

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа аэрокосмических технологий

Лабораторная работа №3.7.1
Скин эффект в полом цилиндре

Работу выполнили
Лохматов Арсений Игоревич
Козярский Алексей Сергеевич
Б03-303



Долгопрудный, 2024

1 Теоретическая часть

Цель работы: исследования проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр.

Оборудование: генератор звуковой частоты, соленоид, намотанный на полый цилиндрический каркас из диэлектрика, медный экран в виде трубки, измерительная катушка, амперметр, вольтметр, осциллограф.

1.1 Теоретическая часть

В работе изучается скин-эффект в длинном тонкостенном медном цилиндре, помещённом внутрь соленоида. Теоретически такая задача сложнее, чем скин-эффект в полубесконечном пространстве: здесь требуется совместное решение уравнений скин-эффекта (уравнения диффузии поля) в стенке цилиндра и квазистационарных уравнений поля в его полости.

Пусть цилиндр достаточно длинный, так что в нём можно пренебречь краевыми эффектами. В этом приближении магнитное поле \mathbf{H} всюду направлено по оси системы (ось z), а вихревое электрическое поле \mathbf{E} будет всюду перпендикулярно радиусу, то есть линии поля образуют соосные окружности (рис. 1.1). Все величины будем считать колеблющимися по гармоническому закону с некоторой частотой ω , задаваемой частотой колебания тока в соленоиде. Тогда для ненулевых компонент поля можно записать

$$H_z = H(r)e^{i\omega t}, \quad E_\varphi = E(r)e^{i\omega t},$$

где $H(r)$ и $E(r)$ комплексные амплитуды колебаний соответствующих полей, зависящие только от расстояния r до оси системы. Заметим, что на границе цилиндра должны быть непрерывны касательные к поверхности компоненты как \mathbf{E} , так и \mathbf{B} , поэтому функции $H(r)$ и $E(r)$ непрерывны во всей исследуемой области.

Пусть длинный полый цилиндр имеет радиус a и толщину стенки $h \ll a$. Последнее условие позволяет для описания поля внутри стенки ограничиться одномерным приближением. При этом для полного решения задачи необходимо вычислить и распределение поля внутри цилиндра.

Поскольку внутри цилиндра ток отсутствует, магнитное поле там является однородным (аналогично полю внутри пустого соленоида): $H_z(r, t) = H_1 e^{i\omega t}$, где $H_1 = \text{const}$ — амплитуда поля на внутренней поверхности цилиндра. Для нахождения вихревого электрического поля воспользуемся законом электромагнитной индукции в интегральной форме:

$$E_\varphi \cdot 2\pi r = -\mu_0 \pi r^2 \cdot \frac{dH_z}{dt} \longleftrightarrow E(r) = -\frac{1}{2} \mu_0 r \cdot i\omega H_1.$$

Отсюда получим связь амплитуд колебаний электрического и магнитного полей на внутренней ($a = h$) границе цилиндра:

$$E_1 = -\frac{1}{2} i\omega a \mu_0 H_1$$

Это соотношение используем далее как дополнительное граничное условие для задачи о распределении поля внутри стенки.

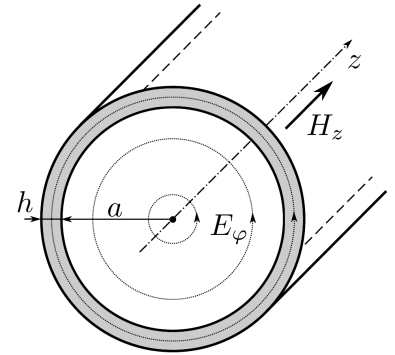


Рис. 1: Электрическое и магнитное в тонкостенном цилиндре

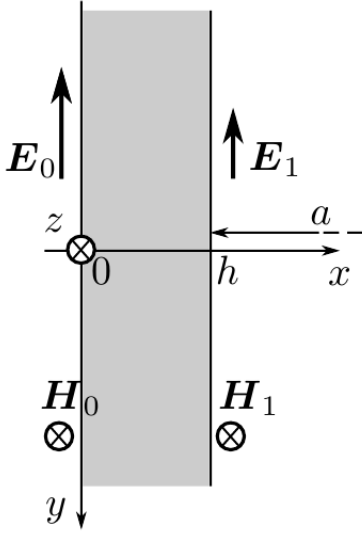


Рис. 2: Поле в стенке цилиндра

Поле внутри тонкой стенки цилиндра («экрана») описывается уравнением скин-эффекта (уравнением диффузии поля) в плоской геометрии (рис. 2). Поместим начало отсчёта на внешнюю поверхность цилиндра и направим ось x к оси системы, и запишем дифференциальное уравнение для комплексной амплитуды магнитного поля:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = i\omega\sigma\mu_0 H$$

для медного цилиндра можно положить $\mu \approx 1$).
Граничные условия зададим в виде

$$H(0) = H_0, H(h) = H_1.$$

Здесь H_0 — амплитуда колебаний магнитного поля на внешней границе цилиндра. Её значение определяется только током в обмотке соленоида, и совпадает с полем внутри соленоида в отсутствие цилиндра. Величина H_1 также поддаётся непосредственному измерению — это амплитуда колебаний однородного поля внутри цилиндра. Поля H_0 и H_1 не являются независимыми — они связаны через решение уравнений поля вне проводника, т. е. внутри «экрана».

Решение дифференциального уравнения ищем в виде

$$H(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x},$$

где A, B — определяемые из граничных условий константы,

$$\alpha = \sqrt{i\omega\sigma\mu_0} = \frac{1+i}{\delta} = \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{i\pi/4}$$

— один из корней уравнения, δ — глубина скин-слоя

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}}.$$

Здесь мы имеем дело уже не с полупространством, а с конечной областью в виде плоского слоя h , поэтому решение должно содержать оба корня.

Первое условие даёт $A + B = H_0$, что позволяет исключить A из формулы:

$$H(x) = H_0 e^{-\alpha x} + 2B \sinh \alpha x.$$

Выразим электрическое поле из закона Ампера. В одномерном случае

$$E(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{dH}{dx} = \frac{\alpha}{\sigma} (-H_0 e^{-\alpha x} + 2B \cosh \alpha x).$$

Далее положим $x = h$ и, исключив константу B , получим после преобразований связь между H_0 и H_1 :

$$H_1 = \frac{H_0}{\cosh \alpha h + \frac{1}{2} \alpha a \sinh \alpha h}.$$

Рассмотрим предельные случаи этой формулы.

