

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа аэрокосмических технологий

Лабораторная работа №3.6.1  
Спектральный анализ электрических сигналов

Работу выполнил  
Лохматов Арсений Игоревич  
Б03-303



Долгопрудный, 2024

# 1 Теоретическая часть

**Цель работы:** изучить спектры сигналов различной формы и влияние параметров сигнала на вид соответствующих спектров; проверить справедливость соотношений неопределённостей; познакомиться с работой спектральных фильтров на примере RC-цепочки.

**Оборудование:** генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье.

## Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов называется разложением в ряд Фурье.

Пусть заданная функция  $f(t)$  периодически повторяется с частотой  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  - период повторения. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

Здесь  $\frac{a_0}{2}$  - среднее значение функции  $f(t)$ ,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt. \quad (2)$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

1. **Периодическая последовательность прямоугольных импульсов** (рис. 1) с амплитудой  $V_0$ , длительностью  $\tau$ , частотой повторения  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  - период повторения импульсов. Найдем коэффициенты разложения ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} = V_0 \frac{\tau}{T},$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \frac{\tau}{2})}{n\Omega_1 \frac{\tau}{2}} \sim \frac{\sin x}{x}. \quad (3)$$

Поскольку наша функция четная, все коэффициенты синусоидальных гармоник  $b_n = 0$ . Спектр  $a_n$  последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. 2 (изображен случай, когда  $T$  кратно  $\tau$ ).

Назовем *шириной спектра*  $\Delta\omega$  расстояние от главного максимума ( $\omega = 0$ ) до первого нуля огибающей, возникающего при  $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$ . При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi, \text{ или } \Delta\nu\Delta t \simeq 1 \quad (4)$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов  $\Delta\nu$  и  $\Delta t$  является частным случаем соотношения неопределенности в квантовой механике.

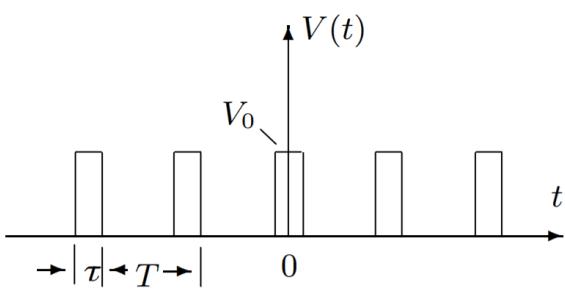


Рис. 1: Прямоугольные импульсы

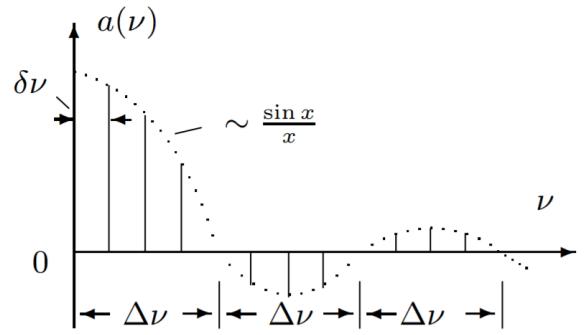


Рис. 2: Спектр последовательности прямоугольных импульсов

2. **Периодическая последовательность цугов** гармонического колебания  $V_0 \cos(\omega_0 t)$  с длительностью цуга  $\tau$  и периодом повторения  $T$  (рис. 3).

Функция  $f(t)$  снова является четной относительно  $t = 0$ . Коэффициент при  $n$ -й гармонике равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(\omega_0 t) \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left( \frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right) \quad (5)$$

Зависимость для случая, когда  $\frac{T}{\tau}$  равно целому числу, представлена на рис. 4. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и цугов мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину  $\omega_0$ .

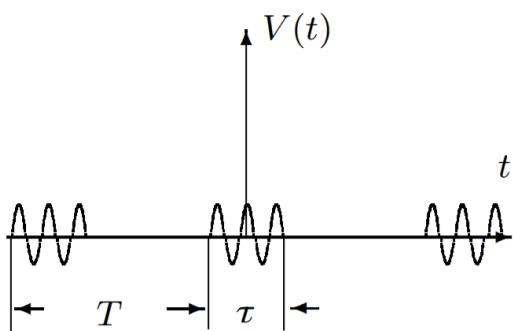


Рис. 3: Последовательность цугов

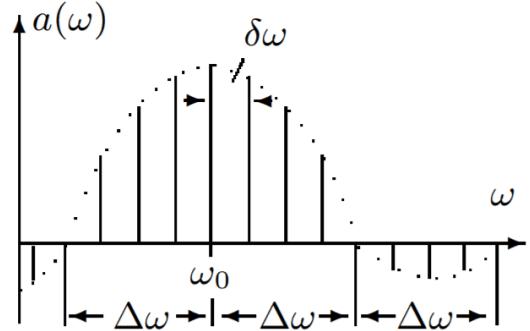


Рис. 4: Спектр последовательности цугов

3. **Амплитудно-модулированные колебания.** Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты  $\omega_0$ , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой  $\Omega$  ( $\Omega \ll \omega_0$ ) (рис. 5):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t \quad (6)$$

Коэффициент  $m$  называют **глубиной модуляции**. При  $m < 1$  амплитуда колебаний меняется от минимальной  $A_{min} = A_0(1 - m)$  до максимальной  $A_{max} = A_0(1 + m)$ . Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \quad (7)$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно - модулированных колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (8)$$

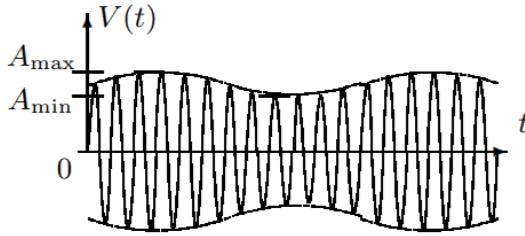


Рис. 5: Модулированные гармонические колебания

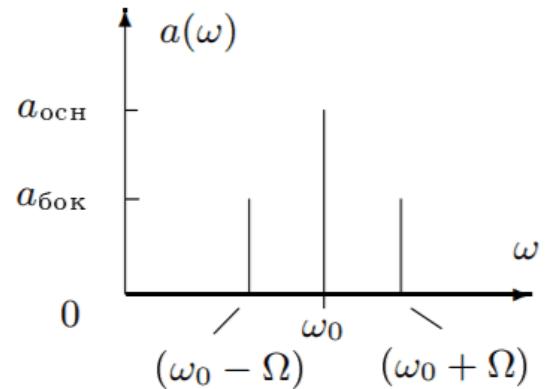


Рис. 6: Спектр модулированных гармонических колебаний

Спектр таких колебаний содержит три составляющих основную компоненту и две боковых (рис. 6). Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное немодулированное колебание с основной (несущей) частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $a = A_0$ . Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям с частотами  $\omega_0 + \Omega$  и  $\omega_0 - \Omega$ . Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют  $\frac{m}{2}$  от амплитуды немодулированного колебания:  $a = \frac{A_0 m}{2}$ . Начальные фазы всех трех колебаний одинаковы.

