

104: Populacijski modeli

Peter Rupnik

2. september 2019

1 Prva naloga

1.1 Naloga

Preuči standardni deterministični model zajci-lisice (model Lotka-Volterra) v obliki

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= \alpha Z - \beta ZL \\ \dot{L} &= -\gamma L + \delta ZL\end{aligned}$$

- Nariši in preišči fazni diagram (brezdimenzijska oblika, zastojne točke, stabilnost...).
- Oglej si obhodne dobe v odvisnosti od začetnega stanja. Zadošča, da preiščeš stanja, v katerih ima ena komponenta ravnovesno vrednost.

1.2 Izvedba

Že s predavanj vemo, da lahko enačbi populacijske dinamike prepisemo v

$$\begin{aligned}\dot{z} &= pz(1-l) \\ \dot{l} &= \frac{l}{p}(z-1),\end{aligned}$$

s parametrom $p = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$, kar porodi zastojni točki $(Z, L) = (0, 0)$ in $(Z, L) = (1, 1)$. V določenih primerih lahko dobimo tudi oscilatorno obnašanje.

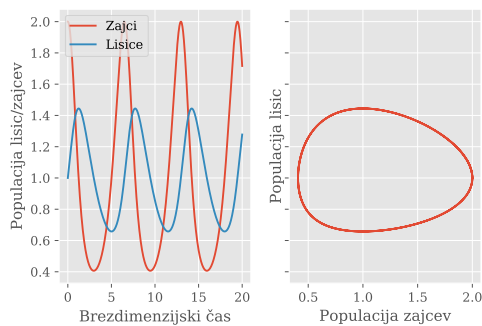
Definiral sem funkcijo, ki nam v odvisnosti od začetnih vrednosti in parametrov integrira diferencialne enačbe in vrne trajektorijo v faznem prostoru. Najprej sem se igral in s spreminjanjem začetnih pogojev in vrednosti p generiral različne trajektorije. Nekaj jih prikazujem na slikah 1 in 2.

V nadaljevanju me je zanimalo, kako se obhodni čas spreminja kot funkcija začetnih parametrov. V ta namen sem si po zgledu Jakoba Robnika pripravil funkcijo, ki je v faznem portretu štela obhode in tako sem posnel odvisnost na sliki 3.

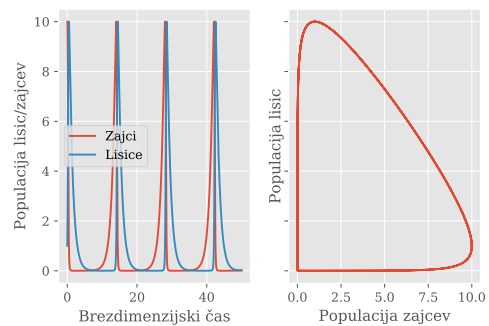
2 Druga naloga

2.1 Naloga

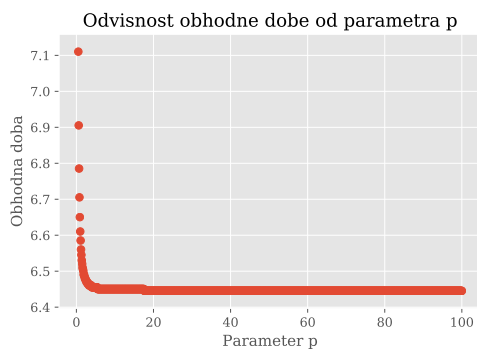
Analiziraj fazni portret za populacijski model laserja s konstantnim črpanjem.



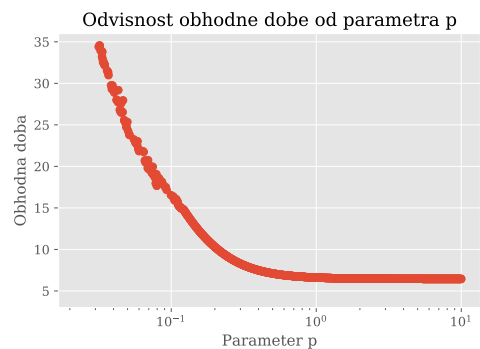
Slika 1: $p = 2$, zajcev je na začetku dvakrat več kot lisic.