1. При *малых частотах* толщина скин-слоя превосходит толщину цилиндра $h \ll \delta$. Тогда $|ah| \ll 1$, поэтому $\cosh ah \approx 1$, $\sinh ah \approx ah$ и

$$H_1 \approx \frac{H_0}{1 + i \frac{ah}{\delta^2}}.$$

Заметим, что величина $\frac{ah}{\delta^2}$ в общем случае не мала, поскольку при $h \ll a$ возможна ситуация $h \ll \delta \ll a$. Отношение модулей амплитуд здесь будет равно

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{ah}{\delta^2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2}}.$$

При этом колебания H_1 отстают по фазе от H_0 на угол ψ , определяемый равенством

$$\operatorname{tg}(\psi) = \frac{ah}{\delta^2}.$$

2. При достаточно больших частотах толщина скин-слоя станет меньше толщины стенки: $\delta \ll h$. Тогда $ah \gg 1$ и $\alpha a \gg 1$, $\sinh ah \approx \cosh ah \approx \frac{1}{2}e^{\alpha h}$. В итоге получим

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{4}{\alpha a} e^{-\alpha h} = \frac{2\sqrt{2}\delta}{a} e^{-\frac{h}{\delta}} e^{-i(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta})}.$$

Как видно из формулы, в этом пределе поле внутри цилиндра по модулю в $\frac{2\sqrt{2}\delta}{a} e^{-\frac{h}{\delta}}$ раз меньше, чем снаружи, и, кроме того, запаздывает по фазе на

$$\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}}.$$

На рис. 3 схематично изображено распределение магнитного поля от координаты в двух рассмотренных предельных случаях.

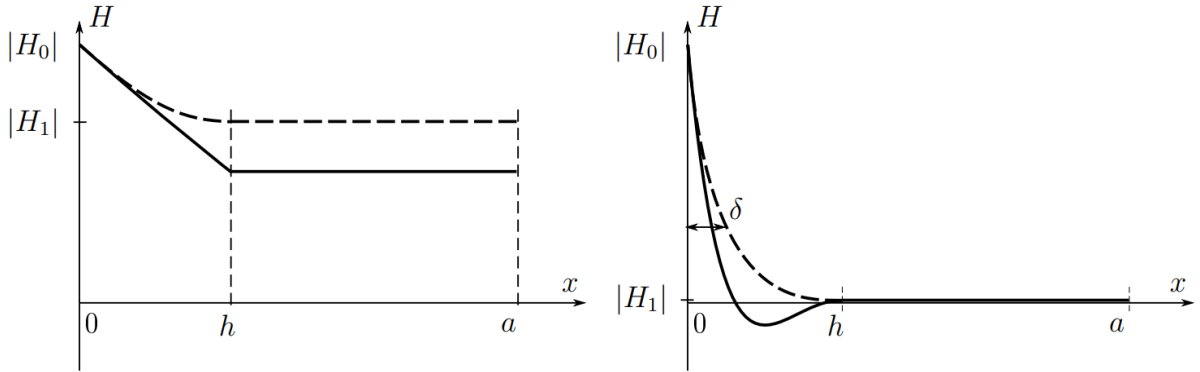


Рис. 3: Распределение амплитуды колебаний магнитного поля (пунктир) и его мгновенного значения при некотором t (сплошная) в зависимости от расстояния до внешней стенки цилиндра. Слева случай низких частот ($\delta \gg h$), справа — скин-эффект при высоких частотах ($\delta \ll h$)

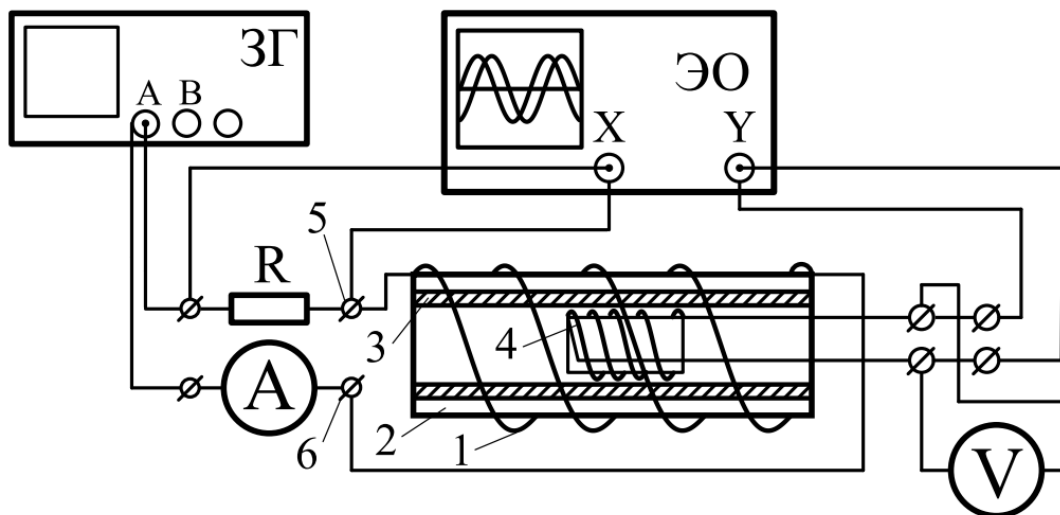


Рис. 4: Экспериментальная установка для изучения скин-эффекта

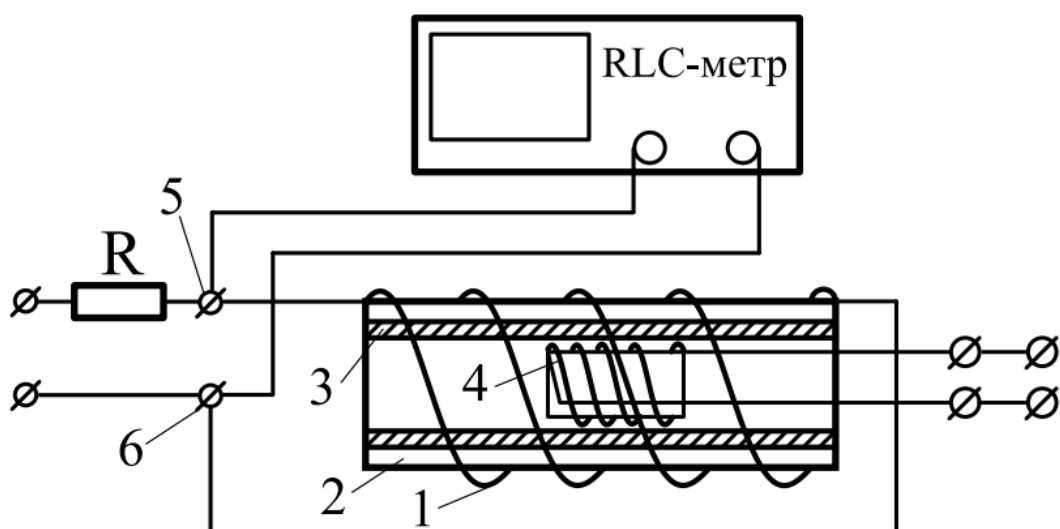


Рис. 5: Экспериментальная установка для изучения скин-эффекта

1.2 Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки для исследования скин-эффекта в полном цилиндре изображена на рис. 4.