## 2 Экспериментальная установка.

В работе изучаются спектры периодических электрических сигналов различной формы (последовательности прямоугольных импульсов и цугов, а также амплитудно- и фазо-модулированных гармонических колебаний). Спектры этих сигналов наблюдаются с помощью спектроанализатора, входящего в состав USB-осциллографа и сравниваются с рассчитанными теоретически. Схема установки изображена на рис.7

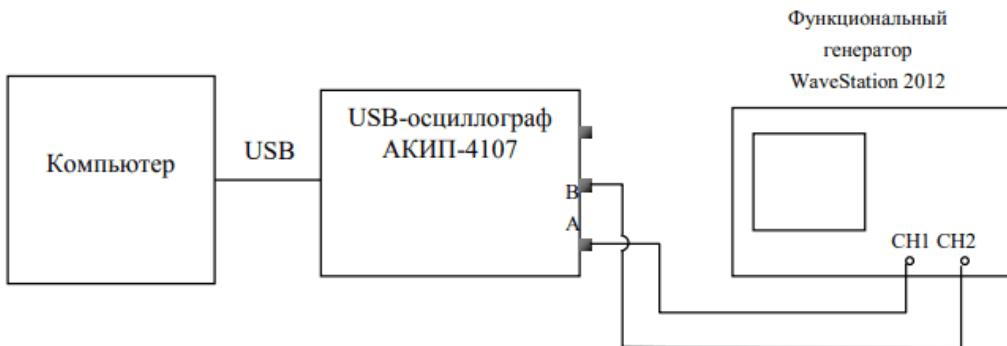


Рис. 7: Схема экспериментальной установки

Функциональный генератор *WaveStation2012* позволяет сформировать два различных электрических сигнала, которые выводятся на два независимых канала – "CH1" и "CH2". Сигнал с канала "CH1" подается на вход "A" а сигнал с канала "CH2" – на вход "B" USB-осциллографа. Затем эти сигналы подаются на вход компьютера через USB-соединение. При работе USB-осциллографа в режиме осциллографа, на экране компьютера можно наблюдать каждый из сигналов в отдельности, а также их произведение. В режиме спектроанализатора можно наблюдать спектры этих сигналов. При включении функционального генератора, на его экране отображается информация о параметрах электрического сигнала.

### 3 Экспериментальная часть

1. Ознакомились с устройством приборов: генератора сигналов произвольной формы, компьютерной программы, используемой для отображения сигнала с осциллографа.
2. Подключили один из выходов генератора к одному из каналов осциллографа, подключили приборы в сеть.

#### 3.1 Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённостей

1. Настроили генерацию прямоугольных импульсов со следующими параметрами: частота повторения  $\nu_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$ , Длительность импульса  $\tau = \frac{T}{20} = \frac{1}{20\nu_{\text{повт}}} = 50\text{мкс}$ .
2. Получили устойчивую картину колебаний (рис. 8) и спектр (преобразование Фурье) сигнала (рис. 9).

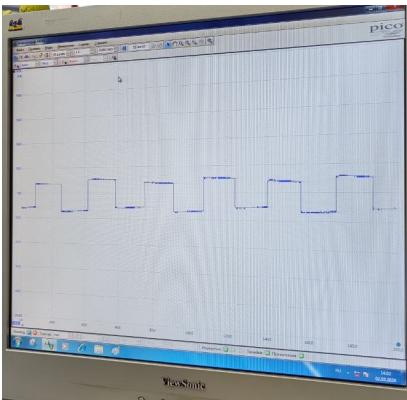


Рис. 8: Устойчивая картина колебаний прямоугольных импульсов

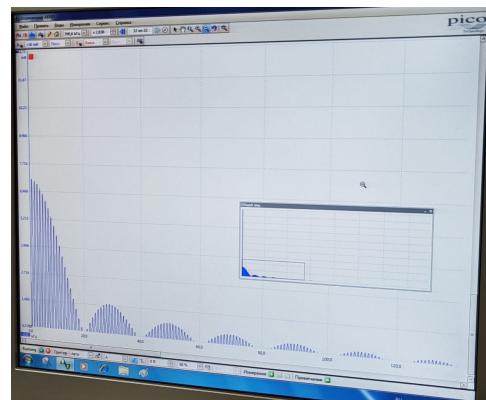


Рис. 9: Спектр последовательности прямоугольных импульсов

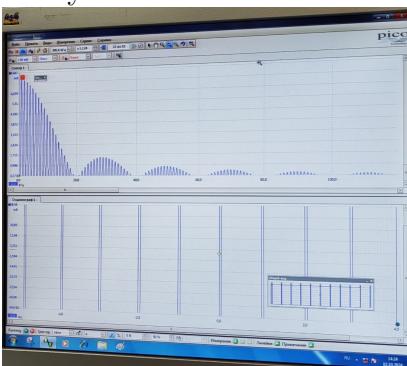


Рис. 10: Сигнал и спектр

3. Будем изменять параметры сигнала, наблюдаем за изменением спектра:

(а) изменяем  $\nu_{\text{повт}}$  при фиксированном  $\tau$ : изменяется количество импульсов.

