



Financira  
Europska unija  
NextGenerationEU



# Modeliranje ukupnih gubitaka u laminiranoj feromagnetskoj jezgri otvorenoga tipa korištenjem NGSolve softvera

Istraživač: Dr. sc. Stjepan Frljić\*

Mentor domaćin: Dr. Karl Hollaus◇

\*Sveučilište u Zagrebu Fakultet elektrotehnike i računarstva

◇ Institut für Analysis und Scientific Computing, TU Wien

HRZZ program mobilnosti MOBODL-2023-08

ASC, TU Wien

# Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>4</b>
<b>2. Slaba formulacija temeljena na hierarhijskim baznim funkcijama</b>	<b>5</b>
2.1. Zadaća vrtložnih struja . . . . .	5
2.2. Nova slaba formulacija . . . . .	6
2.2.1. Jedinstvenost rješenja formulacije . . . . .	8
2.2.2. Primjer ulaznog koda u NGSolve . . . . .	12
2.3. Problem anizotropnosti . . . . .	15
2.3.1. Dokaz fundamentalne netočnosti A-formulacije . . . . .	16
2.3.2. Dodatni dokaz za trokutni element . . . . .	19
2.4. Numerički primjer . . . . .	20
2.4.1. Usporedba rezultata simulacija . . . . .	20
2.4.2. Materijal niske magnetske reluktivnosti . . . . .	21
2.4.3. Materijal visoke magnetske reluktivnosti . . . . .	27
<b>3. Nelinearna slaba formulacija</b>	<b>32</b>
3.1. Newton-Raphson metoda . . . . .	32
3.1.1. Newton-Raphson metoda u kontekstu FEM-a . . . . .	33
3.1.2. Izračun Jacobijeve matrice . . . . .	35
3.2. Numerički primjer . . . . .	36
3.3. Magnetska energija . . . . .	39
<b>4. NGSolve bilješke</b>	<b>46</b>
4.1. Neke od najvažnijih klasa i metoda . . . . .	46
4.2. Bazne funkcije . . . . .	48
4.2.1. Baricentrične koordinate . . . . .	48
4.2.2. Čvorne bazne funkcije . . . . .	49
4.2.3. Bridne bazne funkcije . . . . .	50
4.3. Bilješke iz matematike . . . . .	51
4.3.1. Pozitivna definitnost matrice . . . . .	51

4.3.2.	Metrika i metrički prostori . . . . .	51
4.3.3.	Otvoreni i zatvoreni skupovi . . . . .	52
4.3.4.	Norma . . . . .	53
4.3.5.	Cauchyjevi nizovi i kompletnost prostora . . . . .	53
4.3.6.	Nosač funkcije . . . . .	54
4.3.7.	Slaba derivacija . . . . .	55
4.3.8.	Helmholtzova dekompozicija . . . . .	55

# **1. Uvod**

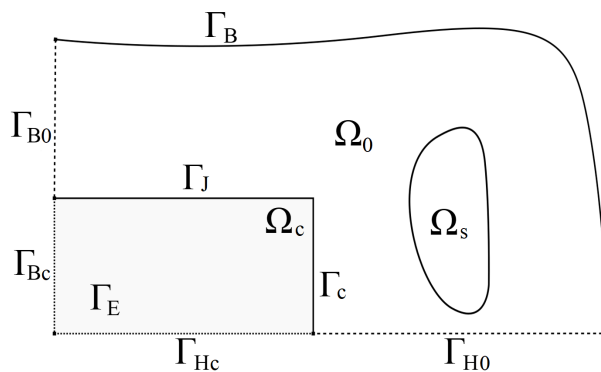
U nastavku su dokumentirana najvažnija znanja dobivena tijekom boravka na ASC, TU Wien. Bilješke u dokumentu su u najvećoj mjeri potpuno nova znanja, a u manjoj mjeri stara znanja promatrana iz novog kuta gledišta.

## 2. Slaba formulacija temeljena na hierarhijskim baznim funkcijama

U ovom poglavlju je prikazana nova mješovita slaba formulacija temeljena na magnetskom vektorskom potencijalu  $\vec{A}$  i skalarnom strujnom potencijalu  $T$  u području jezgre te magnetskom vektorskom potencijalu  $\vec{A}$  u području izvan jezgre. Potencijali u području jezgre su po želji aproksimirani hierarhijskim baznim funkcijama do najviše drugog stupnja te je napravljena usporedba simulacijskih rezultata. Potencijal u zraku koristi isključivo bazne funkcije najnižeg (nultog) stupnja. Pretpostavljene su linearne značajke materijala, a nelinearnim značajkama materijala bavimo se u 3 poglavlju.

### 2.1 Zadaća vrtložnih struja

Zadana je rubna zadaća (BVP, *boundary value problem*) vrtložnih struja s domenom  $\Omega$  koja uključuje laminiranu jezgru  $\Omega_c$ , uzbudni namot  $\Omega_s$ , te zračnu kutiju  $\Omega_0$ , kao što je prikazano na slici 2.1. Krajnji fokus izračuna ovdje je na gubitcima u jezgri, ne na izračunu električnih veličina zadanog električnog kruga. Iako je razvijena formulacija kompatibilna s modeliranjem vrtložnih struja u namotu, kako bi simulacije bile što ekonomičnije sa stajališta vremenskih i računalnih resursa, vrtložne struje u namotu neće se razmatrati. Prema tome, samo područje  $\Omega_c$  je električki provodno, dok će područje  $\Omega_s$  sadržavati samo zadanu uzбудnu struju.



**Slika 2.1:** Skica poprečnog presjeka problemske domene skupa s relevantnim ploham

Prema Faradayevoj jednadžbi, vremenski promjenjivo polje magnetske indukcije  $\vec{B}$  stvara električno polje  $\vec{E}$  koje unutar električki provodne lamele, električne otpornosti  $\rho$ , uzrokuje vrtložne struje  $\vec{J}$ . U harmoničkom slučaju Faradayeva jednadžba glasi

$$\nabla \times \rho \vec{J} = -j\omega \vec{B} \quad (2.1)$$

gdje je  $j$  imaginarna jedinica. Inducirane vrtložne struje također doprinose polju magnetske indukcije  $\vec{B}$  prema Ampereovom zakonu

$$\nabla \times \nu \vec{B} = \vec{J}. \quad (2.2)$$

gdje je  $\nu$  magnetska reluktivnost lamele.

U području  $\Omega_0$  i  $\Omega_s$  relevantna je samo jednadžba

$$\nabla \times \nu_0 \vec{B} = \vec{J}_s \quad (2.3)$$

gdje  $\vec{J}_s$  predstavlja gustoću uzbudne struje. Radi konciznosti zapisa, pretpostavit će se da namot i zrak imaju magnetsku permeabilnost  $\mu_0$ .

Za vektorska polja  $\vec{B}$  i  $\vec{J}$  unutar cijele domene vrijedi  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  i  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ . Također, struja  $\vec{J}_s$  bi se trebala zadati tako da je osiguran  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ . Budući da kod jezgre otvorenoga tipa sav magnetski tok prelazi granicu jezgra/zrak poželjno je egzaktno osigurati granične uvjete na magnetsku indukciju. Zbog toga će se magnetska indukcija aproksimirati kao  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ .

## 2.2 Nova slaba formulacija

Homogenizirana  $\vec{A}, T - \vec{A}$  slaba formulacija podrazumijeva homogene i anizotropne značajke materijala  $\vec{\rho}$  i  $\vec{\nu}$  bazirane na homogenizaciji isključivo laminirane jezgre. Uz  $(T_h, \vec{A}_h) \in W_h$  gdje je  $W_h := \{(T_h, \vec{A}_h) \mid T_h \in V_h, \vec{A}_h \in U_h, \text{ uz } T_h = 0 \text{ na } \Gamma_J \text{ te } \vec{A}_h \times \vec{n} = 0 \text{ na } \Gamma_B, \Gamma_{Bc}, \Gamma_E\}$  riješi

$$-j\omega^{-1} \int_{\Omega_c} \vec{\rho}(\mathbf{C} \cdot \nabla T_h) \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla \tau_p) dV + \int_{\Omega_c} \vec{A}_h \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla \tau_p) dV = 0, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0 \cup \Omega_s} \mu_0^{-1} (\nabla \times \vec{A}_h) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) dV + \int_{\Omega_c} \vec{\nu} \cdot (\nabla \times \vec{A}_h) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) dV + \\ \int_{\Omega_c} (\mathbf{C} \cdot \nabla T_h) \cdot \vec{\alpha}_k dV + \int_{\Omega} \sigma_0 \vec{A}_h \cdot \vec{\alpha}_k dV = \int_{\Omega} \vec{T}_s \cdot \nabla \times \vec{\alpha}_k \end{aligned} \quad (2.5)$$

za svaki  $(\tau_p, \vec{\alpha}_k) \in W_h$ , pri čemu je  $V_h \subset H^1(\Omega_c)$  i  $U_h \subset H(\text{curl}, \Omega)$ .

Ovdje  $\vec{T}_s$  predstavlja strujni vektorski potencijal pobudne struje  $\vec{J}_s = \nabla \times \vec{T}_s$ , dok  $\sigma_0 \approx 1$  predstavlja električnu provodnost, znatno manjeg iznosa u odnosu na provodnost jezgre, u svrhu

osiguranja jedinstvenosti rješenja. Dakle, posljednji integral s lijeve strane znaka jednakosti u (2.5) predstavlja regularizacijski član matrice koeficijenata koji iako nefizikalan, nema primjetan utjecaj na rezultate simulacije, no omogućuje upotreba direktnih solvera.

Matrica  $\mathbf{C}$  omogućuje transformaciju gradijenta skalarnog polja  $T_h$  u rotaciju jednodimenzionalnog vektorskog polja  $T_h \vec{a}_n$ , gdje je  $\vec{a}_n$  jedinični vektor okomit na plohu lamele. U nastavku ću pretpostaviti da jezgra stoji uspravno, tako da je  $z$ -os aksijalna os jezgre. Transformacijska matrica  $\mathbf{C}$  računa se kao

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \delta \\ 0 & 0 & \cos \delta \\ \sin \delta & -\cos \delta & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

gdje kut  $\delta = \arccos \left( \frac{\vec{a}_n \cdot \vec{a}_x}{|\vec{a}_n|} \right)$  uzima u obzir zakrenutost jezgre oko aksijalne osi ( $z$ -osi) zbog čega  $\vec{a}_n$  nije paralelan s  $x$ -osi.

U slučaju da je kut zakreta  $\delta$  različit od nule, tenzori  $\bar{\mathbf{v}}$  i  $\bar{\mathbf{\rho}}$  nisu dijagonalni jer se ne podudaraju s osima koordinatnog sustava. Tada tenzore određujemo primjenom sljedećih transformacija. Za tenzor  $\bar{\mathbf{v}}$  vrijedi

$$\bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \bar{v}_\perp \cos^2 \delta + \bar{v}_\parallel \sin^2 \delta & (\bar{v}_\perp - \bar{v}_\parallel) \sin \delta \cos \delta & 0 \\ (\bar{v}_\perp - \bar{v}_\parallel) \sin \delta \cos \delta & \bar{v}_\perp \sin^2 \delta + \bar{v}_\parallel \cos^2 \delta & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v}_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

gdje je  $\bar{v}_\perp$  i  $\bar{v}_\parallel$  predstavljaju homogeniziranu reluktivnost u smjeru slaganja lamela (okomito na plohe lamela) te u smjeru tangencijalno na lamele pod  $90^\circ$  u odnosu na  $z$ -smjer, dok  $\bar{v}_{zz}$  predstavlja homogeniziranu reluktivnost u  $z$ -smjeru i ona nije modificirana zakretanjem jezgre. Analognim postupkom tenzor  $\bar{\mathbf{\rho}}$  računa se kao

$$\bar{\mathbf{\rho}} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}_\perp \cos^2 \delta + \bar{\rho}_\parallel \sin^2 \delta & (\bar{\rho}_\perp - \bar{\rho}_\parallel) \sin \delta \cos \delta & 0 \\ (\bar{\rho}_\perp - \bar{\rho}_\parallel) \sin \delta \cos \delta & \bar{\rho}_\perp \sin^2 \delta + \bar{\rho}_\parallel \cos^2 \delta & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho}_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

gdje se za okomitu komponentu  $\bar{v}_\perp$  postavlja visoka vrijednost otpornosti  $\bar{v}_\perp \approx 1$ .

### 2.2.1 Jedinstvenost rješenja formulacije

Ovo je vrlo važno pitanje u analizi neke konkretne Galerkinove slabe formulacije. Kada se za zadani BVP problem, s domenom  $\Omega$ , iz prostora realnih (ili kompleksnih) funkcija  $\mathbf{F}^\Omega$  izvede slaba formulacija te prijeđe (napravi projekcija) u konačnodimenzijski prostor, a ovdje će to uvijek biti neki prostor konačnih elemenata, važno je razmotriti jedinstvenost rješenja dobivene formulacije. Za svaku od formulacija pretpostavljam da se domena  $\Omega$  sastoji od tri poddomene, a to su jezgra, zrak i izvor.

Numeričko testiranje teorijskih zaključaka o jedinstvenosti rješenja provodi se izračunom vlastitih vrijednosti (eigenvalues) korištenjem sljedećeg koda u NGSolve:

```
import numpy as np
dirich=GridFunction(fes)
dirich.Set(bb, definedon=mesh.Boundaries('rub'))

rows,cols,vals = a.mat.C00()
import scipy.sparse as sp
AA = sp.csr_matrix((vals,(rows,cols)))

S=AA.todense() #/795544.94828958

maska=fes.FreeDofs()
print(maska)
for dof in range(fes.ndof):
    if (not maska[dof]):
        S[dof,:]=0
        S[dof,dof]=1

print(S)
print(dirich.vec)
print(gfu.vec)

#determ=np.linalg.det(S)
Seigenvalues=np.linalg.eigvals(S)
print('eigenvalues=',Seigenvalues)
```

U nastavku ću opisati jedinstvenost rješenja, tj. regularnost matrice koeficijenata nekoliko formulacija.

#### A formulacija

Ova formulacija koristi magnetski vektorski potencijal  $A$  u cijeloj domeni, i u jezgri i u zraku i u namotu. Prema tome, rješenje je interpolirano s  $A \in feU$ , gdje je  $feU \subset H(\text{curl})$  prostor konačnih elemenata s bridnim baznim funkcijama najnižeg stupnja opisanim u podsekciji 4.2.3. NGSolve kod za LHS navedene formulacije glasi:

```
#prostor konacnih elemenata "feU" je subspace od H(curl)
feU = HCurl(mesh, order=0, dirichlet="outer", complex=True, nograds = False)
u = feU.TrialFunction() #bazne funkcije
v = feU.TestFunction() #tezinske funkcije
```



```
#znacajke materijala
mu0 = 1.257e-6
sigma=CoefficientFunction( (0.01 , 0, 0, 0, 2e3, 0, 0, 0, 2e3), dims=(3,3) )
rel=CoefficientFunction( ( 32000, 0, 0, 0, 1200, 0, 0, 0, 1200), dims=(3,3) )

#bilinearna mapa matrice koeficijenata
term1 = (1/mu0)*curl(u)*curl(v)*dx('air|coil') + rel*curl(u)*curl(v)*dx('core') + \
    1j*omega*sigma*u*v*dx('core')
term2 = 1j*1e0*u*v*dx('air|coil')

a = BilinearForm(term1+term2)
a.Assemble()
```

Ako promatramo samo izraz za  $\text{term1}$ , u zraku i izvoru je prisutan samo  $\text{curl}(u)*\text{curl}(v)$  član. Označimo sve testne (težinske) funkcije koje su definirane isključivo nad konačnim elementima izvan jezgre kao  $v_{a|c}$ . Vrijedi da su  $v_{a|c}$  ortogonalne s rješenjem  $A$  u jezgri, tj.  $\langle A, v_{a|c} \rangle_{\text{core}} = 0$ . Posljedica toga je da će globalni sustav jednadžbi sadržavati jednadžbe čija LHS strana ima samo  $\text{curl}(u)*\text{curl}(v)$  član. Iako su sve  $v_{a|c}$  linearno nezavisne, njihove rotacije su linearno zavisne. Stoga će rotacija rješenja  $\nabla \times A = \sum_{i=1}^n A_i u_i$  testirana rotacijama testnih funkcija  $v_{a|c}$  rezultirati jednadžbama koje su linearno zavisne, pa će matrica koeficijenata biti singularna. Primjerice, neka je  $v_{a|c} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_m\}$  skup testnih funkcija izvan jezgre (jezgra i namot) i neka su  $v_1, v_2, v_3$  i  $v_4$  bridne funkcije definirane nad četiri brida koje sve imaju jedan te isti zajednički čvor (bridovi čine znak "+"). Iako su  $v_1, v_2, v_3$  i  $v_4$  linearno nezavisne,  $\text{curl}(v_1), \text{curl}(v_2), \text{curl}(v_3)$  i  $\text{curl}(v_4)$  su linearno zavisne tako da je  $\text{curl}(v_4) = \text{curl}(v_1) + \text{curl}(v_2) + \text{curl}(v_3)$ . Prema tome, jednadžbu  $\langle \text{curl}(A), \text{curl}(v_4) \rangle$  moguće je zamijeniti jednadžbom  $\langle \text{curl}(A), (\text{curl}(v_1) + \text{curl}(v_2) + \text{curl}(v_3)) \rangle$ .

U području jezgre prisutan je član  $1j*\omega*\sigma*u*v*dx('core')$  koji osigurava da svaka jednadžba testirana testnom funkcijom definiranom nad konačnim elementima u jezgri sadrži čistu testnu funkciju koja je linearno nezavisna u odnosu na ostale testne funkcije. Posljedično, jednadžbe koje su vezane za testne funkcije iz područja jezgre linearno su nezavisne.

Kako bi se osigurala jedinstvenost rješenja cijelog sustava jednadžbi, nad cijelom domenom  $\Omega$ , izvan jezgre se dodaje 'nefizički' član  $\text{term2}$  koji predstavlja regularizacijski član. Dakle, regularizacija matrice koeficijenata je potrebna samo izvan jezgre, tj. u nevodljivom području domene. Naravno, ako bi se maknuo član  $1j*\omega*\sigma*u*v*dx('core')$  iz  $\text{term1}$ , a ostavio član  $\text{term2}$ , onda bi rješenje u područje jezgre bilo nejedinstveno. U tom slučaju, za npr. 2D problem, za svaki čvor mesha koji se nalazi unutar područja jezgre (ne na granici jezgra/zrak) javit će se jedna nulta vlastita vrijednost.

## $A, \varphi - A$ formulacija

Ova formulacija u jezgri koristi magnetski vektorski potencijal  $A$  i skalarni električni potencijal  $\varphi$ , a u zraku i namotu samo  $A$ . Pritom  $A \in feU$  i  $\varphi \in feV$ , gdje je  $feU \subset H(\text{curl})$  prostor

konačnih elemenata s bridnim baznim funkcijama najnižeg stupnja opisanim u podsekciji 4.2.3, dok je  $feV \subset H^1$  prostor čvornih baznih funkcija opisanih u podsekciji 4.2.2. Prema tome, rješenje problema traži se u prostoru  $fes$  koji predstavlja produkt uvedenih vektorskih prostora, tj.  $fes = feU \times feV$ . NGSolve kod za LHS navedene formulacije glasi:

```
#definiranje prostora konacnih elemenata
feU = HCurl(mesh, order=0, dirichlet="outer", complex=True, nograds = False)
feV = H1(mesh, order=1, definedon="core", complex=True)
fes=feU*feV
mvp, esp = fes.TrialFunction() #bazne funkcije
alpha, lambda = fes.TestFunction() #tezinske funkcije

#znacajke materijala
mu0 = 1.257e-6
sigma=CoefficientFunction( (0.01 , 0, 0, 0, 2e3, 0, 0, 0, 2e3), dims=(3,3) )
rel=CoefficientFunction( ( 32000, 0, 0, 0, 1200, 0, 0, 0, 1200), dims=(3,3) )

#bilinearna mapa matrice koeficijenata
term1 = (1/mu0)*curl(mvp)*curl(alpha)*dx('air') + rel*curl(mvp)*curl(alpha)*dx('core') +\
1j*omega*sigma*mvp*alpha*dx('core') + 1j*omega*sigma*grad(esp)*alpha*dx('core')
term2 = 1j*omega*sigma*mvp*grad(lambda)*dx('core') +\
1j*omega*sigma*grad(esp)*grad(lambda)*dx('core')
term3 = 1j*1e0*mvp*alpha*dx('air')
term4 = 1j*1e0*esp*lambda*dx('core')

a = BilinearForm(term1+term2+term3+term4)
a.Assemble()
```

Iz istih razloga kao što je bio slučaj s  $A$  formulacijom, i ovdje su jednadžbe u zraku linearno zavisne, pa je za osiguravanje jedinstvenosti rješenja potrebno uvesti regulacijski član  $term3$  u zraku i namotu.

Međutim, jednadžbe  $A, \varphi - A$  formulacije nisu linearno nezavisne ni u području jezgre. Razlog je sama bilinearna forma ali i činjenica da je  $\nabla feV \in feU$ . Obje bilinearne forme originalne mješovite  $A, \varphi$  formulacije (odnosno mvp, esp formulacije) u području jezgre glase

$$\langle \nabla \nabla \times A, \nabla \times \alpha_j \rangle + j\omega\sigma \langle A, \alpha_j \rangle + j\omega\sigma \langle \nabla \varphi, \alpha_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n_e \quad (2.9)$$

$$j\omega\sigma \langle A, \nabla \lambda_k \rangle + j\omega\sigma \langle \nabla \varphi, \nabla \lambda_k \rangle, \quad k = 1, \dots, n_v \quad (2.10)$$

gdje su  $\alpha_j \in feU_D$  i  $\lambda_k \in feV_D$  težinske funkcije, odnosno prostori težinskih funkcija su potprostori prostora funkcija oblika (trial functions, shape functions, bazne funkcije) koji uvažavaju eventualne Dirichleteove granične uvjeta na granici jezgra/zrak.

