

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа аэрокосмических технологий

Лабораторная работа №3.1.3  
Измерение магнитного поля Земли.

Работу выполнили  
Лохматов Арсений Игоревич  
Б03-303



Долгопрудный, 2024

# 1 Теоретическая часть

**Цель работы:** исследовать свойства постоянных екодимовых магнитов; их измерить с их помощью горизонтальную и вертикальную составляющие индукции магнитного поля Земли и магнитное наклонение.

**В работе используются:** неодимовые магниты; тонкая нить для изготовления крутильного маятника; медная проволока; электронные весы; секундомер; измеритель магнитной индукции; штангенциркуль; брусок, линейка и штатив из немагнитных материалов; набор гирь и разновесов.

## Свойства точечного магнитного диполя

Простейший магнитный диполь может быть образован витком с током или постоянным магнитом. По определению, магнитный момент  $\vec{P}_m$  тонкого витка площадью  $S$  с током  $I$  равен

$$\vec{P}_m = \frac{I}{c} \vec{S} = \frac{I}{c} S \vec{n},$$

где  $\vec{S} = S \vec{n}$  – вектор площади круга контура. Если размеры контура с током или магнитной стрелки малы по сравнению с расстоянием до диполя, то соответствующий магнитный диполь называют элементарным или точечным.

Магнитное поле точечного диполя определяется по формуле, аналогичной формуле для поля элементарного электрического диполя:

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{P}_m, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}_m}{r^3}$$

В магнитном поле с индукцией  $B$  на точечный магнитный диполь действует механический момент сил:

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}.$$

Под действием вращающего момента  $\vec{M}$  виток с током или постоянный магнит поворачивается так, чтобы его магнитный момент выстроился вдоль вектора индукции магнитного поля. Это — положение устойчивого равновесия: при отклонении от этого положения возникает механический момент внешних сил, возвращающий диполь к положению равновесия. В положении, когда  $\vec{P}_m$  и  $\vec{B}$  параллельны, но направлены противоположно друг другу, также имеет место равновесие ( $M = 0$ ), но такое равновесие неустойчиво: малейшее отклонение от этого положения приведёт к появлению момента сил, стремящихся отклонить диполь ещё дальше от начального положения.

Магнитный диполь в магнитном поле обладает энергией:

$$W = -(\vec{P}_m, \vec{B})$$

В неоднородном поле на точечный магнитный диполь, кроме момента сил, действует ещё и сила:

$$\vec{F} = (\vec{P}_m, \vec{\nabla}) \vec{B}$$

Используя формулы для момента силы, силы и энергии, не сложно выяснить, как ведёт себя свободный магнитный диполь в неоднородном магнитном поле: он выстраивается вдоль силовых линий магнитного поля и, кроме того, под действием результирующей силы, возникающей из-за неоднородности поля, втягивается в область более сильного магнитного поля, т.е. в область, где он обладает меньшей энергией.

Зная магнитные моменты  $P_1 = P_2 = P_m$  двух небольших постоянных магнитов, можно рассчитать силу их взаимодействия:

$$F = P_m \frac{\partial B}{\partial r} = -6 \frac{P_m^2}{r^4}.$$

## Экспериментальная установка

В настоящей работе используются неодимовые магниты шарообразной формы. Для нас важно то, что:

- 1) шары намагничены однородно;
- 2) вещество, из которого изготовлены магниты, является магнитожёстким материалом.

Полный магнитный момент  $\vec{P}_m$  постоянного магнита определяется намагниченностью  $\vec{p}_m$  вещества, из которого он изготовлен. По определению, намагниченность – это магнитный момент единицы объёма. Для однородно намагниченного шара намагниченность равна:

$$\vec{p}_m = \frac{\vec{P}_m}{V}.$$

Намагниченность — важная характеристика вещества постоянных магнитов, определяющая, в частности, величину остаточной магнитной индукции  $B_r = 4\pi p_m$ . Индукция магнитного поля  $\vec{B}_p$  на полюсах однородно намагниченного шара связана с величиной намагниченности и остаточной магнитной индукцией формулами

$$\vec{B}_p = \frac{8\pi}{3}\vec{p}_m = \frac{2}{3}\vec{B}_r.$$

## 2 Практическая часть

### 2.1 Определение магнитного момента, намагниченности и остаточной магнитной индукции вещества магнитных шариков (метод А)

1. Взвесим шарики на весах.

$$m_{12} = (9.972 \pm 0.005) \text{ г.} \implies m_1 = (0.831 \pm 0.006) \text{ г.}$$

Определим диаметр шариков.