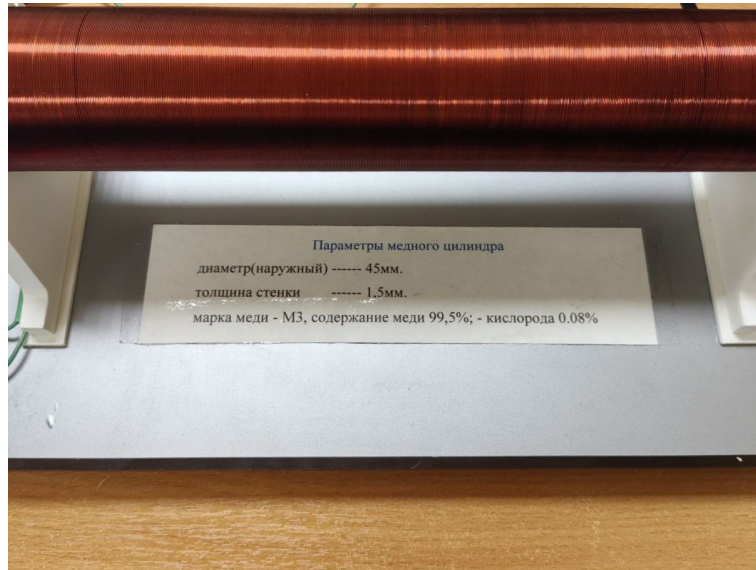
Переменное магнитное поле создается с помощью соленоида 1, намотанного на цилиндрический каркас 2 из поливинилхлорида, который подключается к генератору сигналов (канал А). Внутри каркаса расположен медный экран 3 в виде полого цилиндра (актуальные параметры экрана указаны на установке). Действующее значение переменного тока в цепи соленоида измеряется цифровым амперметром «А». Действующее значение переменного напряжения на измерительной катушке 4 измеряется цифровым вольтметром «V». В качестве амперметра и вольтметра используются два мультиметра. Для измерения сдвига фаз между током в цепи соленоида и напряжением на измерительной катушке используется двухканальный осциллограф. На канал 'Y' осциллографа подается напряжение с измерительной катушки, а на канал 'X' — напряжение с резистора R , которое пропорционально току в цепи соленоида.

Схема экспериментальной установки для нахождения проводимости σ по изменению индуктивности катушки L изображена на рис. 5. RLC —, измеряющий индуктивность, подключается к катушке 1 через клеммы 5 и 6 на панели установки. Другие приборы при этом должны быть отсоединены от цепи, т.к. RLC — измеряет индуктивность активным образом.

1.3 Ход работы

1. По известным параметрам установки, приняв проводимость меди для оценки равной $\sigma \approx 5 \cdot 10^7 \frac{\text{Сименс}}{\text{м}}$, а $\mu_0 \approx 1.256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$, рассчитаем частоту ν_h , при которой толщина стенок экрана равна скинновской длине $h = \delta$.

Параметры нашей установки: $a = 22.5\text{мм}$, $h = 1.5\text{мм}$.



$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu_0}} \Leftrightarrow \omega = \frac{2}{\delta^2 \sigma \mu_0} \Leftrightarrow 2\pi\nu = \frac{2}{\delta^2 \sigma \mu_0} \Leftrightarrow \nu = \frac{1}{\pi \delta^2 \sigma \mu_0}$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{1}{3.14 \cdot (1.5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 5 \cdot 10^7 \cdot 1.256 \cdot 10^{-6}} = 2252.724 \text{ Гц.}$$

2. Соберём установку согласно схеме на рис. 4 и настроим приборы, следуя указаниям пособия. Установим начальную частоту сигнала генератора $\nu_0 \approx 0.01\nu_h \approx 22.53 \text{ Гц}$, а амплитуду выходного сигнала на генераторе — согласно приложению
3. В области низких частот ($\nu_0 \approx 0.01\nu_h$ до $\nu_0 \approx 0.05\nu_h$) получим зависимость отношения $\xi = \frac{U}{I}$ от частоты ν .

Для этого измерим силу тока в цепи соленоида и напряжение на измерительной катушке для не менее 10 значений частоты ν в выбранном диапазоне. Согласно формулам величина ξ прямо пропорциональна коэффициенту ослабления магнитного поля внутри экрана относительно поля снаружи: $\xi\xi_0 = \frac{H_1}{H_0}$.

Результаты занесём в таблицу 1.

N	$\nu, \text{Гц}$	$I, \text{мА}$	$U, \text{В}$
1	22.53	231.3	0.0723
2	33.79	229.25	0.106
3	45.05	226.2	0.1373
4	56.32	222.65	0.166
5	63.08	220.15	0.1812
6	67.58	218.72	0.191
7	79.85	214.76	0.214
8	90.11	210.82	0.233
9	100.37	207.02	0.2503
10	112.64	203.38	0.265

Таблица 1: Результаты измерений

4. Исследуем зависимость величины ϵ и фазового сдвига ψ от частоты ν при низких частотах в диапазоне от $0.05\nu_h$ до $0.5\nu_h$. Для этого получим статичную и удобную для измерения

картинку на экране осциллографа и измерим разность фаз между напряжениями на резисторе и на катушке для не менее 15 значений частоты ν в выбранном диапазоне, а также силу тока в цепи соленоида и напряжение на измерительной катушке.

Результаты занесём в таблицу 2.

N	ν , Гц	I , мА	U , В	$\Delta\varphi \cdot \pi$
1	112.64	202.63	0.265	1.38
2	135.16	196.23	0.288	1.29
3	157.69	190.69	0.306	1.33
4	180.22	186.05	0.319	1.4
5	202.74	182.18	0.329	1.12
6	225.27	178.91	0.336	1.11
7	281.59	172.74	0.348	1.2
8	337.91	168.34	0.353	1.15

N	ν , Гц	I , мА	U , В	$\Delta\varphi \cdot \pi$
9	394.22	164.94	0.356	1.13
10	450.54	162.10	0.356	1.15
11	563.17	157.23	0.353	1.1
12	675.81	152.77	0.347	1.06
13	788.44	148.40	0.340	1.06
14	901.08	144.08	0.331	1.01
15	1126.35	135.28	0.313	1.0

Таблица 2: Результаты измерений в диапазоне низких частот

5. Повторим измерения пункта 4 при высоких частотах в диапазоне от $0.5\nu_h$ до $15\nu_h$.

