

# Résolution d'équations non linéaires par la méthode de Newton

21 mai 2024

## Table des matières

<b>1 Définitions et Concepts Fondamentaux</b>	<b>4</b>
1.1 Théorème du développement de Taylor . . . . .	4
1.2 Multiplicité d'une racine . . . . .	4
1.3 Équation non linéaire . . . . .	5
1.4 Méthodes de résolution d'équations non linéaires . . . . .	5
<b>2 Exemples d'Équations Non Linéaires</b>	<b>5</b>
2.1 Équations quadratiques . . . . .	5
2.2 Équations cubiques . . . . .	6
2.3 Équations exponentielles . . . . .	6
2.4 Équations logarithmiques . . . . .	6
2.5 Équations trigonométriques . . . . .	6
2.6 Équations rationnelles . . . . .	6
2.7 Équations différentielles non linéaires . . . . .	6
2.8 Équations transcendantes . . . . .	6
2.9 Systèmes d'équations non linéaires . . . . .	7
<b>3 Méthode de Newton</b>	<b>7</b>
3.1 Détermination de la correction $\delta x$ . . . . .	7
3.2 Algorithme de la méthode de Newton . . . . .	8
3.3 Interprétation géométrique . . . . .	9
<b>4 Analyse de convergence de la méthode de Newton</b>	<b>10</b>
4.1 Démonstration de la convergence de la Méthode de Newton . . .	10
4.2 Exemple pratique : Convergence avec la fonction $f(x) = \cos(x) - x$	12
4.2.1 Fonction et sa Dérivée . . . . .	12
4.2.2 Formule de Newton-Raphson . . . . .	12
4.2.3 Convergence . . . . .	12
4.2.4 Visualisation . . . . .	12
4.3 Cas des racines multiples . . . . .	12
4.3.1 Convergence de Newton dans le cas de racines multiples .	13
4.3.2 Stratégies d'amélioration . . . . .	13
4.3.3 Exemple illustratif . . . . .	14
<b>5 Implémentation en Scilab</b>	<b>15</b>
5.1 Présentation du code Scilab . . . . .	15
5.2 Explication du code . . . . .	16
5.3 Application pratique : Résolution de l'équation de Michaelis-Menten par la méthode de Newton-Raphson . . . . .	17
5.3.1 Contexte Biochimique . . . . .	17
5.3.2 Définition du Problème . . . . .	17
5.3.3 Code Scilab et Implémentation . . . . .	17
5.3.4 Résultats des itérations . . . . .	18
5.3.5 Conclusion . . . . .	18

<b>6</b>	<b>Avantages et Inconvénients</b>	<b>18</b>
6.1	Avantages de la méthode de Newton . . . . .	18
6.2	Inconvénients de la méthode de Newton . . . . .	19

# Introduction

La résolution d'équations non linéaires est un pilier fondamental dans de nombreux domaines des sciences et de l'ingénierie. Parmi les différentes méthodes existantes, la méthode de Newton, également connue sous le nom de Newton-Raphson, se distingue par sa rapidité et son efficacité. Aujourd'hui, nous explorerons en détail cette méthode, en commençant par ses bases théoriques, passant par des exemples pratiques, et en discutant de ses applications ainsi que de ses avantages et limites. Cette présentation vous fournira une compréhension approfondie de la méthode de Newton et vous montrera comment elle s'applique à divers problèmes non linéaires.

## 1 Définitions et Concepts Fondamentaux

Pour comprendre la méthode de Newton, il est essentiel de maîtriser certains concepts fondamentaux en analyse mathématique.

### 1.1 Théorème du développement de Taylor

Le théorème de Taylor permet d'approximer une fonction différentiable par un polynôme en utilisant les dérivées de la fonction. Soit  $f$  une fonction  $n$ -fois continûment dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  contenant le point  $a$ . Le théorème de Taylor stipule que pour tout  $x$  dans  $I$ , il existe un point  $\xi$  entre  $a$  et  $x$  tel que :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

Le terme  $R_n(x)$ , appelé reste de Lagrange, représente l'erreur d'approximation lorsqu'on tronque la série de Taylor après le  $n$ -ième terme.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

### 1.2 Multiplicité d'une racine

La multiplicité d'une racine décrit combien de fois une fonction  $f$  s'annule en un point  $r$ . Supposons que  $f$  soit une fonction définie sur un intervalle  $I$  et que  $r$  soit un point de cet intervalle tel que  $f(r) = 0$ . On dit que  $r$  est une racine de multiplicité  $k$  si  $f$  et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $k-1$  s'annulent en  $r$ , mais la  $k$ -ième dérivée de  $f$  en  $r$  n'est pas nulle. Formellement, cela signifie que :

$$f(r) = 0, \quad f'(r) = 0, \quad f''(r) = 0, \quad \dots, \quad f^{(k-1)}(r) = 0, \quad f^{(k)}(r) \neq 0$$

Autrement dit, la fonction  $f$  peut être écrite sous la forme :

$$f(x) = (x - r)^k g(x)$$

où  $g$  est une fonction telle que  $g(r) \neq 0$ .