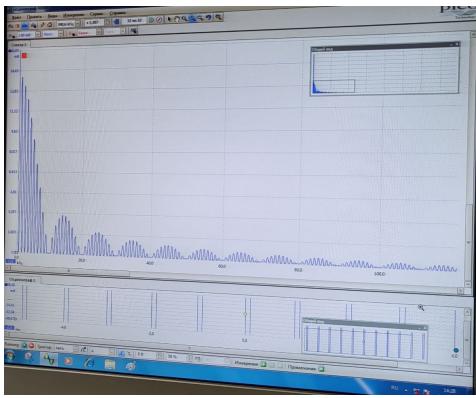


Рис. 11:  $\nu_{\text{повт}} = 500 \text{ Гц}$ ,  $\tau = 50 \text{ мкс.}$

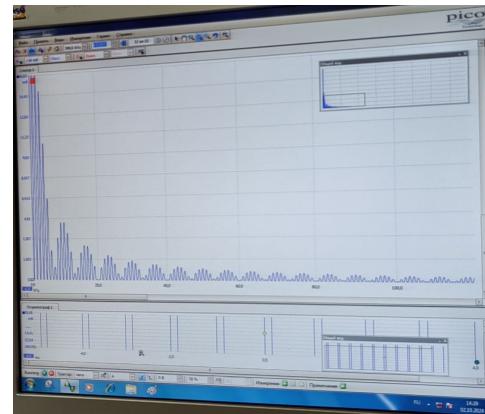


Рис. 12:  $\nu_{\text{повт}} = 1500 \text{ Гц}$ ,  $\tau = 50 \text{ мкс.}$

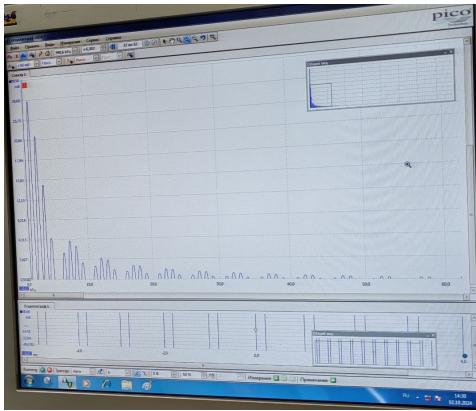


Рис. 13:  $\nu_{\text{повт}} = 2000 \text{ Гц}$ ,  $\tau = 50 \text{ мкс.}$

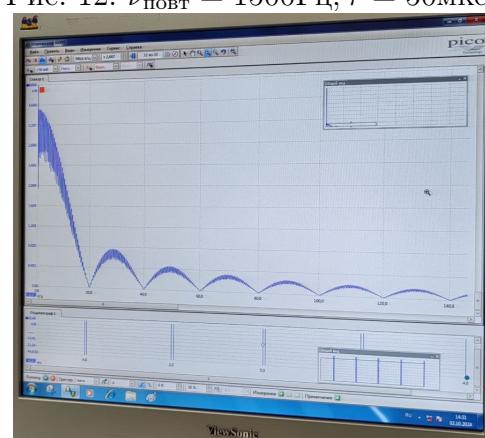


Рис. 14:  $\nu_{\text{повт}} = 1000 \text{ Гц}$ ,  $\tau = 50 \text{ мкс.}$

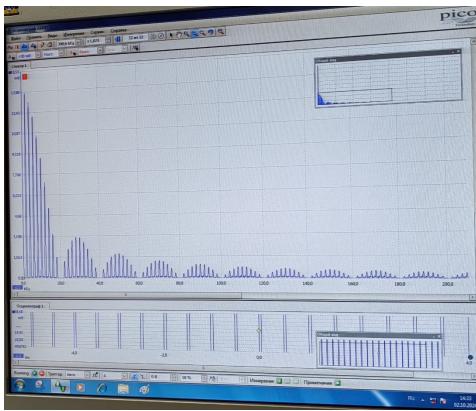


Рис. 15:  $\nu_{\text{повт}} = 1000 \text{ Гц}$ ,  $\tau = 150 \text{ мкс.}$

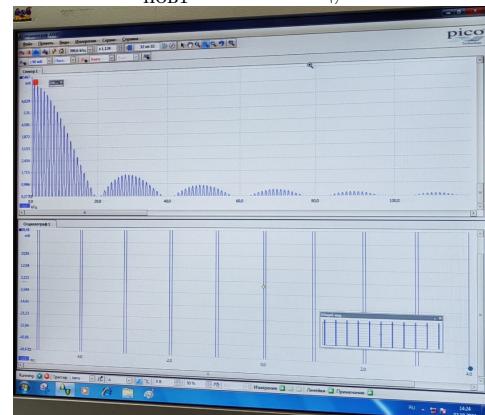


Рис. 16:  $\nu_{\text{повт}} = 1000 \text{ Гц}$ ,  $\tau = 200 \text{ мкс.}$

(б) изменяем  $\tau$  при фиксированном  $\nu_{\text{повт}}$ : изменяется длительность импульсов.

4. Принекоторых фиксированных параметрах ( $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 50 \text{ мкс.}$ ) измерим амплитуды  $a_n$  и частоты  $\nu_n$  нескольких спектральных компонент (гармоник). Результаты занесём в таблицу 1.

$$\nu_n = \frac{n}{T}, \quad |a_n| = \frac{|\sin \frac{\pi n \tau}{T}|}{\pi n} = \frac{\tau}{T} \frac{|\sin \pi \nu_n \tau|}{\pi \nu_n \tau}$$

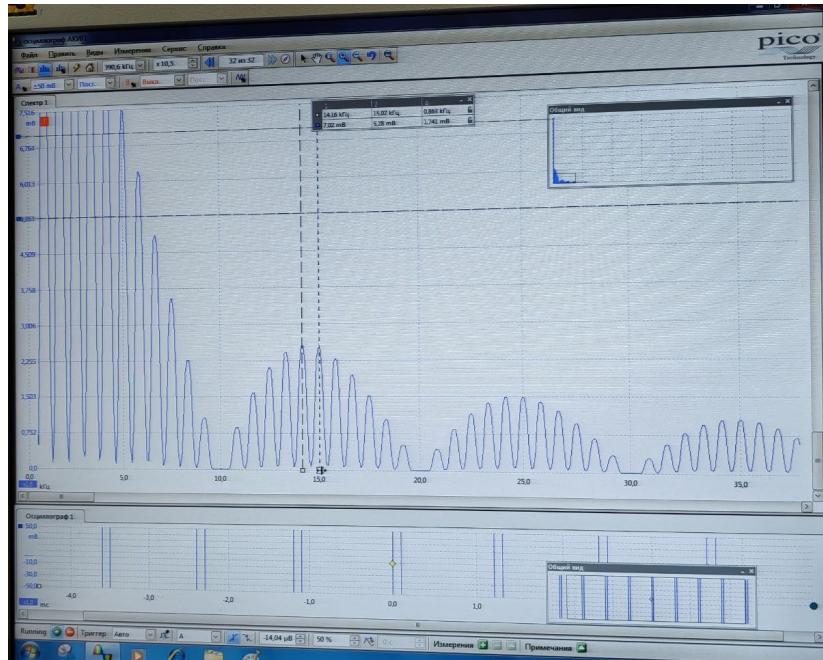


Рис. 17: Устойчивая картина колебаний прямоугольных импульсов

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\nu_n^{\text{эксп}}$ , Гц	1002	1980	2995	4009	5023	6001	7015	7993
$\nu_n^{\text{теор}}$ , Гц	$10^3$	$2 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$
$ a_n ^{\text{эксп}}$ , мВ	7.025	6.93	6.79	6.6	6.353	6.061	5.707	5.34
$ a_n/a_1 ^{\text{эксп}}$	1	0.986	0.967	0.939	0.904	0.863	0.812	0.760
$ a_n/a_1 ^{\text{теор}}$	1	0.984	0.963	0.935	0.900	0.858	0.810	0.757