Budući da je  $\nabla feV \in feU$ , onda postoji linearna kombinacija  $\nabla \lambda_k = \sum_j^{n_e} c_j \alpha_j$ , gdje su  $c_j$  koeficijenti, a budući da je  $\nabla \times \nabla \lambda_k = 0$ , za istu linearnu kombinaciju istovremeno vrijedi da je  $0 = \sum_j^{n_e} c_j \nabla \times \alpha_j$ . Pretpostavimo da je za gradijent  $\nabla \lambda_1$  koeficijent  $c_j \neq 0$  za  $j = 1, 2, 3, 4$ , a  $c_j = 0$  za  $j = 5, \dots, n_e$ . Prema tome, množenjem izraza rednog broja  $j = 1, 2, 3, 4$  unutar (2.9)

pripadnim koeficijentima  $c_j$  te zatim njihovim međusobnim zbrajanjem dobiva se izraz

$$\left\langle \mathbf{v} \nabla \times \mathbf{A}, \sum_{j=1}^4 c_j \nabla \times \boldsymbol{\alpha}_j \right\rangle + j\omega\sigma \left\langle \mathbf{A}, \sum_{j=1}^4 \boldsymbol{\alpha}_j \right\rangle + j\omega\sigma \left\langle \nabla \varphi, \sum_{j=1}^4 \boldsymbol{\alpha}_j \right\rangle \quad (2.11)$$

Budući da je linearna kombinacija  $\sum_{j=1}^4 c_j \nabla \times \boldsymbol{\alpha}_j = 0$ , a linearna kombinacija težinskih funkcija  $\sum_{j=1}^4 c_j \boldsymbol{\alpha}_j = \nabla \lambda_1$ , njihovim uvrštavanjem u prethodni izraz dobiva se

$$j\omega\sigma \langle \mathbf{A}, \nabla \lambda_1 \rangle + j\omega\sigma \langle \nabla \varphi, \nabla \lambda_1 \rangle \quad (2.12)$$

a to je upravo izraz  $k = 1$  u sustavu (2.10), što znači da su jednadžbe  $j = 1, 2, 3, 4$  i jednadžba  $k = 1$  linearno zavisne, a posljedično i matrica koeficijenata singularna. Uoči da bi desne strane svih tih jednadžbi bile jednake nuli jer u području jezgre ne teče struja uzbude.

Ako su  $\boldsymbol{\alpha}_j \in feU$  i  $\lambda_k \in feV$ , tada postoji i dodatni razlog linearne zavisnosti. On proizlazi iz činjenice da je  $\sum_k^{n_v} \lambda_k = 1$ , što znači da je  $\sum_k^{n_v} \nabla \lambda_k = 0$ , te je linearna kombinacija svih jednadžbi u (2.10) jednaka nuli, odnosno one su međusobno linearno zavisne. Međutim, ako barem na dijelu granice jezgra/zrak postoji Dirichletov granični uvjet za  $\varphi$ , tada više ne vrijedi  $\sum_k^{n_v} \lambda_k = 1$  u području jezgre, tj. suma više nije konstantna funkcija nego kontinuirana, ali ipak na dijelu jezgre nekonstantna funkcija. Posljedično, ne vrijedi da je  $\sum_k^{n_v} \nabla \lambda_k = 0$  tako da linearna zavisnost među gradijentima težinskih funkcija izostaje, a samim time i linearna zavisnost među jednadžbama u sustavu (2.10).

Dakle, da bi se osiguralo jedinstveno rješenje i u području jezgre, u bilinearne forme (2.10) uvodi se regularizacijski član oblika  $\langle \varphi, \lambda \rangle$ , a to je upravo term4 u prethodnom NGSolve kodu. Primijeti da član oblika  $\langle \mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha} \rangle$ , kao što je term3, općenito ne funkcionira kao regularizacijski član u području jezgre jer ako su  $\boldsymbol{\alpha}_j \in feU_D$  i  $\lambda_k \in feV_D$  tada sustav svih jednadžbi (2.10) ostaje linearno zavisan.

## **$A, T - A$ formulacija**

Ova formulacija u jezgri koristi magnetski vektorski potencijal  $A$  i skalarni strujni potencijal  $T$ , a u zraku i namotu samo  $A$ . Konačnodimenzionalne aproksimacije  $\vec{A}_h \in feU$  i  $T_h \in feV$ , u kodu su označene kao mvp i csp. NGSolve kod za LHS navedene formulacije glasi:

```
#prostor konacnih elemenata "feU" je subspace od H(curl)
fsU = HCurl(mesh, order=0, dirichlet="outer", complex=True, nograds = False)
fsV = H1(mesh, order=1, dirichlet='left|right|bot|top', definedon='core', complex=True)
feW=fsU*fsV
mvp, csp = feW.TrialFunction()
alpha, tau = feW.TestFunction()

#znacajke materijala
mu0 = 4*pi*1e-7
rho=CF( (0.1 , 0, 0, 0, 0.0005, 0, 0, 0, 0.0005), dims=(3,3) )
```

```

rel=CF( ( 32000, 0, 0, 0, 1200, 0, 0, 0, 1200), dims=(3,3) )

#bilinearna mapa matrice koeficijenata
term1=(1/mu0)*curl(mvp)*curl(alpha)*dx('air|coil')+rel*curl(mvp)*curl(alpha)*dx('core')\
- (rot*grad(csp))*alpha*dx('core') #+ 0.1*mvp*alpha*dx('air|coil')
term2= -1j/omega*rho*(rot*grad(csp))*(rot*grad(tau))*dx('core') + \
(rot*grad(tau))*mvp*dx('core')
term3=1*1e0*mvp*alpha*dx

a = BilinearForm(term1+term2+term3)
a.Assemble()

```

Jedinstvenost rješenja za  $\vec{A}_h$  potencijal potrebno je osigurati izvan jezgre. Testiranje formulacije funkcijom  $\vec{\alpha}_k$ , gdje se  $k$ -ti brid mreže konačnih elemenata nalazi u području izvan jezgre rezultira jednadžbom koja sadrži samo  $\text{curl}(\text{mvp}) * \text{curl}(\alpha) * dx$  član, a skup svih takvih jednadžbi je linearno zavisian. Jedinstvenost rješenja za  $T_h$  osigurana je samom formulacijom, ali pod uvjetom da su pravilno propisani Dirichleteovi uvjeti za  $T_h$  na  $\Gamma_J$ . Međutim, upravo zbog Dirichleteovih uvjeta  $T_h = 0$  na  $\Gamma_J$ , pri testiranju formulacije funkcijama  $\vec{\alpha}_k$  vezanim za bridove na  $\Gamma_J$  dobivaju se jednadžbe koje sadrže samo  $\text{curl}(\text{mvp}) * \text{curl}(\alpha) * dx$  član. Prema tome, regularizacija je primijenjena i na područje jezgre. Očekivano, pridruživanje regularizacijskog člana i području jezgre nema uočljiv utjecaj na rezultate simulacije, niti na memorijsko zauzeće i trajanje simulacije.

## 2.2.2 Primjer ulaznog koda u NGSolve

U nastavku je prikazan jednostavan primjer modela za koji rješavamo problem vrtložnih struja korištenjem  $\vec{A}, T - \vec{A}$  formulacije. Kako bi se definirao konačnodimenzionalni vektorski prostor u kojem tražimo rješenje problema potrebno je najprije kreirati mrežu konačnih elemenata.

```

from netgen.csg import *
from ngsolve import *

def MakeGeometry():
    geometry = CSGeometry()
    #kreiram jednostavnu jezgru:
    box = OrthoBrick(Pnt(-1,-1,-1),Pnt(1,1,1)).bc("outer")
    front= Plane (Pnt(-0.05,-0.05,-0.2), Vec(-1,0,0) ).bc("front").maxh(0.015)
    right= Plane (Pnt(-0.05,-0.05,-0.2), Vec(0,-1,0) ).bc("right")
    bot = Plane (Pnt(-0.05,-0.05,-0.2), Vec(0,0,-1) ).bc("bot")
    back = Plane (Pnt(0.05,0.05,0.2), Vec(1, 0,0) ).bc("back").maxh(0.015)
    left = Plane (Pnt(0.05,0.05,0.2), Vec(0,1,0) ).bc("left")
    top = Plane (Pnt(0.05,0.05,0.2), Vec(0,0, 1) ).bc("top")
    core = left * right * front * back * bot * top
    core.maxh(0.06) #maksimalna velicina konacnog elementa u jezgri
    #front.maxh(0.01)
    core.mat("core") #naziv materijala

    #kreiram cilindricni namot:
    coil = (Cylinder(Pnt(0.0,0,-0.5), Pnt(0.0,0,0.5), 0.2) - \
            Cylinder(Pnt(0.0,0,-0.5), Pnt(0.0,0,0.5), 0.1)) * \

```

```

        OrthoBrick (Pnt(-1,-1,-0.1),Pnt(1,1,0.1))
coil.maxh(0.12)
coil.mat("coil")

geometry.Add ((box-core-coil).mat("air"))
geometry.Add (core)
geometry.Add (coil)

return geometry

ngmesh = MakeGeometry().GenerateMesh(maxh=0.4)
mesh = Mesh(ngmesh)
mesh.Curve(5) #zaobljenje geometrije elemenata vezanih uz lukove
Draw(mesh) #vizualizacija mesha
print(mesh.GetBoundaries()) #ispisivanje naziva svih granicnih ploha

```

Slaba  $\vec{A}, T - \vec{A}$  formulacija je mješovita formulacija, odnosno rješenje problema nalazi se u vektorskom prostoru  $W_h$  koji predstavlja tenzorski produkt dvaju vektorskih prostora konačnih elemenata  $V_h$  i  $U_h$ , odnosno  $W_h = V_h \otimes U_h$ . U NGSolve je potrebno zadati prostor konačnih elemenata unutar kojeg će se tražiti rješenje, baziran na prethodno kreiranoj mreži konačnih elemenata. U NGSolvu kodu ćemo za  $U_h$ ,  $V_h$  i  $W_h$  koristiti nazive fsU, fsV i fsW, pa slijedi:

```

#prostor konacnih elemenata "feU" je subspace od H(curl)
fsU = HCurl(mesh, order=0, dirichlet="outer", complex=True, nograds = False)
fsV = H1(mesh, order=1, dirichlet='left|right|bot|top', definedon='core', complex=True)
feW=fsU*fsV
mvp, csp = feW.TrialFunction()
alpha, tau = feW.TestFunction()

```

Naredbom `mvp, csp = feW.TrialFunction()` definiraju se probne funkcije `mvp` i `csp` koje predstavljaju  $\vec{A}_h$  i  $T_h$ . Slično tome, naredbom `alpha, tau = feW.TestFunction()` definiraju se testne funkcije  $\vec{\alpha}$  i  $\tau$ .

Nakon što je definiran prostor konačnih elemenata, zadaju se značajke materijala i ostali parametri kao što su frekvencija i transformacijska matrica  $\mathbf{C}$ , nakon čega se konačno zadaje i lijeva strana znaka jednakosti (LHS, *left hand side*)  $\vec{A}, T - \vec{A}$  slabe formulacije. Kako bi se omogućio širok izbor solvera te bolje simulacijske performanse, važno je da matrica koeficijenata  $\vec{A}, T - \vec{A}$  slabe formulacije bude simetrična. U nastavku su prikazane četiri varijante  $\vec{A}, T - \vec{A}$  formulacije kojima se osigurava simetričnost matrice koeficijenata. Ovisno o postavljanju zastavice `version` koristi se različita varijanta formulacije:

```

#znacajke materijala i ostali parametri
sigma0=1
mu0 = 4*pi*1e-7
rho=CF( (0.1 , 0, 0, 0, 0.0005, 0, 0, 0, 0.0005), dims=(3,3) )
rel=CoefficientFunction( ( 32000, 0, 0, 0, 1200, 0, 0, 0, 1200), dims=(3,3) )
omega=314
rot=CF( (0 , 0, 0, 0, 0, 1, 0, -1, 0), dims=(3,3) ) #transformacijska matrica C

version=2 #bilinearna mapa iz koje slijedi matrica koeficijenata

```

```

if version==1:
    term1=(1/mu0)*curl(mvp)*curl(alpha)*dx('air|coil') + \
    rel*curl(mvp)*curl(alpha)*dx('core') + 1j*omega*(rot*grad(csp))*alpha*dx('core')
    term2= -1j*omega*rho*(rot*grad(csp))*(rot*grad(tau))*dx('core') + \
    1j*omega*(rot*grad(tau))*mvp*dx('core')
    term3=1*mvp*alpha*dx

elif version==2: #ALTERNATIVNA VERZIJA::::::::::: preferirana verzija
    term1=(1/mu0)*curl(mvp)*curl(alpha)*dx('air|coil') + \
    rel*curl(mvp)*curl(alpha)*dx('core') - (rot*grad(csp))*alpha*dx('core')
    term2= -1j/omega*rho*(rot*grad(csp))*(rot*grad(tau))*dx('core') + \
    (rot*grad(tau))*mvp*dx('core')
    term3=1*mvp*alpha*dx

elif version==3: #ALTERNATIVNA VERZIJA:::::kao version 2 ali zamjena: curlT*A => T*curlA
    term1=(1/mu0)*curl(mvp)*curl(alpha)*dx('air|coil') + \
    rel*curl(mvp)*curl(alpha)*dx('core') - csp*CF((1,0,0))*curl(alpha)*dx('core')
    term2= -1j/omega*rho*(rot*grad(csp))*(rot*grad(tau))*dx('core') + \
    tau*CF((1,0,0))*curl(mvp)*dx('core')
    term3=1*mvp*alpha*dx

elif version==4: #ALTERNATIVNA VERZIJA:::::::::::
    term1=-1j*omega*(1/mu0)*curl(mvp)*curl(alpha)*dx('air|coil') - \
    1j*omega* rel*curl(mvp)*curl(alpha)*dx('core') + \
    1j*omega*(rot*grad(csp))*alpha*dx('core')
    term2= rho*(rot*grad(csp))*(rot*grad(tau))*dx('core') + \
    1j*omega*(rot*grad(tau))*mvp*dx('core')
    term3=1e0*mvp*alpha*dx

a = BilinearForm(term1+term2+term3)
a.Assemble()

```

Izbor varijante nema vidljiv utjecaj na performanse simulacije, ali prva varijanta rezultira vremenski primitivnim skalarnim potencijalom, dok četvrta varijanta zahtjeva prilagodbu desne strane jednadžbe. U nastavku je prikazan kod za zadavanje desne strane jednadžbe ovisno o izabranoj varijanti.

```

f = LinearForm(feW)

Ts_air= 1e7* IfPos(z*z-0.01, (0,0,0), IfPos((x*x+y*y-0.01),CF((0,0,0.015)),(0,0,0)))
Ts_coil= 1e7*CF((0,0,0.5*(x*x+y*y)-0.005))

if version==4:
    f += (-1j*omega*Ts_coil*curl(alpha)) * dx("coil") - \
    1j*omega*Ts_air * curl(alpha) * dx("air|core")
else:
    f += Ts_coil * curl(alpha) * dx("coil") + Ts_air * curl(alpha) * dx("air|core")

f.Assemble()

```

Uzbudni strujni vektorski potencijal  $\vec{T}_s$  zadan kao vektorsko polje koje ima samo  $z$ -komponentu. Također,  $\vec{T}_s$  je potrebno definirati u cijeloj domeni kako bi se osigurala kontinuiranost njegove tangencijalne komponente, u ovom slučaju  $z$ -komponente. No, primjena operatora  $\nabla \times \vec{T}_s$  dobiva se vektorsko polje  $\vec{J}_s$  koje je različito od nule samo u poddomeni  $\Omega_s$ , tj. unutar coil. U

ovom primjeru, namot je cilindrični.

Nakon što su asemblirane matrice koeficijenata te vektor ulaznih podataka, preostaje riješiti matričnu jednadžbu. Vrijednosti stupnjeva slobode korištenih nepoznanica  $\vec{A}_h$  i  $T_h$  čuvaju se u objektu klase `GridFunction`.

## 2.3 Problem anizotropnosti

Izravno modeliranje laminirane feromagnetske jezgre otvorenoga tipa nije moguće, tj. nužna je homogenizacija značajki materijala jezgre. Nadomjesni materijal ima izrazito anizotropnu magnetsku permeabilnost, a posebno električnu provodnost. Upravo izražena anizotropnost električne provodnosti može uzrokovati fundamentalno pogrešno rješenje simulacije ako se koristi nestrukturirani mesh (koji je praktično jedina opcija u NGSolve). Objašnjenje na primjeru 2D problema navedeno je u nastavku, no isti problem je prisutan i u 3D slučaju.

### A formulacija i problem anizotropnosti

2D domena sastoji se od područja zraka i područja laminirane jezgre. Pobuda u vidu ukupnog magnetskog toka zadaje se putem Dirichleteovih rubnih uvjeta. Formulacija je smještena u fazorskoj domeni. Pretpostavlja se da je jezgra laminirana u  $x$ -smjeru pa nadomjesni homogenizirani materijal ima anizotropnu električnu provodnost  $\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$ . Magnetska indukcija računa se pomoću izraza  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , gdje je  $B$  okomit na 2D domenu, tj.  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ , a vrtložne struje računaju se kao  $\vec{J} = j\omega\sigma A$ . Iz Ampereove jednadžbe slijedi slaba formulacija.

Aproksimacija magnetskog vektorskog potencijala  $\vec{A}$  u prostoru je konačnih elemenata  $U_h^0$ , odnosno  $A_h \in U_h^0 \subset H(\text{curl})$ , gdje eksponent 0 označava red  $H(\text{curl})$  potprostora. Dakle, bazne funkcije prostora  $U_h^0$  su standardne bridne bazne funkcije najnižeg reda. Promotrimo situaciju u jednom proizvoljnom 2D konačnom elementu  $K$  unutar jezgre. Neka radi jednostavnosti bazne funkcije  $\alpha_i \in U_h^0$  vezane za konačni element  $K$  imaju indekse  $i = 1, \dots, m$ , gdje je  $m$  broj bridova tog konačnog elementa. Aproksimacija vektora magnetske indukcije  $\vec{B}$  u konačnom elementu  $K$  glasi

$$\vec{B} \approx B_h = \sum_{i=1}^m A_i \nabla \times \alpha_i \quad (2.13)$$

Indukcija (i tok) je u konačnom elementu unutar jezgre općenito različita od nule. Budući da je magnetski tok različit od nule unutar domene osiguran u jakom smislu, onda rješenje za  $A_h$  unutar elementa  $K$  u općem slučaju glasi

$$\sum_{i=1}^m A_i \nabla \times \alpha_i \neq 0 \quad (2.14)$$

S druge strane, aproksimacija vektora gustoće struje  $\vec{J}$  u konačnom elementu  $K$  glasi

$$\vec{J} \approx J_h = j\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \cdot \sum_{i=1}^m A_i \alpha_i = j\omega \sigma \sum_{i=1}^m A_i \alpha_{yi} \quad (2.15)$$

Iz prethodnog izraza očigledno je da je  $\vec{J} = 0$ , jer  $\vec{J}$  ima samo  $y$ -komponentu. Međutim, jednadžba kontinuiteta  $\nabla \cdot J = 0$  slijedi iz Ampereove jednadžbe pa je i ona osigurana samo u slabom smislu. Podsjećam da bazne funkcije u nekim slučajevima (trokut, pravokutnik) osiguravaju lokalno  $\nabla \cdot \alpha = 0$ , a u nekim slučajevima ne (npr. paralelogram), dok na granici među elementima ta jednakost općenito nije osigurana pa je moguć skok normalne komponente bazne funkcije upravo na bridu za koji je bazna funkcija definirana. U svakom slučaju, točno rješenje za  $A_h$  zadovoljava uvjetu

$$j\omega \sigma \sum_{i=1}^m A_i \alpha_{yi} = 0 \implies \sum_{i=1}^m A_i \alpha_i = A_{hx} \quad (2.16)$$

Dakle, unutar konačnog elementa  $K$ , a jednako tako i na području cijele homogenizirane jezgre, rješenje za  $A_h$  je vektorsko polje koje ima samo  $x$ -komponentu, jer  $y$ -komponenta iščezava.

### 2.3.1 Dokaz fundamentalne netočnosti A-formulacije

Argumentacija prikazana u nastavku teksta jednako vrijedi i za slučaj i  $\vec{A}, V$ -formulacije.

Uvjete 2.14 i 2.16 nije moguće istovremeno zadovoljiti u općem slučaju u prostoru  $U_h^0$ , i otud proizlazi spomenuti problem anizotropnosti. Naime, linearna kombinacija bridnih baznih funkcija  $\alpha \in U_h^0 \subset H(\text{curl})$  koja zadovoljava  $A_h = A_{hx}$  u općem slučaju je konzervativno vektorsko polje koje onda ne zadovoljava 2.14. Razlog za to proizlazi iz svojstava baznih funkcija iz  $U_h^0$ , s izuzetkom u slučaju specifičnih konačnih elemenata u području jezgre. U skladu s tim, problem se rješava korištenjem prostora  $U_h^1$  (kompletiranjem baze) ili korištenjem specifično strukturiranih konačnih elemenata.

Neka je  $E_\Omega = \{e_i\}$  skup svih bridova mreže konačnih elemenata, pri čemu je svaki  $e_i$  ravna linija. Bazna funkcija  $\alpha_i \in U_h^0$  vezana za  $e_i$  ima svojstvo da je u svakoj točki  $p \in e_j$  skalarni produkt  $\alpha_i \cdot l_i = 1/\bar{e}_i$ , gdje je  $\bar{e}_i$  duljina brida  $e_i$ , a jedinični vektor  $l_i$  tangenta brida  $e_i$ , jer za  $\alpha_i$  prema definiciji vrijedi da je  $\int_{e_i} \alpha_i \cdot l_i dx = 1$ . Za razliku od tangencijalne komponente, normalna komponenta  $\alpha_i \cdot n_i$ , gdje je  $n_i$  jedinični vektor normale na  $e_i$ , općenito nije konstantna u svakoj točki  $p \in e_i$  nego mijenja iznos, što ovisi o geometriji elementa  $K$ . Također, vrijedi da je  $\alpha_i \cdot l_j = 0$  u svakoj točki  $p \in e_j$ , za svaki  $i \neq j$ , gdje je jedinični vektor  $l_j$  tangenta  $j$ -tog brida  $e_j$ ,  $\alpha_i$  eventualno doprinosi normalnoj komponenti polja na  $e_j$ . Aproksimacija vektorskog polja  $A \approx A_h$  unutar  $K$  s  $m$  bridova ostvarena je u vidu linearne kombinacije  $A_h = \sum_{i=1}^m A_i \alpha_i$ , gdje se  $A_i$  definira kao  $A_i = \int_{e_i} A_h \cdot l_i dx$ . Budući da je  $\alpha_j \cdot l_i = 0$  za  $i \neq j$  te  $\alpha_i \cdot l_i = 1/\bar{e}_i$  za svaki  $i$ , krivuljni



integral linearne kombinacije duž  $e_i$  jednak je  $\int_{e_i} (\sum_{i=1}^m A_i \alpha_i) \cdot l_i dx = A_i$ , što je u skladu s definicijom za  $A_i$ . Dakle, budući da među vektorima linearne kombinacije  $A_h = \sum_{i=1}^m A_i \alpha_i$  jedino  $\alpha_i$  ima tangencijalnu komponentu različitu od nula na bridu  $e_i$ , pri čemu je ona konstantna, onda je i iznos tangencijalne komponente od  $A_h$  na  $e_i$  konstantan na  $e_i$ , tj.  $A_h \cdot l_i(p) = A_i / \bar{e}_i$ , za svaku točku  $p \in e_i$ . Znamo da je  $\alpha_i$  konstantan na  $e_i$  za svaki oblik elementa jer samo  $\alpha_i$  doprinosi tangencijalnoj komponenti od  $e_i$  a znamo da je bilo koji konstantni vektor (bilo kojeg smjera) definitivno u prostoru  $U_h^0$ .