Результаты занесём в таблицу 3.

N	ν , Гц	I , мА	U , В	$\Delta\varphi \cdot \pi$
1	1352.82	126.48	0.293	0.97
2	1916.49	106.70	0.247	0.93
3	2592.91	87.80	0.202	0.93
4	3156.58	75.73	0.173	0.85
5	3720.25	66.27	0.150	0.87
6	4283.93	52.59	0.116	0.86
7	4847.61	47.45	0.104	0.8
8	5411.28	41.92	0.09	0.82
9	5974.95	38.57	0.082	0.81

N	ν , Гц	I , мА	U , В	$\Delta\varphi \cdot \pi$
10	6538.63	35.66	0.075	0.81
11	7102.31	33.11	0.068	0.77
12	7665.98	30.85	0.063	0.76
13	8229.65	28.84	0.058	0.75
14	8793.33	27.03	0.053	0.74
15	9357.11	25.40	0.049	0.72
16	9920.68	23.92	0.046	0.71
17	10484.35	22.56	0.043	0.69
18	11048.03	21.51	0.039	0.7

Таблица 3: Результаты измерений в диапазоне высоких частот

6. Исследуем зависимость индуктивности катушки L от частоты ν . Для этого соберём схему, изображённую на рисунке 5, и измерим с помощью RLC-метра индуктивность катушки при различных частотах (от минимально возможной для данной модели RLC-метра ν_{min} до $1.5\nu_h$).

Результаты занесём в таблицу 4.

N	ν , Гц	L , мГн
1	50	9.99
2	250	5.38
3	500	3.69
4	750	3.25
5	1000	3.09
6	1500	2.96
7	2000	2.91
8	2500	2.90

N	ν , Гц	L , мГн
9	3000	2.89
10	5000	2.88
11	6000	2.89
12	7500	2.9
13	10000	2.95
14	12000	3.02
15	15000	3.18
16	20000	3.62

Таблица 4: Результаты измерений индуктивности катушки от частоты

1.4 Обработка результатов

1. В области низких частот толщина скин-слоя превосходит толщину образца $\delta \gg h$, получаем

$$\left(\frac{|H_1|}{|H_0|}\right)^2 = \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2 \approx \frac{1}{1 + \left(\frac{ah}{\delta^2}\right)^2} = \frac{1}{1 + (\pi ah\nu\mu_0\sigma)^2}$$

Тогда:

$$\frac{1}{\xi^2} = k\nu^2 + b, \text{ где } k = \left(\frac{\pi ah\sigma\mu_0}{\xi_0}\right)^2, b = \frac{1}{\xi_0^2}.$$

По результатам измерений в области низких частот постройте график $\frac{1}{\xi^2} = f(\nu^2)$. График представлен на рисунке 11.

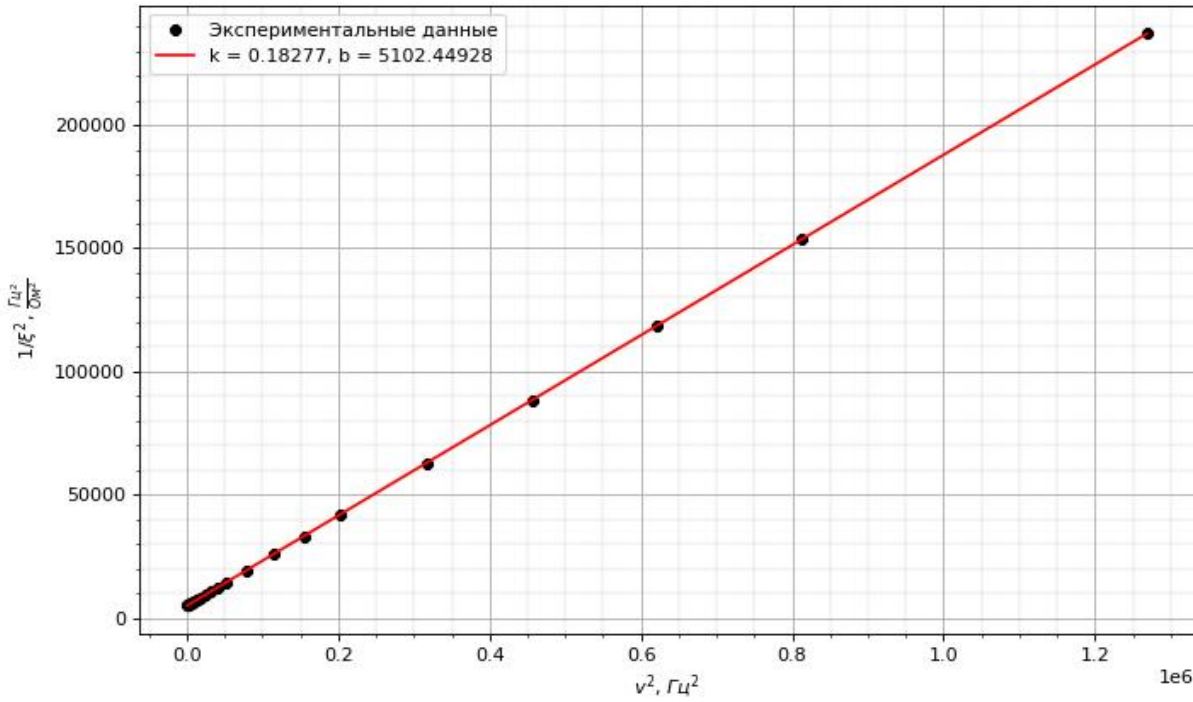


Рис. 6: Графическая зависимость $\frac{1}{\xi^2} = f(\nu^2)$

Аппроксимируем с помощью метода наименьшего квадрата, погрешности получаем благодаря функции *curvefit*. Экстраполируем к точке $\nu = 0$, соответствующей $\frac{|H_1|}{|H_0|} = 1$:

$$b = (5102.45 \pm 26.49) \frac{\Gamma_{\Pi}^2}{\text{Ом}^2} \quad (\varepsilon = 0.51\%) \Rightarrow \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{b}} = (13.99 \pm 0.07) \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ом}}{\Gamma_{\Pi}}.$$

По угловому коэффициенту зависимости рассчитаем проводимость меди:

$$k = (182.77 \pm 0.08) \cdot 10^{-3} \frac{\Gamma_{\Pi}^2}{\text{Ом}^2} \quad (\varepsilon = 0.04\%) \Rightarrow$$

$$k = \left(\frac{\pi ah\sigma\mu_0}{\xi_0}\right)^2 \Leftrightarrow \sigma = \frac{\sqrt{k}\xi_0}{ah\mu_0\pi} = \frac{\sqrt{0.18277} \cdot 0.01399}{\pi \cdot 1.5 \cdot 22.5 \cdot 1.256 \cdot 10^{-12}} \approx (4.491 \pm 0.002) \cdot 10^7 \frac{\text{Сименс}}{\text{м}}.$$

2. Построим график зависимости фазового сдвига, измеренного в пункте 4, $\operatorname{tg} \psi = f(\nu)$ от частоты.