$N$	$d$ , см	$N$	$d$ , см	$N$	$d$ , см	$N$	$d$ , см
1	0.58	4	0.60	7	0.55	10	0.55
2	0.59	5	0.58	8	0.60	11	0.60
3	0.58	6	0.60	9	0.58	12	0.58

Таблица 1: Диаметр шариков

$$\sigma^{\text{сист}} = 0.01 \text{ см}, \sigma^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_i^N (d_0 - d_i)^2} \implies \sigma^{\text{случ}} = 0.0051 \text{ см},$$

$$\sigma = \sqrt{(\sigma^{\text{сист}})^2 + (\sigma^{\text{случ}})^2} \implies \sigma = 0.0112 \text{ см.}$$

$$d = (0.5825 \pm 0.0112) \text{ см.}$$

2. Проложите между двумя магнитными шариками брусок из немагнитного материала. Подкладывая между бруском и верхним магнитиком листы бумаги, выясните, на каком максимальном расстоянии  $r_{\text{max}}$  шарики удерживают друг друга в поле тяжести Земли.

$$r = (2.22 \pm 0.01) \text{ см.} \implies r_{\text{max}} = r + d = 2.8025 \text{ см.}$$

3. Рассчитайте величину магнитного момента магнитика  $P_m$ , приравняв силу притяжения двух магнитных диполей  $F = 6P_m^2/r_{max}^4$  силе тяжести  $F_T = mg$ . Оцените погрешность измерений.

$$\frac{6P_m^2}{r_{max}^4} = mg \iff P_m = r_{max}^2 \sqrt{\frac{mg}{6}} \implies P_m = 2.8025^2 \cdot \sqrt{\frac{0.831 \cdot 980}{6}} = 91.502 \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$$

$$\sigma_{P_m} = P_m \cdot \sqrt{\left(2 \cdot \frac{\sigma_{r_{max}}}{r_{max}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_m}{m}\right)^2} \implies$$

$$\sigma_{P_m} = 91.502 \cdot \sqrt{\left(2 \cdot \frac{0.01}{2.8025}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{0.006}{0.831}\right)^2} = 0.732 \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$$

4. Рассчитаем величину намагниченности материала шариков.

$$p_m = \frac{P_m}{V}, \text{ где } V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3 \implies V = \frac{1}{6}\pi \cdot 0.5825^3 = (0.103 \pm 0.006) \text{ см}^3.$$

$$\implies p_m = \frac{91.502}{0.103} = 888.37 \pm 52.24 \text{ Гс}.$$

5. По величине магнитного момента (намагниченности) шарика, рассчитаем величину  $B_p$  магнитного поля на полюсах шарика.

$$B_p = \frac{2P_m}{r^3} = \frac{16P_m}{d^3} \implies B_p = \frac{16 \cdot 91.502}{0.5825^3} = (7.407 \pm 0.431) \text{ кГс}.$$

6. Рассчитайте величину  $B_r = 4\pi p_m$  остаточной магнитной индукции материала, из которого изготовлен магнитный шарик.

$$B_r = 4 \cdot \pi \cdot 888.37 = (11.164 \pm 0.657) \text{ кГс}.$$

Сравните ваш результат с табличными значениями  $B_r$  для соединения неодим-железо-бор.

$$B_r^{table} = 12.2 \text{ кГс}. \implies \delta = \frac{B_r^{table} - B_r}{B_r^{table}} \cdot 100\% = \frac{12.2 - 11.2}{12.2} \cdot 100\% = 8.2\%.$$