Таблица 1: Результаты измерений и вычислений

5. Зафиксируем период повторений  $= 1\text{мс}$  прямоугольного сигнала. Изменяя длительность импульса  $\tau$  в диапазоне от  $\tau = \frac{T}{50}$  до  $\tau = \frac{T}{5}$ , измерим полную ширину спектра сигнала  $\Delta\nu$  – от центра спектра до гармоники с нулевой амплитудой (таблица 2).
6. Зафиксируем длительность импульса прямоугольного сигнала  $\tau = 100\text{мкс}$ . Изменяя период повторения  $T$  в диапазоне от  $2\tau$  до  $50\tau$ , измерим расстояние  $\delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n$  между соседними гармониками спектра (таблица 3).
7. Построим графики зависимостей  $\Delta\nu(1/\tau)$  (рис. 32) и  $\delta\nu(1/T)$  (рис. 33). Проведём наилучшие прямые и определим их наклон.

$$k_1 = 1.00035, \quad k_2 = 1.0042.$$

Так же убедимся в справедливости соотношений неопределённости:

$$\tau \cdot \Delta\nu \approx 1 \iff \tau \cdot \Delta\omega \approx 2\pi$$

$$T \cdot \delta\nu \approx 1 \iff T \cdot \delta\omega \approx 2\pi$$

Чем больше длительность сигнала  $\tau$  (либо больше интервал времени  $T$ , в течении которого происходит его заметное изменение), тем уже спектр сигнала  $\Delta\omega$ , и, наоборот, чем короче сигналы (или быстрее происходит изменение сигнала), тем шире его спектр, т.е. требуется более длинный сигнал, образующих в сумме данный сигнал. *Соотношения неопределённостей* выполняются.

$\tau$ , мкс	$\Delta\nu$ , кГц
20	50.09
40	25.01
60	16.99
80	12.5
100	10.0

$T$ , мкс	$\delta\nu$ , кГц
200	5.01
700	1.453
1200	0.832
1700	0.584

Таблица 2: Зависимость ширины спектра сигнала от длительности импульса

$T$ , мкс	$\delta\nu$ , кГц
2200	0.429
2700	0.361
3200	0.3
3700	0.28

Таблица 3: Зависимость разности частот между соседними гармониками от периода повторений

### 3.2 Наблюдения спектра периодической последовательности цугов

- Истановим генератор на режим подачи периодических импульсов синусоидальной формы (цугов) со следующими параметрами: несущая частота  $\nu_0 = 50\text{Гц}$ , период повторения  $T = 1$ , число периодов синусоиды в одном импульсе  $N = 5$  (что соответствует длительности импульса  $\tau = N/\nu_0 = 100$ ). Получили на экране осциллографа устойчивую картину сигнала.

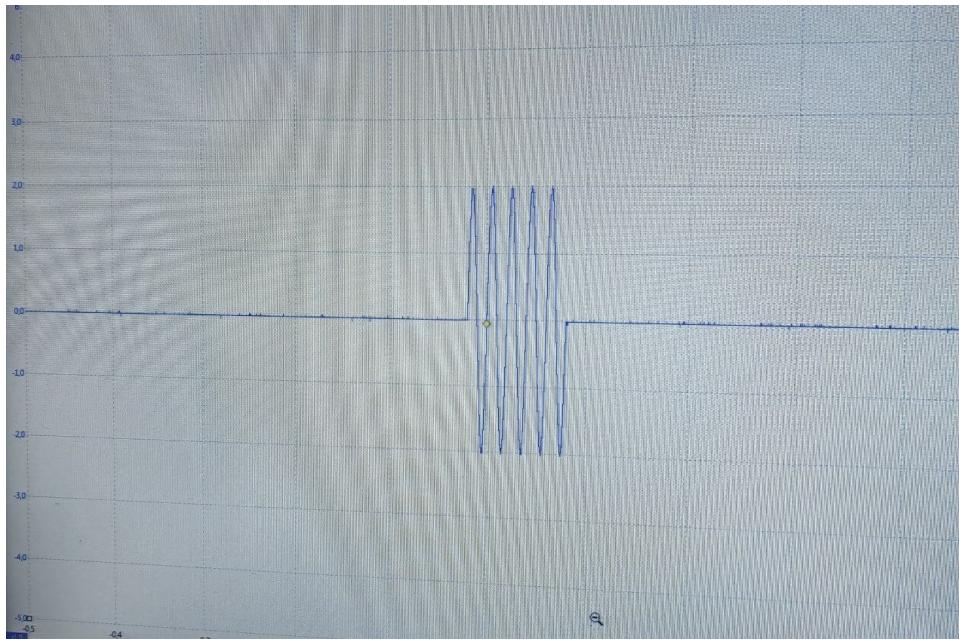


Рис. 18: Устойчивая картина цуга

- Получим на экране осциллографа спектр сигнала. Изменяя параметры сигнала  $\nu_0$ ,  $T$  и  $N$  наблюдаем, как изменяется вид спектра.

При изменении несущей частоты  $\nu_0$  меняется положение центра картины. При изменении симла периодов  $N$  меняется число дуг. При изменении периода повторений  $T$  меняется расстояние между импульсами.

- При параметрах сигнала, соответствующих сохранённых в предыдущем пункте изображениям, измерим положение центра спектра, его ширину  $\Delta\nu$  и расстояние между гармониками  $\delta\nu$ . Результаты занесём в таблицу 4.

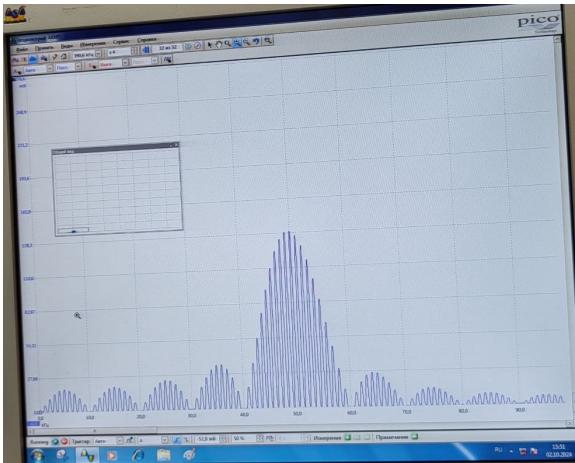


Рис. 19:  $\nu_0 = 50\text{Гц}$ ,  $T = 1\text{мс}$ ,  $N = 5$ .