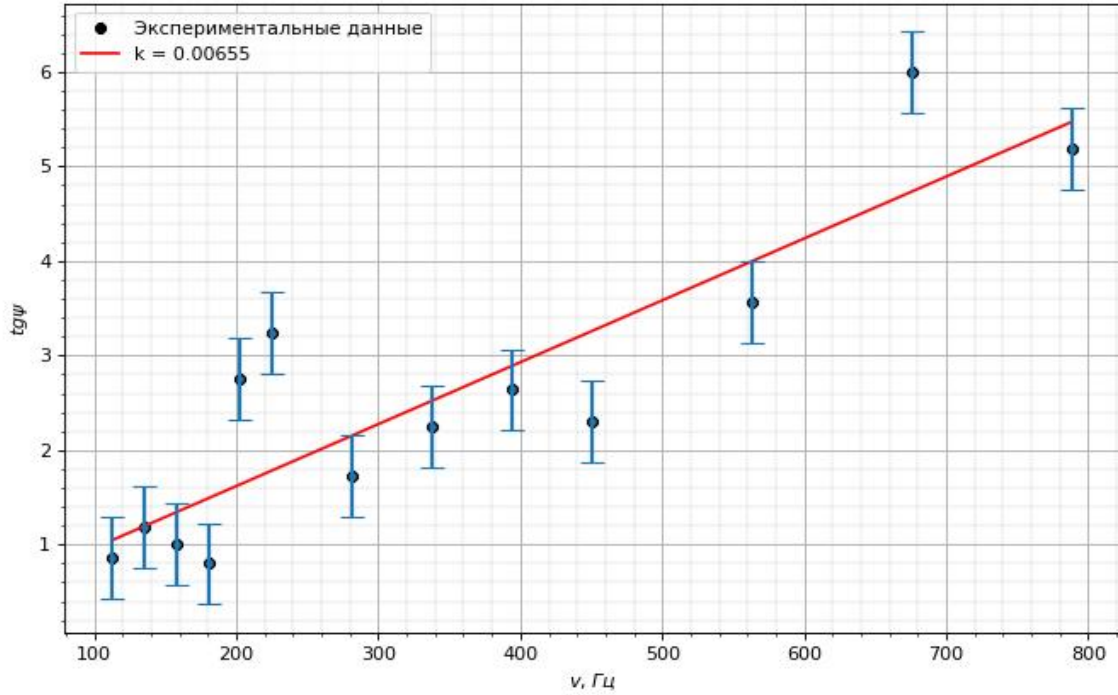


Рис. 7: Графическая зависимость $\operatorname{tg} \psi = f(\nu)$

Учтём, что на входной канал Y осциллографа подаётся сигнал с измерительной катушки, который пропорционален не полю внутри экрана, а его производной по времени, а это означает, что появляется дополнительный сдвиг по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Поэтому измеренный по экрану осциллографа сдвиг по фазе между двумя синусоидами будет на $\frac{\pi}{2}$ больше фазового сдвига между магнитными полями вне и внутри экрана: $\varphi = \frac{\pi}{2} + \psi$.

Аппроксимируем прямой линейный участок графика, и по её наклону определим коэффициент проводимости σ .

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{ah}{\delta^2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \psi = k\nu, \text{ где } k = ah\sigma\mu_0\pi.$$

$$k = (6.548 \pm 1.065) \cdot 10^{-3} \text{ Гц}^{-1} (\varepsilon = 16\%) \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{k}{ah\mu_0\pi} = \frac{6.548 \cdot 10^{-3}}{1.5 \cdot 22.5 \cdot 1.256 \cdot \pi \cdot 10^{-12}} = (4.9 \pm 0.8) \cdot 10^7 \frac{\text{Сименс}}{\text{м}}.$$

3. Построим график частотной зависимости фазового сдвига, измеренной в пунктах 4 и 5, $\psi - \frac{\pi}{4} = f(\sqrt{\nu})$. Проведём прямую, проходящую через начало координат, которая будет касаться экспериментальной кривой при больших частотах (линейный участок графика при $\nu \gg \nu_h$). По наклону этой прямой вычислите значение проводимости σ материала экрана.

$$\psi - \frac{\pi}{4} = k \cdot \sqrt{\nu}, \text{ где } k = \sqrt{\pi\sigma\mu_0}.$$

$$k = (21.23 \pm 0.72) \cdot 10^{-3} \frac{1}{\sqrt{\text{Гц}}} (\varepsilon = 3.39\%) \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{k^2}{\pi h^2 \mu_0} = \frac{(21.23 \cdot 10^{-3})^2}{\pi \cdot 1.5^2 \cdot 1.256 \cdot 10^{-12}} = (5.077 \pm 0.172) \cdot 10^7 \frac{\text{Сименс}}{\text{м}}.$$