U kontekstu zadovoljenja uvjeta 2.14 i 2.16, cilj je odrediti linearnu kombinaciju bridnih baznih funkcija  $\alpha_i$  tako da rezultatno vektorsko polje ima samo  $x$ -komponentu, tj.  $A_h = A_{hx} a_x$ , pri čemu bi vrijedilo  $\nabla \times (A_{hx} a_x) \neq 0$ . Da bi se unutar  $K$  postigao uvjet 2.16, jednakost  $A_h = A_{hx} a_x$  mora vrijediti i na svakom bridu  $e_i \in K$ , odnosno  $(A_h \cdot l_i) l_i + (A_h \cdot n_i) n_i = A_{hx} a_x$ . Prethodno je utvrđeno da je tangencijalna komponenta od  $A_h$  konstantna na  $e_i$ , tj. vektorska komponenta  $(A_h \cdot l_i) l_i = A_i l_i / \bar{e}_i$  je konstantan vektor u svakoj točki  $p \in e_i$ . Posljedično, normalna komponenta od  $A_h$ , tj. vektor  $(A_h \cdot n_i) n_i$  također mora biti konstantan u svakoj točki  $p \in e_i$  da bi vektor  $A_h$  imao samo  $x$ -komponentu, što u konačnici znači da je  $A_h = A_{hx} a_x$  konstantan vektor na  $e_i$ . Dakle, čim je  $l_{ix} \neq 0$ , vektor  $A_h = A_{hx} a_x$  će biti konstantan vektor na  $e_i$  zbog  $\alpha_j \cdot l_i = 0$  za  $i \neq j$  te  $\alpha_i \cdot l_i = 1 / \bar{e}_i$  za svaki  $i$ , pri čemu je  $\alpha_i \in U_h^0$ .

U općem slučaju, konačni element  $K \in \Omega_c$  orijentiran je u koordinatnom sustavu tako da je  $l_{ix} \neq 0$ ,  $l_{iy} \neq 0$  i  $l_{iz} \neq 0$  za svaki brid  $e_i \in K$ . Ako je  $l_{ix} \neq 0$ , koeficijent  $A_i$  jednak je  $A_i = A_{hx} l_{ix} \bar{e}_i$ , gdje je  $l_{ix}$   $x$ -komponenta od  $l_i$ . Budući da je  $\alpha_i$  okomit na susjedne bridove brida  $e_i$ , u općem slučaju  $\alpha_i$  nije kolinearan s  $l_i$  na  $e_i$  pa može biti da je  $A_i \alpha_i \neq A_{hx}$  na  $e_i$ , čak i kad je  $l_i = a_x$ . Vrijedi i obratno, tj. može biti da je  $A_i \alpha_i = A_{hx}$  na  $e_i$ , čak i kad je  $l_i \neq a_x$ . Na kraju, ako je  $l_{ix} = 0$ , automatski je  $A_i = 0$  što znači da  $A_h$  eventualno ima samo normalnu komponentu na  $e_i$ .

Ako za dva susjedna brida  $e_i$  i  $e_j$  vrijedi da je  $l_{ix} \neq 0$  i  $l_{jx} \neq 0$ , tada su  $A_{hx}(e_i)$  i  $A_{hx}(e_j)$  konstantni, ali vrijedi i da je  $A_{hx}(e_i) = A_{hx}(e_j)$  jer  $e_i$  i  $e_j$  imaju zajedničku točku. Skok u iznosu vektora  $A_{hx} a_x$  u zajedničkoj točki bridova  $e_i$  i  $e_j$  nije moguć jer je linearna kombinacija  $\sum_{i=1}^m A_i \alpha_i \in U_h^0 \subset H(\text{curl})$ . Ako svaki brid  $e_i$  elementa  $K$  ima  $l_{ix} \neq 0$  tada je  $A_h = A_{hx} a_x$  konstantan vektor jednakog iznosa na svim bridovima  $e_i \in K$ . Ako je  $K$  dvodimenzionalni konačni element, krivuljni integral po zatvorenoj krivulji daje

$$\oint_{\partial K} A_{hx} dx = 0 \quad (2.17)$$

gdje je  $\partial K = e_1 \cup \dots \cup e_m$ , pa iz Stokesovog teorema slijedi da je

$$\iint_K \nabla \times A_{hx} dx = 0 \quad (2.18)$$

Budući da je  $\nabla \times \alpha_i$  konstantan vektor unutar  $K$  (samo unutar tetraedra) za  $\alpha \in U_h^0$ , slijedi da je

$\nabla \times A_{hx} = 0$ , tj.  $A_{hx}$  je konzervativno polje, što je u kontradikciji s uvjetom 2.14.

U slučaju da je  $K$  trodimenzionalni element, njegove strane su 2D elementi pa se analognim postupkom dobiva da je  $\nabla \times A_{hx} = 0$  na svakoj strani elementa  $K$ , a time i na cijelom oplošju od  $K$ . Ponovno, prema Stokesovom teoremu plošni integral od  $\nabla \times A_{hx}$  po bilo kojem poprečnom presjeku elementa  $K$  jednak je nuli. Budući da je svaki  $\nabla \times \alpha_i$  konstantan vektor, slijedi da je  $\nabla \times A_{hx} = 0$  u svakoj točki  $p \in K$ , što je u kontradikciji s 2.14. Naime, bridne bazne funkcije  $\alpha$  konstruirane su korištenjem čvornih baznih funkcija prvog stupnja  $\lambda \in W_h^1 \subset H^1$  u kombinaciji s gradijentima istih funkcija  $\nabla \lambda \in \nabla W_h^1$ . Kako je  $\partial_{ab}^2 \lambda = 0$ , gdje su  $a, b = x, y, z$  (nije istina), slijedi da je  $\nabla \times (\nabla \times \alpha_i) = 0$ , što znači da je  $\nabla \times \alpha_i$  konstantan vektor za svaki  $\alpha_i$ .

Pretpostavimo da za jedan ili više bridova vrijedi da je  $l_{ix} = 0$ , onda je na njima  $A_i = 0$  pa vektor  $A_h$  eventualno ima samo normalnu komponentu na svakom od njih. Ako su pritom svi ostali bridovi  $e_j$  za koje je  $l_{jx} \neq 0$  međusobno spojeni, onda  $A_h = A_{hx}a_x$  mora biti konstantan vektor jednakog iznosa na svakom  $e_j$ . Kada bi  $A_h = A_{hx}a_x$  bio istog iznosa i na  $e_i$  (i svim susjednim bridovima s  $l_{ix} = 0$ ) krivuljni integral se ne bi promijenio, a imali bismo kao i ranije situaciju da je  $A_h = A_{hx}a_x$  konstantan vektor na cijelom  $\partial K$ , što znači da je krivuljni integral nula. Dakle, ako je za jedan ili više susjednih bridova  $l_{ix} = 0$ , opet je  $\nabla \times A_{hx} = 0$  u svakoj točki  $p \in K$ , što je u kontradikciji s 2.14.

Pretpostavimo sada da za više bridova  $e_i$  vrijedi da je  $l_{ix} = 0$ , onda je na njima opet  $A_i = 0$  pa vektor  $A_h$  eventualno ima samo normalnu komponentu na svakom od njih. Ako je konačni element tako konstruiran da svi bridovi  $e_j$  za koje je  $l_{jx} \neq 0$  nisu međusobno spojeni, onda vektor  $A_h = A_{hx}a_x$  iako konstantan, ne mora biti jednak na svakom  $e_j$ . U tom slučaju krivuljni integral nije nužno jednak nuli, tj. linearna kombinacija  $A_h = A_{hx}a_x$  nije nužno konzervativno polje. Primjer takvog elementa je trapez čije osnovice imaju  $l_{jx} = 0$ . Ako je mreža konačnih elemenata tako strukturirana da prethodno vrijedi za svaki konačni element  $K \in \Omega_c$  onda je u tom slučaju moguće zadovoljiti 2.14. Bitno je uočiti da je takvu situaciju moguće ostvariti samo u slučaju kvadrilateralnog, prizmatskog i heksaedarskog konačnog elementa, a nije ju moguće ostvariti u slučaju trokutnog, tetraedarskog i piramidalnog konačnog elementa.

Dakle, A formulacija s  $\alpha \in U_h^0$  ne može modelirati problem anizotropnosti, osim ako se koristi specifično strukturirana mreža konačnih elemenata u području anizotropnog materijala. Tako strukturirana mreža konačnih elemenata često nije opcija jer rezultira prekomjernim brojem konačnih elemenata. Isto vrijedi i za  $A, \varphi$ -formulaciju jer su  $\varphi$  već unutar prostora  $U_h^0$ . Alternativa je korištenje  $\alpha \in U_h^1$  čiju bazu čine funkcije  $\alpha^0 \in U_h^0$  i dodatne gradijentne bridne bazne funkcije  $\alpha^1$ . Linearnom kombinacijom  $\alpha^1$  i  $\alpha^0$  baznih funkcija ostaruje se  $A_h = A_{hx}a_x$  pri čemu je linearna kombinacija samo  $\alpha^0$  funkcija nekonzervativno polje. Budući da su  $\alpha^1$  gradijenti, onda će i cijela linearna kombinacija  $\alpha^0$  i  $\alpha^1$  baznih funkcija ostati nekozervativno polje pa je moguće ispuniti uvjet 2.14.

Mana korištenja višeg stupnja baznih funkcija je ta što broj stupnjeva slobode lako može biti

prekomjeran sa stajališta računalnih resursa, a to posebno vrijedi kod jezgri otvorenog tipa kakve se koriste u naponskim transformatorima velike snage. Takvi transformatori imaju izraženu vitkost, a dubinu prodiranja elektromagnetskih polja u njih je relativno mala pa mreža konačnih elemenata mora biti gusta kako bi oblik tatraedara na granici jezgra/zrak bio validan. Zatim, takvi transformatori su u pravilu višedijelni i stepeničasti, a ispravna diskretizacija takve geometrije zahtjeva gušću mrežu konačnih elemenata. Znatno bolja i fleksibilnija alternativa jest korištenje  $\vec{A}, T - \vec{A}$  formulacije (2.4)-(2.5) koja za modeliranje magnetske indukcije i vrložnih struja koristi međusobno neovisne potencijale, izbjegavajući time problem anizotropnosti pri korištenju baznih funkcija najnižeg stupnja.

### 2.3.2 Dodatni dokaz za trokutni element

U slučaju trokutnog elementa postoji dodatni dokaz o nemogućnosti simultanog zadovoljenja uvjeta 2.14 i 2.16. Linearna kombinacija baznih funkcija unutar  $K$  koja zadovoljava uvjet 2.16 rezultira vektorskim poljem  $A_{hx}$  koje je konzervativno, tj. vrijedi da je  $\nabla \times A_{hx} = 0$ . Dakle, ako vrijedi da je

$$A_1 \alpha_{1y} + A_2 \alpha_{2y} + A_3 \alpha_{3y} = 0 \quad (2.19)$$

onda također vrijedi da je

$$A_1 \nabla \times \alpha_{1y} + A_2 \nabla \times \alpha_{2y} + A_3 \nabla \times \alpha_{3y} = 0 \quad (2.20)$$

Budući da je  $\alpha_i = \alpha_{j,k} = \lambda_j \nabla \lambda_k - \lambda_k \nabla \lambda_j$ , vrijedi da je  $\nabla \times \alpha_{ix} = \nabla \times \alpha_{iy} = \nabla \lambda_j \times \nabla \lambda_k$ . Korištenjem zamjene  $\nabla \times \alpha_{ix} = \nabla \times \alpha_{iy}$ , prethodnu linearnu kombinaciju moguće je zapisati kao

$$A_1 \nabla \times \alpha_{1x} + A_2 \nabla \times \alpha_{2x} + A_3 \nabla \times \alpha_{3x} = 0 \quad (2.21)$$

Zbrajanjem linearnih kombinacija 2.20 i 2.21 dobiva se

$$A_1 \nabla \times \alpha_1 + A_2 \nabla \times \alpha_2 + A_3 \nabla \times \alpha_3 = 0 \quad (2.22)$$

$$\sum_{i=1}^3 A_i \nabla \times \alpha_i = 0 \quad (2.23)$$

$$\nabla \times A_{hx} = 0 \quad (2.24)$$

čime smo pokazali da je  $A_{hx}$  konzervativno vektorsko polje i kao što se vidi iz 2.23, ne može zadovoljiti uvjet 2.14. Međutim, uvjet 2.14 osiguran je u jakom smislu, putem nehomogenih Dirichleteovih rubnih uvjeta, a uvjet 2.16 u slabom smislu, slijedi da će rješenje za  $A_h$  ipak biti polje koje ima  $A_{hy} \neq 0$ . Posljedično, gustoća struje i gubitci neće biti nula, štoviše, gubitci

poprimaju značajne iznose.

## 2.4 Numerički primjer

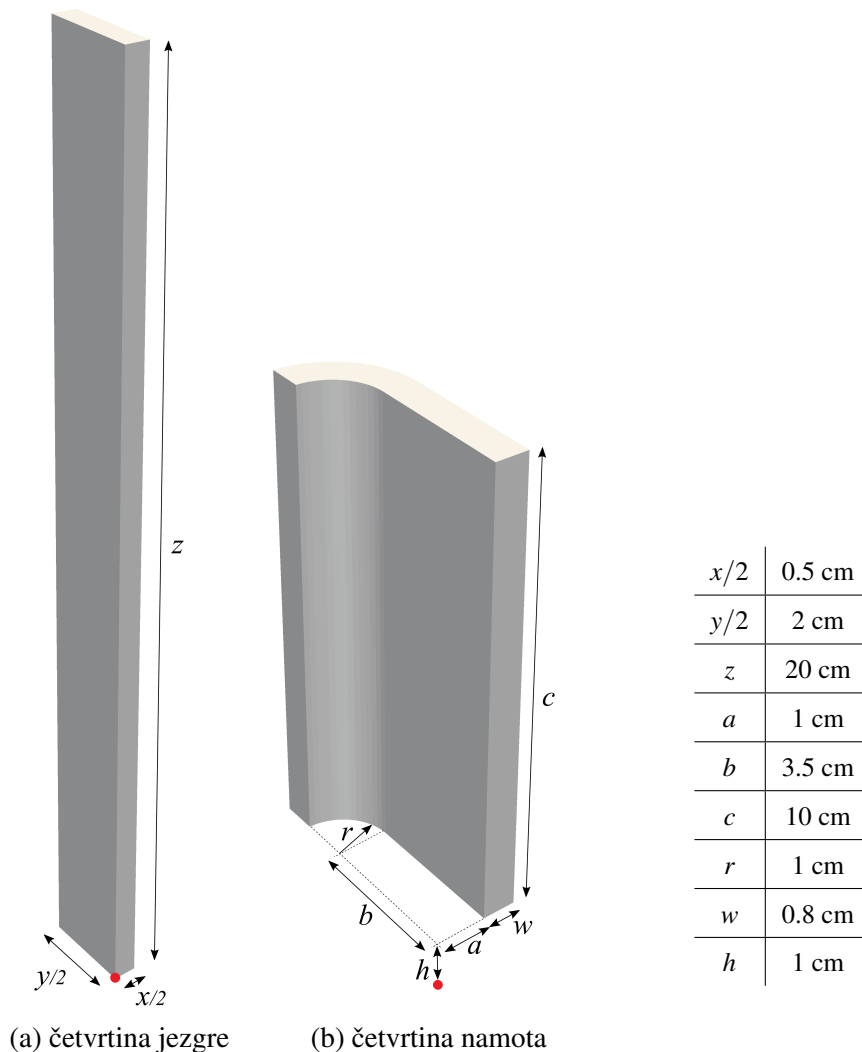
Na slici 2.2 prikazana je četvrtina CAD modela nad kojim će biti provedene simulacije. Model se sastoji od otvorene jezgre oblika kvadra, tj. I-tip jezgre, te namota tzv. *racetrack* oblika. Radi bolje preglednosti dimenzija na slici, 2.2a je odmaknuta od 2.2b, a stvarni položaj jezgre naznačen je crvenom referentnom točkom, tj. aksijalna os jezgre poklapa se s aksijalnom osi namota. Dakle, crvena točka na jezgri te crvena točka tik do namota predstavljaju istu točku. Prikazani model izveden je u stvarnosti, a njegov dizajn bio je diktiran mogućnostima dostupnog naponskog izvora te mjerne opreme. Unatoč malim dimenzijama jezgre, iznosi gubitaka su bili mjerljivi dostupnom mjernom opremom.

Stvarna jezgra sastoji se od 27 lamela orijentiranog feromagnetskog lima M140-35S, što znači da je debljina lamela  $d = 0,35$  mm, a konačni faktor punjenja jezgre iznosi  $k_p = 0,945$ . Prema dostupnim podacima o limu M140-35S, nazivna električna provodnost iznosi  $\kappa = 2 \cdot 10^6$  S/m, a HB-krivulja je nelinearna. Stvarni uzbudni namot ima ukupno 447 zavoja bakrene žice promjera  $\phi = 1,2$  mm namotane u šest slojeva na kostur od ABS plastike.

U nastavku su provedene linearne simulacije korištenjem različitih formulacija kako bi se utvrdila točnost razvijene  $A, T$  formulacije. Kao što je dokazano u sekciji ??, nije moguće koristiti  $A$ -formulaciju ili  $A, V$ -formulaciju za simuliranje problema vrtložnih struja u anizotropnom homogenom mediju, ako se koriste standardne bazne funkcije najnižeg stupnja u kombinaciji s tetraedarskom mrežom konačnih elemenata. Hibridna mreža, kombinacija strukturirane i nestrukturirane mreže, zahtjevnija je za generiranje i često nestabilna pa je stoga tetraedarska mreža favorizirana u praksi. Osim toga, NGSolve ne nudi opciju generiranja hibridne mreže konačnih elemenata tako da je tetraedarska mreža jedina opcija. Prema tome, da bi usporedba simulacija bila moguća, nužno je kroštenje baznih funkcija višeg stupnja kod  $A$ -formulaciju ili  $A, V$ -formulacije. Iako razvijena  $A, T$ -formulacija nema problem s anizotropnim homogenim materijalima, u usporedbu simulacija su uključene i dvije dodatne varijante  $A, T$ -formulacije bazirane na hierarhijskim baznim funkcijama višeg stupnja.

### 2.4.1 Usporedba rezultata simulacija

Simulacije u nastavku provedene su za srednju vrijednost mag. indukcije  $B_{avg} = 0,75$  T, pri frekvenciji  $f = 50$  Hz. Usporedba je provedena za slučaj niske vrijednosti magnetske reluktivnosti jezgre  $\nu = 30$  m/H te za slučaj bitno više vrijednosti  $\nu = 160$  m/H. Simuliranjem ta dva granična slučaja ispitane su dvije bitno različite radne točke feromagnetskog materijala, čime se pokriva velik raspon dubine prodiranja. Za oba slučaja su dobiveni slični zaključci, tj. utvrđena je valjanost  $A, T$ -formulacije te dominantnost u odnosu na alternativne formulacije u klasi



**Slika 2.2:** Prikaz četvrtine modela s naznačenim dimenzijama. Plohe simetrije su paralelne  $xz$  i  $yz$  ravninama. Aksijalna os jezgre i aksijalna os namota leže na istom pravcu, pri čemu je dno jezgre  $h = 1$  cm ispod dna namota, kao što je naznačeno referentnom crvenom točkom. Pretpostavljeni smjer lameliranja jezgre je u smjeru dimenzije  $x$ .

problema s otvorenim jezgrom izražene vitkosti.

## 2.4.2 Materijal niske magnetske reluktivnosti

U nastavku su prikazane tablice simulacijskih rezultata u ovisnosti o parametrima mreže konačnih elemenata. Simulacije su provedene uz vrijednost magnetske reluktivnosti  $\nu = 30$  m/H, što odgovara magnetskoj permeabilnosti od oko  $\mu = 26000\mu_0$ . Takva vrijednost mag. reluktivnosti uzrokuje dubinu prodiranja manju od debljine lamele čak i pri  $f = 50$  Hz, što onda zahtjeva gušći mesh.

**A,T-formulacija**

Prikazane su tri tablice rezultata simulacija u ovisnosti o gustoći mesha, odnosno broju stupnjeva slobode. Vrijednosti iz stupca DOF dobivene su primjenom naredbe `sum(fes.FreeDOF())`. U tablici 2.1, tablici 2.2 i tablici 2.3 prikazani su izračunati gubitci korištenjem triju varijanti  $\vec{A}, T$ -formulacije. Za varijantu A0T1, potencijal  $\vec{A}$  aproksimiran je bridnim baznim funkcijama najnižeg stupnja (nulti stupanj u NGSolve), a potencijal  $T$  aproksimiran je čvornim baznim funkcijama najnižeg stupnja, tj. prvog stupnja. Kod varijante A0T2, potencijal  $\vec{A}$  je ponovno aproksimiran bridnim baznim funkcijama najnižeg stupnja, dok je potencijal  $T$  aproksimiran čvornim baznim funkcijama drugog stupnja. U varijanti A2T2, i potencijal  $\vec{A}$  i potencijal  $T$  aproksimirani su baznim funkcijama drugog stupnja. Bitno je naglasiti i da je u slučaju tetraedarskog mesha (jedina ralna opcija u NGSolve), A0T1 varijanti ekvivalentna varijanta A1T1, dok je A0T2 varijanti ekvivalentna varijanta A1T2, jer na tetraedarskom meshu prvi stupanj hierarhijskih baznih funkcija čine gradijentne funkcije koje kao takve nemaju efekt na modeliranje magnetske indukcije.