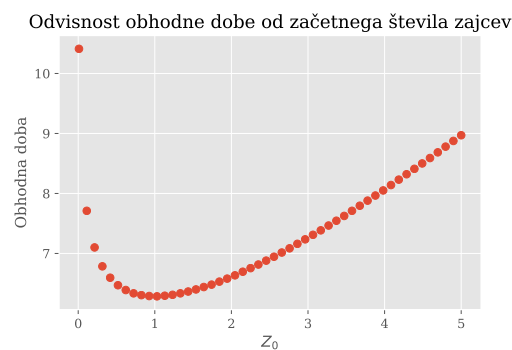
Slika 2: $p = 1$, zajcev je na začetku desetkrat več kot lisic.



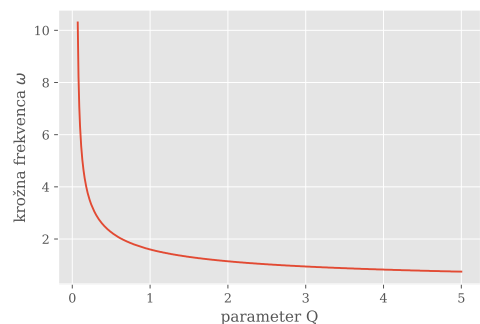
Slika 3: Odvisnost obhodne dobe od parametra p . Začetna vrednost zajcev je bila 2, lisic pa 1.



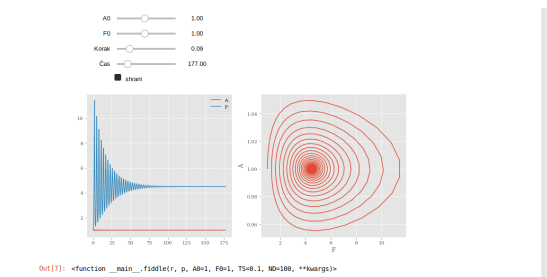
Slika 4: Ponovitev izračuna, le da tokrat za logaritemski nabor parametrov p . Ko se p manjša, začne obhodna doba naraščati, zato je opaznejši vpliv numerične nestabilnosti pri ocenjevanju obhodne dobe.



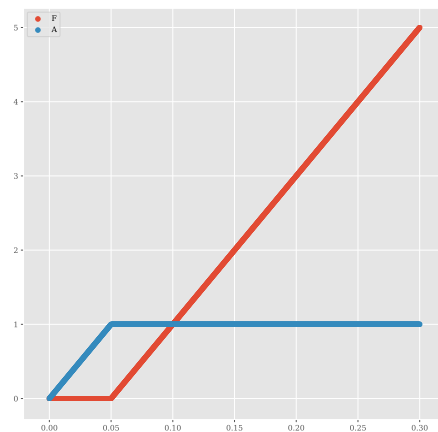
Slika 5: Odvisnost obhodne dobe od začetnega števila zajcev.



Slika 6: Z enako metodologijo kot v prvem delu obravnavan fazni diagram laserja. Rezultati se kvalitativno rahlo razlikujejo.



Slika 7: Z mini grafičnim vmesnikom sem raziskoval, kaj se dogaja, če *fiddle* parametre.



Slika 8: Z variacijo parametra Q se sistem ustali pri različnih vrednosti A in F . Začetne pogoje in parametre razen Q sem držal konstantne.

$$\begin{aligned}\dot{f} &= -Bf + Daf \\ \dot{a} &= -Ca - Eaf + Q\end{aligned}$$

Določi ravnovesno stanje v odvisnosti od moči črpanja. Kako se s tem parametrom spreminjata frekvenca in karakteristični čas relaksacijskih oscilacij?