### 1.3 Équation non linéaire

Une équation non linéaire est une équation de la forme  $f(x) = 0$ , où la fonction  $f$  n'est pas une simple combinaison linéaire de la variable  $x$ . Ces équations apparaissent fréquemment dans divers domaines scientifiques et techniques.

Les équations non linéaires peuvent prendre plusieurs formes :

- $x$  est une variable réelle, et  $f$  une fonction réelle.
- $x$  est une variable complexe, et  $f$  une fonction sur les complexes.
- $x$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , et  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ .

### 1.4 Méthodes de résolution d'équations non linéaires

Pour résoudre les équations non linéaires, plusieurs méthodes classiques sont utilisées. Parmi ces méthodes, on trouve :

- La méthode de dichotomie (ou bisection) : Une méthode simple et robuste qui divise successivement l'intervalle de recherche en deux, en sélectionnant l'intervalle contenant une racine.
- La méthode de la sécante : Utilise une approche itérative qui converge généralement plus rapidement que la dichotomie, mais nécessite deux approximations initiales.
- La méthode du critère d'arrêt : Basée sur un critère spécifique pour déterminer quand arrêter les itérations.
- La méthode de Newton : Une méthode très efficace et rapide pour les fonctions dérivables, utilisant des tangentes pour approcher la racine.
- La méthode de point fixe : Transforme l'équation en une forme  $x = g(x)$  et utilise une itération simple pour trouver la solution.

Ces concepts et méthodes forment la base théorique nécessaire pour comprendre la méthode de Newton et son application à la résolution des équations non linéaires.

## 2 Exemples d'Équations Non Linéaires

Il existe une grande variété d'équations non linéaires, chacune ayant ses propres caractéristiques et défis de résolution. Nous allons examiner plusieurs types courants d'équations non linéaires à travers des exemples concrets.

### 2.1 Équations quadratiques

Les équations quadratiques sont des polynômes de degré 2. Elles prennent la forme générale  $ax^2 + bx + c = 0$ . Par exemple, considérons l'équation  $x^2 - 4x + 4 = 0$ . En utilisant la formule quadratique, nous trouvons que les solutions sont  $x = 2$ .

## 2.2 Équations cubiques

Les équations cubiques sont des polynômes de degré 3. Une équation cubique typique peut être écrite sous la forme  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ . Par exemple, pour l'équation  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ , les racines sont  $x = 1$ ,  $x = 2$ , et  $x = 3$ .

## 2.3 Équations exponentielles

Les équations exponentielles impliquent des variables dans les exposants. Par exemple, l'équation  $2 \cdot e^{3x} - 5 = 0$  peut être résolue en trouvant  $x = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{5}{2}\right)$ .

## 2.4 Équations logarithmiques

Les équations logarithmiques contiennent des variables à l'intérieur des logarithmes. Un exemple est  $\log_3(2x - 1) = 4$ . La solution de cette équation est  $x = 41$ .

## 2.5 Équations trigonométriques

Les équations trigonométriques impliquent des fonctions trigonométriques comme le sinus et le cosinus. Par exemple, pour l'équation  $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ , les solutions sont  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$  où  $k$  est un entier.

## 2.6 Équations rationnelles

Les équations rationnelles sont des fractions de polynômes. Par exemple, pour l'équation  $\frac{x^2-1}{x+2} = 0$ , les solutions sont  $x = 1$  et  $x = -1$ .

## 2.7 Équations différentielles non linéaires

Les équations différentielles non linéaires impliquent des dérivées non linéaires. Un exemple est  $y'' + y^2 = 0$ . Ces équations nécessitent souvent des méthodes analytiques ou numériques pour trouver des solutions.

## 2.8 Équations transcendantes

Les équations transcendantes impliquent des fonctions transcendentes comme les fonctions trigonométriques et exponentielles. Par exemple, pour l'équation  $e^x = x^2$ , il n'existe pas de solution algébrique simple, et des méthodes numériques sont nécessaires pour approximer les solutions.

## 2.9 Systèmes d'équations non linéaires

Les systèmes d'équations non linéaires impliquent plusieurs équations non linéaires simultanées. Par exemple, le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$$

a pour solutions  $(x, y) = (1, 0)$  et  $(x, y) = (-1, 0)$ .

Ces exemples illustrent la diversité des équations non linéaires et les différentes techniques nécessaires pour les résoudre.

