МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
Физтех-школа аэрокосмических технологий

Исследование маятника Капицы

Работу выполнили
Лохматов Арсений Игоревич
Цветкова Амелия Антоновна
Б03-303

ФАКТ

Долгопрудный, 2025

О чём сегодня говорим?

Энергия маятника Капицы

Координаты x и y груза равны:

$$\begin{cases} x = l\sin\theta \\ y = -l\cos\theta + A\cos\omega t \end{cases}$$

Потенциальная энергия маятника в поле тяжести задаётся положением грузика по вертикали y

$$E_{\text{пот}} = mgy = -mg(l\cos\theta - A\cos\omega t)$$

Для кинетической энергии имеем

$$E_{\text{кин}} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}((l\cos\theta\dot{\theta})^2 + (l\sin\theta\dot{\theta} - A\omega\sin\omega t)^2) =$$

$$= \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 - mAl\omega\sin\omega t\sin\theta\dot{\theta} + \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2\omega t$$

Полная энергия даётся суммой кинетической и потенциальной энергий

$$E_{\text{полная}} = E_{\text{пот}} + E_{\text{кин}}$$

Энергия маятника Капицы

А лагранжиан системы даётся разностью этих энергий

$$L = E_{\text{кин}} - E_{\text{пот}} = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 - mAl\omega \sin\omega t \sin\theta\dot{\theta} + \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2\omega t +$$

$$+mg(l\cos\theta - A\cos\omega t)$$

Уравнение движения Маятника Капицы

Уравнение движения такой системы удовлетворяют уравнению Эйлера-Лагранжа, которое выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

Вычислим производные, которые используются в этом выражении:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} - mAl\omega \sin\omega t \sin\theta,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mAl\omega \sin\omega t \cos\theta\dot{\theta} - mgl \sin\theta.$$

В итоге, уравнение Эйлера-Лагранжа примет вид:

$$ml^2\ddot{\theta} - mAl\omega^2 \cos\omega t \sin\theta - mAl\omega \sin\omega t \cos\theta\dot{\theta} =$$

$$= -mAl\omega \sin\omega t \cos\theta\dot{\theta} - mgl \sin\theta.$$

Уравнение движения Маятника Капицы

Сократив одинаковые слагаемые и поделив правую и левую части на ml^2 получим искомое дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию фазы маятника

$$\ddot{\theta} = \frac{A\omega^2}{l}\cos\omega t \sin\theta - \frac{g}{l}\sin\theta\,.$$

Если же мы хотим исследовать маятник при наличии затухания (например, вязкость среды), то уравнение примет вид:

$$\ddot{\theta} = \frac{A\omega^2}{l}\cos\omega t \sin\theta - \frac{g}{l}\sin\theta - b\dot{\theta}\,,$$

где b – коэффициент затухания маятника.

Демонстрация

Демонстрация моделирования движения маятника Капицы, график изменения координаты y груза от времени, график изменения энергии маятника от времени.

Маятник Капицы и его законы движения

Для малых колебаний $(\theta \ll 1)$:

$$\ddot{\theta} + \Big(\frac{g}{l} - \frac{A\omega^2}{l}\cos\omega t\Big)\theta = 0.$$

$$\tau = \omega t,\ \delta = \frac{4g}{l\omega^2},\ \varepsilon = \frac{4A}{l} \hookrightarrow \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + (\delta - \varepsilon\cos\tau)\theta = 0$$

Это `уравнение Матьё`, которое описывает параметрический резонанс. Его решение зависит от соотношения частот:

- Если $\varepsilon = 0$ (нет вибрации), то маятник устойчив, так как $\delta > 0$ $(\theta = 0$ - нижнее положение равновесия);
- Если $\omega \gg \sqrt{\frac{g}{l}}$, верхнее положение стабилизируется за счёт виртуальной потенциальной ямы.

Маятник Капицы и его законы движения

Для малых колебаний $(\theta \ll 1)$:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + (\delta - \varepsilon \cos \tau)\theta = 0$$

- Если $\omega \approx 2\sqrt{\frac{g}{l}} = 2\omega_0$, возникает `параметрическая неустойчивость`(маятник раскачивается даже без начального толчка).