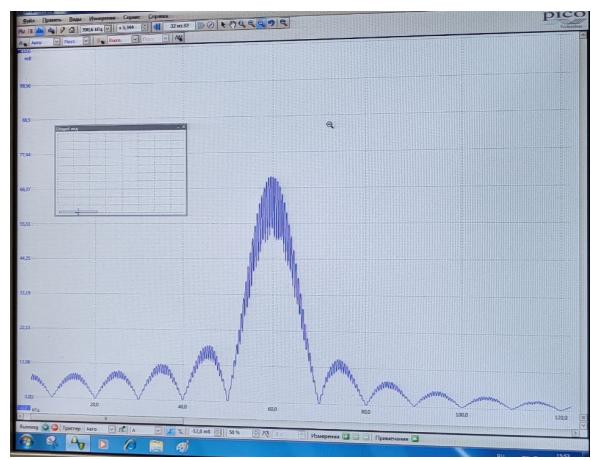


Рис. 20:  $\nu_0 = 60\text{Гц}$ ,  $T = 2\text{мс}$ ,  $N = 6$ .

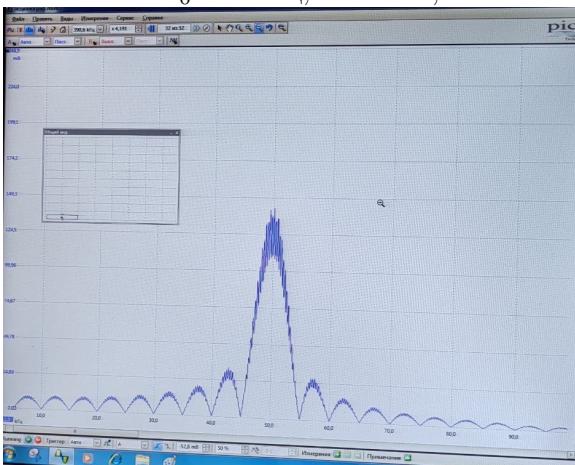


Рис. 21:  $\nu_0 = 50\text{Гц}$ ,  $T = 3\text{мс}$ ,  $N = 10$ .

	$\nu_0, \text{Гц}$	$T, \text{мс}$	$N$	$\nu_{\text{центр}}, \text{Гц}$	$\Delta\nu, \text{кГц}$	$\delta\nu, \text{кГц}$
1	50	1	5	50	10	1.054
2	60	2	6	60	10	0.494
3	50	3	10	50	5	0.325

Таблица 4: Результаты измерений

**Теорема смещения:** смещение сигнала во времени на  $\tau$  (запаздывание) приводит к умножению его спектра на  $e^{-i\omega\tau}$ .

Теорема смещения и соотношения неопределённостей выполняются.

### 3.3 Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала

- Установим на генераторе режим *модулированного по амплитуде* синусоидального сигнала со следующими параметрами: несущая частота  $\nu_0 = 50\text{кГц}$ , частота модуляции  $\nu_{\text{мод}} = 2\text{кГц}$ , глубина модуляции  $m = 0.5(50\%)$ . Получим на экране осциллографа устойчивую картину сигнала (рис. 22).
- С помощью осциллографа (в режиме курсорных измерений) измерим максимальную  $A_{max}$  и минимальную  $A_{min}$  амплитуды сигнала.

$$A_{max} = 1.232B, A_{min} = 0.406B, m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} = \frac{1.232 - 0.406}{1.232 + 0.406} = 0.504 \rightarrow \text{верно.}$$

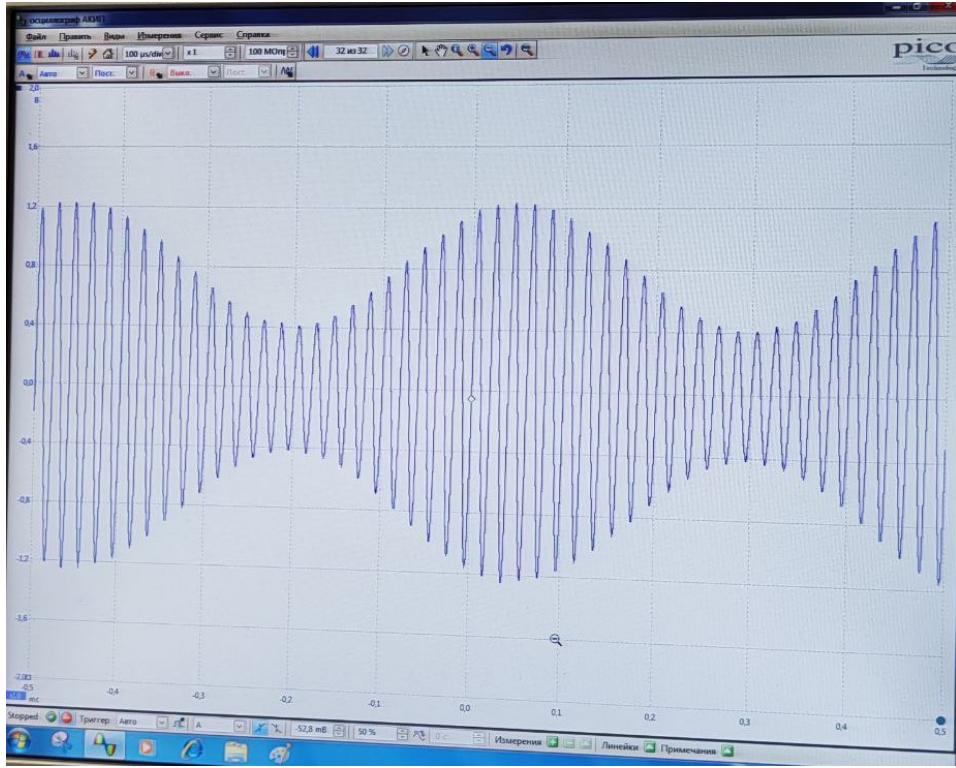


Рис. 22: Устойчивая картина амплитудно-модулированного сигнала

3. Получим на экране спектр сигнала. Измерим частоты центральной и боковой гармоник (в режиме курсорных измерений). Изменяя несущую частоту  $\nu_0$  и частоту модуляции  $\nu_{\text{мод}}$ , наблюдаем, как изменяется положение спектральных линий.  
При изменении частоты модуляции изменяется положение боковых амплитуд. При изменении несущей частоты изменяется положение основной амплитуды.
4. Изменяя на генераторе глубину модуляции  $m$  в диапазоне от 10% до 100%, измерим отношение амплитуд боковой и основной спектральных линий  $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}$ . Результаты занесём в таблицу 5.