Kao što vidimo iz stupca DOF, s porastom broja stupnjeva slobode gubitci brzo konvergiraju

Formulacija	V-maxh	S-maxh	DOF	$P_N$ (mW)	$P_W$ (mW)	$P_{NW}$ (mW)
A0T1	0,003	0,0025	28119	14,5	40,2	54,7
A0T1	0,0025	0,0022	30755	14,6	39,9	54,5
A0T1	0,0025	0,002	43117	16,0	28,9	44,8
A0T1	0,002	0,002	44523	16,1	30,4	46,4
A0T1	0,0025	0,0018	50768	16,0	29,1	45,1
A0T1	0,002	0,0015	81234	16,7	29,4	46,1
A0T1	0,0015	0,001	143495	17,0	29,3	46,3
A0T1	0,001	0,001	154818	17,1	28,9	46,0
A0T1	0,001	0,0008	195997	17,2	28,7	46,0

**Tablica 2.1:** Gubitci zbog vrtložnih struja u ovisnosti o gustoći mesha za A0T1 formulaciju, pri mag. reluktivnosti  $\nu = 30$  H/m.  $P_N$  predstavlja gubitke zbog uskih vrtložnih struja,  $P_W$  zbog širokih vrtložnih struja, a  $P_{NW}$  njihov zbroj. Parametar V-maxh predstavlja  $h_{max}$  faktor unutar jezgre, a S-maxh  $h_{max}$  na plohi jezgre koja je najbliža namotu, pri čemu  $h_{max}$  parametar predstavlja maksimalnu veličinu konačnog elementa. Parametar DOF predstavlja ukupni broj stupnjeva slobode.

prema određenim stabilnim vrijednostima za sve tri varijante. Vrijednosti u stupcima V-maxh i S-maxh donekle daju uvid u razdiobu gustoće elemenata u meshu, i vidimo da za dovoljno gusti mesh razdioba gustoće mesha nema značajan utjecaj na iznose gubitaka. Također, jednaka kombinacija parametra V-maxh i S-maxh daje identičan mesh, neovisno o korištenoj formulaciji pa pa možemo uočiti koliko brzo raste broj DOF s porastom stupnja baznih funkcija.

Formulacija	V-maxh	S-maxh	DOF	$P_N$ (mW)	$P_W$ (mW)	$P_{NW}$ (mW)
A0T2	0,004	0,003	27051	14,0	49,2	63,2
A0T2	0,003	0,003	28301	14,6	50,2	64,8
A0T2	0,003	0,0025	33207	14,6	48,7	63,3
A0T2	0,003	0,002	55731	16,3	35,9	52,2
A0T2	0,002	0,002	58173	16,1	35,8	51,9
A0T2	0,002	0,0015	108313	16,8	33,8	50,6
A0T2	0,0015	0,0015	112511	16,8	33,6	50,4
A0T2	0,0015	0,001	207652	17,1	33,5	50,5
A0T2	0,001	0,001	221641	17,0	33,0	50,1

**Tablica 2.2:** Gubitci zbog vrtložnih struja u ovisnosti o gustoći mesha za A0T2 formulaciju, pri mag. reluktivnosti  $\nu = 30$  H/m.  $P_N$  predstavlja gubitke zbog uskih vrtložnih struja,  $P_W$  zbog širokih vrtložnih struja, a  $P_{NW}$  njihov zbroj. Parametar V-maxh predstavlja  $h_{max}$  faktor unutar jezgre, a S-maxh  $h_{max}$  na plohi jezgre koja je najbliža namotu, pri čemu  $h_{max}$  parametar predstavlja maksimalnu veličinu konačnog elementa. Parametar DOF predstavlja ukupni broj stupnjeva slobode.

Iako su parametri zadaće identični, vrijednosti prema kojima gubitci konvergiraju nisu jednake za sve tri varijante. Kada su u pitanju gubitci  $P_N$ , varijanta A2T2 je najbliža  $P_N$  asimptoti, dok

Formulacija	V-maxh	S-maxh	DOF	$P_N$ (mW)	$P_W$ (mW)	$P_{NW}$ (mW)
A2T2	0,004	0,004	30338	16,2	31,2	47,4
A2T2	0,004	0,003	47154	16,4	30,9	47,2
A2T2	0,003	0,003	50462	16,6	32,4	48,9
A2T2	0,0030	0,0025	63880	16,6	31,9	48,5
A2T2	0,0025	0,0025	67085	16,6	31,6	48,1
A2T2	0,0028	0,0022	72175	16,6	31,8	48,4
A2T2	0,0030	0,0020	140760	17,7	30,4	48,1
A2T2	0,0025	0,0020	143194	17,7	30,3	47,9
A2T2	0,0020	0,0020	149286	17,7	30,3	48,0

**Tablica 2.3:** Gubitci zbog vrtložnih struja u ovisnosti o gustoći mesha za A2T2 formulaciju, pri mag. reluktivnosti  $\nu = 30$  H/m.  $P_N$  predstavlja gubitke zbog uskih vrtložnih struja,  $P_W$  zbog širokih vrtložnih struja, a  $P_{NW}$  njihov zbroj. Parametar V-maxh predstavlja  $h_{max}$  faktor unutar jezgre, a S-maxh  $h_{max}$  na plohi jezgre koja je najbliža namotu, pri čemu  $h_{max}$  parametar predstavlja maksimalnu veličinu konačnog elementa. Parametar DOF predstavlja ukupni broj stupnjeva slobode.

su varijante A0T1 i A0T2 podjednako daleko, što je i očekivano budući da  $P_N$  gubitci upravo ovise o magnetskoj indukciji, a koja se bolje modelira drugim stupnjem  $\vec{A}$  potencijala. Što

se tiče  $P_W$  gubitaka, vidimo da sve tri varijante konvergiraju prema  $P_W$  asimptoti kojoj je pak najbliža A0T1 varijanta, pri čemu varijanta A0T2 najviše odudara od asimptote. Ovaj rezultat sugerira da je za izračun  $P_W$  gubitaka, h-adaptivnost efikasnija u odnosu na p-adaptivnost što onda daje prednost A0T1 varijanti ispred druge dvije. Iako rezultati potvrđuju validnost sve tri varijante, čini se da varijanta A0T2 najsporije konvergira ka asimptotama. Budući da A0T2 u konačnici modelira  $\vec{B}$  polje kao po dijelovima konstantno, isprekidano polje, a  $\vec{J}$  polje kao kontinuirano, numerička pogreška dobivena iz jednadžbe koja kombinira takva dva polja donekle je očekivana. S druge strane, A0T1 varijanta i A2T2 varijanta kombiniraju polja jednake glatkoće pa nemaju navedeni problem.

## A formulacija

U ovoj sekciji su prikazane dvije tablice rezultata simulacija u ovisnosti o gustoći mesha (V-maxh, S-maxh), odnosno broju stupnjeva slobode DOF. U tablici 2.4 i tablici 2.5 prikazani su izračunati gubici korištenjem dviju varijanti  $\vec{A}$ -formulacije. Za varijantu A1, potencijal  $\vec{A}$  aproksimiran je bridnim baznim funkcijama prvog stupnja, a za varijantu A2 bridnim baznim funkcijama drugog stupnja. Kao što je dokazano u sekciji 2.3, korištenjem bridnih baznih funkcija najnižeg stupnja (nulti stupanj u NGSolve), odnosno varijante A0, dobivaju se fundamentalno pogrešni rezultati.

U slučaju obje varijante, A1 i A2, uočavamo da s porastom gustoće mesha, odnosno s porastom DOF, vrijednosti gubitaka konvergiraju. Vidimo da varijanta A2, za slučaj gubitaka  $P_N$

Formulacija	V-maxh	S-maxh	DOF	$P_N$ (mW)	$P_W$ (mW)	$P_{NW}$ (mW)
A1	0,004	0,003	26062	14,0	47,3	61,3
A1	0,003	0,003	27499	14,7	47,4	62,1
A1	0,003	0,0025	32075	14,7	46,3	61,0
A1	0,003	0,002	53618	15,8	34,7	50,5
A1	0,002	0,002	56365	15,9	34,8	50,7
A1	0,002	0,0015	105789	16,4	33,9	50,3
A1	0,0015	0,0015	109582	16,4	33,0	49,5

**Tablica 2.4:** Gubici zbog vrtložnih struja u ovisnosti o gustoći mesha za A1 formulaciju, pri mag. reluktivnosti  $\nu = 30$  H/m.  $P_N$  predstavlja gubitke zbog uskih vrtložnih struja,  $P_W$  zbog širokih vrtložnih struja, a  $P_{NW}$  njihov zbroj. Parametar V-maxh predstavlja  $h_{max}$  faktor unutar jezgre, a S-maxh  $h_{max}$  na plohi jezgre koja je najbliža namotu, pri čemu  $h_{max}$  parametar predstavlja maksimalnu veličinu konačnog elementa. Parametar DOF predstavlja ukupni broj stupnjeva slobode.

konvergira prema istoj asimptoti  $P_N = 17,7$  mW, kao i varijanta A2T2, dok je varijanta A1 čak i sporija od varijanti A0T1 i A0T2. Što se tiče gubitaka  $P_W$ , varijanta A2 konvergira prema istoj



Formulacija	V-maxh	S-maxh	DOF	$P_N$ (mW)	$P_W$ (mW)	$P_{NW}$ (mW)
A2	0,004	0,004	28009	16,2	31,0	47,2
A2	0,004	0,003	42961	16,4	30,6	47,0
A2	0,003	0,003	46111	16,5	31,2	47,7
A2	0,0030	0,0025	57799	16,6	30,8	47,4
A2	0,0025	0,0025	60422	16,6	30,5	47,1
A2	0,0028	0,0022	65035	16,6	30,7	47,3
A2	0,0030	0,0020	125396	17,7	28,9	46,6
A2	0,0025	0,0020	127609	17,6	28,8	46,4
A2	0,0020	0,0020	133309	17,7	28,8	46,4

**Tablica 2.5:** Gubitci zbog vrtložnih struja u ovisnosti o gustoći mesha za A2 formulaciju, pri mag. reluktivnosti  $\nu = 30$  H/m.  $P_N$  predstavlja gubitke zbog uskih vrtložnih struja,  $P_W$  zbog širokih vrtložnih struja, a  $P_{NW}$  njihov zbroj. Parametar V-maxh predstavlja  $h_{max}$  faktor unutar jezgre, a S-maxh  $h_{max}$  na plohi jezgre koja je najbliža namotu, pri čemu  $h_{max}$  parametar predstavlja maksimalnu veličinu konačnog elementa. Parametar DOF predstavlja ukupni broj stupnjeva slobode.

vrijednosti kao i varijanta A0T1, dok se varijanta A1 ponaša kao varijanta A0T2.

Zahvaljujući podudarnosti rezultata  $\vec{A}, T$ -formulacije i dobro poznate  $\vec{A}$ -formulacije, možemo zaključiti da nova  $\vec{A}, T$ -formulacija zaista i teorijski i numerički ispravna, tj. daje točne rezultate. Što se tiče performansi, A0T1 formulacija je općenito ekonomičnija od A2 formulacije sa stajališta broja DOF jer jezgra otvorenog tipa u praksi ima vitku i stepeničastu geometriju pa ispravna diskretizacija zahtjeva gušći mesh.

## AV-formulacija

Ova sekcija također prikazuje dvije tablice rezultata simulacija u ovisnosti o gustoći mesha, odnosno broju stupnjeva slobode DOF. U tablici 2.4 i tablici 2.5 prikazani su izračunati gubitci korištenjem dviju varijanti  $\vec{A}, V$ -formulacije. Za varijantu A0V2, potencijal  $\vec{A}$  aproksimiran je bridnim baznim funkcijama najnižeg stupnja (nulti stupanj u NGSolve), a potencijal  $V$  čvornim baznim funkcijama drugog stupnja. Kod tetraedarskog mesha kakav ovdje koristimo, A0V2 varijanta ekvivalentna je varijanti A1V1, a također je ekvivalentna i varijanti A1V2, u smislu rezultata simulacije, no varijanta A0V2 ima najmanji DOF pa je ekonomičnija. S druge strane, za varijantu A2V1, potencijal  $\vec{A}$  aproksimiran je bridnim baznim funkcijama drugog stupnja, a potencijal  $V$  čvornim baznim funkcijama prvog stupnja. U slučaju tetraedarskog mesha, A2V1 varijanti je ekvivalentna varijanta A2V2 u smislu rezultata gubitaka, pri čemu je A2V1 očigledno ekonomičnija. Kao što je dokazano u sekciji 2.3, korištenjem bridnih baznih funkcija najnižeg stupnja (nulti stupanj u NGSolve), te čvornih baznih funkcija prvog stupnja, odnosno

Formulacija	V-maxh	S-maxh	DOF	$P_N$ (mW)	$P_W$ (mW)	$P_{NW}$ (mW)
A0V2	0,004	0,003	27345	14,0	50,0	64,0
A0V2	0,003	0,003	30040	14,8	49,5	64,4
A0V2	0,003	0,0025	34913	14,8	48,8	63,6
A0V2	0,003	0,002	56513	15,9	36,9	52,8
A0V2	0,002	0,002	62365	16,0	36,5	52,5
A0V2	0,002	0,0015	112636	16,4	35,7	52,2
A0V2	0,0015	0,0015	118382	16,5	35,1	51,5
A0V2	0,0015	0,001	212683	16,7	35,5	52,1
A0V2	0,001	0,001	239502	16,6	35,2	51,8

**Tablica 2.6:** Gubitci zbog vrtložnih struja u ovisnosti o gustoći mesha za A0V2 formulaciju, pri mag. reluktivnosti  $\nu = 30$  H/m.  $P_N$  predstavlja gubitke zbog uskih vrtložnih struja,  $P_W$  zbog širokih vrtložnih struja, a  $P_{NW}$  njihov zbroj. Parametar V-maxh predstavlja  $h_{max}$  faktor unutar jezgre, a S-maxh  $h_{max}$  na plohi jezgre koja je najbliža namotu, pri čemu  $h_{max}$  parametar predstavlja maksimalnu veličinu konačnog elementa. Parametar DOF predstavlja ukupni broj stupnjeva slobode.

Formulacija	V-maxh	S-maxh	DOF	$P_N$ (mW)	$P_W$ (mW)	$P_{NW}$ (mW)
A2V1	0,004	0,004	30348	16,1	33,5	49,6
A2V1	0,004	0,003	44155	16,4	32,3	48,7
A2V1	0,003	0,003	51350	16,6	32,9	49,5
A2V1	0,0030	0,0025	63504	16,6	32,6	49,2
A2V1	0,0025	0,0025	64874	16,6	32,3	48,9
A2V1	0,0028	0,0022	70420	16,6	32,6	49,2
A2V1	0,0030	0,0020	129542	17,7	30,7	48,4
A2V1	0,0025	0,0020	133122	17,6	30,4	48,1
A2V1	0,0020	0,0020	148063	17,7	30,3	48,0

**Tablica 2.7:** Gubitci zbog vrtložnih struja u ovisnosti o gustoći mesha za A2V1 formulaciju, pri mag. reluktivnosti  $\nu = 30$  H/m.  $P_N$  predstavlja gubitke zbog uskih vrtložnih struja,  $P_W$  zbog širokih vrtložnih struja, a  $P_{NW}$  njihov zbroj. Parametar V-maxh predstavlja  $h_{max}$  faktor unutar jezgre, a S-maxh  $h_{max}$  na plohi jezgre koja je najbliža namotu, pri čemu  $h_{max}$  parametar predstavlja maksimalnu veličinu konačnog elementa. Parametar DOF predstavlja ukupni broj stupnjeva slobode.

varijante A0V1, dobivaju se fundamentalno pogrešni rezultati.

Usporedbom asimptote gubitaka vidimo slaganje s rezultatima prethodni formulacija, što dodatno potvrđuje točnost razvijene  $\vec{A}, T$ -formulacije. Ipak, zanimljivo je i ovdje uočiti numeričku pogrešku formulacije sa bridnim funkcijama nultog stupnja te čvornim funkcijama drugog stup-

nja, kao što se vidi u tablici 2.6. Ovakvi rezultati su donekle i očekivani s numeričkog stajališta balansiranja potencijala različitog stupnja baznih funkcija unutar iste jednadžbe.

### 2.4.3 Materijal visoke magnetske reluktivnosti

U ovoj podsekciji ponovno su prikazane tablice simulacijskih rezultata u ovisnosti o parametrima mreže konačnih elemenata. Računalne simulacije provedene su za vrijednost magnetske reluktivnosti  $\nu = 160$  m/H, što odgovara magnetskoj permeabilnosti od oko  $\mu = 5000\mu_0$ . Takva vrijednost mag. reluktivnosti uzrokuje dubinu prodiranja veću od debljine lamele pri  $f = 50$  Hz, što relaksira zahtjeve na gustoću mesha i omogućuje bržu kovergenciju rezultata simulacije prema točnom rješenju s obzirom na broj stupnjeva slobode, tj. broj DOF. Računalne simulacije i u ovom slučaju daju više manje slične rezultate pa su i zaključci slični onima iz prethodne sekcije (za slučaj  $\nu = 30$  m/H). Prema tome, neću ponovno analizirati pojedinačne formulacije nego ću dati ukupni zaključak.

Najprije, usporedba rezultata simulacija  $\vec{A}, T$ -formulacije pokazuje odlično slaganje s rezultatima dobivenim pomoću dobro poznatih  $\vec{A}$ -formulacije i  $\vec{A}, V$ -formulacije. Pritom je potrebno napomenuti da varijante s najvećim razlikama u stupnjevima baznih funkcija kombiniranih potencijala, a to su varijante A0T2 i A0V2, pokazuju inherentnu numeričku pogrešku u smislu precjenjivanja asimptote rješenja za nekoliko postotaka, za oba slučaja magnetske reluktivnosti.

Formulacija	V-maxh	S-maxh	DOF	$P_N$ (mW)	$P_W$ (mW)	$P_{NW}$ (mW)
A0T1	0,003	0,0025	28119	12,7	60,6	73,3
A0T1	0,0025	0,0022	30755	12,7	60,5	73,2
A0T1	0,0025	0,002	43117	12,9	57,6	70,5
A0T1	0,002	0,002	44523	12,9	59,2	72,1
A0T1	0,0025	0,0018	50768	12,9	58,4	71,3
A0T1	0,002	0,0015	81234	12,9	59,7	72,6
A0T1	0,0015	0,0010	143495	13,0	60,6	73,6
A0T1	0,001	0,001	154818	13,0	60,4	73,5
A0T1	0,001	0,0008	195997	13,0	60,7	73,7

**Tablica 2.8:** Gubitci zbog vrtložnih struja u ovisnosti o gustoći mesha za A0T1 formulaciju, pri mag. reluktivnosti  $\nu = 30$  H/m.  $P_N$  predstavlja gubitke zbog uskih vrtložnih struja,  $P_W$  zbog širokih vrtložnih struja, a  $P_{NW}$  njihov zbroj. Parametar V-maxh predstavlja  $h_{max}$  faktor unutar jezgre, a S-maxh  $h_{max}$  na plohi jezgre koja je najbliža namotu, pri čemu  $h_{max}$  parametar predstavlja maksimalnu veličinu konačnog elementa. Parametar DOF predstavlja ukupni broj stupnjeva slobode.

Formulacija	V-maxh	S-maxh	DOF	$P_N$ (mW)	$P_W$ (mW)	$P_{NW}$ (mW)
A0T2	0,004	0,003	27051	12,6	66,9	79,6
A0T2	0,003	0,003	28301	12,6	69,6	82,2
A0T2	0,003	0,0025	33207	12,7	69,5	82,2
A0T2	0,003	0,002	55731	12,9	63,6	76,5
A0T2	0,002	0,002	58173	12,9	63,3	76,2
A0T2	0,002	0,0015	108313	13,0	62,6	75,6
A0T2	0,0015	0,0015	112511	13,0	62,4	75,4
A0T2	0,0015	0,001	207652	13,0	63,6	76,6
A0T2	0,001	0,001	221641	13,0	63,2	76,2

**Tablica 2.9:** Gubitci zbog vrtložnih struja u ovisnosti o gustoći mesha za A0T2 formulaciju, pri mag. reluktivnosti  $\nu = 160$  H/m.  $P_N$  predstavlja gubitke zbog uskih vrtložnih struja,  $P_W$  zbog širokih vrtložnih struja, a  $P_{NW}$  njihov zbroj. Parametar V-maxh predstavlja  $h_{max}$  faktor unutar jezgre, a S-maxh  $h_{max}$  na plohi jezgre koja je najbliža namotu, pri čemu  $h_{max}$  parametar predstavlja maksimalnu veličinu konačnog elementa. Parametar DOF predstavlja ukupni broj stupnjeva slobode.

Formulacija	V-maxh	S-maxh	DOF	$P_N$ (mW)	$P_W$ (mW)	$P_{NW}$ (mW)
A2T2	0,004	0,004	30338	13,0	60,3	73,3
A2T2	0,004	0,003	47154	13,1	60,7	73,7
A2T2	0,003	0,003	50462	13,0	61,5	74,5
A2T2	0,0030	0,0025	63880	13,1	61,4	74,4
A2T2	0,0025	0,0025	67085	13,0	61,0	73,9
A2T2	0,0028	0,0022	72175	13,1	61,4	74,4
A2T2	0,0030	0,0020	140760	13,1	61,9	75,1
A2T2	0,0025	0,0020	143194	13,1	61,6	74,7
A2T2	0,0020	0,0020	149286	13,1	61,4	74,5

**Tablica 2.10:** Gubitci zbog vrtložnih struja u ovisnosti o gustoći mesha za A2T2 formulaciju, pri mag. reluktivnosti  $\nu = 160$  H/m.  $P_N$  predstavlja gubitke zbog uskih vrtložnih struja,  $P_W$  zbog širokih vrtložnih struja, a  $P_{NW}$  njihov zbroj. Parametar V-maxh predstavlja  $h_{max}$  faktor unutar jezgre, a S-maxh  $h_{max}$  na plohi jezgre koja je najbliža namotu, pri čemu  $h_{max}$  parametar predstavlja maksimalnu veličinu konačnog elementa. Parametar DOF predstavlja ukupni broj stupnjeva slobode.

Formulacija	V-maxh	S-maxh	DOF	$P_N$ (mW)	$P_W$ (mW)	$P_{NW}$ (mW)
A1	0,004	0,003	26062	12,6	62,6	75,2
A1	0,003	0,003	27499	12,8	65,1	77,9
A1	0,003	0,0025	32075	12,7	64,7	77,4
A1	0,003	0,002	53618	12,9	60,2	73,1
A1	0,002	0,002	56365	12,9	60,0	73,0
A1	0,002	0,0015	105789	13,0	59,4	72,4
A1	0,0015	0,0015	109582	13,1	59,3	72,4
A1	0,0015	0,001	200648	13,0	60,4	73,4

**Tablica 2.11:** Gubitci zbog vrtložnih struja u ovisnosti o gustoći mesha za A1 formulaciju, pri mag. reluktivnosti  $\nu = 160$  H/m.  $P_N$  predstavlja gubitke zbog uskih vrtložnih struja,  $P_W$  zbog širokih vrtložnih struja, a  $P_{NW}$  njihov zbroj. Parametar V-maxh predstavlja  $h_{max}$  faktor unutar jezgre, a S-maxh  $h_{max}$  na plohi jezgre koja je najbliža namotu, pri čemu  $h_{max}$  parametar predstavlja maksimalnu veličinu konačnog elementa. Parametar DOF predstavlja ukupni broj stupnjeva slobode.