## 3 Méthode de Newton

La méthode de Newton, également connue sous le nom de méthode de Newton-Raphson, est une technique puissante et largement utilisée pour trouver les racines des équations non linéaires. Développée par Isaac Newton et Joseph Raphson, cette méthode itérative se base sur l'approximation successive de la solution en utilisant les dérivées de la fonction. Elle est particulièrement efficace pour les fonctions différentiables et converge rapidement sous certaines conditions. Dans cette section, nous allons explorer les principes fondamentaux de la méthode de Newton, son algorithme, ses interprétations géométriques, et analyser sa convergence, en prenant en compte les cas particuliers des racines multiples.

### 3.1 Détermination de la correction $\delta x$

La méthode de Newton est l'une des techniques les plus utilisées pour la résolution des équations non linéaires en raison de son efficacité et de sa rapidité de convergence. Cette méthode se base sur l'utilisation du développement de Taylor pour approximer les solutions des équations non linéaires. Nous allons expliquer comment cette méthode permet de déterminer la correction  $\delta x$  nécessaire pour approcher la solution.

Considérons une équation non linéaire de la forme  $f(x) = 0$ . À partir d'une valeur initiale  $x_0$ , nous cherchons une correction  $\delta x$  telle que  $f(x_0 + \delta x) = 0$ . En utilisant le développement de Taylor de  $f$  autour de  $x = x_0$ , nous obtenons :

$$f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\delta x + \frac{f''(x_0)(\delta x)^2}{2!} + \dots$$

Pour simplifier, nous négligeons les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en  $\delta x$  et nous avons :

$$0 \approx f(x_0) + f'(x_0)\delta x$$

Nous isolons alors la correction recherchée :

$$\delta x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Cette correction  $\delta x$  représente la quantité à ajouter à  $x_0$  pour annuler la fonction  $f(x)$ . Cependant, comme nous avons négligé les termes d'ordre supérieur dans le développement de Taylor, cette correction n'est pas parfaite. Ainsi, nous posons :

$$x_1 = x_0 + \delta x$$

Nous répétons le processus en cherchant à corriger  $x_1$  d'une nouvelle quantité  $\delta x$ . Cette procédure itérative constitue l'algorithme de la méthode de Newton, qui sera détaillé dans les sections suivantes.

### 3.2 Algorithme de la méthode de Newton

L'algorithme de la méthode de Newton est une procédure itérative utilisée pour trouver les racines des équations non linéaires avec une grande précision et rapidité. Cette méthode, également applicable aux systèmes d'équations non linéaires, se base sur l'approximation successive des solutions en utilisant les dérivées de la fonction concernée. Voici les étapes de l'algorithme :

1. **Critère d'arrêt et paramètres initiaux** : Fixez un critère d'arrêt  $\epsilon$  et un nombre maximal d'itérations  $N$ . Choisissez une valeur initiale  $x_0$  pour la solution.
2. **Itération** : Pour chaque itération  $n$ , calculez la nouvelle approximation de la solution  $x_{n+1}$  en utilisant la formule :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3. **Vérification de la convergence** : Après chaque itération, vérifiez si la solution a convergé en utilisant le critère suivant :

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| < \epsilon$$

- Si ce critère est satisfait, la convergence est atteinte. Écrivez la solution  $x_{n+1}$  et arrêtez l'algorithme.
4. **Vérification du nombre d'itérations** : Si le nombre maximal d'itérations  $N$  est atteint avant que la convergence ne soit atteinte, arrêtez l'algorithme et indiquez que la convergence n'a pas été atteinte en  $N$  itérations.
  5. **Répétition** : Si les conditions de convergence ne sont pas satisfaites et que le nombre maximal d'itérations n'est pas atteint, retournez à l'étape 2 et continuez le processus avec la nouvelle approximation  $x_{n+1}$ .

Ce processus itératif constitue l'essence de l'algorithme de la méthode de Newton, permettant d'approcher efficacement les solutions des équations non linéaires.



### 3.3 Interprétation géométrique

La méthode de Newton offre une interprétation géométrique intuitive qui illustre comment elle trouve progressivement les racines d'une équation non linéaire. Cette approche utilise le concept de la tangente à la courbe de la fonction à un point initial estimé, pour converger vers la solution.