$m, \%$	$a_{\text{бок}}$	$a_{\text{осн}}$	$\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}} \cdot 10^{-3}$	$\frac{a_{\text{осн}} \cdot m}{2}$
10	29.5	590.5	49.96	29.525
20	59.0	582.2	101.34	58.22
30	86.77	582.2	149.04	87.33
40	116.3	582.2	199.76	116.44

$m, \%$	$a_{\text{бок}}$	$a_{\text{осн}}$	$\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}$	$\frac{a_{\text{осн}} \cdot m}{2}$
50	144.9	590.5	245.39	147.625
60	174.4	582.2	299.55	174.66
70	203.0	582.2	348.68	203.77
80	231.7	582.2	397.97	232.88

Таблица 5: Результаты измерений

5. Построим график зависимости  $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}$  от  $m$  и проверим, совпадает ли результат с теоретическим. График представлен на рисунке 35.  
Должно выполняться соотношение:  $a_{\text{бок}} = \frac{a_{\text{осн}} \cdot m}{2}$ . В нашем случае так и есть, рассчёты представлены в таблице 5. Коэффициент наклона графика связан следующим соотношением:

$$k = \frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}} \cdot m} = \frac{a_{\text{бок}}}{2 \cdot a_{\text{бок}}} = \frac{1}{2}$$

Мы получили очень схожий результат  $k = 0.49642$ .

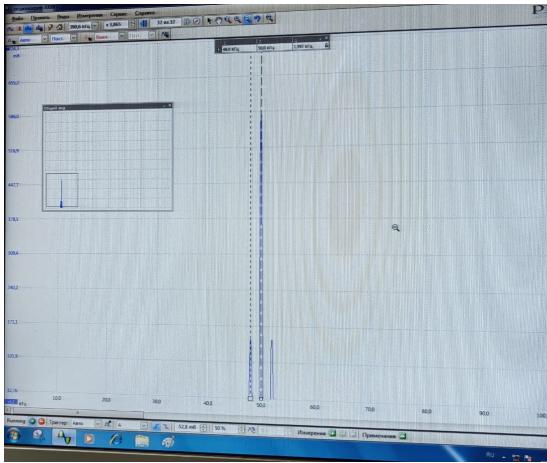


Рис. 23:  $\nu_0 = 25\text{Гц}$ ,  $\nu = 1\text{kГц}$ .

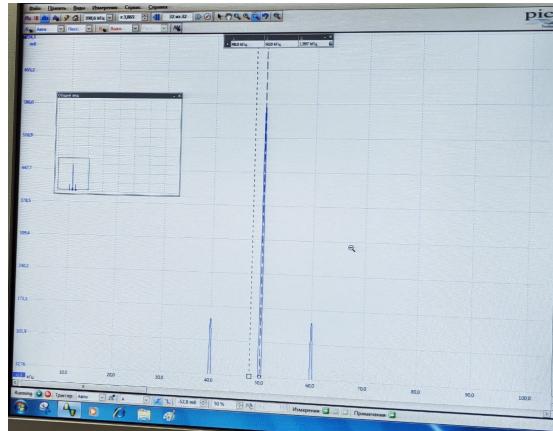


Рис. 24:  $\nu_0 = 25\text{Гц}$ ,  $\nu = 1.5\text{kГц}$ .

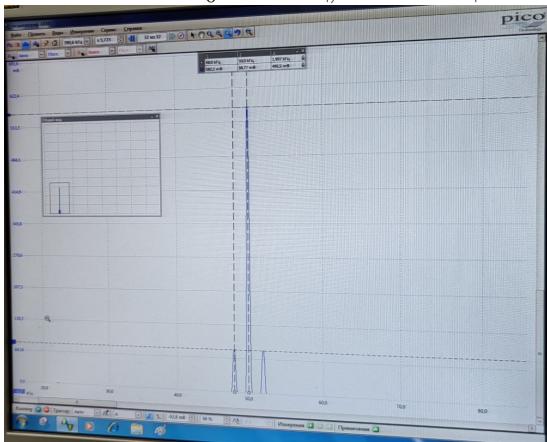


Рис. 25:  $\nu_0 = 25\text{Гц}$ ,  $\nu = 500\text{kГц}$ .

### 3.4 Изучение фильтрации сигнала

- Для  $RC$ -цепочки ( $RC$ -фильтр низких частот) с известными сопротивлением и ёмкостью рассчитаем её характерное время  $\tau = RC$  и соответствующую частоту  $\nu_{RC} = 1/\tau_{RC}$ .

$R, kOm$	$C,$	$\tau_{RC}, c$	$\nu_{RC},$
3	1000	$3 \cdot 10^{-6}$	333333

Таблица 6: Результаты измерений

Собирём схему. Подадим на вход  $RC$ -цепочки последовательность прямоугольных импульсов с периодом повторения  $T \approx \tau_{RC} = 3\text{мкс}$  и длительностью  $\tau \approx T/20 = 0.15\text{мкс}$ .

- Наблюдаем форму сигнала и его спектр при выходе  $RC$ -цепочки ("фильтрованный" сигнал) при различных значениях периода повторения  $T$ . Несколько случаев приведены на картинах 29, 30, 31.
- При некотором фиксированном периоде  $T = 6\text{мкс}$  проведём измерения отношений амплитуд соответствующих спектральных гармоник фильтрованного и исходного сигналов:  $K_n = |a_n|/|a_n^0|$ . Чтобы измерить амплитуды  $a_n^0$  спектра исходного сигнала, с помощью отдельного кабеля подадим екфильмированный сигнал на второй канал осциллографа. Результаты занесём в таблицу 7.

Проверим, что экспериментальная зависимость совпадает с теоретической  $K = \frac{1}{\tau_{RC}} \int_0^t f(t')dt'$ . Т.к. мы подаём последовательность прямоугольных импульсов, то правая часть зависит линейно от  $t$ , т.е. обратно пропорционально  $\nu$ . График соответствует этой зависимости.

$n$	$ a_n $ , ус.ед.	$ a_n^0 $ , ус.ед.	$K_n$
1	0.711	1.015	0.7
2	0.294	0.822	0.16
3	0.132	0.546	0.24
4	47.23	254.2	0.19
5	29.56	166.3	0.18

$n$	$ a_n $ , ус.ед.	$ a_n^0 $ , ус.ед.	$K_n$
6	25.27	233.8	0.11
7	17.43	204.0	0.09
8	9.58	114.6	0.08
9	8.016	91.84	0.087

Таблица 7: Результаты измерений

### 3.5 Выводы

В этой работе мы изучили спектральный состав периодических электрических сигналов, а именно:

1. исследовали спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов, проверили соотношения неопределённости;
2. наблюдали спектр периодической последовательности цугов;
3. изучили фильтрацию сигналов.