2.2 Ravnovesno stanje v odvisnosti od moči črpanja

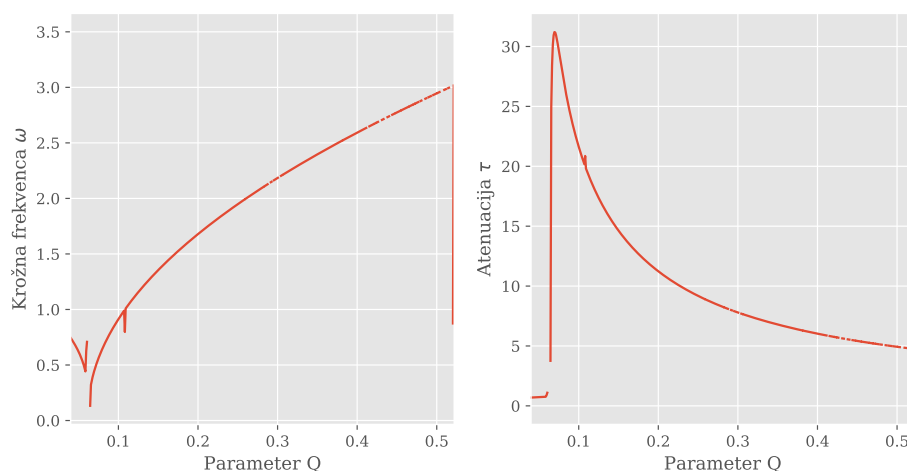
Spet sem si pripravil grafični vmesnik in funkcijo `fiddle`, tako sem si lahko pogledal vplive na časovni potek in fazni portret laserja. Rezultati so na slikah 8 in 7.

2.3 Spreminjanje frekvenca in karakterističnega časa relaksacijskih oscilacij

S slike 7 je že jasno vidno, kaj naloga zahteva, le pot do rezultata ni trivialna. Odločil sem se, da poskusim s fitanjem. Na podatke sem fital funkcijo

$$y(x) = y_0 + ke^{-\frac{x}{\tau}} \cos(\omega x + \phi).$$

Fitanje zaradi nelinearnosti ni bilo vedno stabilno, a sem v doglednem času vseeno uspel posneti profil vpliva parametra Q na ω in τ .



Slika 9: Vpliv parametra Q na krožno frekvenco in atenuacijski koeficient.

3 Tretja naloga

3.1 Naloga

Model epidemije: populacijo razdelimo v tri razrede: (D) zdravi in dovzetni, (B) bolni in kliconosni, (I) imuni: nedovzetni in nekliconosni. Bolezen se širi s stiki med zdravimi in bolnimi. Bolnik preide s konstantno verjetnostjo med imune (ozdravi ali umre).

$$\begin{aligned}\dot{D} &= -\alpha DB \\ \dot{B} &= \alpha DB - \beta B \\ \dot{I} &= \beta B\end{aligned}$$

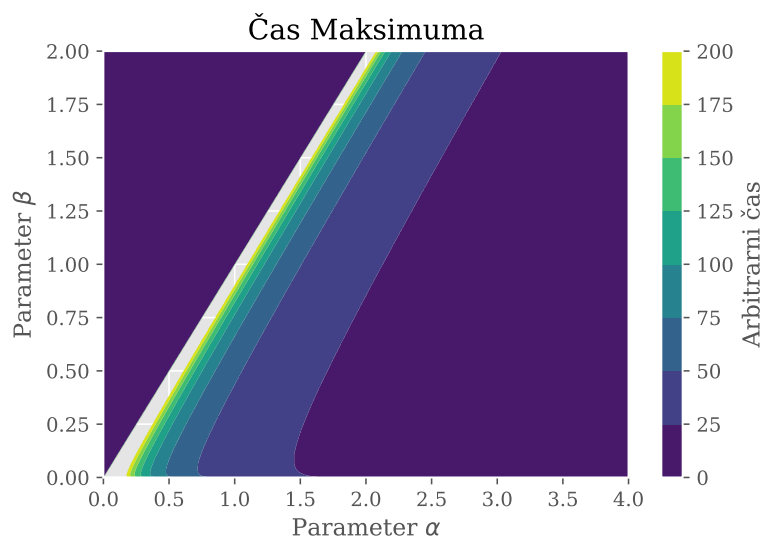
V epidemiji nas zanima njen vrh (maksimalno trenutno število obolelih), čas nastopa maksimuma in celotno število obolelih. S cepljenjem lahko vnaprej preselimo določen del populacije med imune. Kako vpliva delež cepljenih na parametre epidemije? Kako se spremeni potek epidemije, če obolele razdeliš na več razredov?