Sur la figure ci-dessous, nous avons représenté la fonction  $f(x)$ , la valeur initiale  $x_0$ , et le point  $(x_0, f(x_0))$  qui est sur la courbe. La droite tangente à la courbe en ce point, avec la pente  $f'(x_0)$ , est donnée par l'équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

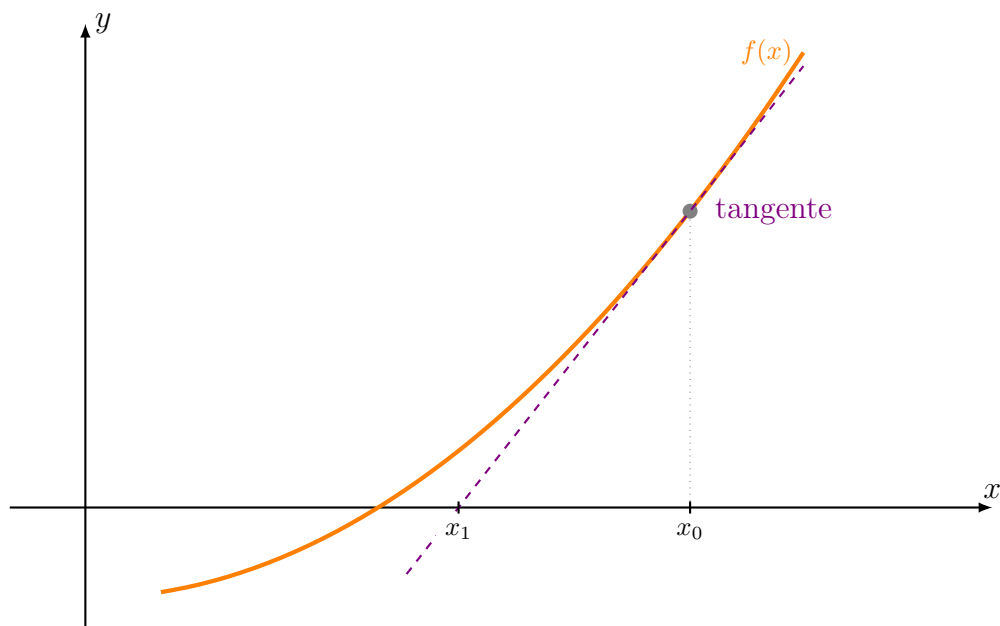


FIGURE 1 – Application de la méthode de Newton-Raphson pour une fonction  $f(x)$  croissante.

Cette droite coupe l'axe des  $x$  en  $y = 0$ , donnant ainsi la nouvelle approximation de la racine  $x_1$  :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Cette procédure est répétée à partir du nouveau point  $(x_1, f(x_1))$  et ainsi de suite, chaque itération rapprochant davantage de la solution réelle.

## 4 Analyse de convergence de la méthode de Newton

### 4.1 Démonstration de la convergence de la Méthode de Newton

#### Hypothèses

- $f$  est une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .
- Nous cherchons à trouver une racine  $r$  telle que  $f(r) = 0$ .
- $f'(r) \neq 0$ , pour garantir la non-nullité de la dérivée première en  $r$ .

#### Analyse de la Convergence

##### 1. Définition de $g(x)$ :

La méthode de Newton peut être vue comme une méthode de point fixe appliquée à la fonction  $g(x)$  définie par :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Ainsi, la méthode de Newton itère selon  $x_{n+1} = g(x_n)$ .

##### 2. Dérivée de $g(x)$ :

Pour analyser la convergence, nous devons étudier la dérivée de  $g(x)$  :

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left( x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right)$$

Appliquons la règle de dérivation :

$$g'(x) = 1 - \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{f'(x)} \right)$$

Utilisons la règle de dérivation du quotient :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{f'(x)} \right) = \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

En substituant, nous obtenons :

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Simplifions cette expression :

$$g'(x) = 1 - \left( 1 - \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

**3. Comportement en  $x = r$  :**

À la racine  $r$ , où  $f(r) = 0$ , nous avons :

$$g'(r) = \frac{f(r)f''(r)}{(f'(r))^2} = 0$$

La condition  $g'(r) = 0$  indique une convergence quadratique de la méthode de Newton au voisinage de la racine  $r$ .

**4. Convergence Quadratique :**

Pour démontrer rigoureusement la convergence quadratique, examinons la dérivée seconde de  $g(x)$  :

$$g''(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right)$$

Appliquons la règle de Leibniz pour la dérivée d'un quotient :

$$g''(x) = \frac{(f'(x)f'''(x) + f(x)f''''(x))(f'(x))^2 - 2f(x)f'(x)(f''(x))^2}{(f'(x))^4}$$

Simplifions cette expression :

$$g''(x) = \frac{f'(x)f'''(x)(f'(x))^2 + f(x)f''''(x)(f'(x))^2 - 2f(x)f'(x)f''(x)^2}{(f'(x))^4}$$

**5. Comportement en  $x = r$  :**

À la racine  $r$ , où  $f(r) = 0$ , nous avons :

$$g''(r) = \frac{f''(r)}{f'(r)}$$

La méthode de Newton a une convergence quadratique si  $f''(r) \neq 0$ .

