdemo tudi izredno dolgožive primerke, ki živijo red velikosti dlje kot večina. Simuliral sem  $10^4$  časovnih razvojev za vsak  $\Delta t$ .



Slika 16: Časi preživetja v odvisnosti od časovnega koraka  $\Delta t$ . Tudi tukaj opazimo blago odvisnost od izbire dolžine koraka. Za vsako merilno točko sem simuliral  $10^4$  potekov.