

201: Navadne diferencialne enačbe: začetni problemi

Peter Rupnik

28. februar 2024

1 Naloga

1. S pomočjo podprogramov za metodo Runge-Kutta zasleduj gibanje planeta na tiru okrog sonca. Opazuj stabilnost razdalje obeh teles pri krožnem gibanju. Preveri točnost obhodnega časa ter natančnost povratka pri eliptičnih tirih, zlasti pri tistih z majhno začetno hitrostjo. Opazuj stalnost energije in vrtilne količine.
2. Razišči obnašanje planeta v krožni orbiti, če sonce nadomestite s parom polovičnih sonc, v odvisnosti od njune medsebojne razdalje. Sonci sta v krožni orbiti okrog skupnega težišča, vpliv planeta na njuno orbito zanemarimo.
3. Trk zvezde in planetnega sistema: mimo sonca s planetom na krožnem tiru pridrvi v tirni ravnini druga zvezda z enako maso. Mimobežna zvezda vpada s hitrostjo, ki je enaka dvakratni obodni hitrosti planeta in potuje po ravni črti v razdalji 1.5 radija planetnega tira (nalogo smo poenostavili z zanemaritvijo keplerskega tira prihajajoče zvezde). Razišči končno usodo planeta v odvisnosti od njegove faze. Račun začnemo, ko je vpadna zvezda še 10 radijev planetnega tira daleč od svojega perihelija in ga končamo, ko se znajde v točki, ki je simetrična na začetno. Kaj se spremeni, če smer gibanja planeta obrnemo?

2 Reševanje

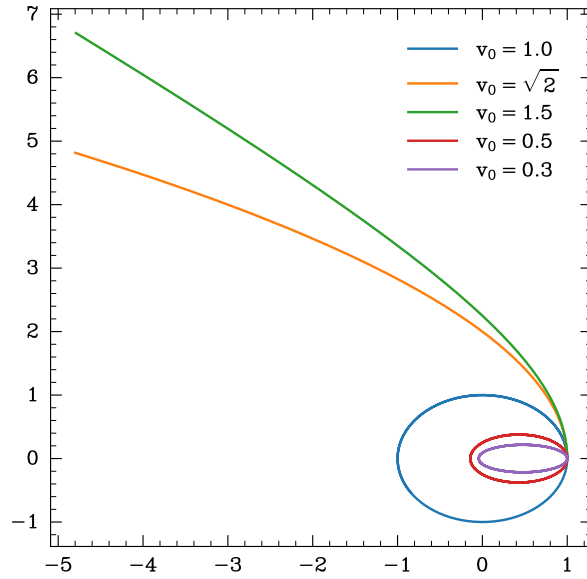
2.1 Podnaloga 1

Najprej se uverim, da lahko iz začetnih pogojev pravilno integriram časovni razvoj. Izbral sem si nekaj začetnih hitrosti, za katere vemo, kakšne orbite porodijo. Za orbite¹ velja:

$$\text{orbita} = \begin{cases} \text{krožnica,} & v_0 = 1, \\ \text{hiperbola,} & v_0 = \sqrt{2}, \\ \text{parabola,} & v_0 > \sqrt{2}, \\ \text{elipsa,} & \text{sicer} \end{cases}$$

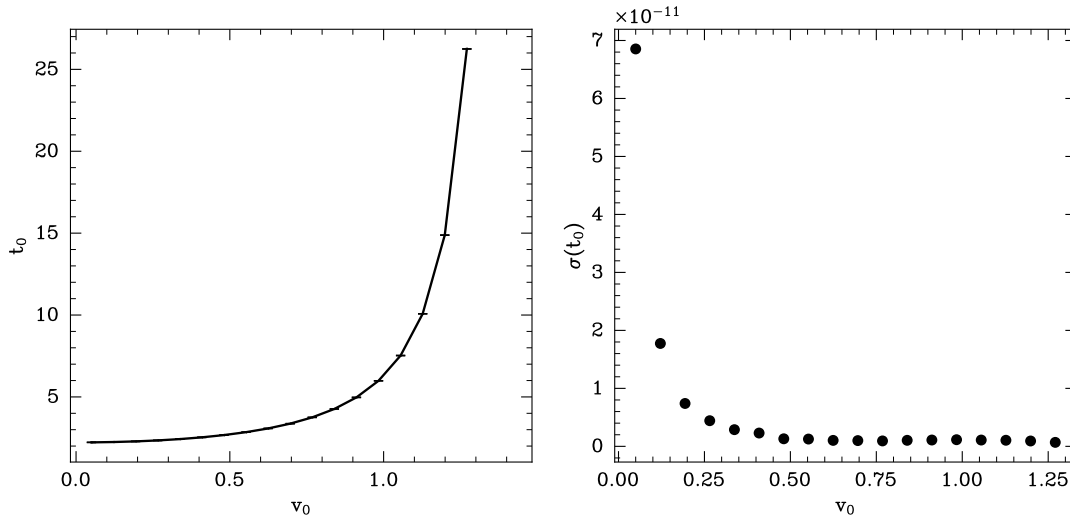
Za $v_0 \in 1, \sqrt{2}, 1.5, 0.5, 0.3$ sem izračunal trajektorije v časovnem intervalu $t \in [0, 10]$ z adaptivnim časovnim korakom z metodo `scipy.integrate.solve_ivp`.