**6. Vitesse de Convergence :**

En utilisant la relation  $x_{n+1} = g(x_n)$ , nous pouvons approximer l'erreur  $e_n$  à l'étape  $n$  par  $e_n = x_n - r$ . En appliquant la méthode de Newton, nous obtenons :

$$e_{n+1} \approx \frac{1}{2}g''(r)e_n^2$$

Ce qui montre que l'erreur au carré est proportionnelle à l'erreur initiale, ce qui confirme la convergence quadratique.

## Conclusion

La démonstration montre que la méthode de Newton converge quadratiquement vers une racine  $r$  de  $f(x) = 0$ , sous les hypothèses que  $f$  est deux fois dérivable et que  $f'(r) \neq 0$ . La clé de la convergence quadratique réside dans le fait que la dérivée de  $g(x)$  en  $r$  est nulle, ce qui signifie que les erreurs diminuent quadratiquement à chaque itération.

## 4.2 Exemple pratique : Convergence avec la fonction $f(x) = \cos(x) - x$

Considérons la fonction  $f(x) = \cos(x) - x$ , qui a une racine approximativement égale à 0.739085.

### 4.2.1 Fonction et sa Dérivée

La fonction et sa dérivée sont :

$$f(x) = \cos(x) - x$$

$$f'(x) = -\sin(x) - 1$$

### 4.2.2 Formule de Newton-Raphson

La formule itérative de Newton-Raphson pour cette fonction est :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1}$$

### 4.2.3 Convergence

Initialisons  $x_0$  à une valeur raisonnable, disons  $x_0 = 1$ . Voici les premières itérations :

#### 1. Itération 0 :

$$x_0 = 1$$

#### 2. Itération 1 :

$$x_1 = x_0 - \frac{\cos(x_0) - x_0}{-\sin(x_0) - 1} = 1 - \frac{\cos(1) - 1}{-\sin(1) - 1} \approx 0.750363$$

#### 3. Itération 2 :

$$x_2 = x_1 - \frac{\cos(x_1) - x_1}{-\sin(x_1) - 1} \approx 0.739112$$

#### 4. Itération 3 :

$$x_3 = x_2 - \frac{\cos(x_2) - x_2}{-\sin(x_2) - 1} \approx 0.739085$$

On voit que les valeurs convergent rapidement vers la racine  $x \approx 0.739085$ .

### 4.2.4 Visualisation

## 4.3 Cas des racines multiples

Dans l'analyse de la convergence de la méthode de Newton, une attention particulière doit être accordée au cas des racines multiples. Une racine multiple peut affecter significativement la vitesse de convergence de la méthode.

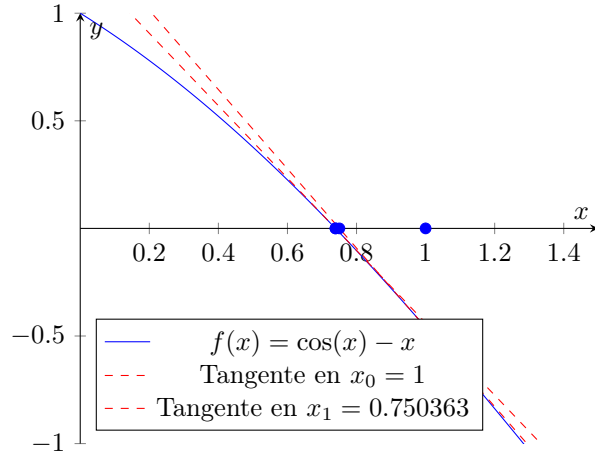


FIGURE 2 – Illustration de la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson pour une fonction continue et dérivable.

#### 4.3.1 Convergence de Newton dans le cas de racines multiples

La convergence de la méthode de Newton est moins rapide lorsqu'elle est appliquée à des fonctions avec des racines multiples. La raison en est que la dérivée de la fonction s'annule à la racine, ce qui affecte le dénominateur dans la formule de Newton. Pour une racine de multiplicité  $m$ , le taux de convergence devient linéaire, avec un facteur de convergence de  $1 - \frac{1}{m}$ .

Pour une racine de multiplicité  $m$ , la mise à jour de Newton peut être réécrite en utilisant le développement de Taylor autour de  $r$  comme suit :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - r)^m h(x), \\ f'(x) &= m(x - r)^{m-1} h(x) + (x - r)^m h'(x), \\ f''(x) &= m(m-1)(x - r)^{m-2} h(x) + 2m(x - r)^{m-1} h'(x) + (x - r)^m h''(x). \end{aligned}$$

En substituant dans la formule de Newton, on obtient :

$$g'(x) = \frac{h(x) [m(m-1)h(x) + 2m(x-r)h'(x)] + (x-r)^2 h''(x)}{m^2 h(x)^2}$$

qui simplifie à :

$$g'(r) = \frac{h(r) [m(m-1)h(r)]}{m^2 h(r)^2} = 1 - \frac{1}{m}.$$

#### 4.3.2 Stratégies d'amélioration

Pour améliorer la convergence dans le cas de racines multiples, une modification de la méthode de Newton peut être employée, où on utilise la fonction :

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Cela transforme une racine multiple en une racine simple pour la fonction modifiée  $u(x)$ , rétablissant ainsi la convergence quadratique de la méthode.