Formulacija	V-maxh	S-maxh	DOF	$P_N$ (mW)	$P_W$ (mW)	$P_{NW}$ (mW)
A2	0,004	0,004	28009	13,0	56,4	69,5
A2	0,004	0,003	42961	13,1	56,9	70,0
A2	0,003	0,003	46111	13,0	57,5	70,5
A2	0,0030	0,0025	57799	13,1	57,3	70,4
A2	0,0025	0,0025	60422	13,0	57,0	70,0
A2	0,0028	0,0022	65035	13,1	57,5	70,6
A2	0,0030	0,0020	125396	13,1	58,3	71,4
A2	0,0025	0,0020	127609	13,1	57,9	71,0
A2	0,0020	0,0020	133309	13,1	57,8	70,9

**Tablica 2.12:** Gubitci zbog vrtložnih struja u ovisnosti o gustoći mesha za A2 formulaciju, pri mag. reluktivnosti  $\nu = 160$  H/m.  $P_N$  predstavlja gubitke zbog uskih vrtložnih struja,  $P_W$  zbog širokih vrtložnih struja, a  $P_{NW}$  njihov zbroj. Parametar V-maxh predstavlja  $h_{max}$  faktor unutar jezgre, a S-maxh  $h_{max}$  na plohi jezgre koja je najbliža namotu, pri čemu  $h_{max}$  parametar predstavlja maksimalnu veličinu konačnog elementa. Parametar DOF predstavlja ukupni broj stupnjeva slobode.

Formulacija	V-maxh	S-maxh	DOF	$P_N$ (mW)	$P_W$ (mW)	$P_{NW}$ (mW)
A0V2	0,004	0,003	27345	12,6	66,4	79,0
A0V2	0,003	0,003	30040	12,8	69,0	81,8
A0V2	0,003	0,0025	34913	12,7	68,1	80,7
A0V2	0,003	0,002	56513	12,9	63,8	76,7
A0V2	0,002	0,002	62365	12,9	63,1	76,0
A0V2	0,002	0,0015	112636	13,0	62,8	75,8
A0V2	0,0015	0,0015	118382	13,0	62,7	75,7
A0V2	0,0015	0,001	212683	13,0	63,7	76,7
A0V2	0,001	0,001	239502	13,0	63,4	76,4

**Tablica 2.13:** Gubitci zbog vrtložnih struja u ovisnosti o gustoći mesha za A0V2 formulaciju, pri mag. reluktivnosti  $\nu = 160$  H/m.  $P_N$  predstavlja gubitke zbog uskih vrtložnih struja,  $P_W$  zbog širokih vrtložnih struja, a  $P_{NW}$  njihov zbroj. Parametar V-maxh predstavlja  $h_{max}$  faktor unutar jezgre, a S-maxh  $h_{max}$  na plohi jezgre koja je najbliža namotu, pri čemu  $h_{max}$  parametar predstavlja maksimalnu veličinu konačnog elementa. Parametar DOF predstavlja ukupni broj stupnjeva slobode.

Formulacija	V-maxh	S-maxh	DOF	$P_N$ (mW)	$P_W$ (mW)	$P_{NW}$ (mW)
A2V1	0,004	0,004	30348	13,0	60,1	73,2
A2V1	0,004	0,003	44155	13,1	60,1	73,2
A2V1	0,003	0,003	51350	13,0	60,9	73,9
A2V1	0,0030	0,0025	63504	13,1	60,7	73,8
A2V1	0,0025	0,0025	64874	13,0	60,3	73,3
A2V1	0,0028	0,0022	70420	13,1	60,9	74,0
A2V1	0,0030	0,0020	129542	13,1	61,7	74,8
A2V1	0,0025	0,0020	133122	13,1	61,4	74,5
A2V1	0,0020	0,0020	148063	13,1	61,1	74,6

**Tablica 2.14:** Gubitci zbog vrtložnih struja u ovisnosti o gustoći mesha za A2V1 formulaciju, pri mag. reluktivnosti  $\nu = 160$  H/m.  $P_N$  predstavlja gubitke zbog uskih vrtložnih struja,  $P_W$  zbog širokih vrtložnih struja, a  $P_{NW}$  njihov zbroj. Parametar V-maxh predstavlja  $h_{max}$  faktor unutar jezgre, a S-maxh  $h_{max}$  na plohi jezgre koja je najbliža namotu, pri čemu  $h_{max}$  parametar predstavlja maksimalnu veličinu konačnog elementa. Parametar DOF predstavlja ukupni broj stupnjeva slobode.

Ostale varijante formulacija pokazuju međusobno dobro slaganje, pri čemu se varijanta A0T1 iznenađujuće dobro slaže s ostalim varijantama koje sve odreda koriste drugi stupanj bridnih baznih funkcija. Iz tog zaključujemo da zadaća vrtložnih struja u jezgri otvorenog tipa bolje reagira na h-adaptivnost nego na p-adaptivnost. Osim toga, simulacije bazirane na A0T1 varijanti formulacije  $\vec{A}, T$ -formulacije obično i kraće traju za isti broj DOFa, a pogotovo pri većim iznosima DOFa. To je posebno važno jer u praktičnom slučaju jezgre otvorenoga tipa, jezgra je vitka, višedjelna i stepeničasta s vrlo malim pomacima među stepenicama, pa takva geometrija nužno nosi sa sobom gušću diskretizaciju konačnim elementima. Budući da su stepenice jezgre često naizmjenično dvodijelne/jednodijelne, same plohe simetrije također naizmjenično poprimaju Dirichlet/Neumann prirodu što također iziskuje gušću diskretizaciju. Dodatno, izražena vitkost takve jezgre, uz jednaku razinu prodiranje koja naravno nije ovisna o visini jezgre, rezultira većim brojem konačnim elemenata. Naime, potreban je nizak  $h_{max}$  parametar na granici jezgra-zrak (na relevantnim plohama - vanjske lamele), kao što smo mogli vidjeti u prikazanim simulacijama, što onda rezultira podjednako gustim slojevima konačnih elemenata (tetraedara) u zraku kako bi mesh bio pouzdan, odnosno što je manje moguće deformiran.

Vrlo je važno naglasiti i to da je  $\vec{A}$ -formulacija zapravo neprihvatljiva u ovim zadaćama jer ima jednu plohu simetrije manje za slučaj jezgre koja ima dvodijelne stepenice, što obično jest slučaj. Uzevši sve navedeno u obzir, A0T1 formulacija se pokazuje najekonomičnijim i najfleksibilnijim izborom među svim navedenim varijantama. Kad se u obzir uzmu i drugi faktori kao što je zahtjevnija implementacija hierarhijskih bridnih baznih funkcija višeg stupnja te problem njihove vizualizacije u open-source alatima kao što je npr. Paraview, zaključujemo da je A0T1 varijanta  $\vec{A}, T$ -formulacije također i najpraktičnija.

### 3. Nelinearna slaba formulacija

U nastavku je fokus na proširenju razvijene  $\vec{A}, T - \vec{A}$  formulacije na nelinearni slučaj, što se prvenstveno odnosi na nelinearnost  $HB$ -krivulje, odnosno nelinearni magnetske reluktivnosti  $v$ . Nelinearnost će biti uključena u harmoničku formulaciju. Iako je takav pristup tretiranju nelinearnosti aproksimativan, znatno kraće trajanje simulacije u odnosu na vremeski tranzijentnu simulaciju predstavlja ogroman benefit. Za izračun rješenja nelinearne formulacije koristit će se Newton-Raphson metoda. Dakle, za formulaciju (2.4)-(2.5) potrebno je izvesti Jacobijevu matricu. Međutim, dobivanje Jacobijeve matrice u slučaju funkcija kompleksne varijable pokazao se kao vrlo izazovan problem koji zahtjeva pedantno uvažavanje zakonitosti kompleksne analize.

#### 3.1 Newton-Raphson metoda

Ova metoda služi za iterativnu aproksimaciju stvarne nultočke  $x = x_N$  zadane funkcije  $f(x)$ . Metoda se temelji na jednostavnoj ideji da je nultočka tangente  $t_i(x)$  aproksimacija nultočke funkcije  $f(x)$ .

Neka je pravac  $t_i(x)$  tangenta funkcije  $f(x)$  u točki  $x = x_i$ . Derivacija funkcije  $f(x)$  u točki  $x = x_i$  predstavlja nagib tangente  $t_i(x)$ , to jest vrijedi da je

$$f'(x_i) = \frac{t_i(x) - t_i(x_i)}{x - x_i} \quad (3.1)$$

Budući da je  $t_i(x)$  tangenta od  $f(x)$  u točki  $x = x_i$ , onda je  $t(x_i) = f(x_i)$ , pa slijedi da je

$$f'(x_i) = \frac{t_i(x) - f(x_i)}{x - x_i} \quad (3.2)$$

Ako nultočku pravca  $t(x)$  označimo s  $x_{i+1}$ , to jest  $t_i(x_{i+1}) = 0$ , onda uvrštavanjem  $x = x_{i+1}$  u prethodni izraz dobivamo

$$f'(x_i) = \frac{t_i(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{0 - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.3)$$



Iz prethodnog izraza možemo izraziti nultočku tangente  $x_{i+1}$ , to jest

$$x_{i+1} = \frac{-f(x_i)}{f'(x_i)} + x_i \quad (3.4)$$

Nultočka tangente je aproksimacija stvarne nultočke funkcije, to jest  $x_N \approx x_{i+1}$ . Ako je derivacija funkcije monotona onda je ova aproksimacija to bolja što je koordinata  $x_i$  bliža nultočki  $x_N$ . Budući da je nultočka  $x_{i+1}$  tangente  $t_i(x)$  bliža  $x_N$  nego točka  $x_i$ , slijedi da će nultočka tangente  $t_{i+1}(x)$  u točki  $x_{i+1}$  biti još bliža stvarnoj nultočki  $x_N$ .

Dakle, prvi korak metode sastoji se od proizvoljne pretpostavke  $x_i = x_0$  i iterativnim postupkom dobivamo točke  $x_{i+1}$ , gdje se porastom indeksa  $i$  približavamo stvarnoj nultočki  $x_N$ . Potrebno je uočiti da su  $f(x_i)$  i  $f'(x_i)$  u 3.4 poznate vrijednosti funkcija. U kontekstu FEM-a, obično je cilj zapisati linearni sustav jednadžbi kako bi se iskoristili alati linearne algebre. Prema tome, korisnije je 3.4 zapisati kao

$$f(x_i) = -f'(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \quad (3.5)$$

Korištenjem prethodne jednadžbe nelinearna slaba formulacija  $f(x)$  iznova se linearizira u svakom koraku Newton-Raphson procedure.

### 3.1.1 Newton-Raphson metoda u kontekstu FEM-a

Galerkinova slaba formulacija problema temelji se na aproksimaciji nepoznanice linearnom kombinacijom konačnog broja baznih funkcija pri čemu su ostali parametri problema ovisni ili neovisni o samoj nepoznanici. Posljedično, formulacija se sastoji od sustava linearnih ili nelinearnih jednadžbi, gdje je nelinearnost vezana za parametre kao što su npr. značajke materijala. Za problem vrtložnih struja u feromagnetskim materijalima, magnetska reluktivnost  $\nu$  feromagnetskog materijala modelira se kao linearna ili nelinearna.

U slučaju  $A$  formulacije, opća jednadžba glasi  $S \cdot A = G$ , gdje je  $S$  funkcional vezan za varijablu  $A$ , a  $G$  je funkcional vezan za ulazne podatke. Funkcional  $S$  je ustvari zbroj dvaju funkcionala, to jest  $S = S_\nu + S_l$ , gdje je  $S_\nu$  funkcional koji sadrži parametar magnetske reluktivnosti  $\nu$ , a  $S_l$  je funkcional koji ne sadrži parametar  $\nu$ . Rješenje sustava jednadžbi slabe formulacije, koje imaju oblik  $S_\nu \cdot A + S_l \cdot A = G$ , možemo promatrati kao nultočku sustava funkcija  $f(A)$ , gdje svaka funkcija  $f(A)$  ima oblik  $f(A) = S_\nu \cdot A + S_l \cdot A - G$ .

Ako je  $\nu$  nelinearan, onda je  $S_\nu$  ovisan o  $A$ , tj.  $S_\nu(A) \cdot A$  predstavlja nelinearni dio funkcija  $f(A)$ , dok  $S_l$  ostaje neovisan o  $A$ . Kao i u linearnom slučaju, rješenje sustava nelinearnih jednadžbi jednako je nultočki svake od funkcija  $f(A) = S_\nu \cdot A + S_l \cdot A - G$ . Nultočka nelinearne funkcije  $f(A)$  pronalazi se pomoću iterativne metode Newton-Raphson. Prema izrazu 3.5, funkcija  $f(A)$

za  $i + 1$  iteraciju glasi

$$f(A^i) = -f'(A^i) \cdot (A^{i+1} - A^i) \quad (3.6)$$

Derivacija funkcije  $f(A)$  po  $A$  glasi  $f'(A) = (\partial_A S_v)A + S_v + S_l$ , pa uvrštavanjem izraza za  $f(A)$  i  $f'(A)$  u točki  $A = A^i$  u prethodnu jednadžbu dobiva se

$$S_v \cdot A^i + S_l \cdot A^i - G = -(\partial_A S_{v|A^i} A^i + S_v + S_l) \cdot (A^{i+1} - A^i) \quad (3.7)$$

Sređivanjem prethodnog izraza dobiva se opći oblik jednadžbe u  $i + 1$  iteraciji

$$\partial_A S_{v|A^i} A^i \cdot A^{i+1} + S_v \cdot A^{i+1} + S_l \cdot A^{i+1} = \partial_A S_{v|A^i} A^i \cdot A^i + G \quad (3.8)$$

Ako bi  $v$  bio linearan, prethodna jednadžba bi imala oblik  $S_v \cdot A^{i+1} + S_l \cdot A^{i+1} = G$ . Dakle, linearizirana jednadžba 3.8 uz standardne članove, s lijeve strane znaka jednakosti sadrži član  $\partial_A S_{v|A^i} A^i \cdot A^{i+1}$ , a s desne strane znaka jednakosti  $\partial_A S_{v|A^i} A^i \cdot A^i$ . Tijekom asembliranjem globalne matrice i vektora, matrica dobivena iz  $\partial_A S_{v|A^i} A^i$  može se promatrati kao Jacobijeva matrica. Rješenje prethodnog sustava linearnih jednadžbi (matrična jednadžba) daje  $A^{i+1}$ . U sljedećem iteracijskom koraku  $A^i$  postaje  $A^{i+1}$  iz prethodnog koraka, i rješavanjem ažuriranog sustava linearnih jednadžbi tražimo rješenje za novi  $A^{i+1}$ . Ako postoji sumnja na infleksije unutar  $f(A)$ , kako bi se izbjeglo iterativno osciliranje oko nultočke moguće je unijeti prigušenje  $p$  u iterativnu proceduru tako što će  $A^i$  iz trenutnog iteracijskog koraka biti jednak zbroju  $pA^{i+1} + (1 - p)A^i$  iz prethodnog koraka.

Ako se promotri izraz 3.8, vidimo da će se iterativnim približavanjem rješenja  $A^i$  rješenju  $A^{i+1}$  i član  $\partial_A S_{v|A^i} A^i \cdot A^i$  na desnoj strani znaka jednakosti približavati članu  $\partial_A S_{v|A^i} A^i \cdot A^{i+1}$  na lijevoj strani znaka jednakosti. Prema tome, može se reći da vrijednost Jacobijeve matrice (ovdje je to član  $\partial_A S_{v|A^i} A^i$ ) na neki način nije važna. Važno je da Jacobijeva matrica osigura dobar smjer promjene varijable čime se osigurava konvergencija. Primjerice, član  $\partial_A S_{v|A^i} A^i \cdot A^{i+1}$ , dobiven iz Newtonove metode, predstavlja Jacobijevu matricu koja osigurava dobar smjer promjene varijable jer predstavlja nagib tangente u točki  $A^i$ , a čija je nultočka  $A^{i+1}$  (ako su zadovoljeni određeni uvjeti) sigurno bliža nultočki funkcije  $f$  nego sama točka  $A^i$ . Na kraju, rješenje nelinearne jednadžbe, kao i svake druge jednadžbe, upravo je ono koje će kada se uvrsti u nelinearnu jednadžbu zadovoljiti znak jednakosti između lijeve i desne strane jednadžbe. U našem slučaju, nelinearnost je vezana za reluktivnost  $v$ , tj. vrijedi da je  $v(A)$ . Kada neko pretpostavljeno rješenje  $\tilde{A}$  uvrstimo u  $v(A)$ , zadane nelinearne jednadžbe, dobit ćemo linearnu jednadžbu s reluktivnošću  $v(\tilde{A})$ . Ako je rješenje te linearne jednadžbe jednako  $\tilde{A}$ , onda je  $\tilde{A}$  rješenje i zadane nelinearne jednadžbe. Naravno, pretpostavljeno rješenje linearne jednadžbe obično nije jednako  $\tilde{A}$  što znači da trebamo novu pretpostavku rješenja. Očigledno, koliko se rješenje linearne

jednadžbe razlikuje od  $\tilde{A}$  korisna je informacija za određivanje sljedeće pretpostavke. Ovisno o iterativnoj metodi, različiti su pristupi određivanju iduće (bolje) pretpostavke rješenja. Npr., Newtonova metoda linearnoj jednadžbi dodaje Jacobijevu matricu koja rezultira modificiranom linearnom jednadžbom čije rješenje je bolja pretpostavka rješenja nego ono s kojim smo počeli.

### 3.1.2 Izračun Jacobijeve matrice

U prethodnom poglavlju pokazano je da Jacobijeva matrica ima sljedeći oblik  $\partial_A S_{V|A^i} A^i$ , ako je magnetska indukcija modelirana korištenjem magnetskog vektorskog potencijala  $A$ . To je istina i u našem slučaju, budući da je isključivo varijabla  $A$  korištena za modeliranje magnetske indukcije u  $\vec{A}, T$  formulaciji. Jedini nelinearni član formulacije jest član jednadžbe (2.5) koji sadrži magnetsku reluktivnost  $\nu$ . Raspisivanjem podintegralne funkcije člana  $\partial_A S_{V|A^i} A^i$  slabe formulacije dobiva se

$$\partial_A S_{V|A^i} A^i = \partial_A (\nu \cdot \nabla \times \vec{\alpha} \cdot \nabla \times \vec{\alpha}_k)_{|A^i} \cdot A^i = \partial_A (\nu)_{|A^i} \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) \cdot A^i \quad (3.9)$$

gdje  $\vec{\alpha}$  predstavlja probnu, a  $\vec{\alpha}_k$  predstavlja testnu funkciju. Dakle, potrebno je izračunati derivaciju  $\partial_A (\nu)$ , tj.  $\partial_A (\nu) = \partial_A \left( \frac{|H|}{|B|} \right)$ , gdje su  $|H|$  i  $|B|$  apsolutne vrijednosti polja. Prilikom derivacije ćemo koristiti pravilo derivacije kompozicije funkcija, odnosno  $\partial_A (\nu) = \partial_{|B|} (\nu) \cdot \partial_A |B|$ , pa dobivamo

$$\partial_A (\nu) = \left( \frac{1}{|B|} \frac{\partial |H|}{\partial |B|} - \frac{|H|}{|B|^2} \right) \cdot \frac{\partial |B|}{\partial A} \quad (3.10)$$

U prethodnom izrazu, član u zagradi lako se računa tijekom simulacije. Međutim, derivacija  $\partial_A |B|$  predstavlja izrazit problem sa stajališta kompleksne analize. Budući da je varijabla  $A$  ustvari kompleksna varijabla, moramo biti oprezni prilikom derivacije. Funkcija koju ovdje deriviramo je  $|B| = |\nabla \times \vec{A}| = |\sum_j A_j (\nabla \times \vec{\alpha}_j)|$ , gdje je  $A_j$  jedan stupanj slobode varijable  $A$ , a  $\vec{\alpha}_j$  je bazna funkcija vezana za  $j$ -ti stupanj slobode. U principu, imamo derivaciju apsolutne vrijednosti kompleksne varijable  $|A|$  koja pak nije analitička funkcija, tj. njena derivacija po kompleksnoj varijabli  $A$  ne postoji jer Cauchy–Riemannovi uvjeti nisu zadovoljeni. Ignoriranje ove činjenice, odnosno posuđivanjem Jacobijana iz vremenske domene ne funkcionira, tj. iterativna procedura Newton-Raphson petlje ne konvergira, što naravno nije slučaj u vremenskoj domeni.

U nastavku je prikazan jednostavan trik kojim se može zaobići problem nepostojanja derivacije.