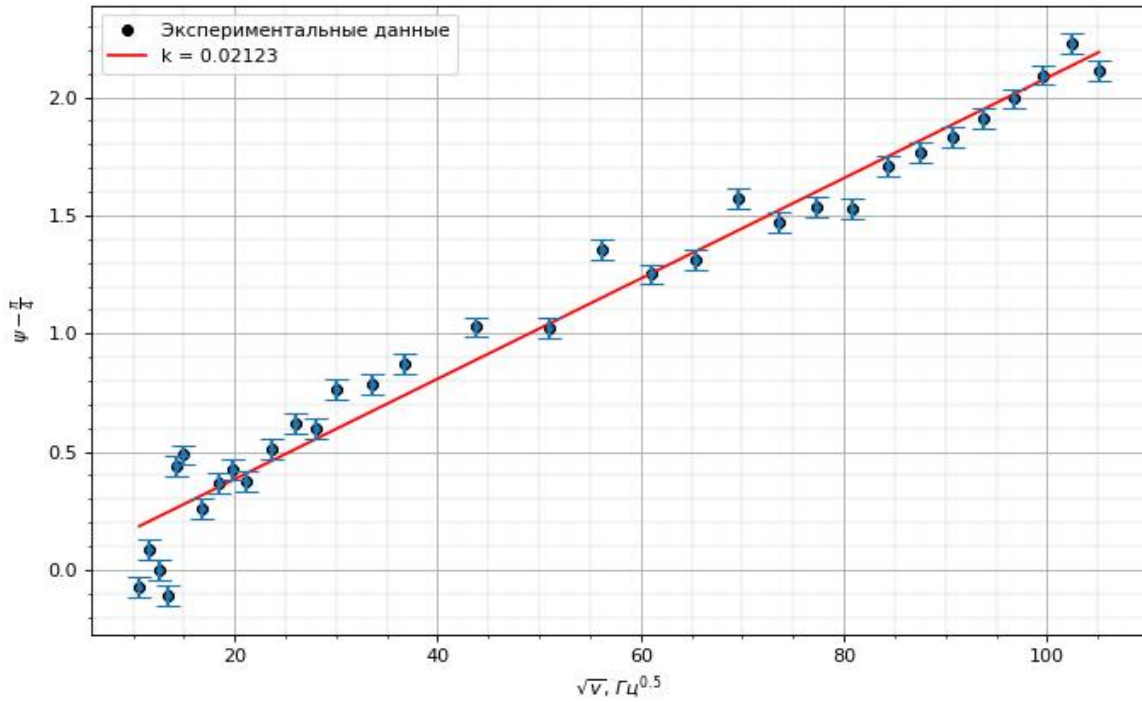


Рис. 8: Графическая зависимость $\psi - \frac{\pi}{4} = f(\sqrt{\nu})$

4. Построим график зависимости индуктивности катушки от частоты $L(\nu)$. Определим максимальное и минимальное значения индуктивности.

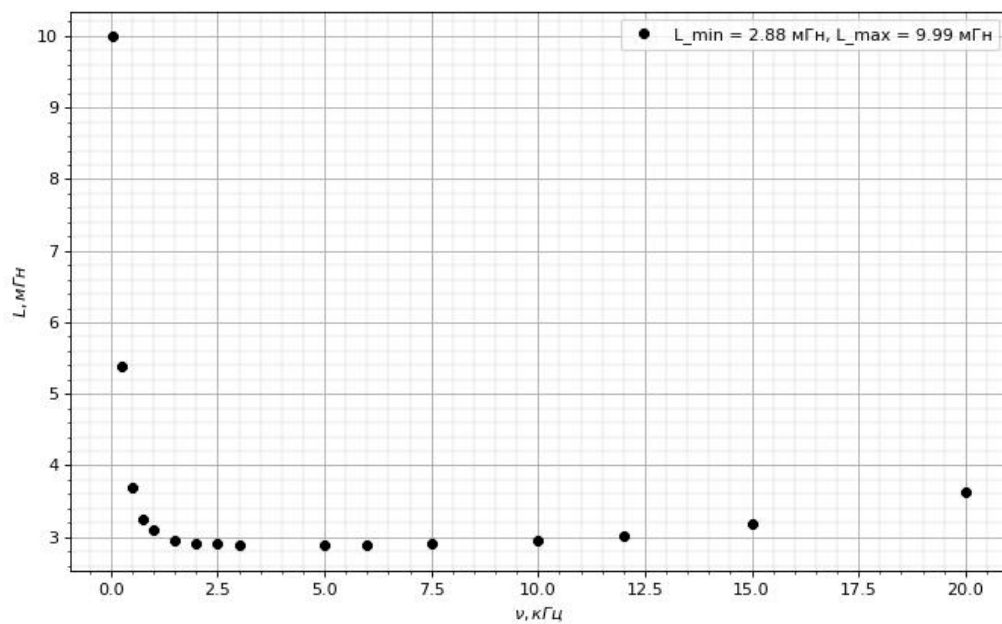


Рис. 9: Графическая зависимость $L(\nu)$

$$L_{max} = 9.99 \text{ мГн}, L_{min} = 2.88 \text{ мГн}.$$

Построим график зависимости $(L_{max} - L)/(L - L_{min})$ от ν^2 и аппроксимируем его прямой, проходящей через начало координат. По углу наклона прямой определим проводимость материала.

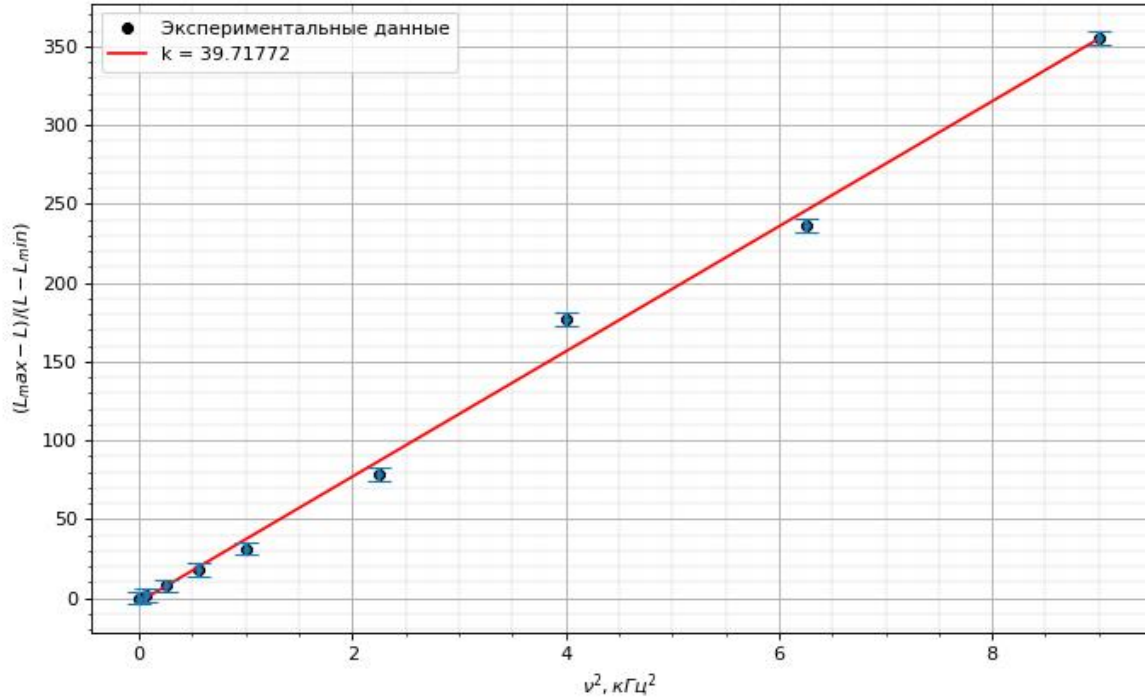


Рис. 10: Графическая зависимость $\frac{L_{max}-L}{L-L_{min}}(\nu^2)$

$$\frac{L_{max} - L}{L - L_{min}} = k \cdot \nu^2, \text{ где } k = (\pi a h \mu_0 \sigma)^2.$$