### 4.3.3 Exemple illustratif

Pour la fonction  $f(x) = x^2 \sin(x)$ , nous avons :

$$f(x) = x^2 \sin(x)$$

$$f'(x) = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$$

**Problème de convergence lente** Considérons une initialisation  $x_0 = 0.1$ . Nous allons calculer les premières itérations.

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1}$
1	0.1	0.0099	0.3183	0.0314
2	0.0314	0.00099	0.2546	0.0123
3	0.0123	0.00015	0.2172	0.0057
4	0.0057	0.00003	0.2014	0.0028
5	0.0028	0.00001	0.1911	0.0014
6	0.0014	0.00000	0.1838	0.0007

TABLE 1 – Itérations de la méthode de Newton

On observe que la convergence est très lente, avec un nombre de décimales exactes qui augmente très lentement.

**Stratégie d'amélioration avec  $u(x)$**  La stratégie  $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$  consiste à remplacer la formule de Newton par :

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n)$$

**Calculs numériques avec  $u(x)$**  En reprenant l'initialisation  $x_0 = 0.1$  et en utilisant la stratégie  $u(x)$ , on obtient :

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	$u(x_n)$	$x_{n+1}$
1	0.1	0.0099	0.0314	0.0707
2	0.0707	0.0050	0.0707	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

TABLE 2 – Itérations avec la stratégie  $u(x)$

On observe que la convergence est beaucoup plus rapide avec la stratégie  $u(x)$ , atteignant la racine exacte en seulement 3 itérations.

**Conclusion** La méthode de Newton peut souffrir d'une convergence lente pour les fonctions à racines multiples. La stratégie  $u(x)$  permet d'améliorer significativement la convergence dans ces cas.

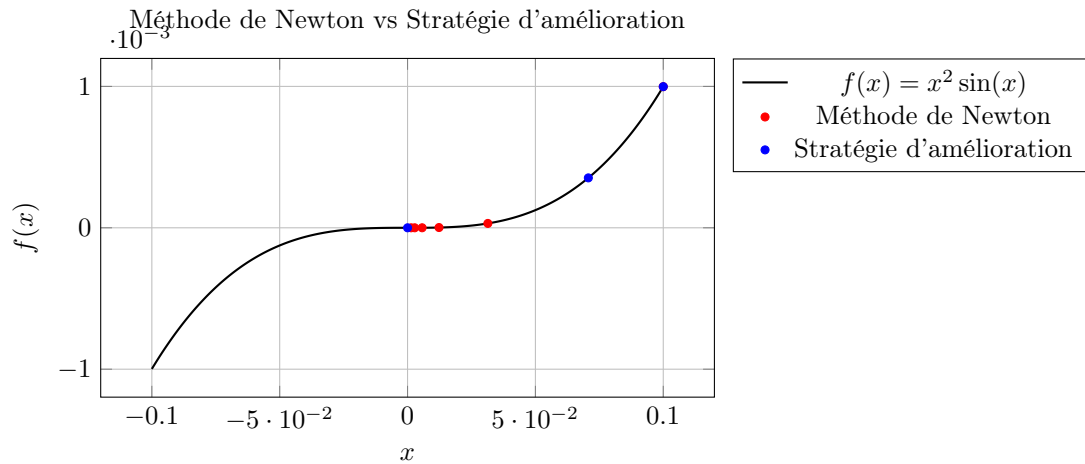


FIGURE 3 – Convergence de la méthode de Newton et de la stratégie  $u(x)$

## 5 Implémentation en Scilab

### 5.1 Présentation du code Scilab

La méthode de Newton-Raphson est une technique puissante pour trouver rapidement les racines des équations non linéaires. Le code Scilab suivant implémente cette méthode, illustrant comment une approche itérative peut être utilisée pour approcher les solutions d'une équation avec une précision spécifiée.

```

1 // Définir la fonction de Newton-Raphson
2 function [root, converged] = newtonRaphson(f, f1, x0, epsilon,
3     maxIter)
4     x = x0; // Initialiser x avec la valeur initiale
5     converged = %f; // Initialiser la variable de convergence
6
7     for n = 1:maxIter
8         x_new = x - (f(x) / f1(x)); // Appliquer la formule de
9         // Newton-Raphson
10        disp("Itération " + string(n) + ": x = " + string(x_new));
11        // Afficher la valeur actuelle
12    de x
13
14        // Vérifier la convergence
15        if abs((x_new - x) / x_new) < epsilon then
16            converged = %t;
17            break; // Convergence atteinte, sortir de la boucle
18        end
19
20        x = x_new; // Mettre à jour x pour la prochaine itération
21    end
22
23    if ~converged then