Uvrštavanjem (3.10) u (3.9) dobiva se

$$\begin{aligned}
 \partial_A S_{v|A} A^i &= \left( \frac{1}{|B|} \frac{\partial |H|}{\partial |B|} - \frac{|H|}{|B|^2} \right) \cdot \frac{\partial |B|}{\partial A} \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) \cdot A \\
 &= \left( \frac{\partial |H|}{\partial |B|} - \frac{|H|}{|B|} \right) \cdot \frac{1}{|B|} \cdot \frac{\partial |B|}{\partial A} \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) \cdot A \\
 &= \left( \frac{\partial |H|}{\partial |B|} - \frac{|H|}{|B|} \right) \cdot \frac{A}{|B|} \cdot \frac{\partial |B|}{\partial A} \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Naime, Cauchy–Riemannovi uvjeti sugeriraju da vrijednost derivacije nije jednaka za različite putanje limesa u kompleksnoj ravnini. Budući da je  $|B_j| = |A_j(\nabla \times \vec{\alpha}_j)|$ , derivacija  $\partial_A |B|$  daje konstantu koja ovisi o putanji po kojoj računamo limes (u definiciji derivacije) u kompleksnoj ravnini. Upravo u toj *linearnoj* vezi između  $|B|$  i  $A$  leži rješenje problema jer je stoga  $\frac{\partial |B|}{\partial A} \propto \frac{|B|}{A}$ , odnosno za umnožak u (3.11) vrijedi da je  $\frac{A}{|B|} \cdot \frac{\partial |B|}{\partial A} \propto 1$  pa dobivamo

$$\partial_A S_{v|A} A^i = (\xi - v) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) \tag{3.12}$$

gdje je iskorištena jednakost  $v = \frac{|H|}{|B|}$  te uvedena nova veličina  $\xi = \frac{\partial |H|}{\partial |B|}$ . Korištenje prethodnog izraza unutar jednadžbe (2.4)-(2.5) slabe formulacije, s lijeve i desne strane jednakosti po uzoru na (3.8), dobiva se nelinearna  $\vec{A}, T - \vec{A}$  formulacija

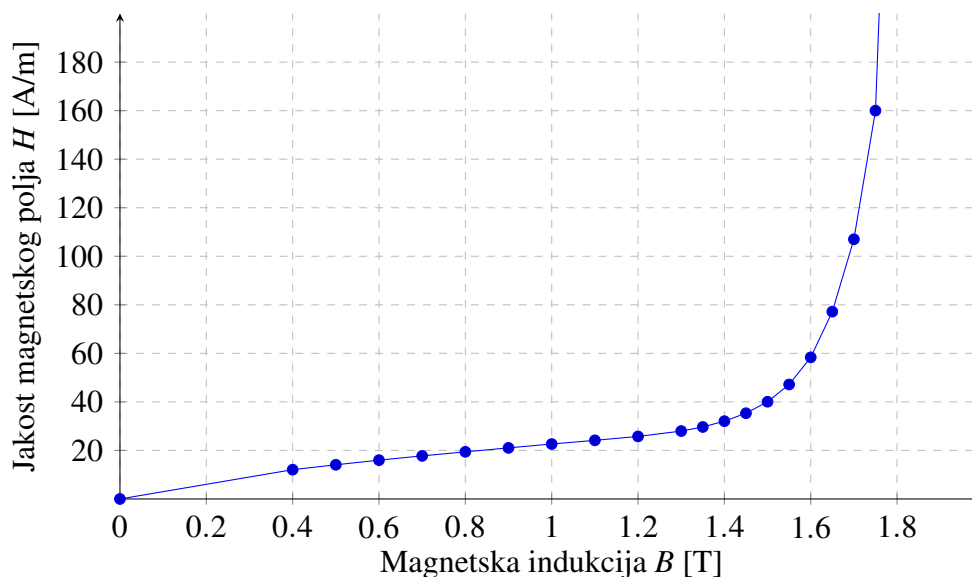
$$-j\omega^{-1} \int_{\Omega_c} \bar{\rho}(\mathbf{C} \cdot \nabla T_h^{i+1}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla \tau_p) dV + \int_{\Omega_c} \vec{A}_h^{i+1} \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla \tau_p) dV = 0, \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega_c} (\vec{\xi} - \vec{v}) \cdot (\nabla \times \vec{A}_h^{i+1}) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) dV + \int_{\Omega_0 \cup \Omega_s} \mu_0^{-1} (\nabla \times \vec{A}_h^{i+1}) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) dV \\
 &+ \int_{\Omega_c} \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{A}_h^{i+1}) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) dV + \int_{\Omega_c} (\mathbf{C} \cdot \nabla T_h) \cdot \vec{\alpha}_k dV + \int_{\Omega} \sigma_0 \vec{A}_h^{i+1} \cdot \vec{\alpha}_k dV \\
 &= \int_{\Omega} \vec{T}_s \cdot \nabla \times \vec{\alpha}_k - \int_{\Omega_c} (\vec{\xi} - \vec{v}) \cdot (\nabla \times \vec{A}_h^i) \cdot (\nabla \times \vec{\alpha}_k) dV
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

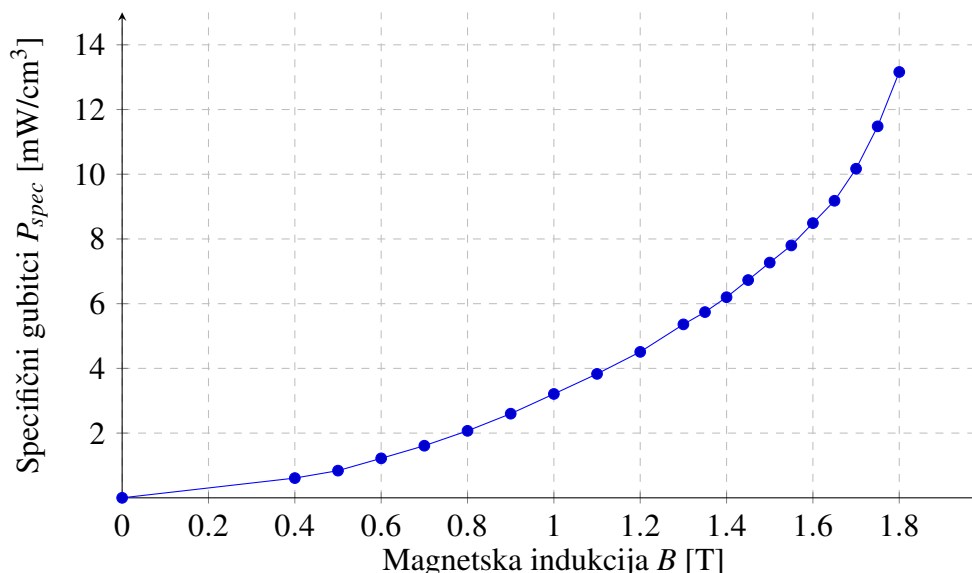
za svaki  $(\tau_p, \vec{\alpha}_k) \in W_h$ , pri čemu je  $\tau_p \in V_h \subset H^1(\Omega_c)$  i  $\vec{\alpha}_k \in U_h \subset H(\text{curl}, \Omega)$ , gdje  $\vec{A}_h^{i+1}$  i  $T_h^{i+1}$  predstavljaju nepoznanice, a  $\vec{A}_h^i$  i predstavlja rješenje iz prethodne iteracije Newton-Rapshon procedure. Bitno je uočiti da formulacija i u nelinearnom slučaju dopušta anizotropne homogene materijale što je naznačeno s  $\vec{\xi}$  i  $\vec{v}$ .

## 3.2 Numerički primjer

U ovoj sekciji je napravljena usporedba rezultata simulacija dobivenih korištenjem nelinearne  $\vec{A}, T - \vec{A}$  formulacije (3.13)-(3.14) s gubitcima dobivenim putem mjerenja. Mjerni rezultati su dobiveni ranije, tijekom mog doktorskog studija, za jezgru i namot čiji je CAD model prikazan



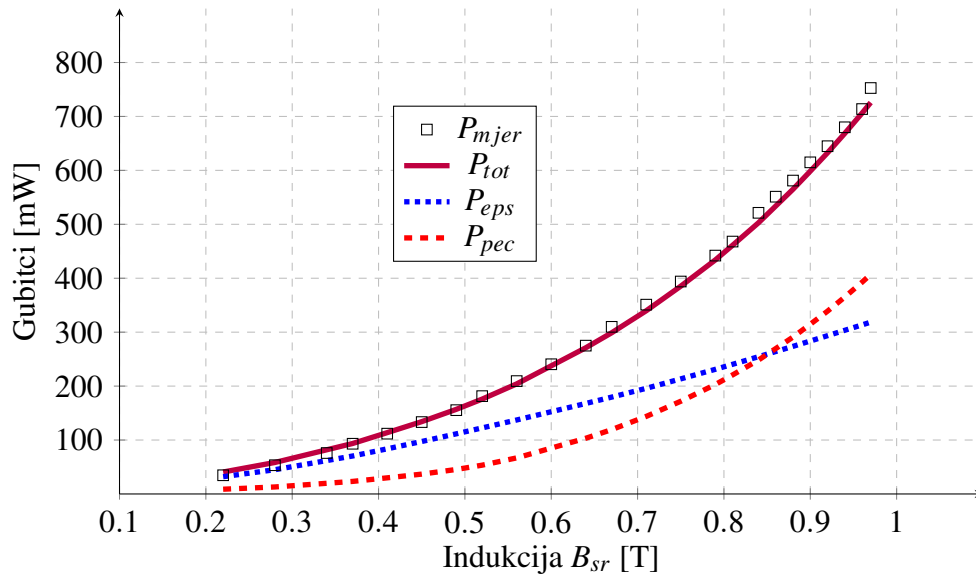
**Slika 3.1:** Linearni spline  $HB$ -krivulje za lim M140-35S pri frekvenciji  $f=50$  Hz. Markeri na grafu predstavljaju mjerne točke izmjerene od strane proizvođača lima



**Slika 3.2:** Linearni spline krivulje ovisnosti specifičnih gubitaka  $P_{spec}$  o indukciji  $B$  za lim M140-35S pri frekvenciji  $f=50$  Hz. Markeri na grafu predstavljaju mjerne točke izmjerene od strane proizvođača lima

na slici 2.2. Dakle, radi se o istom modelu koji je korišten u sekciji 2.4, s tim da se ovdje koriste nelinearne značajke materijala, odnosno nelinearna  $HB$ -krivulja prikazana na slici 3.1.

Kombiniranjem rješenja za magnetsku indukciju  $\vec{B}$  u jezgri s krivuljom  $P_{spec}(B)$  sa slike 3.2, u fazi postprocesiranja su izračunati gubici  $P_{eps}$ , koji imaju lokalni karakter s obzirom na magnetsku indukciju  $B$ . To znači da je gubitke  $P_{eps}$ , u konačnom elementu unutar jezgre, moguće izračunati iz iznosa magnetske indukcije u tom konačnom elementu. Primjerice, to ne vrijedi u slučaju gubitaka  $P_{pec}$ . Gubici  $P_{eps}$  su zapravo zbroj tri vrste gubitaka, odnosno uzrokuju ih tri odvojena fenomena, a to su gubici zbog laminacijskih (uskih) vrtložnih struja  $P_{lec}$ , te gubici zbog histereze  $P_{hys}$  i dodatni (engl. excess) gubici  $P_{exc}$ . Zatim, potrebno je izračunati i gubitke



**Slika 3.3:** Usporedba gubitaka u jezgri Modela-A za srednju vrijednost magnetske indukcije u jezgri u rasponu do  $B_{sr} = 1$  T, pri frekvenciji  $f = 50$  Hz.  $P_{mjer}$  predstavlja ukupne izmjerene gubitke, a  $P_{tot}$  ukupne gubitke dobivene putem simulacije. Gubitci  $P_{tot}$  dobiveni su zbrajanjem simulacijskih rezultata Epsteinovih gubitaka  $P_{eps}$  i gubitke zbog planarnih vrtložnih struja  $P_{pec}$ .

zbog planarnih vrtložnih struja  $P_{pec}$ , koji slijede izravno iz dobivene razdiobe gustoće struje  $\vec{J}_p$ , integriranjem izraza  $|\vec{J}_p|^2/2\kappa$  unutar cijelog volumena jezgre. Na kraju, ukupni gubitci  $P_{tot}$  jednostavno se dobiju kao zbroj  $P_{tot} = P_{eps} + P_{pec}$ .

Usporedba ukupnih gubitaka  $P_{tot}$  s izmjerenim gubitcima  $P_{mjer}$  pokazuje izvrsno slaganje simulacijskih rezultata s mjerenjima. Izvrsno slaganje rezultata validira nelinearnu formulaciju i implementiranu Newton-Raphson proceduru. Osim toga, vrlo dobro slaganje rezultata sugerira i točnost opisane metode. No, potrebna je ipak detaljnija teorijski analiza i prikladno testiranje da bi se dokazala pouzdanost i točnosti predložene metode izračuna ukupnih gubitaka. Dodatno, u nastavku istraživanja će se ispitati mogućnosti metode, utvrditi prednosti i mane te istražiti alternativne, naprednije metode.

### 3.3 Magnetska energija

Diferencijal rada koji obavi Lorentzova sila duž puta  $l$  jednak je  $dW = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ , gdje su polja  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  te brzina vodiča  $\vec{v}$  definirani u koordinatnom sustavu laboratorija. U koordinatnom sustavu samog vodiča (koji se giba brzinom  $\vec{v}$ ), isti diferencijal rada iznosi  $dW = q\vec{E}'$ , gdje je  $\vec{E}'$  električno polje (Galileova ili Lorentzova transformacija) u koordinatnom sustavu vodiča.

Radi jednostavnosti, pretpostavimo da vodič (zavoj) miruje u laboratoriju, tako da je  $\vec{v} = 0$  pa vrijedi da je  $\vec{E}' = \vec{E}$ . Polje  $\vec{E}$  prema Helmholtzovoj dekompoziciji iznosi  $\vec{E} = \vec{E}_{izv} + \vec{E}_{ind}$ , gdje  $\vec{E}_{izv}$  predstavlja električno polje zbog rastavljenih naboja (u izvoru, na granici različitih provodnosti, itd.), a  $\vec{E}_{ind}$  električno polje inducirano promjenom magnetskog toka u vremenu. Pritom je  $\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}_{izv}$ , odnosno  $\nabla \cdot \vec{E}_{ind} = 0$ , te  $\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \vec{E}_{ind}$ , odnosno  $\nabla \times \vec{E}_{izv} = 0$ . Dakle, korištenjem potencijala dobiva se da je  $\vec{E} = -\nabla\phi - \partial_t \vec{A}$ , gdje vrijedi da je  $\vec{E}_{izv} = -\nabla\phi$ , odnosno  $\vec{E}_{ind} = -\partial_t \vec{A}$ .

Magnetska energija nekog strujnog kruga (definiranog zatvorenim petljom) upravo je jednaka negativnom radu koji u vodiču obavi inducirana sila  $\vec{F}_{ind} = \vec{E}_{ind} Q$ . Sila na naboj smješten u infinitezimalnom dijelu zavoja (vodiča) glasi

$$d\vec{F}_{ind} = \vec{E}_{ind} dQ = \vec{E}_{ind} \rho dV = -\partial_t \vec{A} \rho dV \quad (3.15)$$

Diferencijal rada koji sila  $d\vec{F}$  obavi nad tim infinitezimalnim nabojem  $dQ$  jednak je skalarnom umnošku vektora sile i vektora diferencijalnog pomaka, to jest  $dW = d\vec{F} \cdot d\vec{l}$ . Vektor pomaka promatranog djelića naboja moguće je izraziti preko umnoška brzine i vremena kao  $d\vec{l} = \vec{v} \cdot dt$ , odakle slijedi da je

$$dW = (-\partial_t \vec{A} \rho dV) \cdot (\vec{v} \cdot dt) \quad (3.16)$$

Budući da je  $\rho \vec{v} = \vec{J}$  i  $\partial_t \vec{A} dt = d\vec{A}$ , dobiva se da je diferencijal magnetske energije jednak

$$dW_m = \vec{J} \cdot d\vec{A} dV \quad (3.17)$$

gdje je iskorištena činjenica da je diferencijal magnetske energije jednak negativnom diferencijalu rada  $dW$  nad promatranim djelićem naboja  $dQ$ , to jest  $dW_m = -dW$ .

Primjenom identiteta vektorske algebre vrijedi sljedeći izraz

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{H} \times d\vec{A}) &= d\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times d\vec{A}) \\ &= d\vec{A} \cdot \vec{J} - \vec{H} \cdot d\vec{B} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Korištenjem prethodne jednakosti u kombinaciji s 3.17 te integriranjem po volumenu cijelog

zavoja (vodiča)  $\Omega_v$  dobiva se

$$dW_m = \int_{\Omega_v} \nabla \cdot (\vec{H} \times d\vec{A}) dV + \int_{\Omega_v} \vec{H} \cdot d\vec{B} dV \quad (3.19)$$

Primjenom Gaussovog zakona divergencije, prvi volumni integral s desne strane znaka jednakosti prelazi u plošni integral po rubu cijele domene, a koji teži u nulu kako radijus plohe teži u beskonačnost, pa slijedi da je

$$dW_m = \int \vec{H} \cdot d\vec{B} dV \quad (3.20)$$

gdje je bitno uočiti da se radi o integralu po cijelom 3D prostoru. Konačno, magnetska energija  $W_m$  dobiva se integracijom prethodnog izraza po  $d\vec{B}$ , od početnog do konačnog iznosa indukcije, to jest

$$W_m = \int \left[ \int \vec{H} \cdot d\vec{B} \right] dV \quad (3.21)$$

Integral po  $d\vec{B}$  je moguće riješiti samo ako je poznata petlja histereze. S druge strane, ako vodič ima linearne značajke materijala, odnosno veza između polja  $\vec{H}$  i  $\vec{B}$  je linearna, tada je  $\vec{H} \cdot d\vec{B} = \frac{1}{2} d(\vec{H} \cdot \vec{B})$  pa u slučaju integracije od indukcije nula do konačne indukcije  $\vec{B}$ , za magnetsku energiju  $W_m$  vrijedi da je

$$W_m = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} dV \quad (3.22)$$

### **Primjer izračuna magnetske energije beskonačno dugog ravnog zavoja**

U izračunu magnetske energije vodiča pojavi se konstanta  $L$  koju nazivamo induktivitet. Na tom tragu treba dodati da je definicija induktiviteta preko ulančanog toka loša jer je ulančani tok u slučaju samoindukcije dvosmislena veličina. U slučaju da je razmak između centralnih osi vodiča  $d$  sumjerljiv radijusu vodiča  $R$ , tada magnetska sila među strujama u vodičima uzrokuje nesimetričnu razdiobu gustoće struje. Pretpostavimo da je  $d$  bitno veći od  $R$  pa se za gustoću struje može pretpostaviti da je homogena ili barem osnosimetrična s obzirom na centralne osi u svakom od vodiča. Neka i odlazni i povratni vodič imaju jednaka radijus  $R$  pa gustoća struje u oba vodiča ima isti iznos ali suprotan smjer. Induktivitet takvog zavoja (dvožičanog voda) računa se na sljedeći način.

Polja  $\vec{H}$  i  $\vec{B}$  su zbroj doprinosa zbog lijevog i desnog vodiča, to jest vrijedi da je  $\vec{H} = \vec{H}_L + \vec{H}_D$



i  $\vec{B} = \vec{B}_L + \vec{B}_D$ . Prema tome, ukupna magnetska energija u cijelom prostoru iznosi

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2} \int (\vec{H}_L + \vec{H}_D) \cdot (\vec{B}_L + \vec{B}_D) dV \\ &= \frac{1}{2} \int \vec{H}_L \cdot \vec{B}_L dV + \frac{1}{2} \int \vec{H}_D \cdot \vec{B}_L dV + \frac{1}{2} \int \vec{H}_L \cdot \vec{B}_D dV + \frac{1}{2} \int \vec{H}_D \cdot \vec{B}_D dV \end{aligned} \quad (3.23)$$

Budući da su oba vodiča jednakog promjera, prvi integral je jednak četvrtom, a drugi integral je jednak trećem pa je onda dovoljno izračunati samo prvi i drugi integral, tj.

$$W_m = \int \vec{H}_L \cdot \vec{B}_L dV + \int \vec{H}_D \cdot \vec{B}_L dV \quad (3.24)$$

Izračun integrala će se provesti u cilindričnom koordinatnom sustavu. Ako se centar koordinatnog sustava postavi u centar lijevog vodiča, onda magnetska indukcija zbog struje lijevog vodiča u točki  $T(r, \alpha, z)$  iznosi

$$\vec{B}_L = \begin{cases} \frac{\mu I r}{2\pi R^2} \vec{a}_\alpha, & \text{za } r \leq R \\ \frac{\mu I}{2\pi r} \vec{a}_\alpha, & \text{za } r > R \end{cases} \quad (3.25)$$

pri čemu je  $\vec{B}_L = \mu \vec{H}_L$ . Analogno, za indukciju  $\vec{B}_D$  u točki  $T(r, \alpha, z)$  vrijedi da je

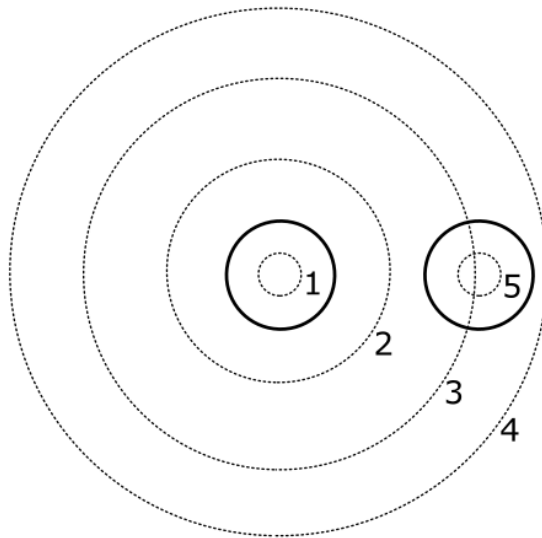
$$\vec{B}_D = \begin{cases} \frac{-\mu I r_D}{2\pi R^2} \vec{a}_\beta, & \text{za } r_D \leq R \\ \frac{-\mu I}{2\pi r_D} \vec{a}_\beta, & \text{za } r_D > R \end{cases} \quad (3.26)$$

pri čemu je  $r_D = d^2 + r^2 - 2rd \cos(\alpha)$ , a jedinični vektor  $\vec{a}_\beta$  predstavlja kut između vektora  $\vec{r}_D$  i dužine  $d$ , tj.  $\vec{a}_\beta = \frac{\vec{r}_D}{r_D} \times \vec{a}_z$  (valjda su svi predznaci ok). Za rješenje zadatka nije potrebno izraziti vektor  $\vec{a}_\beta$  u postavljenom koordinatnom sustavu.

Iz prethodnih formula vidi se da su polja ovisna samo o radijalnoj dimenziji te imaju cirkularni smjer s obzirom na vodiče, što znači da su polja tangencijalna na cirkularne krivulje oko vodiča. Primjer takvih krivulja su krivulje 1, 2, 3 i 4 za lijevi vodič te krivulja 5 za desni vodič, prikazane na slici 3.4. Prema tome, diferencijal volumena u 3.24 može se napisati kao  $dV = dl dS$ , gdje je  $dl$  infinitezimalna duljina cirkularne krivulje. Budući da je na krivuljama 1, 2, 3 i 4 vektor  $\vec{B}_L$  konstantan i tangencijalan, vrijedi da je  $\frac{\vec{B}_L}{B_L} \cdot d\vec{l} = d\vec{l}$ . Prema tome, prvi integral u 3.24 jednak je

$$\int \vec{H}_L \cdot \vec{B}_L dV = \int \left[ \oint \vec{H}_L \cdot B_L \frac{\vec{B}_L}{B_L} dl \right] dS = \int B_L \left[ \oint \vec{H}_L \cdot d\vec{l} \right] dS \quad (3.27)$$

Budući da je polje  $\vec{H}_L$  uzrokovano strujom kroz lijevi vodič, prema Amperovom zakonu je krivuljni integral jednak struji u lijevom vodiču koja je obuhvaćena konkretnom integracijskom



**Slika 3.4:** Dvožični vod s pet prikazanih karakterističnih integracijskih krivulja potrebnih pri izračunu magnetske energije te induktiviteta. Struja teče u papir u lijevom vodu, a iz papira u desnom vodu.

krivuljom, tj. vrijedi da je

$$\oint \vec{H}_L \cdot d\vec{l} = \begin{cases} I \frac{r^2 \pi}{R^2 \pi}, & \text{za } r \leq R \\ I, & \text{za } r > R \end{cases} \quad (3.28)$$

Slično tome, drugi integral u 3.24 jednak je

$$\int \vec{H}_D \cdot \vec{B}_L dV = \int \left[ \oint \vec{H}_D \cdot B_L \frac{\vec{B}_L}{B_L} dl \right] dS = \int B_L \left[ \oint \vec{H}_D \cdot d\vec{l} \right] dS \quad (3.29)$$

Budući da je polje  $\vec{H}_D$  uzrokovano strujom kroz desni vodič, prema Amperovom zakonu je krivuljni integral jednak struji u desnom vodiču koja je obuhvaćena konkretnom integracijskom krivuljom, tj. vrijedi da je

$$\oint \vec{H}_D \cdot d\vec{l} = \begin{cases} 0, & \text{za } r \leq (d - R) \\ -I, & \text{za } r \geq (d + R) \end{cases} \quad (3.30)$$

gdje je  $d$  razmak između centralnih osi vodiča.