¹brez upoštevanja simetrije $v_0 \rightarrow -v_0$ in izrojenih elips za $v_0 = 0$



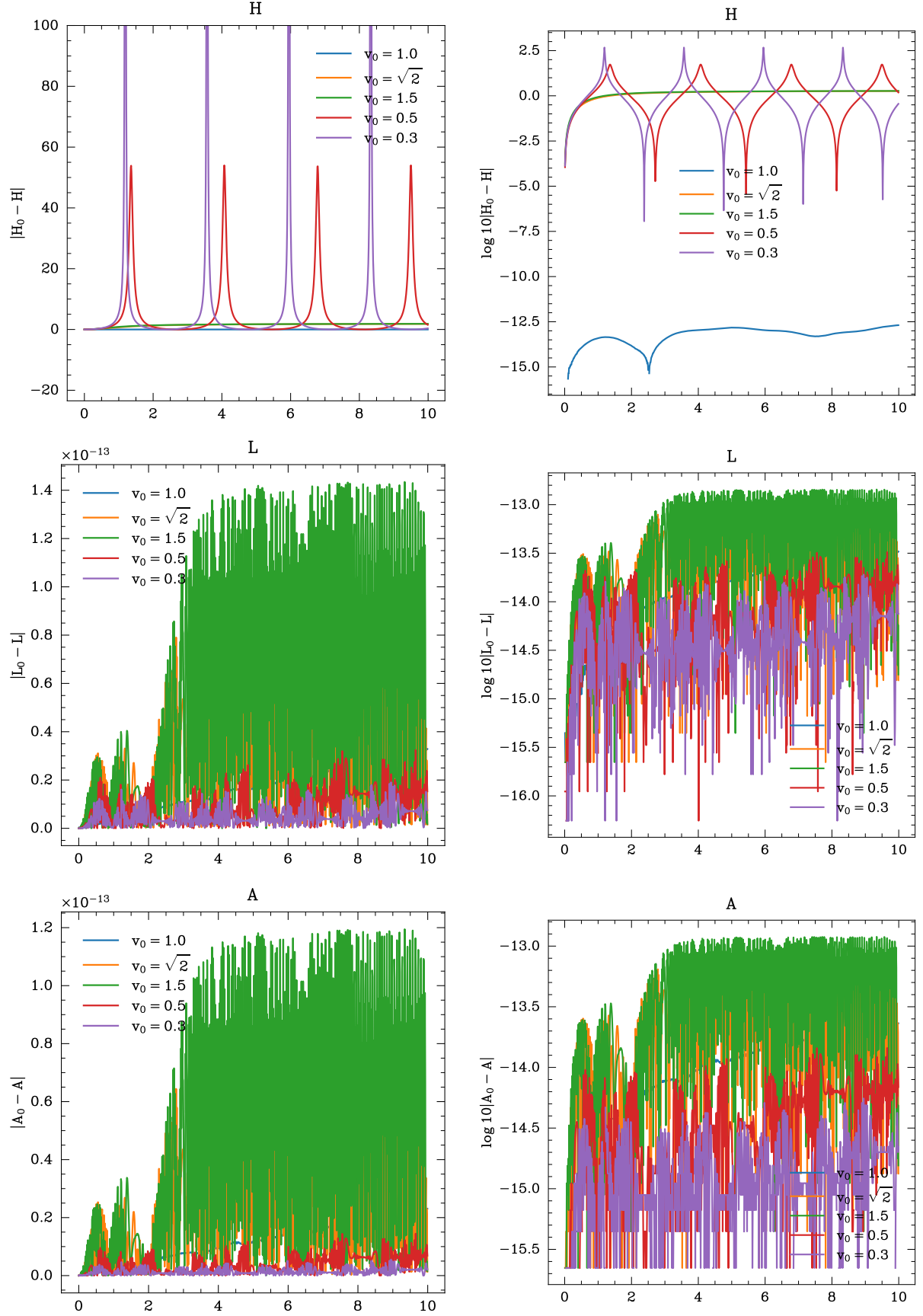
Naslednji korak je študija invariantnih količin. Zanimalo nas bo spreminjanje polne energije H , vrtilne količine \mathbf{L} , in Laplace-Runge-Lenzovega vektorja \mathbf{A} skozi čas za različne začetne pogoje. Rezultate prikazujem na sliki ??.