```

```

21     disp("Convergence non atteinte après " + string(maxIter) +
22         " itérations.");
23     end
24     root = x_new; // Retourner la racine estimée
25 endfunction

```

Ce script Scilab définit une fonction nommée `newtonRaphson`, qui prend cinq paramètres :

- **f** : Une fonction représentant l'équation non linéaire pour laquelle nous cherchons la racine.
- **f1** : La dérivée de **f**, nécessaire pour calculer la correction à chaque itération selon la méthode de Newton.
- **x0** : La valeur initiale, ou estimation de départ, de la racine.
- **epsilon** : La tolérance déterminant le critère de convergence de l'algorithme.
- **maxIter** : Le nombre maximal d'itérations permises pour éviter des boucles infinies en cas de non-convergence.

La fonction effectue des itérations, à chaque étape ajustant la valeur actuelle de  $x$  en utilisant la formule de Newton-Raphson. Elle vérifie également la convergence après chaque itération et arrête le processus si la différence relative entre les estimations successives de  $x$  est inférieure à la tolérance spécifiée. Si la convergence est atteinte, la fonction retourne la valeur estimée de la racine et un indicateur de convergence.

## 5.2 Explication du code

Voici une explication détaillée du code Scilab pour la méthode de Newton-Raphson, segment par segment.

### Segment 1 : Définition de la fonction et initialisation

- **Définir la fonction** : La fonction `newtonRaphson` prend en entrée une fonction **f**, sa dérivée **f1**, une valeur initiale **x0**, une tolérance **epsilon** et un nombre maximal d'itérations **maxIter**.
- **Initialisation** : **x** est initialisé avec la valeur initiale **x0** et **converged** est initialisé à **faux** (%f), indiquant que la convergence n'est pas encore atteinte.

### Segment 2 : Boucle d'itération

- **Boucle** : La boucle **for** commence, itérant de 1 à **maxIter**.
- **Formule de Newton-Raphson** : La nouvelle valeur **x\_new** est calculée en utilisant la formule de Newton-Raphson :  $x_{\text{new}} = x - \frac{f(x)}{f1(x)}$ .
- **Affichage** : La valeur de **x\_new** à chaque itération est affichée.

### Segment 3 : Vérification de la convergence



- **Condition de convergence** : La convergence est vérifiée en calculant le changement relatif  $\frac{|x_{\text{new}} - x|}{x_{\text{new}}}$ . Si ce changement est inférieur à **epsilon**, **converged** est mis à **vrai** (%t) et la boucle est interrompue (**break**).

#### Segment 4 : Mise à jour de x

- **Mise à jour** : Si la convergence n'est pas atteinte, **x** est mis à jour avec la nouvelle valeur **x\_new** pour la prochaine itération.

#### Segment 5 : Vérification finale et retour de la racine

- **Message de non-convergence** : Si la boucle se termine sans atteindre la convergence (**converged** est toujours **faux**), un message est affiché indiquant que la convergence n'a pas été atteinte après le nombre maximal d'itérations.
- **Retour de la racine** : La fonction retourne la dernière valeur de **x\_new** comme estimation de la racine **root**.

## 5.3 Application pratique : Résolution de l'équation de Michaelis-Menten par la méthode de Newton-Raphson

### 5.3.1 Contexte Biochimique

La cinétique d'absorption des nutriments peut être décrite par l'équation de Michaelis-Menten, qui est essentielle pour comprendre la cinétique des réactions enzymatiques. Elle relie la vitesse de réaction enzymatique  $V$  à la concentration du substrat  $[S]$ , avec  $V_{\text{max}}$  représentant la vitesse maximale de la réaction et  $K_m$  la constante de Michaelis.

### 5.3.2 Définition du Problème

Considérons le problème de déterminer la concentration de substrat  $[S]$  nécessaire pour atteindre une vitesse d'absorption de 0.8 mmol/min, avec les paramètres  $V_{\text{max}} = 1$  mmol/min et  $K_m = 0.5$  mmol/L. La formulation de l'équation est la suivante :

$$V = \frac{V_{\text{max}}[S]}{K_m + [S]} \implies 0.8 = \frac{1 \times [S]}{0.5 + [S]}$$