Dakle, budući da je prema 3.30 integral jednak 0 za  $r \leq (d - R)$ , iz izraza 3.28 slijedi da je  $W_m$  za područje  $r \leq R$  jednak

$$W_{m(r \leq R)} = \int B_L \cdot (I \frac{r^2 \pi}{R^2 \pi}) dS = \int_0^l dz \int_0^R (I \frac{\mu r}{2\pi R^2}) \cdot (I \frac{r^2 \pi}{R^2 \pi}) dr \quad (3.31)$$

Slično tome, za područje  $R < r < (d - R)$  vrijedi da je

$$W_{m(R < r < (d-R))} = \int B_L \cdot I dS = \int_0^l dz \int_R^{d-R} (I \frac{\mu}{2\pi r}) I dr \quad (3.32)$$

Opet kombiniranjem izraza 3.28 i 3.30, za područje  $r > (d + R)$  slijedi da je

$$W_{m(r > (d+R))} = \int B_L \cdot (I - I) dS = 0 \quad (3.33)$$

tj. doprinosi ta dva integrala se ponište.

Na kraju preostaje još odrediti iznos integrala 3.29 u području  $(d - R) \leq r \leq (d + R)$ . Za integracijske krivulje koje se nalaze u rasponu  $(d - R) \leq r \leq (d + R)$ , kao što je npr. krivulja 3, polje  $\vec{H}_D$  prema 3.26 poprima različitu funkcionalnu ovisnost ovisno o kutu  $\alpha$ , tj. ovisno o  $r_D = d^2 + r^2 - 2rd \cos(\alpha)$ . Umjesto da se računa iznos krivuljnog integrala po  $dl$ , bolje je odmah promatrati cijeli volumni integral po  $dV = dl dr dz$ . Volumni integral po području  $(d - R) \leq r \leq (d + R)$  moguće je računati kao kombinaciju tri volumna integrala. Za prvi volumni integral je  $\vec{H}_D = \frac{-I}{2\pi r_D} \vec{a}_\beta$  u cijelom području  $(d - R) \leq r \leq (d + R)$  (kao da je desni vodič infinitezimalno tanak). Drugi volumni integral se računa samo po području desnog vodiča  $r_D \leq R$ , uz  $\vec{H}_D = \frac{-I}{2\pi r_D} \vec{a}_\beta$ , dok se treći volumni integral računa po istom području  $r_D \leq R$ , ali uz vrijednost polja  $\vec{H}_D = \frac{-I r_D}{2\pi R^2} \vec{a}_\beta$ , odnosno

$$\int_0^l dz \int_{d-R}^{d+R} \int_0^{2\pi} \vec{B}_L \cdot \vec{H}_D r dr d\alpha = \text{Int}_1 - \text{Int}_2 + \text{Int}_3 \quad (3.34)$$

gdje za prvi integral vrijedi da je

$$\text{Int}_1 = \int_0^l dz \int B_L \left[ \oint \vec{H}_D \cdot d\vec{l} \right] dr = \begin{cases} 0, & \text{za } (d - R) < r < d \\ \int_0^l dz \int_d^{(d+R)} B_L \cdot (-I) dr, & \text{za } d < r < (d + R) \end{cases} \quad (3.35)$$

jer je  $\vec{H}_D = \frac{-I}{2\pi r_D} \vec{a}_\beta$  pa je za  $(d - R) < r < d$  obuhvaćena struja desnog vodiča jednaka nuli, a za  $d < r < (d + R)$  je obuhvaćena struja desnog vodiča jednaka  $-I$ .

Integral  $\text{Int}_2$  i integral  $\text{Int}_3$  integriraju se samo po području desnog vodiča, tj.  $r_D < R$ , pa je povoljno centar koordinatnog sustava postaviti u centar desnog vodiča te se dobiva

$$\int \vec{H}_D \cdot \vec{B}_L dV = \int \left[ \oint \vec{B}_L \cdot H_D \frac{\vec{H}_D}{H_D} dl \right] dS = \int H_D \left[ \oint \vec{B}_L \cdot d\vec{l} \right] dS \quad (3.36)$$

gdje je sada  $d\vec{l} = \frac{\vec{H}_D}{H_D} dl$  infinitezimalni dio npr. krivulje 5 sa slike 3.4. U slučaju  $\text{Int}_2$  vrijedi da je  $\vec{H}_D = \frac{-I}{2\pi r_D} \vec{a}_\beta$ , a u slučaju integrala  $\text{Int}_3$  vrijedi da je  $\vec{H}_D = \frac{-I r_D}{2\pi R^2} \vec{a}_\beta$ . Međutim krivuljni integral u prethodnom izrazu predstavlja obuhvaćenu struju lijevog vodiča, a ona je jednaka nuli za oba

slučaja polja  $\vec{H}_D$ , pa je stoga

$$\text{Int}_2 = 0 \quad (3.37)$$

$$\text{Int}_3 = 0 \quad (3.38)$$

Kombiniranjem 3.34, 3.27 i 3.28 slijedi da je za područje  $(d - R) \leq r \leq (d + R)$

$$W_{m(d-R) \leq r \leq (d+R)} = \begin{cases} \int B_L \cdot I dS = \int_0^l dz \int_{d-R}^d (I \frac{\mu}{2\pi r}) I dr, & \text{za } (d - R) \leq r \leq d \\ 0, & \text{za } d \leq r \leq (d + R) \end{cases} \quad (3.39)$$

Konačno, zbrajanjem izraza 3.31, 3.32, 3.33 i 3.39 dobiva se ukupna magnetska energija

$$W_m = \int_0^l dz \int_0^R (I \frac{\mu r}{2\pi R^2}) \cdot (I \frac{r^2 \pi}{R^2 \pi}) dr + \int_0^l dz \int_R^d (I \frac{\mu}{2\pi r}) I dr \quad (3.40)$$

Provođenjem integracije dobiva se konačni iznos magnetske energije, tj.

$$W_m = l \mu (\frac{1}{8\pi} + \frac{1}{2\pi} \ln(\frac{d}{R})) \cdot I^2 \quad (3.41)$$

Dakle, magnetska energija je jednaka umnošku kvadrata struje i neke konstante. Ta konstanta je nazvana induktivitet, točnije polovica induktiviteta jer se u izrazu 3.22 javlja  $\frac{1}{2}$ , ali i kako bi se s druge strane uspostavila 1:1 veza između struje i ulančenog toka. Dakle, induktivitet  $L$  beskonačno dugog ravnog zavoja s vodičima kružnog poprečnog presjeka radijusa  $R$  i razmaka  $d$  među centrima, uz  $d \gg R$ , jednak je

$$L = \frac{2W_m}{I^2} \Rightarrow L = \frac{l\mu}{\pi} (\frac{1}{4} + \ln(\frac{d}{R})) \quad (3.42)$$

Ovim postupkom je potpuno izbjegnuta upotreba nejasno definiranog (dvosmislenog) ulančenog toka u području  $r < R$ . Također, zanimljivo je uočiti da drugi integral u 3.40, tj. zbroj integrala  $I \int B_L dS$  koji se javljaju u izrazima 3.32 i 3.39, upravo predstavlja umnožak struje i ulančenog toka. Sličnim postupkom se može odrediti induktivitet za slučaj kada ne vrijedi da je  $d \gg R$ , ali tada je potrebno uzeti u obzir nesimetričnu razdiobu gustoće struje u vodičima uzrokovanu magnetskom silom među strujama dvaju vodiča, jer ne vrijede formule 3.25 i 3.26.

Dodajmo još jedan komentar na integral  $\text{Int}_1$  u 3.34, s  $\vec{B}_L = \frac{I}{2\pi r} \vec{a}_\alpha$  i  $\vec{H}_D = \frac{-I}{2\pi r_D} \vec{a}_\beta$ , koji se može riješiti i analitički čime se dobiva

$$\int_0^l dz \int_{d-R}^r \int_0^{2\pi} \vec{B}_L \cdot \vec{H}_D r dr d\alpha = \int_0^l dz \int_{d-R}^r \int_0^{2\pi} \frac{r - d \cos \alpha}{r^2 - 2rd \cos \alpha + d^2} r dr d\alpha \quad (3.43)$$

gdje su iskorištene jednкости  $r_D = d^2 + r^2 - 2rd \cos(\alpha)$ , te  $\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta = \frac{d \cos \alpha - r}{r_D}$ . Ovaj integral je zahtjevan za rješavanje, a jednak je 0 za  $(d - R) \leq r \leq d$ , te  $-I$  za  $d < r < (d + R)$ . Me-

đutim, njegovo rješavanje primjenom Ampereovog zakona, kako je ranije pokazano, znatno je jednostavnije. Još jedna opaska: Sličnim postupkom se može iz električne energije izračunati kapacitet ovakvog beskonačno dugog ravnog zavoja.

## 4. NGSolve bilješke

U ovom poglavlju nalaze se samo važne bilješke vezane za NGSolve, i relevantne bilješke vezane za Python unutar NGSolve. Također, sekcija je namijenjena i dokumentiranju FEM teorije u kontekstu NGSolve koja se najviše odnosi na FEM teoriju zadaće vrtložnih struja.

### 4.1 Neke od najvažnijih klasa i metoda

`CoefficientFunction` :: jedna od najvažnijih klasa u NGSolve jer omogućuje neprimjetan prelazak između simboličkih izraza i numeričkih podataka što je posebno važno u pretprocesiranju i postprocesiranju te vizualizaciji rezultata simulacije. Objekt te klase može biti inicijaliziran korištenjem ili skalara, ili liste (lista skalara ili lista `CFova`) ili tupla (tuple skalara ili tuple `CFova`). Objekt ove klase je callabilan i kao input prima nekoliko različitih objekata, a između ostalog to su float, mip i `MeshPoint` (`ngsolve.fem.MeshPoint` se dobije kao rezultat poziva objekta klase `Mesh`, npr. `mp1 = mreza(0.2, 0.5)`, gdje je mreza objekt klase `Mesh`). Objekt ove klase je i indeksabilan (npr. vektorska komponenta u slučaju vektorske CF). Ova klasa također sadrži sve metode Magične metode `__add__`, `__sub__`, `__mul__`, `__truediv__` i `__pow__`, i čak njihove desnostrane verzije (`__radd__`, `__rsub__`, itd), to jest definirani su operatori `+`, `-`, `*`, `/` i `**`. Štoviše, definicije svih tih operatora su overloadane, tj. rezultat primjene tih operatora ovisi o tipu argumenata, tj. učesnika u operacijama. Na tome se onda vjerojatno temelji i *expression tree* neke CF, čiji su čvorovi upravo aritmetičke operacije i elementarne funkcije (`sin`, `cos`, ..., a koje su isto overloadane funkcije jer za CF input daju CF output), a listovi od tog *expression tree* su CF funkcije i int ili float brojevi koji pri množenju (operator `*`) i zbrajanju (operator `+`) opet daju CF.

`GridFunction` :: ova klasa je dijete klase `CoefficientFunction`, a služi za spremanje vektora podataka numeričkog rješenja simulacije. Međutim, `GridFunction` nije naslijedio `__call__` metodu nego ima svoju koja, za razliku od `CF(mesh(x,y,y))`, omogućuje poziv oblika `gfu(x,y,z)`, bez prethodnog obavljanja poziva iz `mesh()` objekta, gdje su `x`, `y` i `z` float koordinate. Koliko vidim, za razliku od `CoefficientFunction`, inicijalizirani objekt klase `GridFunction` nema *expression tree*.

`Mesh` :: ova klasa je jedna od ključnih klasa u NGSolve jer kao što samo ime kaže, instanca ove klase sadrži podatke i metode konkretne mreže konačnih elemenata. Objekt te klase je callabilan i indeksabilan, tj. ima definirane `__call__` i `__getitem__` metode. Pri pozivu objekta klase `Mesh`, ulazni podaci su `numpy.ndarray` ali izgleda i obični tupli pa čak i `float`, mada to ne vidim u deklaraciji metode `__call__` klase `Mesh`.

`IfPos()` :: Ova metoda omogućuje ugrađivanje `If-else` logike unutar analitičkih funkcija, odnosno zadavanje po dijelovima definiranih funkcija. Budući da je `CoefficientFunction` gradivni element izračuna, NGSolve nije u mogućnosti raditi matematičke operacije nad korisnički definiranim Python funkcijama pa je stoga `IfPos()` metoda izrazito važna. Pojednostavljena deklaracija metode `IfPos()` glasi `IfPos(CF1, thenObj, elseObj) -> CF2`, a tumačenje je sljedeće. `CF1` predstavlja `CoefficientFunction` funkciju koja ako je pozitivna, izlazna `CoefficientFunction` `CF2` će biti jednaka `thenObj`, inače `CF2` će biti jednaka `elseObj`. Dakle za `thenObj` i `elseObj` se moraju zadati `CoefficientFunction` funkcije.

Prema deklaraciji, metoda je overloadana pa je umjesto `CoefficientFunction` objekata moguće prilikom inicijalizacije koristiti još i `Numpy array` objekte, ali pritom sva tri objekta moraju biti `Numpy array` objekti.

Vrlo dobar primjer primjene `IfPos()` metode je kod zadavanja strujne uzbude u namotu preko strujnog vektorskog potencijala  $\vec{T}_s$ . U sljedećem kodu je primjer uzbude za namot koji ima tzv. *racetrack* oblik:

```
f = LinearForm(fes)
I=4 #Amp
zavoj=447
dno=-0.09 #m
vrh=0.01 #m
centy=0.035 #m
rin=0.012 #m
rout=0.02 #m
R=(x**2 + (y-centy)**2)**0.5 #m
Js=1.414*I*zavoj/((rout-rin)*(vrh-dno)) #A/m2
izvan=CF((0,0,Js*(rout-rin)))
nula=CF((0,0,0))

Ts_coil=IfPos(y-centy, CF((0,0,Js*(R-rin))),CF((0,0,Js*(x-rin))))
Ts_air=IfPos(rin-R, nula, IfPos(rin-x, IfPos(y-centy,izvan,nula), izvan)) * IfPos((z-vrh)*(z-dno),0,1)
f += Ts_coil *curl(alpha) * dx("coil") + Ts_air *curl(alpha) * dx("air|core")

f.Assemble()
```

Također, korištenjem `IfPos()` metode može se zadati i HB krivulju, ali takvo što se isplati samo u nekom jednostavnom primjeru HB krivulje. Za zadavanje HB krivulje preporučljivo je koristiti sljedeću metodu.

`BSpline()` :: ova metoda je ključna za izradu HB krivulje u NGSolve. Budući da HB krivulja učestvuje u formulaciji, tj. u izračunu, mora biti objekt klase `CoefficientFunction`.

U nastavku je primjer kreiranja HB krivulje za ulazne podatke  $B_{ref}$  i  $H_{ref}$  pomoću `BSpline()`

```
mu0=4*pi*1e-7

B_ref=[0.0, 0.04, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.35,
        1.4, 1.45, 1.5, 1.55, 1.6, 1.65, 1.7, 1.74, 1.77, 1000]
H_ref=[0.0, 3.5, 5.0, 7.6, 10.0, 12.07, 14.08, 16.0, 17.75, 19.42, 21.05, 22.64, 24.16,
        25.76, 27.98, 29.66, 32.05, 35.33, 40.06, 47.17, 58.35, 77.19, 107.0, 160.0, 270.0,
        1000/mu0]

HBcurve = BSpline(2, [0]+list(B_ref), list(H_ref)) #ovo je instanca klase BSpline
diffHB= HBcurve.Differentiate() #HBcurve.Differentiate() metoda daje dH/dB, koji je
takodjer objekt klase BSpline
```

U radu s `BSpline()` preporučljivo je vizualizirati krivulju kako bismo bili sigurni u točnost krivulje. Sljedeći kod je primjer kako se može provesti vizualizacija `BSpline()` unutar `NGSolve`:

```
Bvis = Parameter(0) #klasa Parameter je dijete klase CF. Uvrstavanjem Hvis u pozivu
BSpline() je poziv oblika BSpline(CF)...jer je __call__ overloadan

HBcurve_vis = HBcurve((1e-6+sqrt(Bvis*Bvis+1e-6)))/(1e-6+sqrt(Hvis*Hvis+1e-6)) #prema
__call__ poziv BSpline(CF) daje CF.
diffHB_vis= diffHB((1e-6+sqrt(Bvis*Bvis+1e-6))) #buduci da je diffHB objekt klase BSpline
, prema __call__ poziv BSpline(CF) daje CF

Hvec=[]
Hder=[]
Bvec=[i*1.771/100 for i in range(1,102)]
for k in Bvec:
    Bvis.Set(k)
    Hvec.append(HBcurve_vis(mesh())) #buduci da je HBcurve_vis CF funkcija, prema
__call__ klase CF za dobivanje vrijednosti i CF moze se koristiti input "mesh()"
    Hder.append(diffHB_vis(mesh()))

# v i s u a l i z a t i o n ::pomocu matplotlib::
plt.xlabel('B')
plt.scatter(B_ref[:-1],H_ref[:-1])
plt.plot(Bvec, Hvec)
plt.plot(Bvec, Hder)
plt.show()
```

## 4.2 Bazne funkcije

U nastavku su ukratko opisane čvorne i bridne bazne funkcije u svrhu brzog podsjetnika na ključne detalje. Sekcija bi se kroz vrijeme trebala proširiti.

### 4.2.1 Baricentrične koordinate

Baricentrične koordinate neke točke  $T$  u trokutu predstavljaju normalizirane udaljenosti točke  $T$  od stranica trokuta. Te udaljenosti su normalizirane duljinom visina na pojedine stranice. Dakle, kada točka  $T$  leži na nekoj stranici trokuta (npr. stranici  $a$ ), njena udaljenost od te stranice je



jednaka 0. Kad je točka  $T$  smještena u vrhu  $A$  trokuta  $\Delta ABC$ , njena normalizirana udaljenost od stranice  $a$  je jednaka 1, a udaljenost do stranice  $b$  i  $c$  je jednaka 0.

Neka su baricentrične koordinate označene slovima  $l_a$ ,  $l_b$  i  $l_c$ , tada vrijedi da je  $l_a = d(T, a)/v_a$ , gdje je  $d(T, a)$  udaljenost točke  $T$  od stranice  $a$ , dok je  $v_a$  visina na stranicu  $a$ . Analogno tome, vrijedi da je  $l_b = d(T, b)/v_b$  i vrijedi da je  $l_c = d(T, c)/v_c$ .

Može se povući zgodna poveznica s površinama trokutića  $\Delta ATB$  i  $\Delta ATC$  i  $\Delta BTC$ , jer ta tri trokutića zajedno čine trokut  $\Delta ABC$ . Dakle, za baricentrične koordinate vrijedi da je

$$l_a = \frac{d(T, a)}{v_a} = \frac{d(T, a)}{v_a} \cdot \frac{a/2}{a/2} = \frac{d(T, a) \cdot a/2}{v_a \cdot a/2} = \frac{P(\Delta BTC)}{P(\Delta ABC)} \quad (4.1)$$

$$l_b = \frac{d(T, b)}{v_b} = \frac{d(T, b)}{v_b} \cdot \frac{b/2}{b/2} = \frac{d(T, b) \cdot b/2}{v_b \cdot b/2} = \frac{P(\Delta ATC)}{P(\Delta ABC)} \quad (4.2)$$

$$l_c = \frac{d(T, c)}{v_c} = \frac{d(T, c)}{v_c} \cdot \frac{c/2}{c/2} = \frac{d(T, c) \cdot c/2}{v_c \cdot c/2} = \frac{P(\Delta ATB)}{P(\Delta ABC)} \quad (4.3)$$

Budući da je  $P(\Delta ATB) + P(\Delta ATC) + P(\Delta BTC) = P(\Delta ABC)$ , vrijedi da je  $l_a + l_b + l_c = 1$ . Zanimljivo je spomenuti da je baricentrične koordinate prvi otkrio Möbius.

## 4.2.2 Čvorne bazne funkcije

Čvorne bazne funkcije pripadaju konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru  $W_h \subset H^1(\Omega)$  definiranom s obzirom na mrežu konačnih elemenata. Pritom je  $H^1(\Omega)$  Sobolovljev prostor kontinuiranih funkcija nad problemskom domenom  $\Omega$ , odnosno

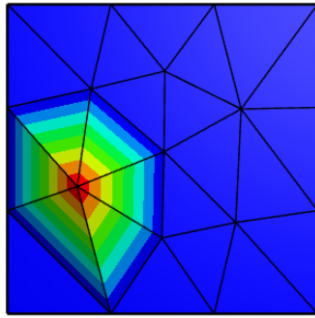
$$H^1(\Omega) = \{\varphi \in L_2(\Omega) \mid \nabla \varphi \in L_2(\Omega)\} \quad (4.4)$$

gdje je  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , skalarna funkcija  $\varphi$  je opći element od  $H^1(\Omega)$ , a  $L_2(\Omega)$  predstavlja vektorski prostor kvadratno-integrabilnih funkcija.

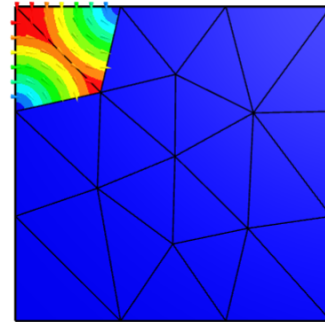
Primjerice:

Trokut s tri čvora (smještena u vrhovima trokuta) ima tri stupnja slobode. S tri stupnja slobode ( $k_1$ ,  $k_2$  i  $k_3$ ) može se generirati 2D funkcija prvog stupnja (ravna ploha) čiji analitički zapis glasi  $\varphi = k_1 + k_2 \cdot x + k_3 \cdot y$ , u  $xy$ -domeni.