## 2.2 Определение магнитного момента (метод В)

1. Используя дополнительные шарики, составим цепочку из 20 – 30 шариков и, с помощью неодимовых магнитов в форме параллелепипедов, подсоединим цепочку к гире и разновесам, так, чтобы общая масса системы составила 500 г. Добавляя или удаляя шарики (шарики можно примагничивать непосредственно к гире), подберём минимальный вес системы цепочки с гирей, при котором она отрывается от верхнего шарика. С помощью весов определите вес  $F$  оторвавшейся цепочки с гирей.

$$m = (336.907 \pm 0.005) \text{ г}. \implies F = mg = 336.907 \cdot 980 = (330.169 \pm 0.005) \text{ кдин}.$$

2. Определим силу сцепления двух шаров.

$$F_0 = \frac{F}{1.08} = \frac{330.169}{1.08} = (305.712 \pm 0.005) \text{ кдин}.$$

3. Определите магнитный момент шарика  $P_m$ . Оцените погрешность результата.

$$F_0 = \frac{6P_m^2}{d^4} \iff P_m = d^2 \sqrt{\frac{F_0}{6}} \implies P_m = 0.5825^2 \cdot \sqrt{\frac{305.712 \cdot 10^3}{6}} = 76.59 \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$$

$$\sigma_{P_m} = P_m \cdot \sqrt{\left(2 \cdot \frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_{F_0}}{F_0}\right)^2} \implies$$

$$\sigma_{P_m} = 76.59 \cdot \sqrt{\left(2 \cdot \frac{0.0112}{0.5825}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{0.005}{305.712}\right)^2} = 2.95 \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$$

4. По величине магнитного момента (намагниченности) шарика, рассчитаем величину  $B_p$  магнитного поля на полюсах шарика.

$$B_p = \frac{2P_m}{r^3} = \frac{16P_m}{d^3} \implies B_p = \frac{16 \cdot 76.59}{0.5825^3} = (6.200 \pm 0.267) \text{ кГс.}$$

## 2.3 Определение магнитного момента (метод С)

Воспользуемся магнетометром  $ATE - 8702$  и измерим индукцию поля на полюсах шарика:

$$B_p = (4233 \pm 212) \text{ Гс}$$

$$B_p = \frac{2P_m}{r^3} = \frac{16P_m}{d^3} \iff P_m = \frac{B_p \cdot d^3}{16} \implies P_m = \frac{4233 \cdot 0.5825^3}{16} = 52.29 \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$$

$$\sigma_{P_m} = P_m \cdot \sqrt{\left(3 \cdot \frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{B_p}}{B_p}\right)^2} \implies$$

$$\sigma_{P_m} = 52.29 \cdot \sqrt{\left(3 \cdot \frac{0.0112}{0.5825}\right)^2 + \left(\frac{212}{4233}\right)^2} = 3.99 \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$$

	$P_m, \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$	$\sigma_{P_m}, \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$
A	91.502	0.732
B	76.59	2.95
C	52.29	3.99

Таблица 2: Результаты вычислений

## 2.4 Определение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли

1. Соберём крутильный маятник и, используя  $\Lambda$ -образный подвес, установим «магнитную стрелку» из 12 магнитных шариков в горизонтальном положении (юстировка системы).
2. Возбудим крутильные колебания маятника вокруг вертикальной оси и определим их период. Оценим влияние упругости нити на период колебаний, возбудив крутильные колебания «стрелки», свёрнутой в кольцо.

$$T_{round} = (7.8 \pm 0.2) \text{ с.}, T_{line} = (3.9 \pm 0.2) \text{ с.}$$

Видим, что период колебаний магнитной стрелки с нулевым магнитным моментом больше магнитной стрелки с ненулевым магнитным моментом. Так как период колебаний прямо пропорционален  $\sim \sqrt{\frac{1}{k}}$ , где  $k$  - коэффициент упругости, и период кольца сильно больше периода стрелки, то этот коэффициент  $k$  пренебрежимо мал. Значит, упругость нити при расчете периода колебаний можно не учитывать.

3. Исследуйте зависимость периода  $T$  крутильных колебаний «стрелки» от количества магнитных шариков  $n$ , составляющих «стрелку».