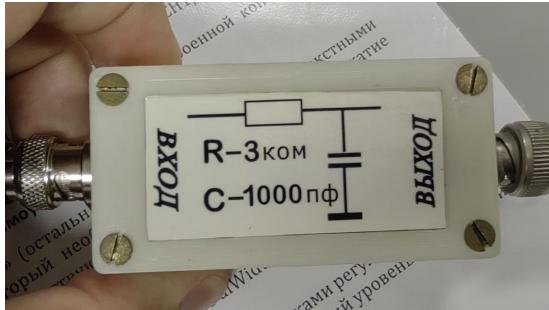


Рис. 26:  $RC$ -фильтр низких частот.

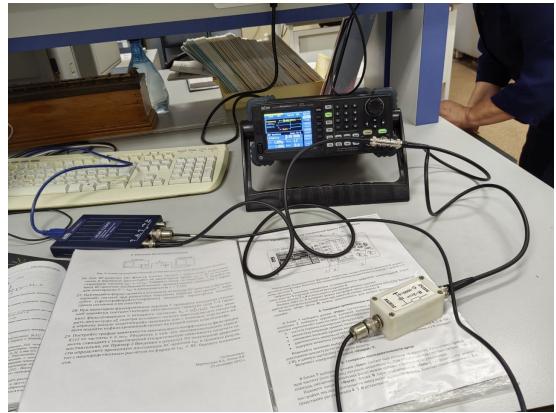


Рис. 27: Собранная схема.

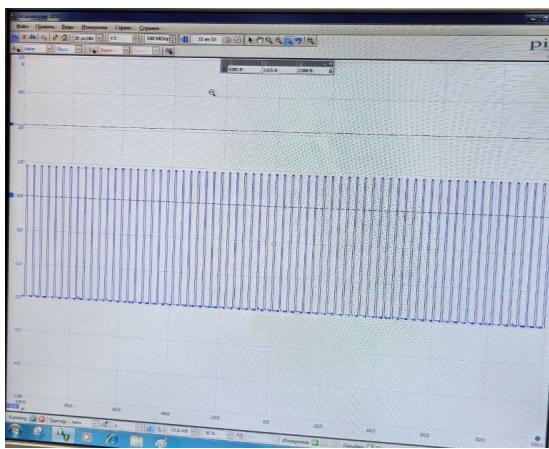


Рис. 28: Форма сигнала.

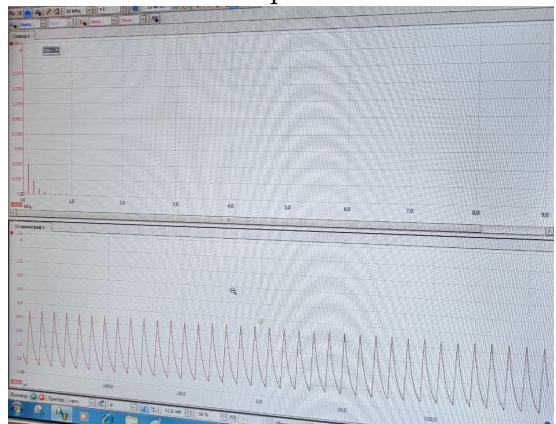


Рис. 29: Наблюдааемая форма сигнала и его спектр (1).

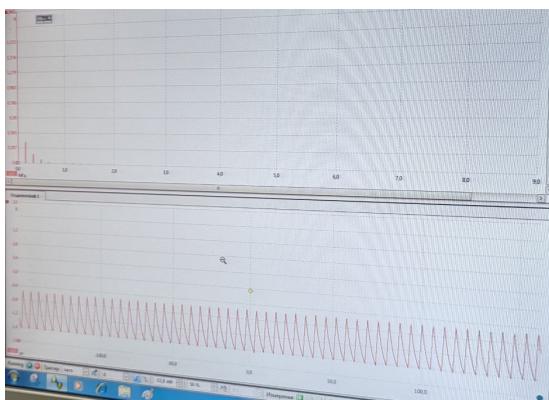


Рис. 30: Наблюдааемая форма сигнала и его спектр (2).

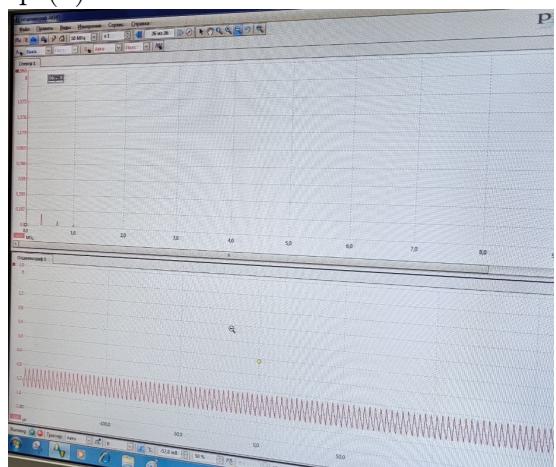


Рис. 31: Наблюдааемая форма сигнала и его спектр (3).