Виртуальная потенциальная яма:

$$\Pi_{\text{эфф}} \approx -\frac{1}{2}\left(\frac{g}{l} - \frac{A^2\omega^2}{2l^2}\right)\theta^2.$$

Если $\frac{A^2\omega^2}{2l^2} > \frac{g}{l} \Leftrightarrow A^2\omega^2 > 2gl$, то возникает условие стабилизации.

Демонстрация

Демонстрация параметрического резонанса у маятника Капицы.

Бифуркации

Рассмотрим стационарную (склерономную) механическую систему, в которой кинетическая энергия $T = \dot{\mathrm{q}}^T A(\mathrm{q})\dot{\mathrm{q}}/2$ является строго положительно-определенной квадратичной формой обобщенных скоростей, а вектор обобщенных сил $\mathrm{Q}(\mathrm{q}, \dot{\mathrm{q}}, \alpha)$ зависит от скалярного параметра α. Положениями равновесия q^0 такой системы являются решения векторного уранения:

$$\mathrm{f}(\mathrm{q}, \alpha) = \mathrm{Q}(\mathrm{q}, 0, \alpha) = 0$$

Функции $\mathrm{q}^0(\alpha)$, описывающие зависимость положений равновесия от параметра α, называются `кривыми равновесия` системы.

Бифуркации

Если в положении равновеси $\mathsf{q}^0(\alpha)$ выполняется условие

$$\det\left(\frac{\partial \mathsf{f}(\mathsf{q}, \alpha)}{\partial \mathsf{q}^T}\right) \neq 0,$$

то по теореме о неявных функциях в окрестности значения α существует единственное решение $\Delta \mathsf{q}^0(\Delta\alpha)$, которое в первом приближении описывается формулой:

$$\Delta \mathsf{q}^0 = \left(\frac{\partial \mathsf{f}}{\partial \mathsf{q}^T}\right)^{-1} \Delta\alpha.$$

Если же в положении равновесия $\mathsf{q}^0(\alpha^*)$ матрица $\partial \mathsf{f}/\partial \mathsf{q}^T$ вырождена, т.е.

$$\det\left(\frac{\partial \mathsf{f}(\mathsf{q}, \alpha^*)}{\partial \mathsf{q}^T}\right) = 0,$$

то значение α^* называется `точкой бифуркации (точкой ветвления)` положения равновесия. В окрестностях точек бифуркации решение $\Delta \mathsf{q}^0(\Delta\alpha)$ свойством единственности не обладает.

Бифуркации в маятнике Капицы

Бифуркации происходят при изменении параметров A и ω. Основные сценарии:

1. **Бифуркации устойчивости нижнего положения ($\theta = 0$)**
   - При $A = 0$ (нет колебаний) нижнее положение устойчиво;
   - При увеличении A или ω оно может потерять устойчивость;
   - Тип положения равновесия – центр.
2. **Появление устойчивого верхнего положения ($\theta = \pi$)**
   - При $A^2\omega^2 > 2gl$ верхнее положение становится устойчивым;
   - Это бифуркация типа "седло-центр"при малый частотах.
3. **Хаотическое поведение при промежуточных частотах**
   - В некоторых диапазонах ω движение становится хаотическим из-за конкуренции между резонансами.

Бифуркационная диаграмма для маятника Капицы

1. **Критическая частота**: при $A^2\omega^2 = 2gl$ происходит бифуркация, при которой:
   - нижнее положение теряет устойчивость;
   - верхнее положение приобретает устойчивость.

   Это соотвествует параметрическому резонансу.
2. **Области устойчивости**:
   - Область 1 ($A^2\omega^2 < 2gl$): только $\theta = 0$ устойчиво;
   - Область 2 ($A^2\omega^2 > 2gl$): $\theta = 0$ - неустойчиво, $\theta = \pi$ - устойчиво.

Демонстрация бифуркационной диаграммы маятника Капицы.

Спасибо за внимание

Готовы ответить на все ваши вопросы!