3.2 Maksimalno število obolenih

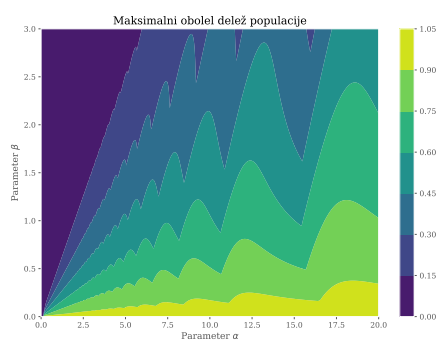
Spisal sem funkcijo, ki je sprejela parametra α in β , integrirala diferencialne enačbe in vrnila čas, pri katerem je B dosegel maksimum. Rezultate prikazuje slika 10.

3.3 Maksimalen delež obolele populacije

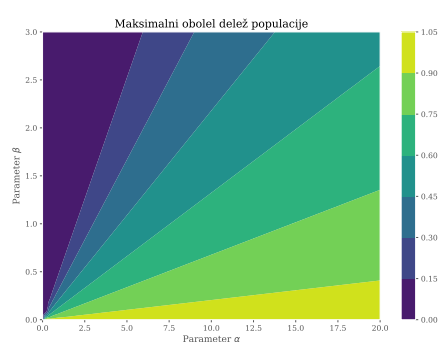
Podobna funkcija kot zgoraj omenjena mi je iz integriranih podatkov vrnila maksimalno vrednost B . To funkcijo sem uporabil za računanje profila maksimalne vrednosti deleža obolelih. Rezultat prikazujem na sliki 11. Sprva sem bil silno navdušen, ker sem odkril zanimive oscilacije, za katere sem mislil, da so posledica kaotičnih lastnosti diferencialnih enačb, vendar so dejansko le artefakti premajhnega koraka integratorja. Ko sem korak popravil, sem dobil sliko 12. Demonstracija vpliva koraka je prikazana na sliki 13.



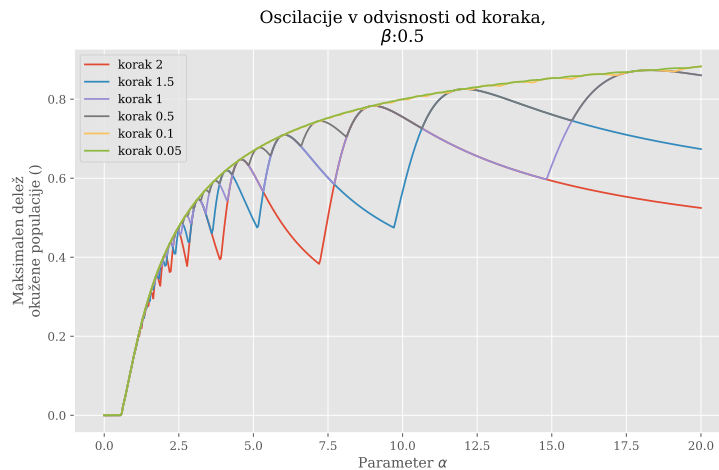
Slika 10: Čas, pri katerem doseže populacija bolnikov svoj maksimum, v odvisnosti od parametrov α in β .



Slika 11: Maksimalen delež obolelih pri različnih parametrih α in β in premajhnem koraku integratorja.



Slika 12: Reprodukcijska podataka iz slike 11 pri pravilni nastavitvi integracijskega koraka.



Slika 13: Prerez ravnine s slike 11 in 12 pri fiksiranem β . Z zmanjševanjem koraka oscilacije izginejo.