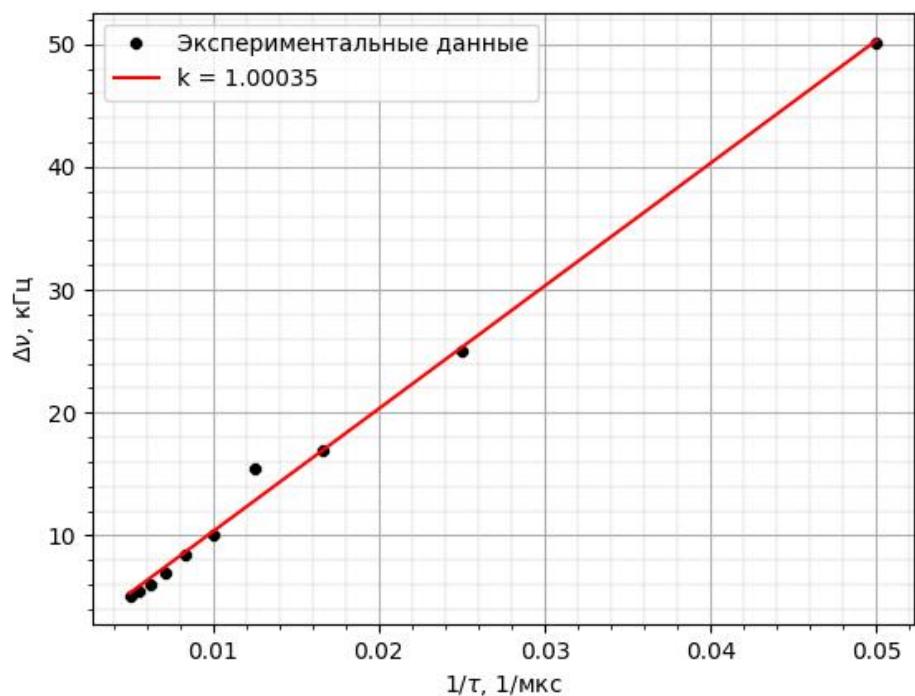


Рис. 32: Графическая зависимость ширины спектра сигнала от длительности импульса

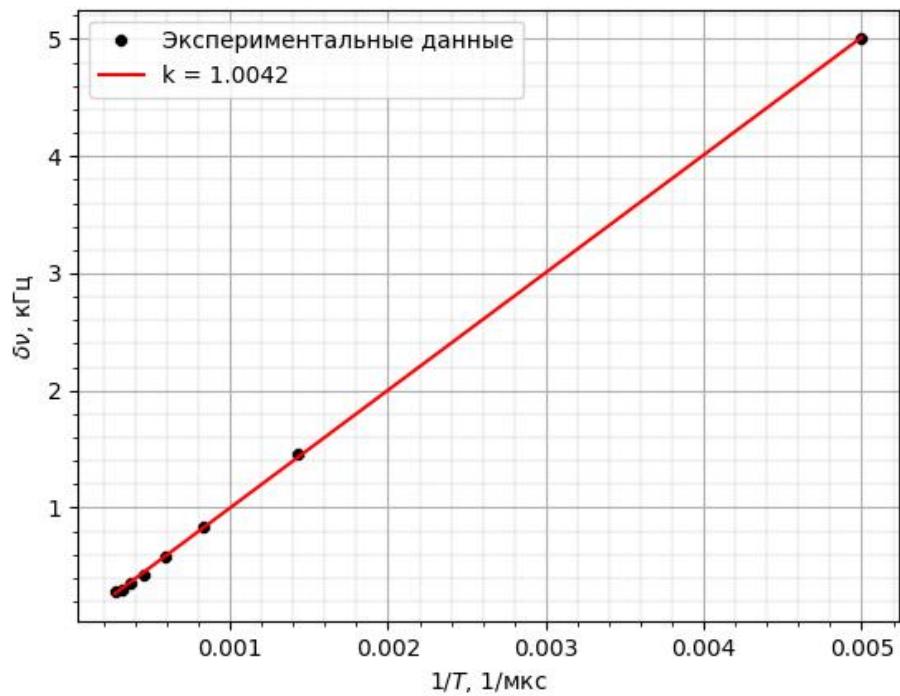


Рис. 33: Графическая зависимость разности частот между соседними гармониками от периода повторений

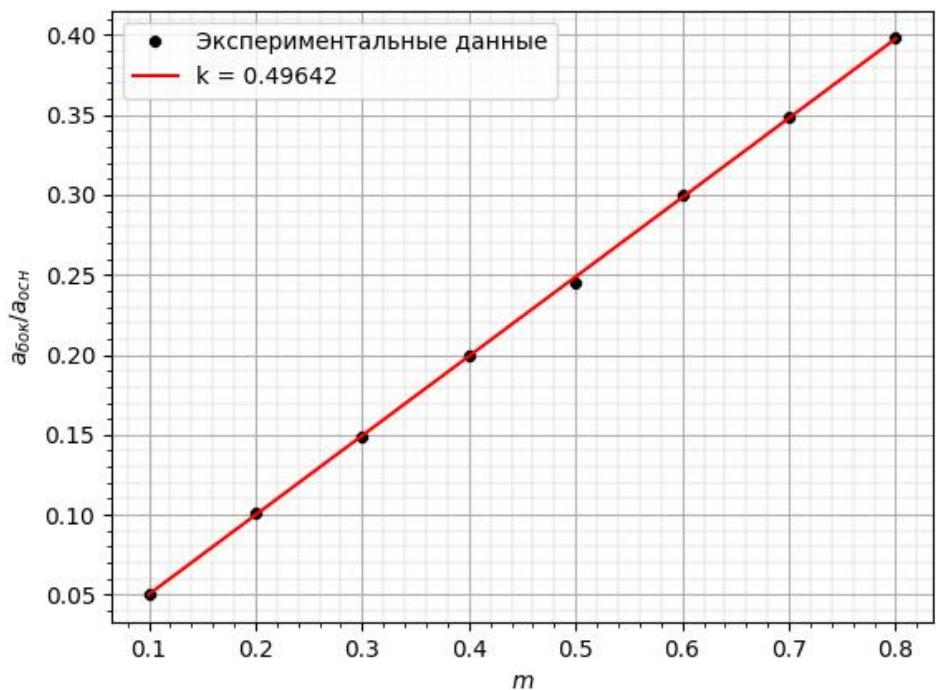


Рис. 34: Графическая зависимость отношения боковой частоты к основной от глубины модуляции

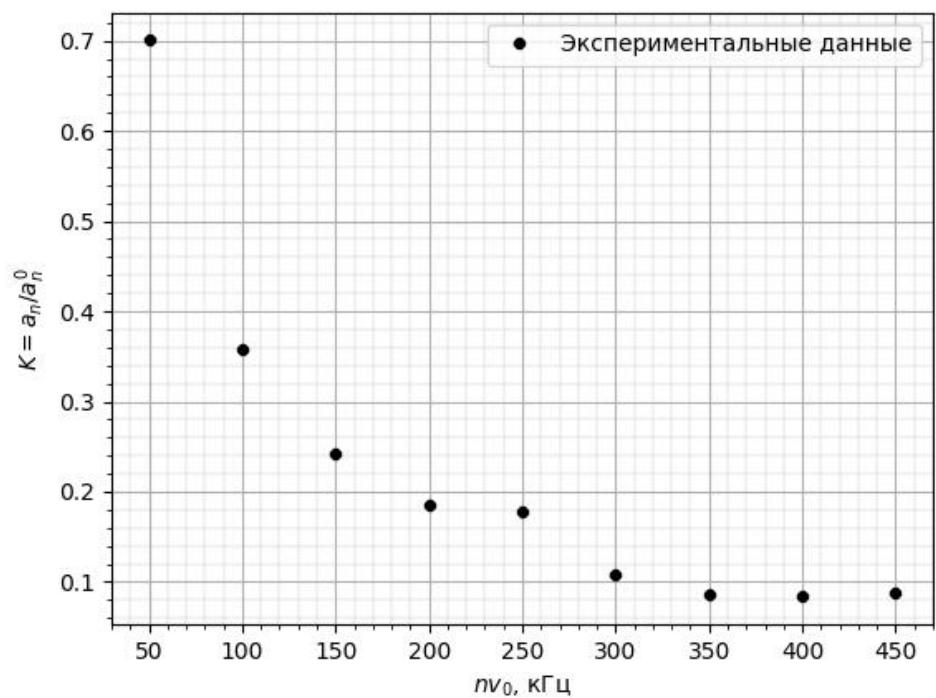


Рис. 35: Графическая зависимость  $K(\nu)$