Za študijo stabilnosti obhodnih časov sem implementiral **event tracker**, funkcijo, katere koren bo integrator iskal. Pri tem sem se posvetil primerom, ko $v_0 < \sqrt{2}$, da zagotovim periodičnost orbit. Uporabljena je bila sledeča metodologija: za vsak v_0 sem iskal orbito za $t \in (0, 21\pi)$, pri čemer mi je prehode čez $y = 0$ iskal integrator sam. Dobljene čase prehoda sem numerično odvajal, da dobim čase med zaporednimi prehodi, nato pa sem izračunal povprečno periodo in standardno deviacijo. Rezultate prikazujem na naslednji sliki.



Stabilnost obhodnega časa. [Levo] povprečne vrednosti zaporednih obhodnih časov s standardnimi deviacijami. [Desno] standardne deviacije intervalov med zaporednimi prehodi.

Pri nizkih začetnih hitrostih standardna deviacija zaporednih izmerkov strmo naraste, kar lahko pripišemo težavam, na katere naleti integrator v bližini pola potenciala.

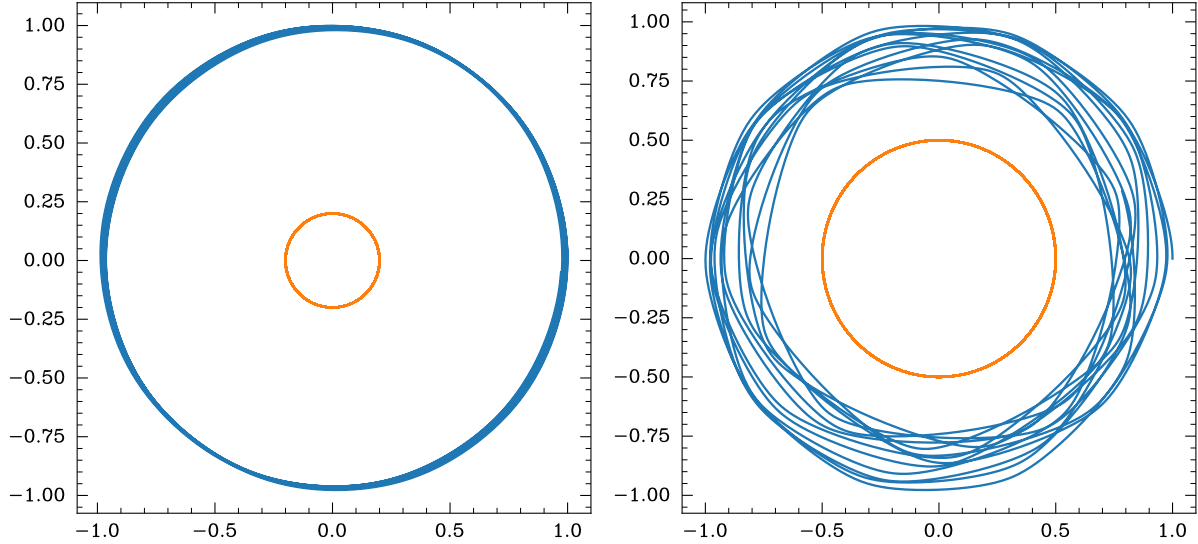


Slika 1: Časovni poteki invariantnih količin. V vseh primerih se količine najlepše obnašajo za krožno orbito. Polna energija H je najbolj nestabilna.