### 5.3.3 Code Scilab et Implémentation

Le code Scilab suivant implémente la méthode de Newton-Raphson pour trouver la concentration nécessaire de substrat :

```

1 // Fonction et dérivée pour l'équation de Michaelis-Menten
2 function y = f(S)
3     y = 0.8 - (1 * S / (0.5 + S)); // 0.8 = Vmax * [S] / (Km + [S])
4 endfunction
5
6 function dy = df(S)
7
```

```

8      dy = -((0.5 + S) - S) / ((0.5 + S)^2); // Dérivée de f([S])
9  endfunction
10
11 // Calcul initial
12 [S_opt, isConverged] = newtonRaphson(f, df, 1, 1e-6, 100); //
    Estimation initiale [S]0 = 1
13
14 if isConverged then
15     disp("La concentration de substrat nécessaire est : " + string(
        S_opt));
16 else
17     disp("La méthode n'a pas convergé.");
18 end

```

### 5.3.4 Résultats des itérations

Les résultats des itérations montrent une convergence rapide vers la solution :

```

1 Itération 1: x = 1.6
2 Itération 2: x = 1.936
3 Itération 3: x = 1.9983616
4 Itération 4: x = 1.9999989
5 Itération 5: x = 2
6 Itération 6: x = 2
7 La concentration de substrat nécessaire est : 2

```

### 5.3.5 Conclusion

Cette application démontre l'efficacité de la méthode de Newton-Raphson pour résoudre des équations non linéaires complexes en biochimie, offrant des outils précis pour des études enzymatiques et des applications industrielles.

## 6 Avantages et Inconvénients

### 6.1 Avantages de la méthode de Newton

Parmi les nombreuses techniques itératives utilisées pour trouver les racines d'une fonction, la méthode de Newton (ou méthode de Newton-Raphson) se distingue par plusieurs avantages notables :

- **Rapidité de Convergence** : L'un des principaux avantages de la méthode de Newton est sa rapidité de convergence, en particulier lorsque la solution initiale est proche de la racine réelle. La méthode a une convergence quadratique, ce qui signifie que le nombre de chiffres corrects double à chaque itération.
- **Simplicité et Facilité d'Implémentation** : La méthode de Newton est relativement simple à comprendre et à implémenter. Elle nécessite seulement le calcul de la dérivée de la fonction, ce qui est souvent plus facile que d'autres méthodes nécessitant plus de calculs complexes ou plus d'informations sur la fonction.

- **Applicabilité Générale** : La méthode de Newton peut être appliquée à une large gamme de problèmes dans divers domaines comme la physique, l'ingénierie, l'économie, etc. Elle est particulièrement utile dans les problèmes d'optimisation et de recherche de zéros de fonctions non linéaires.
- **Flexibilité** : La méthode peut être adaptée pour résoudre des systèmes d'équations non linéaires, ce qui la rend très puissante et polyvalente pour diverses applications scientifiques et mathématiques.

## 6.2 Inconvénients de la méthode de Newton

Malgré ses nombreux avantages, la méthode de Newton présente également certains inconvénients qui peuvent limiter son utilisation dans certaines situations :

- **Dépendance à l'Initialisation** : La méthode de Newton dépend fortement de la valeur initiale choisie. Si cette valeur n'est pas suffisamment proche de la racine réelle, la méthode peut diverger ou converger vers une racine incorrecte.
- **Calcul de la Dérivée** : Un autre inconvénient est la nécessité de calculer la dérivée de la fonction. Pour certaines fonctions complexes, ce calcul peut être difficile ou impossible. De plus, si la dérivée est très petite ou nulle, la méthode peut échouer ou donner des résultats imprécis.
- **Convergence Locale** : La méthode de Newton n'est pas garantie de converger globalement. Elle peut converger localement vers des solutions non désirées ou des points de selle, en particulier dans des fonctions avec plusieurs racines ou des comportements complexes.
- **Sensibilité aux Singularités** : La méthode de Newton peut être sensible aux singularités de la fonction, où la dérivée est nulle ou infinie. Dans ces cas, l'itération peut devenir instable et ne pas converger.
- **Complexité pour Systèmes Non Linéaires** : Pour des systèmes d'équations non linéaires, bien que la méthode de Newton puisse être généralisée, le processus devient plus complexe et nécessite le calcul des dérivées partielles et de la matrice jacobienne, ce qui peut augmenter le coût computationnel et la difficulté d'implémentation.

## Conclusion

En conclusion, la méthode de Newton est un outil extrêmement puissant pour la résolution d'équations non linéaires, offrant une convergence rapide sous certaines conditions. Bien que sa dépendance à une bonne valeur initiale et la nécessité de calculer la dérivée première puissent parfois poser des défis, ses avantages en termes de rapidité et de précision en font une méthode de choix dans de nombreuses applications scientifiques et techniques. Comme nous l'avons vu à travers divers exemples et discussions, bien comprendre cette méthode permet de l'adapter et de l'appliquer efficacement à un large éventail de problèmes complexes.