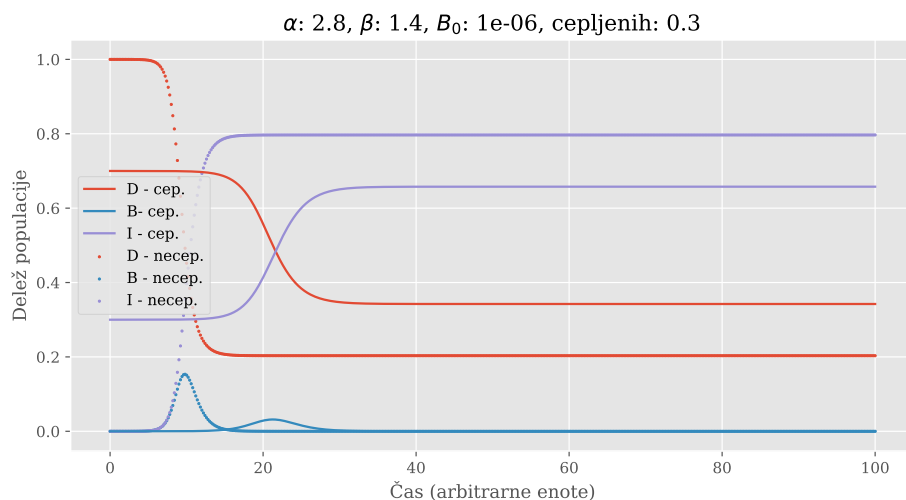
3.4 Vpliv cepljenja

Raziskal sem tudi vpliv cepljenja. Na sliki 14 prikazujem primerjavo med necepljeno populacijo in populacijo s 30 % cepljenih osebkov. Poudariti velja, da je začetno stanje bolnih v obeh primerih enako in zelo majhno ($1e-6$).

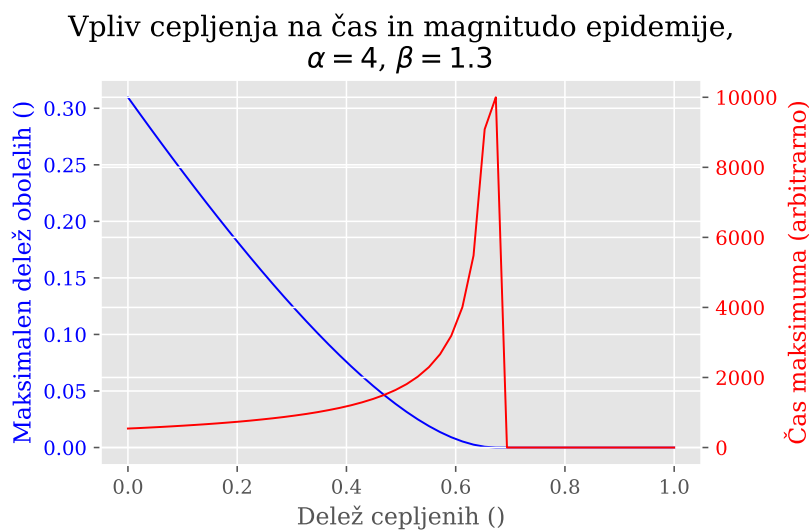
Raziskal sem tudi, kako vpliva odstotek cepljenih ljudi na magnitudo in čas izbruha. Pri poljubno izbranih parametrih podajam graf in razlago na sliki 15.