2.2 Podnaloga 2

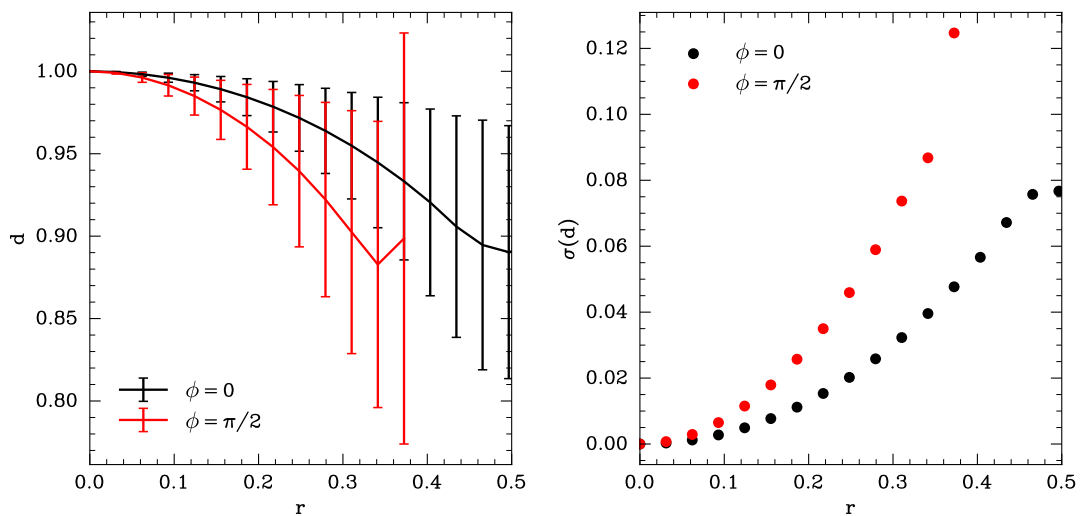
Nato sem popravil cevovod za integracijo tako, da je upošteval prispevek dveh pol-sonc, ki krožita okrog skupnega težišča z nastavljivo kotno hitrostjo, nastavljivo medsebojno razdaljo, in nastavljivim zamikom glede na planet.

Raziskal sem, kakšne orbite lahko dobim z različnimi nastavitvami začetnih parametrov. Z rumeno prikazujem orbiti sonc.



Za študijo vpliva dvozvezdja na dinamiko planeta pogledam krožne orbite planeta pri $v_0 = 1$. Z variacijo razdalje med polsoncema r opazujem, kaj se dogaja s povprečjem in standardno deviacijo oddaljenosti orbite planeta od masnega središča sistema. V analizo sem vključil samo primere, kjer planet ne 'pobegne'. Kotna hitrost polsonc je v vseh poskusih znašala 2π . Trajektorije sem integriral do časa $t = 60$, začetna hitrost planeta je bila fiksirana na $v_0 = 1$.

Kot pričakovano je vpliv večji pri večjih medzvezdnih razdaljah, ko $r \rightarrow d$, viden pa je že pri majhnih. Presenetljivo je vpliv dvozvezdja bolj opazen, ko je ob času 0 zveznica med polsoncema navpična.



2.3 Podnalogi 3

Za študijo preleta mimobežne zvezde sem spet pripravil cevovod za integracijo. Tokrat sem poleg koordinat in impulzov planeta integriral še vodoravno koordinato mimobežne zvezde, kar sem lahko uporabil kot signal za končanje terminacije (kot opisano v prvi podnalogi.) Za začetne pogoje vzamem

$$y_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ v \\ u \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ -v_0 \sin \phi \\ v_0 \cos \phi \\ -10 \end{bmatrix},$$

kjer je x_2 vodoravna koordinata mimobežne zvezde. Parametra ϕ in v_0 si pustim prosta za eksperimentacijo. Za boljši uvid integracijo pustim teči dlje kot naloga zahteva, nato pa po izračunanih trajektorijah izračunam energije H , H_1 , in H_2 , definirane kot:

$$\begin{aligned} T &= \frac{u^2 + v^2}{2}, \\ d_1 &= \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} \\ d_2 &= \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - 1.5)^2} \\ H &= T - \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \\ H_1 &= T - \frac{1}{d_1} \\ H_2 &= T - \frac{1}{d_2} \end{aligned}$$

S preletom parametrskega prostora lahko najdem nekaj zanimivih primerov, kjer mimoletne sonce spremeni orbito planeta, s svojim gravitacijskim privlakom izbije planet iz prvotne orbite, ali pa potegne planet za seboj. Želel sem prečesati prostor parametrov v_0 in ϕ in s pomočjo značilk H , H_1 , H_2 avtomatsko določiti usodo planeta, a na podlagi ročnega opazovanja ne opazim dobre heuristike.