$$k = (39.72 \pm 1.06) \frac{1}{\text{кГц}^2} (\varepsilon = 2.67\%) \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{k}}{\pi a h \mu_0} = \frac{\sqrt{39.72 \cdot 10^{-6}}}{\pi \cdot 22.5 \cdot 1.5 \cdot 1.256 \cdot 10^{-12}} = (4.73 \pm 0.13) \cdot 10^7 \frac{\text{Сименс}}{\text{м}}.$$

5. Составим таблицу, внеся в нее все полученные значения проводимости материала экрана (4-мя способами) и сравним с табличным значением.

N	$\sigma \cdot 10^7, \frac{\text{Сименс}}{\text{м}}$	$\varepsilon, \%$	$\varepsilon_{\text{отк}}, \%$
табл	5.66	-	-
1	4.49	0.04	20
2	4.9	16	13
3	5.077	3.39	10
4	4.73	2.67	16

Таблица 5: Результаты измерений удельной проводимости меди

6. Используя полученное значение коэффициента ξ_0 , рассчитаем экспериментальные значения коэффициентов ослабления поля $|H_1|/|H_0|$ для всех измерений - экспериментальный коэффициент.

Используя максимальный и минимальный коэффициенты проводимости σ , полученные ранее, рассчитаем теоретическую зависимость по общей формуле - теоретический коэффициент.

Изобразим на графике теоретические и экспериментальные результаты для зависимости $\frac{|H_1|}{|H_0|}$ от $n\omega$ в логарифмическом масштабе по оси абсцисс.

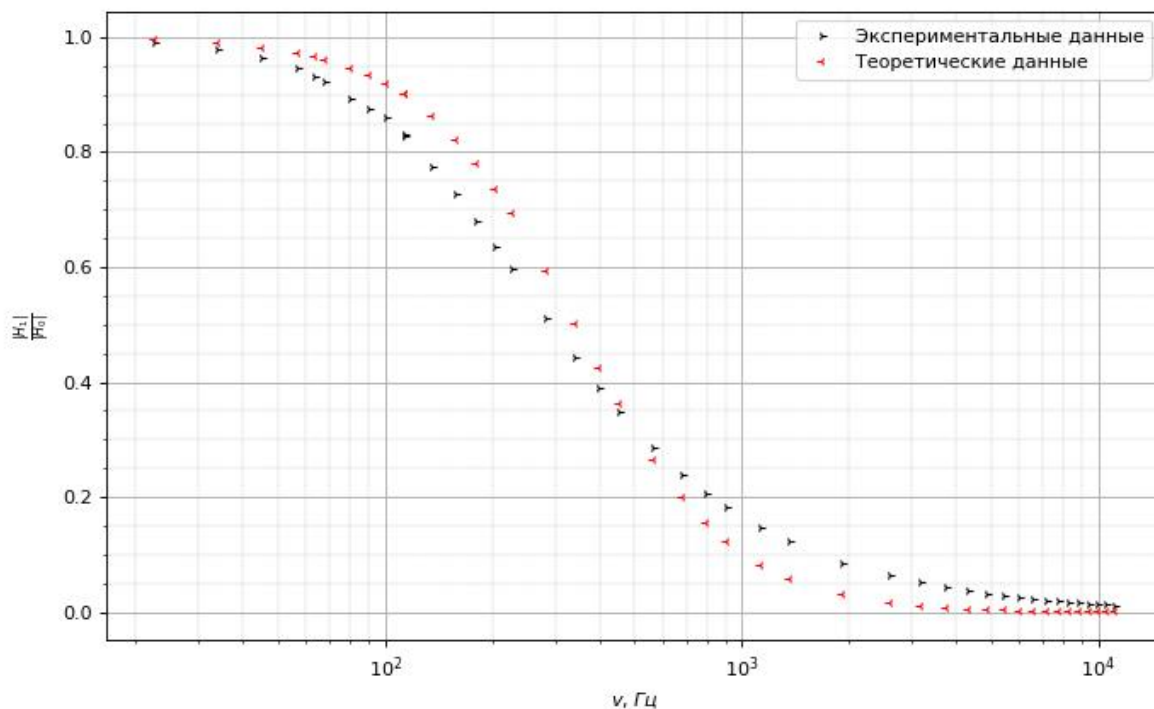


Рис. 11: Графическая зависимость $\frac{|H_1|}{|H_0|}(\nu)$

1.5 Обсуждение результатов и выводы

В ходе этой работы мы измерили удельную проводимость медного цилиндра разными способами. Результаты измерений представлены в таблице 5. Полученные значения совпадают по порядку с теоретическим значением, однако немного меньше. Это может быть связано из-за приближения о бесконечности цилиндра. Также на неточность измерений могла повлиять наводка поля в соединительных проводах.

Что касается коэффициентов ослабления поля, то из графика видно, что при малых частотах полученный коэффициент экспериментальным путём, меньше теоретического. При больших частотах картина противоположная, полученный коэффициент больше теоретического.