N	$T_{10}, \text{с}$	$T_1, \text{с}$
12	39.1	3.91
11	36.2	3.62
10	34.1	3.41
9	29.8	2.98
8	26.2	2.62

N	$T_{10}, \text{с}$	$T_1, \text{с}$
7	23.5	2.35
6	20.3	2.03
5	17.1	1.71
4	15.4	1.54
3	10.1	1.01

Таблица 3: Результаты измерений периода колебаний магнитной стрелки

4. Построим график экспериментальной зависимости  $T(N)$ . Аппроксимируем экспериментальную зависимость  $T(N)$  прямой  $T = \alpha N$ .
5. По значению углового коэффициента  $\alpha$  рассчитаем величину горизонтальной составляющей магнитного поля Земли.

$$\alpha = (0.3162 \pm 0.008) \text{ с}, B_h = \frac{\pi^2 m d^2}{3 \alpha^2 P_m}$$

$$\sigma_{B_h} = B_h \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_\alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{P_m}}{P_m}\right)^2}$$

Рассчёты приведём для всех значений  $P_m$  из таблицы 2.3.

	$P_m, \frac{\text{Эрг}}{\text{Гс}}$	$\sigma_{P_m}, \frac{\text{Эрг}}{\text{Гс}}$	$B_h, \text{Гс}$	$\sigma_{B_h}, \text{Гс}$
A	91.502	0.732	0.101	0.007
B	76.59	2.95	0.121	0.009
C	52.29	3.99	0.177	0.018