3.5 Večrazdelčni modeli

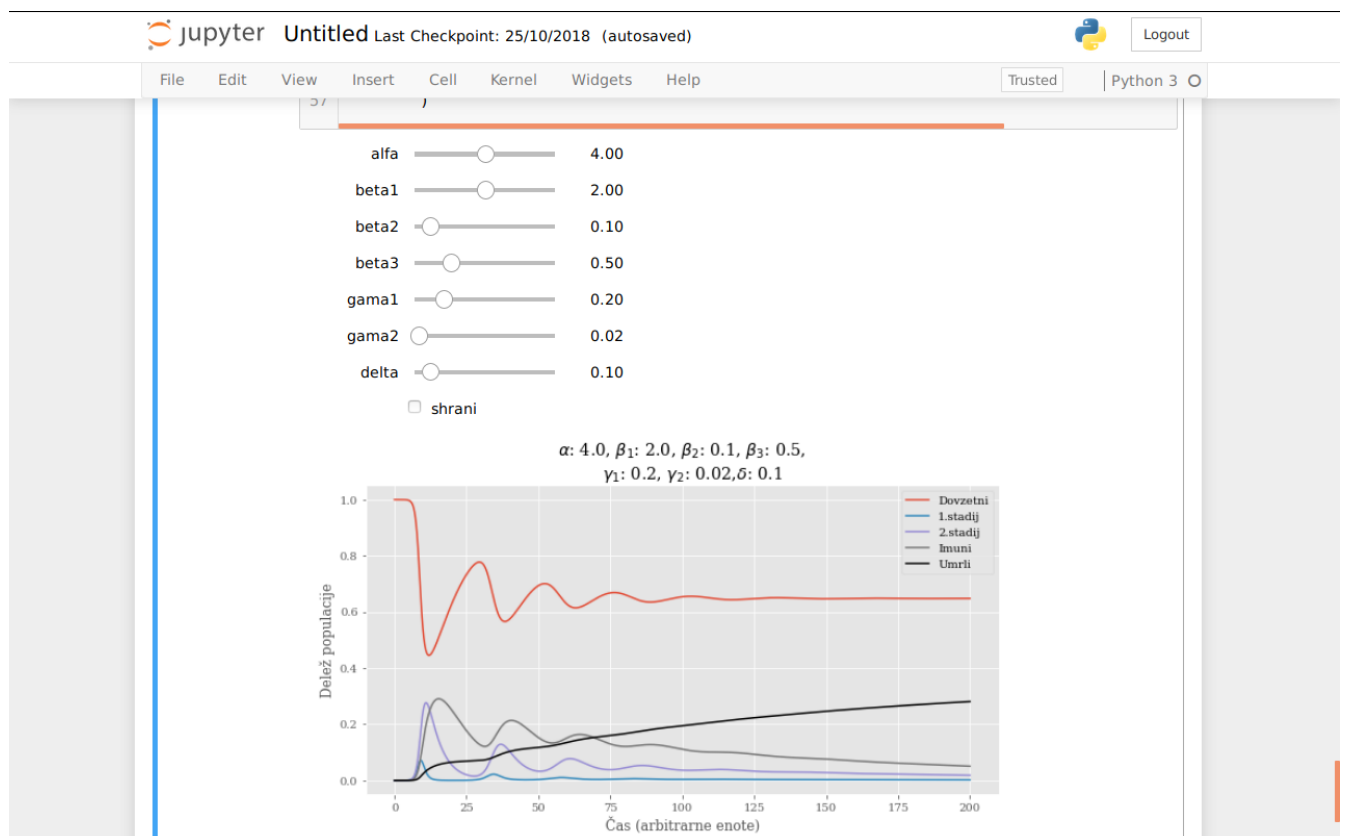
Sestavil sem diferencialne enačbe, ki opisujejo sledečo situacijo: dovzetni obolevajo zaradi prvega stadija bolezni, ki je kužen. Kužni umirajo, postajajo imuni, ali prehajajo v drugi stadij. Iz drugega stadija lahko preideš med umrle ali imune, imuni pa prehajajo v dovzetne. Vsakemu od teh prehodov sem predpisal svojo konstanto in sestavil rudimentaren grafični vmesnik, ki mi je omogočal iskati najbolj zanimive časovne poteke. Primer prikazujem na sliki 16. Z nastavljanjem konstant lahko iz primerov kot dosedaj opisane epidemije pridem do epidemij, pri katerih število obolelih oscilira, preden se ustali.



Slika 14: Primerjava časovnega profila epidemije v primeru, da 30 odstotkov populacije cepimo s časovnim profilom epidemije brez cepljenja. Maksimum je manjši in nastopi kasneje.



Slika 15: Vpliv deleža cepljenih oseb na magnitudo in čas izbruha pri poljubno izbranih parametrih α in β . Kot opazimo ima delež cepljenih oseb v populaciji velik vpliv na zmanjševanje magnitude epidemije, še večji, izrazito nelinearen vpliv pa ima tudi na čas izbruha. Po neki kritični vrednosti maksimalen delež obolelih pade na 0, prav tako tudi čas maksimuma, oba podatka pomenita isto: bolezen je zatrta, še preden izbruhne epidemija.



Slika 16: Grafični vmesnik in primer časovnega poteka epidemije pri bolj kompleksnem obnašanju. Zanimive so sklopitve med posameznimi razdelki.