1.6 Приложения

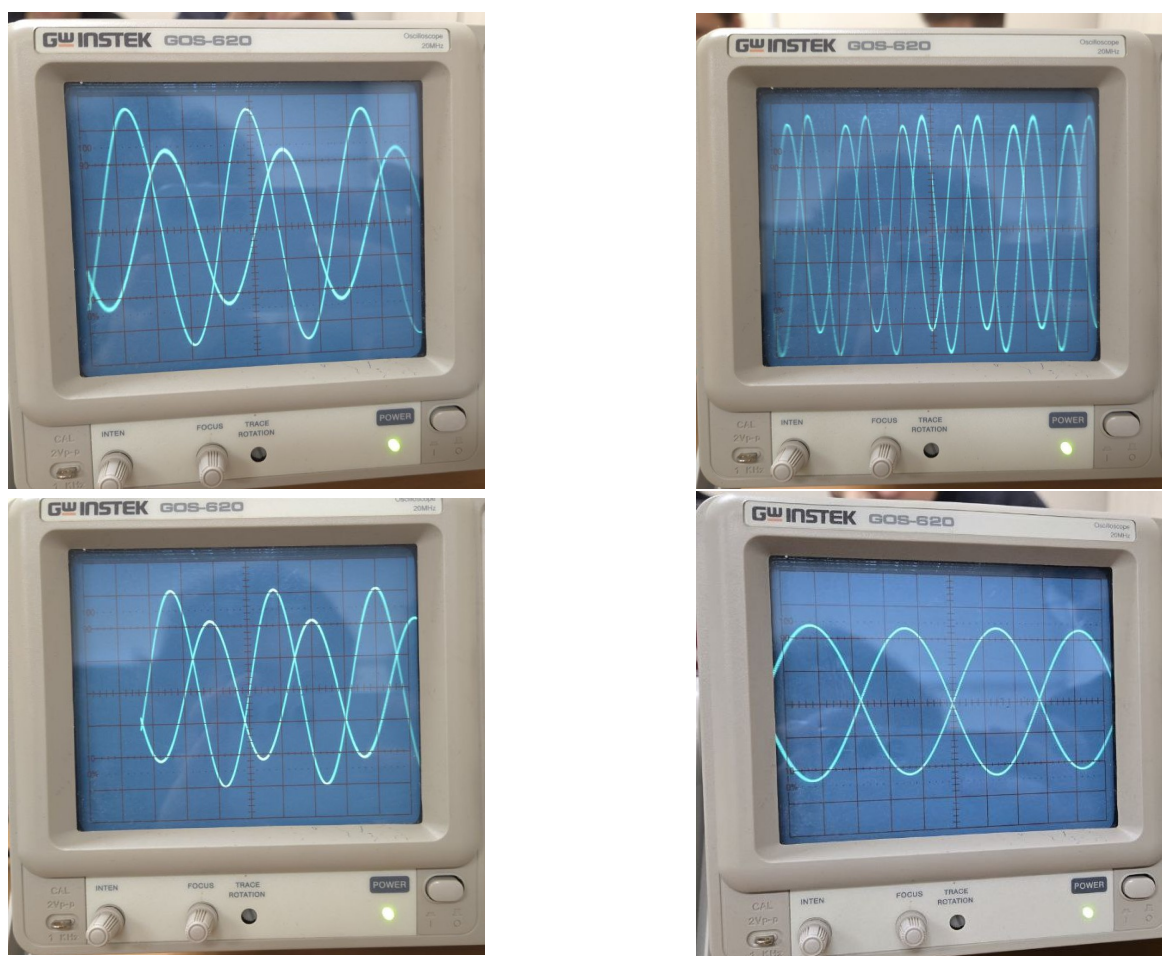


Рис. 12: Измерение сдвига фаз

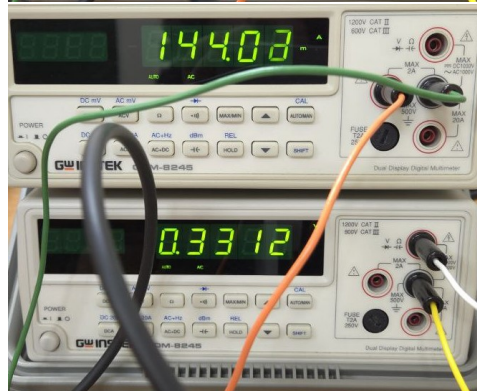
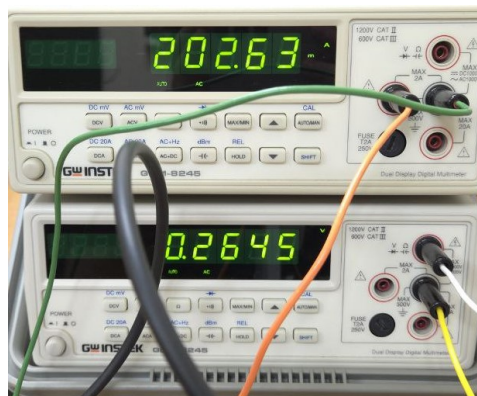
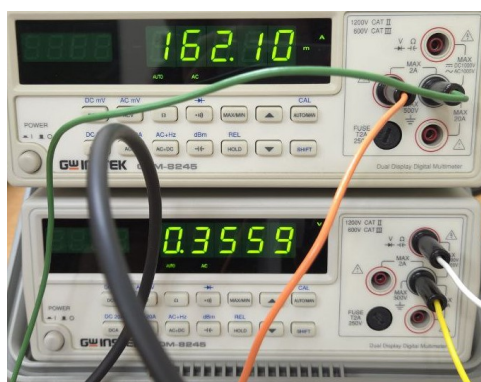
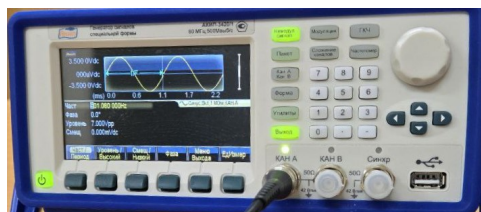


Рис. 13: Измерение тока и напряжение при разных частотах

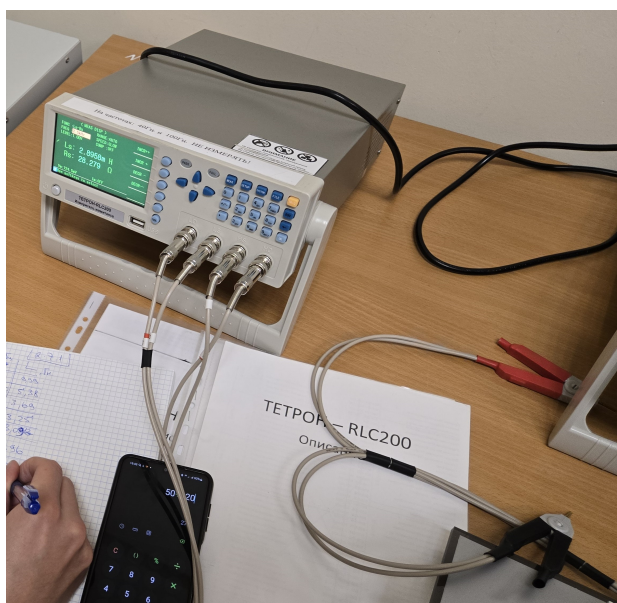


Рис. 14: Измерение зависимости индуктивности от частоты