Ako se stupnjevi slobode definiraju kao iznos funkcije  $\varphi$  u čvoru (npr.  $\varphi(\check{c}_1) = N_1$ ) tada se može pokazati da je  $\varphi = N_1 \cdot l_1 + N_2 \cdot l_2 + N_3 \cdot l_3$ . Izraz se može interpretirati tako da svaki čvorni stupanj slobode  $N_i$  vezan za  $i$ -ti čvor  $\check{c}_i$  posjeduje baznu funkciju  $\lambda_i$  koja množi stupanj slobode  $N_i$ , pri čemu za bazne funkcije u ovom slučaju (prvog stupnja) vrijedi da su unutar pojedinog trokuta jednake baricentričnim koordinatama, to jest  $\lambda_1 = l_1$ ,  $\lambda_2 = l_2$  i  $\lambda_3 = l_3$ . Međutim, pojedina bazna funkcija  $\lambda_k$  je vezana za  $k$ -ti čvor i različita je od nule u svim trokutovima kojima  $k$ -ti čvor pripada, pa je stoga  $\lambda_k$  tzv. šešir (hat) funkcija kao na slici



**Slika 4.1:** Čvorna bazna funkcija prvog stupnja, tzv. šesir funkcija. U elementima kojima čvor pripada funkcija je različita od nule.



**Slika 4.2:** Vektori bridne bazne funkcije prvog stupnja. Boja naznačava modul. Funkcija je različita od nule u susjednim elementima.

### 4.2.3 Bridne bazne funkcije

Bridne bazne funkcije pripadaju konačnodimenzionalnom prostoru  $V_h \subset H(\text{curl}, \Omega)$ , gdje je  $H(\text{curl}, \Omega)$  Sobolovljev prostor tangencijalno kontinuiranih funkcija nad problemskom domnom  $\Omega$ , odnosno

$$H(\text{curl}, \Omega) = \{\vec{v} \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^3) : \nabla \times \vec{v} \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^3)\} \quad (4.5)$$

gdje je  $\vec{v}$  opći element od  $H(\text{curl}, \Omega)$ , dok  $L_2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  predstavlja vektorski prostor kvadratno-integrabilnih funkcija.

Primjerice:

Bridne bazne funkcije vezane su za brid konačnog elementa. Bridne bazne funkcije prvog stupnja definirane su korištenjem čvornih baznih funkcija vezanih za geometrijske vrhove konačnog elementa. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je trokut pravokutan i da su  $l_1$  i  $l_2$  onda međusobno okomite koordinate. S obzirom na to da je  $l_1 + l_2 + l_3 = 1$ , slijedi da je  $\lambda_1 = l_1$ ,  $\lambda_2 = l_2$ , a  $\lambda_3 = 1 - l_1 - l_2$ .

Neka je brid  $e_{12}$  brid između vrhova  $v_1$  i  $v_2$ , u kojima su smješteni čvorovi  $\check{c}_1$  i  $\check{c}_2$ . Tada unutar trokutnog elementa bridna bazna funkcija  $\vec{\alpha}_{12}$  vezana za brid  $e_{12}$  glasi  $\vec{\alpha}_{12} = \lambda_1 \nabla \lambda_2 - \lambda_2 \nabla \lambda_1$ . Zatim, ako se uvrste baricentrične koordinate dobije se:

$$\vec{\alpha}_{12} = l_1 \nabla l_2 - l_2 \nabla l_1 = l_1 \vec{a}_{l_2} - l_2 \vec{a}_{l_1} \quad (4.6)$$

Bridne bazne funkcije su linearno nezavisne. Međutim, rotori bridnih baznih funkcija su linearno zavisni. Ako primijenimo operator divergencije na prethodnu bridnu baznu funkciju  $\vec{\alpha}_{12}$  dobit će se  $\nabla \cdot \vec{\alpha}_{12} = 0$ , što znači da je prema Helmholtzovoj dekompoziciji potencijalna (bezvrtložna) komponenta od  $\vec{\alpha}_{12}$  vektorsko polje čije su komponente polinomi nultog stupnja (konstanta). Ako primijenimo operator rotacije na bridnu baznu funkciju  $\vec{\alpha}_{12}$  dobit će se  $\nabla \times \vec{\alpha}_{12} = 2 \cdot \vec{a}_z$ , što znači da je rotacijska komponenta od  $\vec{\alpha}_{12}$  vektorsko polje čije su kompo-

nente polinomi prvog stupnja. Helmholtzov dekompozicija opisana je u podsekciji 4.3.8.

Tangencijalna komponenta linearne kombinacije bridnih baznih funkcija na  $i$ -tom bridu potpuno je određena samo  $i$ -tom bridnom baznom funkcijom. Normalna komponenta linearne kombinacije bridnih baznih funkcija na  $i$ -tom bridu konačnog elementa  $K$  određena je linearnom kombinacijom  $i$ -te bridne bazne funkcije te svih ostalih bridnih baznih funkcija vezanih za bridove koji imaju zajednički čvor s  $i$ -tim bridom.

## 4.3 Bilješke iz matematike

U ovom poglavlju nalazi se podsjetnik matematičke teorije koja je potrebna za bolje razumijevanje FEM teorije, ali i ostala matematička znanja dobivena tijekom boravka na TU Wien.

### 4.3.1 Pozitivna definitnost matrice

Neka je matrica  $M$  realna i simetrična ( $M = M^T$ ). Ona je pozitivno definitna ako je skalar  $x^T M x > 0$  za svaki vektor  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Također, realna i simetrična matrica  $M$  je pozitivno definitna ako su sve njene svojstvene vrijednosti pozitivni realni brojevi. U kontekstu kompleksnih brojeva, simetričnoj matrici je analogna Hermitska matrica ( $M = \overline{M}^T$ , gdje je  $\overline{M}^T$  konjugirana transponirana matrica  $M$ ). Matrica je pozitivna semi-definitna ako je  $x^T M x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

KOMENTARI:

- Jedinična matrica  $I$  je očito SPD (simetrična pozitivno definitna) matrica jer za svaki nenul vektor  $x$  vrijedi da je  $x^T I x = x^2 > 0$ .
- Matrica čiju su neki elementi negativni i dalje može biti SPD.
- Matrica čiji su svi elementi pozitivni nije nužno SPD.
- Svaka matrica  $M$  dobivena kao produkt  $M = A^T A$ , gdje je matrica  $A$  regularna, jest SPD matrica. Dokaz je jednostavan. Matrica  $M$  je SPD ako za nenul vektor  $x$  vrijedi da je  $x^T M x > 0$ , a budući da je  $x^T M x = x^T (A^T A) x = (x^T A^T)(Ax) = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|^2 > 0$ .

Moglo bi se još ponešto reći i o svojstvenim vrijednostima u ovom kontekstu. Trag matrice je jednak zbroju svojstvenih vrijednosti, a determinanta matrice je jednaka umnošku svojstvenih vrijednosti. Trag matrice je zbroj dijagonalnih elemenata matrice.

### 4.3.2 Metrika i metrički prostori

Metrički prostor je skup  $S$  (dakle samo skup elemenata, ne nužno vektorski prostor) kojemu je pridružena metrika, tj. definirana je (zadan je način na koji se mjeri) udaljenost među njegovim elementima. Pritom je udaljenost (metrika) ustvari funkcija  $d$  koja uzima dva elementa skupa  $S$  i vraća udaljenost među njima. Da bi ta funkcija  $d$  mogla biti valjana metrika ona mora zadovoljavati bazične uvjete za sve elemente skupa  $S$ : a) udaljenost elementa od samog sebe

naravno iznosi 0; b) simetričnost, tj. udaljenost elementa  $a$  do elementa  $b$  jednaka je udaljenosti elementa  $b$  do elementa  $a$ ; c) nejednakost trokuta.

PRIMJERI zanimljivih metrika su:

- Udaljenost dvije točke na površini kugle. Npr, za slučaj planete Zemlje, ljudi definiraju (koriste) različitu udaljenost (metriku) kada pričaju o putovanju od jednog do drugog grada u odnosu na udaljenost između ta dva grada kada su u pitanju seizmički valovi.
- Još je zanimljivija metrika na šahovskoj ploči. Različite figure koriste različitu metriku. Npr, centri dvaju šahovskih polja koji se nalaze na vrhovima pravokutnog trokuta nasuprot katetama duljine 3 i 4, iz perspektive topa udaljeni su 7, a iz perspektive kraljice 4. Pretpostavio sam da je jedinična duljina jednaka širini jednog šahovskog polja.

### 4.3.3 Otvoreni i zatvoreni skupovi

Zadan je metrički prostor  $(X, d)$  (skup  $X$  opremljen metrikom  $d$ ). Neka je  $A$  podskup od  $X$ , tj.  $A \subseteq X$ . Otvorenost skupa  $A$  definira se pomoću koncepta "otvorene  $\varepsilon$ -lopte oko elementa  $x$ " označene s  $B_\varepsilon(x)$  koja se definira kao  $B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ . Dakle, skup  $A \subseteq X$  je otvoren ako za svaki  $x \in A$  postoji  $B_\varepsilon(x) \subseteq A$  (za proizvoljno mali  $\varepsilon$ ). Međutim, otvorenost i/ili zatvorenost skupa  $A \subseteq X$  ja bih definirao s obzirom na granicu skupa  $A$  koju se obično označava s  $\partial A$ . Za definiranje  $\partial A$  koristi se  $B_\varepsilon(x)$  lopta, to jest

$$\partial A = \{x \in X \mid B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset \forall \varepsilon > 0\}$$

gdje je  $A^c$  komplement skupa  $A$ , tj.  $A^c := X \setminus A$ . Dakle,  $x \in \partial A$  ako će  $B_\varepsilon(x)$  sadržavati elemente iz oba skupa, tj. i iz  $A$  i iz  $A^c$ , koliko god da smanjimo  $\varepsilon$ , tj. radijus  $B_\varepsilon(x)$  lopte. Nakon što smo definirali granicu, vrlo jednostavno definiramo otvorenost i/ili zatvorenost skupa  $A \subseteq X$  (važno je da pišem ovaj  $X$  jer otvorenost i zatvorenost imaju smisla samo u kontekstu "svemira", tj. metričkog prostora  $X$ ).

1. Skup  $A \subseteq X$  je otvoren skup ako je  $A \cap \partial A = \emptyset$ .

2. Skup  $A \subseteq X$  je zatvoren skup ako je  $A \cap \partial A = A$ .

KOMENTAR: Primijeti da skup  $A$  može biti u četiri statusa, tj. skup  $A$  može biti

- i otvoren i zatvoren: ako je  $\partial A = \emptyset$ , tada istovremeno vrijede oba uvjeta
- niti otvoren niti zatvoren: ako ne vrijedi nijedan od dvaju uvjeta, tj. postoji granica  $\partial A$ , ali je ona na jednom dijelu dio od  $A$ , a na drugom dijelu dio od  $A^c$
- samo otvoren (i nezatvoren): vrijedi samo prvi uvjet (a drugi ne vrijedi).
- te samo zatvoren (i neotvoren): vrijedi samo drugi uvjet (a prvi uvjet ne vrijedi)

Definira se i "closure" skupa kao  $\bar{A} = A \cup \partial A$  i on je očito po definiciji uvijek samo zatvoren. Uoči dakle da skup  $A$  može biti istovremeno zatvoren i neomeđen.

PRIMJER:

Neka je  $X = (1, 2] \cup (3, \infty)$  opremljen normom  $d := |x - y|$ , tj.  $(X, d)$  je metrički prostor. Je li njegov podskup  $A = (1, 2]$  otvoren?

Odgovor:  $A$  je u isto vrijeme i otvoren i zatvoren jer je  $\partial A = \emptyset$  pa onda istovremeno vrijedi i  $A \cap \partial A = \emptyset$  i  $A \cap \partial A = A$ . Granica  $\partial A$  je prazan skup jer lijevo od  $x = 1$  nema elemenata u "svemiru"  $X$  pa je  $B_\varepsilon(x) \cap A^c = \emptyset$  jer je tu  $A^c = \emptyset$ , tj. točka  $x = 1$  ne pripada  $\partial A$ . Slično tome, ni točka  $x = 2$  ne pripada  $\partial A$  jer uvjet  $B_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset$  (iz definicije za  $\partial A$ ) ne vrijedi za svaki  $\varepsilon$ .

#### 4.3.4 Norma

Norma vektorskog prostora  $X$  je funkcija koja pridjeljuje svakom vektoru određenu nenegativnu realnu vrijednost. Intuitivno, norma vektora mjeri veličinu (duljinu) vektora  $x$  iz tog zadanog vektorskog prostora  $X$ . Norma se označava kao  $\|\cdot\|$ . Prema tome,  $(X, \|\cdot\|)$  je onda normirani prostor. Da bi neka funkcija  $\|\cdot\|$  za mjerenje duljine vektora bila norma, ona mora zadovoljiti tri bazična kriterija:

- pozitivna definitnost:  $\|x\| \geq 0$  za sve  $x \neq 0$ , tj.  $\|x\| = 0$  samo ako je  $x = 0$ .
- multiplikativna skaliranost:  $\|cx\| = |c| \cdot \|x\|$  za sve skalarne faktore  $c$  i sve vektore  $x$ .
- nejednakost trokuta:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  za sve vektore  $x$  i  $y$ .

KOMENTAR:

- Budući da su funkcije ustvari beskonačno dimenzionalni vektori, za neku funkciju  $f$  moguće je računati normu  $\|f\|$ , što onda uključuje integriranje funkcije (analogno sumiranju komponenti vektora u konačnodimenzionalnom slučaju).
- Norma vektorskog prostora je na neki način specijalni slučaj metrike vektorskog prostora (tj. kao udaljenost između vektora  $x$  i nul vektora). Zato je za normirani vektorski prostor  $X$  moguće automatski definirati metriku prostora  $X$ . Takva metrika je tada inducirana normom. Prema tome, za dva elementa  $x, y \in X$  vrijedi da je:  $d_{\|\cdot\|}(x - y) = \|x - y\|$

PRIMJER:

Minkowski norma vektora  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  definira se kao  $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$ .

Neka je  $x = (3, -4)$ , Minkowski norma vektora  $x$  za različite vrijednosti  $p$  iznosi:

$$\|x\|_1 = |3| + |-4| = 3 + 4 = 7,$$

$$\|x\|_2 = (3^2 + (-4)^2)^{1/2} = 9 + 16 = 25 = 5,$$

$$\|x\|_3 = (|3|^3 + |-4|^3)^{1/3} = (27 + 64)^{1/3} = 91^{1/3}$$

Važno je uočiti da norma  $\|x\|_n$  mora sadržavati  $n$ -ti korijen kako bi norma bila valjana, tj. da bi se zadovoljio uvjet na multiplikativnu skaliranost norme.

#### 4.3.5 Cauchyjevi nizovi i kompletnost prostora

Intuitivno govoreći, Cauchyjev niz je naziv za niz čiji su članovi sve bliže jedan drugome kako indeks niza raste. Dakle, Cauchyev niz je generalizacija konvergentnih nizova, jer ima blaže

zahtjeve nego konvergentni nizovi. Formalno govoreći, neki niz  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  je Cauchyjev niz ako za bilo kakav  $\varepsilon > 0$  postoji indeks  $N$  takav da za svaki  $k, m > N$  vrijedi  $|a_k - a_m| < \varepsilon$ .

Primjerice, niz  $a_n = \frac{1}{2^n}$  jest Cauchyjev niz jer za bilo koji  $\varepsilon > 0$  postoji indeks  $N$  nakon kojeg je međusobna udaljenost bilo koja dva (ne nužno susjedna) člana  $a_k$  i  $a_m$  s indeksima  $k, m > N$  manja od  $\varepsilon$ .

Kontraprimjer je niz  $a_n = n$  jer za npr.  $\varepsilon = 1$  ne postoji dovoljno velik indeks  $N$  nakon kojeg će udaljenost članova  $a_k$  i  $a_m$ , gdje je  $k, m > N$  biti manja od  $\varepsilon$ .

Primijeti još jednom da za razliku od konvergentnih nizova (koji u definiciji spominju postojanje limesa), Cauchyevi nizovi ne spominju postojanje limesa (nego samo približavanje članova kako indeks raste) što ih čini blažima od konvergentnih nizova.

Razlog za definiranje Cauchyjevih nizova je taj što se pomoću njih lakše definira potpunost vektorskih prostora (nego da se koriste stroži konvergentni nizovi), jer definiraju nizove za koje ima smisla tražiti limes. Intuitivno, potpunost prostora znači da taj prostor nema rupa. Naime, da bi neki vektorski prostor  $X$  bio potpun svi Cauchyevi nizovi u vektorskom prostoru moraju konvergirati tako da je njihov limes također član vektorskog prostora  $X$ .

Primjerice, prostor  $\mathbb{R}$  je potpun jer svaki Cauchyjev niz elemenata konvergira prema nekom elementu koji je također član prostora  $\mathbb{R}$ .

Kontraprimjer je prostor racionalnih brojeva  $\mathbb{Q}$  u kojem postoje Cauchyevi nizovi racionalnih brojeva koji konvergiraju prema iracionalnom broju (koji nije element od  $\mathbb{Q}$ ). Jedan takav niz je rekursivni niz  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$  koji dakle jest Cauchyjev niz, ali konvergira prema  $\sqrt{2}$  koji nije član od  $\mathbb{Q}$  pa stoga  $\mathbb{Q}$  nije potpun vektorski prostor.

### 4.3.6 Nosač funkcije

Nosač (support) neke funkcije  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  označava se sa  $\text{supp}\{u\}$  i definira se kao:

$$\text{supp}\{u\} := \{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$$

Dakle, to je dio domene na kojem je funkcija različita od 0. Obično se pretpostavlja da je  $u$  kontinuirana funkcija. Ono što je posebno interesantno jesu *kompaktni nosači*. Formalnu definiciju trenutno ne znam jer je malo kompliciranija (uključuje topologiju). Ono što znam je da je kompaktan nosač funkcije onaj nosač koji je zatvoren i omeđen (skup može biti istovremeno zatvoren i neomeđen) te posjeduje jedan vid potpunosti, tj. nema rupa. Intuitivno govoreći, kompaktan nosač funkcije je dio domene na kojem funkcija ima vrijednost različitu od 0, a izvan kojeg funkcija svugdje poprima vrijednost 0. Primjer funkcije koja ima kompaktan nosač upravo je šešir (hat) funkcija, odnosno standardna čvorna bazna funkcija definirana nad pripadajućim konačnim elementima unutar mreže konačnih elemenata jer takva funkcija je različita od 0 nad konačnim elementima kojima čvor pripada, a nad svim ostalim konačnim elementima

ima vrijednost 0. Kompaktan nosač te bazne funkcije je područje konačnih elemenata kojima čvor pripada.

Još jedan primjer funkcije s kompaktnim nosačem je

$$f = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{za } |x| < 1 \\ 0, & \text{za } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Kompaktni nosač ove funkcije je jednak  $\text{supp}\{f\} = [-1, 1]$

### 4.3.7 Slaba derivacija

Slaba derivacija je ključan koncept za razumijevanje slabe formulacije. Neka je prostor glatkih funkcija s kompaktnim nosačem označen s  $\mathcal{D}(\Omega)$ , gdje je  $\Omega$  domena tih funkcija. Intuitivno govoreći, slaba prva derivacija  $D_w^1$  (indeks  $w$  zbog *weak*) funkcije  $u$  je funkcija  $g = D_w^1 u$  za koju vrijedi sljedeća jednakost:

$$\int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \partial_x \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Dakle, funkcija  $g(x)$  je slaba derivacija funkcije  $u(x)$  ako su ova dva određena integrala jednaka za svaku testnu funkciju  $\varphi$  iz prostora glatkih funkcija s kompaktnim nosačem  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Prethodni integral je dobiven putem parcijalne integracije, a rubne vrijednosti su iščezle jer je  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , tj.  $\varphi(\partial\Omega) = 0$ . Intuitivno, u konačnodimenzionalnom prostoru  $\mathcal{D}_h(\Omega)$ , to znači da je  $g = \partial_x u$  zadovoljeno u nekom prosječnom smislu.

### 4.3.8 Helmholtzova dekompozicija

Pojam "Helmholtzova dekompozicija" ima dvije konotacije, koje su bliske ali ne potpuno iste. Jedna se konotacija odnosi na tvrdnju o jedinstvenosti vektorskog polja ako su poznati njegova divergencija i rotacija, uz još neke uvjete. Druga konotacija se odnosi na mogućnost rastava vektorskog polja na komponente (tzv. potencijale). Ovdje ću objasniti drugu konotaciju.

Prema Helmholtzu, svako dovoljno glatko vektorsko polje  $\vec{F}$  definirano na omeđenoj domeni  $V \subseteq \mathbb{R}^3$ , pri čemu je  $\vec{F}$  barem klase  $C^2$  (sve prve i druge derivacije su kontinuirane funkcije), može se rastaviti na zbroj potencijalnog vektorskog polja  $\vec{G}$  i solenoidalnog vektorskog polja  $\vec{R}$ , odnosno  $\vec{F} = \vec{G} + \vec{R}$ .

Budući da je  $\nabla \times \vec{G} = 0$ , tj.  $\vec{G} = \nabla \phi$  i  $\nabla \cdot \vec{R} = 0$ , tj.  $\vec{R} = \nabla \times \vec{A}$ , vrijedi da je:

$$\vec{F} = \nabla \phi + \nabla \times \vec{A} \tag{4.7}$$

Ako je  $V$  neomeđena domena, tj.  $V = \mathbb{R}^3$ , tada (4.7) vrijedi pod uvjetom da  $\vec{F}(r)$  teži u 0 barem jednako brzo kao  $1/r$ , kad  $r \rightarrow \infty$ .

*Helmholtz u Sobolevljevom prostoru:*

Helmholtzova dekompozicija može se generalizirati smanjenjem uvjeta regularnosti (potrebe za postojanjem jakih derivacija). Pretpostavimo da je  $\Omega$  omeđeno, jednostavno povezano, Lipschitzovo područje. Svako vektorsko polje  $\vec{F}$  s kvadratno integrabilnim vektorima  $\vec{F} \in (L^2(\Omega))^3$  ima ortogonalnu dekompoziciju:

$$\vec{F} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{A} \quad (4.8)$$

gdje  $\phi \in H^1(\Omega)$ , a  $H^1(\Omega)$  je Sobolevljev prostor kvadratno integrabilnih funkcija na  $\Omega$  čije su parcijalne derivacije ("definirane u smislu distribucija"? - ne znam što to znači) kvadratno integrabilne, a  $\vec{A} \in H(\text{curl}, \Omega)$ , gdje je  $H(\text{curl}, \Omega)$  Sobolevljev prostor kvadratno integrabilnih vektorskih polja sa kvadratno integrabilnim rotacijama od  $\vec{A}$ .