Таблица 4: Результаты вычислений

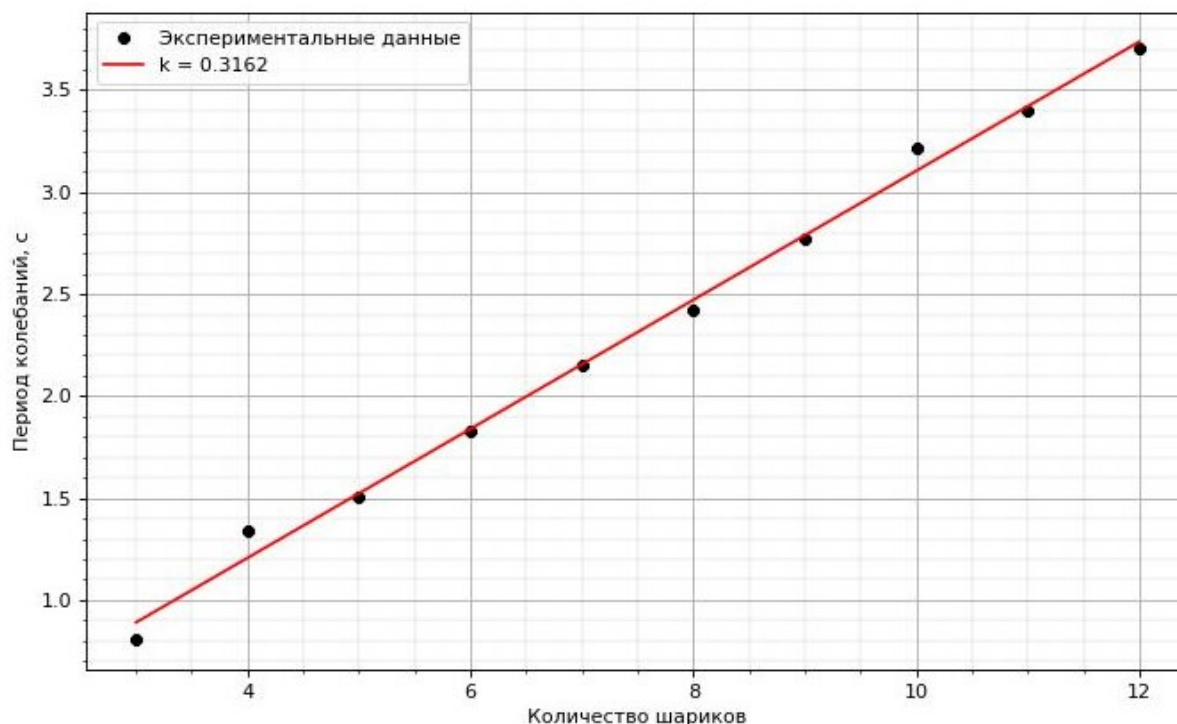


Рис. 1: График экспериментальной зависимости  $T(N)$

## 2.5 Определение вертикальной составляющей магнитного поля Земли

1. Изготовим магнитную «стрелку» из  $n = 10$  шариков и подвесим её за середину с помощью нити на штативе.
2. Определим механический момент сил, действующий со стороны магнитного поля Земли на горизонтально расположенную магнитную «стрелку».

$$M = m_{\text{гр}}gl, \sigma_M = M \sqrt{\left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2}, \text{ где } \sigma_l = 0.1 \text{ см, } \sigma_m = 0.005 \text{ г}$$

Для этого, с помощью одного или нескольких кусочков проволоки, уравновесим «стрелку» в горизонтальном положении. С помощью весов определим массу уравнивающего груза  $m_{\text{гр}}$ . Из условия равновесия рассчитаем механический момент сил  $M$ , действующих на горизонтальную «стрелку» со стороны поля Земли для нескольких значений  $n$ . Результаты занесём в таблицу 2.

п, шт	12	10	8	6	4
$m_{\text{гр}}, \text{ г}$	0.173	0.197	0.221	0.263	0.352
$l, \text{ см}$	3.45	2.76	2.07	1.38	0.69
$M, \text{ дин см}$	584.913	532.846	448.321	355.681	238.022
$\sigma_M, \text{ дин см}$	23.942	23.572	23.916	26.646	34.661

Таблица 5: Результаты измерений момента сил

3. Постройте график экспериментальной зависимости  $M = M(n)$ . Аппроксимируйте экспериментальную зависимость  $M(n)$  прямой линией  $M = \beta n$ .

Наглядно видно, что с увеличением числа шариков (увеличение магнитного момента) увеличивается механический момент сил.

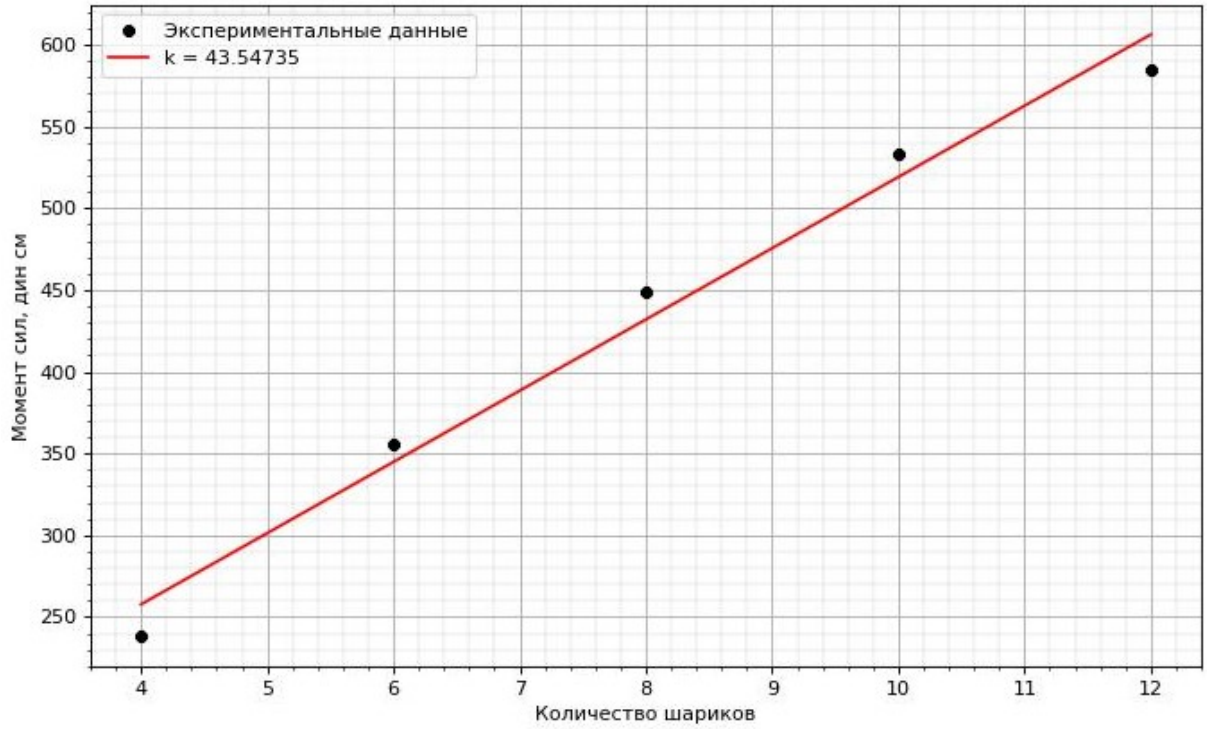


Рис. 2: График экспериментальной зависимости  $M(n)$

4. По значению углового коэффициента  $\beta$  зависимости  $M = \beta n$  рассчитаем величину  $B_v$  вертикальной составляющей магнитного поля Земли. Оцените погрешность измерений  $B_v$ .

$$\beta = (43.547 \pm 3.435) \text{ дин см}$$

$$\beta = B_v P_m \Leftrightarrow B_v = \frac{\beta}{P_m}, \sigma_{B_v} = B_v \sqrt{\left(\frac{\sigma_\beta}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{P_m}}{P_m}\right)^2}$$

Рассчёты проведём для всех  $P_m$ , полученных ранее. Результаты занесём в таблицу 4.

	$P_m, \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$	$\sigma_{P_m}, \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$	$B_v, \text{Гс}$	$\sigma_{B_v}, \text{Гс}$
A	91.502	0.732	0.476	0.038
B	76.59	2.95	0.569	0.05
C	52.29	3.99	0.833	0.091

Таблица 6: Результаты вычислений

5. Используя результаты измерений  $B_h$  и  $B_v$ , определите магнитное наклонения  $\gamma$  и полную величину индукции магнитного поля Земли на широте Долгопрудного. Сравните полученное значение наклонения с расчётным, полученным в предположении, что магнитное поле Земли соответствует полю однородно намагниченного вдоль оси вращения шара. Оцените также полный магнитный момент  $P_3$  Земли.

$$\gamma = \arctan \frac{B_v}{B_h}, B = \sqrt{B_v^2 + B_h^2}, \sigma_B = \sqrt{\sigma_{B_v}^2 + \sigma_{B_h}^2}$$

$$B_{\text{table}} = 0.4 \text{ Гс}$$



### 3 Подведение итогов и выводы

В данной работе мы измерили магнитный момент неодимовых шарообразных магнитов тремя разными способами, и, зная этот момент, рассчитали вертикальную и горизонтальную составляющие магнитного поля Земли, а так же полную магнитную индукцию поля Земли. Результаты представлены в таблице 3.

	$P_m, \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$	$\sigma_{P_m}, \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$	$B_h, \text{Гс}$	$\sigma_{B_h}, \text{Гс}$	$B_v, \text{Гс}$	$\sigma_{B_v}, \text{Гс}$	$\gamma, \text{град}$	$B, \text{Гс}$	$\sigma_B, \text{Гс}$
А	91.502	0.732	0.101	0.007	0.476	0.038	77.973	0.487	0.038
В	76.59	2.95	0.121	0.009	0.569	0.05	77.973	0.581	0.051
С	52.29	3.99	0.177	0.018	0.833	0.091	77.973	0.851	0.093

Таблица 7: Результаты вычислений

Ближе всего к табличному значению оказалось значение, полученное с помощью метода А.

Неточность измерений в других методах может быть связана с неточными методами измерения такие как измерение периода колебаний магнитной стрелки (не исключено, что стрелка поворачивалась не в одной плоскости). Так же другие магнитные поля в лаборатории могли вносить добавку в полученные значения.